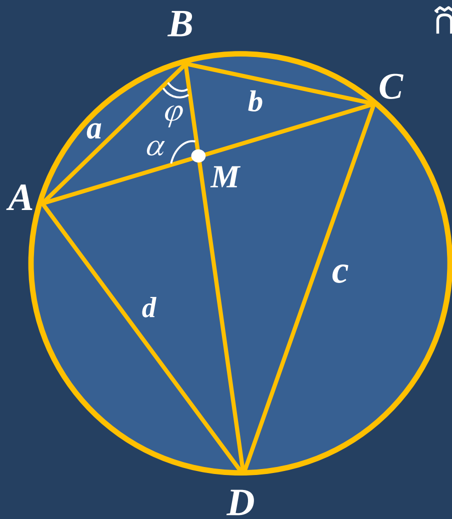
វិទ្យាល័យហ៊ុនសែនអន្គប្រីយ៍

លំហាត់គណិតវិទ្យា

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែ
និង ប្រឡងប្រជែងនានា

កម្រិតសិស្សវិទ្យាល័យ



ភាគ ៣

$$R=\sqrt{\frac{(R_1R_4+R_2R_3)(R_1R_2+R_3R_4)}{R_1R_3+R_2R_4}}$$

រៀបរៀងដោយៈ

អ៊ឹម ឈុនហោ និង អ៊ី គឹមឃឿន

ស្រាវជ្រាវ និង រៀបរៀង

លោក **អ៊ឹម ឈុនហោ** និង លោក **អ៊ុំ គឹមឃឿន**

ត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក **អយ ស៊ីណា** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ហាសអង្គរបុរី

លោក **គិត កញ្ញា** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ពួក(សៀមរាប)

យុវសិស្ស **ស៊ឹម ទិច្ឆិកា** ជ័យលាភីសិស្សពូកែទូទាំងខេត្តតាកែវ

ផ្នែកគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី**១២** ចំណាត់ថ្នាក់លេខ **៣** ឆ្នាំ ២០១៦

យុវសិស្ស **ស៊ិន រិទ្ធី** ជ័យលាភីសិស្សពូកែទូទាំងខេត្តតាកែវ

ផ្នែកគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី**១២** ចំណាត់ថ្នាក់លេខ **៥** ឆ្នាំ ២០១៦

យុវសិស្ស **សឹម សាន់ឌី** ជ័យលាភីសិស្សពូកែទូទាំងខេត្តតាកែវ

ផ្នែកគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី**៩** ចំណាត់ថ្នាក់លេខ **២** ឆ្នាំ ២០១៤

និងចំណាត់ថ្នាក់លេខ **១** ថ្នាក់ទី**១២** ឆ្នាំ ២០១៧

ត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

យុវសិស្ស **ជា សេងលី** រៀននៅវិទ្យាល័យអង្គព្រះស្តេច

យុវសិស្ស **ទ្រី ហ៊ិចហួយ** រៀននៅវិទ្យាល័យអង្គព្រះស្តេច

វាយអត្ថបទ

លោក **អ៊ឹម ឈុនហោ**សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ហាសអង្គប្រីយ៍

លោក **អ៊ុំ គឹមឃឿន** ជ័យលាភីសិស្សពូកែទូទាំង ខេត្តតាកែវ

ផ្នែកគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី**១២** ចំណាត់ថ្នាក់លេខ **២** ឆ្នាំ ២០១៥

រចនាក្រប

លោក **អ៊ឹម ឈុនហោ**សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិ.ហាសអង្គប្រីយ៍

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **លំហាត់គណិតវិទ្យា ភាគ ៣** សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ យើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវ និងរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារ សម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សា ជាពិសេសសម្រាប់សិស្សដែលមានបំណងចង់ប្រឡងសិស្សពូកែផ្នែកគណិតវិទ្យាកម្រិតមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ នាពេលដ៏ខ្លីខាងមុខ ។

សៀវភៅនេះផងដែរ យើងខ្ញុំបានដកស្រង់លំហាត់ចេញពីសៀវភៅបរទេសខ្លះ អ៊ិនធើណិតខ្លះនិងខ្លះទៀតជាលំហាត់ដែលធ្លាប់ចេញប្រលងសិស្សពូកែក្នុងប្រទេស និងក្រៅប្រទេស ។

ទោះបីជាយើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀង ក៏ដូចជាអ្នកត្រួតពិនិត្យខិតខំពិនិត្យដោយយកចិត្តទុកដាក់យ៉ាងណា ក៏ដោយ កង្វះខាត និងកំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមាន ។

អាស្រ័យហេតុនេះយើងខ្ញុំរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់ពីគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីស្ថាបនានិងកែលម្អសៀវភៅនេះឲ្យកាន់តែប្រសើរថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់យើងខ្ញុំសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពល្អនិងសម្រេចបានដូចអ្វីដែលប៉ងប្រាថ្នាទៅថ្ងៃមុខ ៕

តាកែវ ថ្ងៃទី ២១ មិថុនា ២០១៧

អ្នករៀបរៀង

អ៊ឹម ឈុនហោ និង អ៊ី គីមឃឿន

ផ្នែកទី១ រូបមន្តសង្ខេបសំខាន់ៗ

❖ វិសមភាពមួយចំនួន

១_វិសមភាពមធ្យម *(Mean inequalities)*

បើ $a_1, a_2, ..., a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះគេបាន:

$$QM = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \qquad AM = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \qquad HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

វិសមភាព $AM - GM$ គឺ $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$

វិសមភាព $AM - HM$ គឺ $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$

វិសមភាព $AM - QM$ គឺ $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$

សមភាពកើតមានកាលណា $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

២_វិសមភាពកូស៊ីស្វា *(Cauchy-Schwarz inequalities)*

_បើ $a_1, a_2, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ជាចំនួនពិតគេបាន:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \quad \text{ឬ} \quad \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i}^{n} b_i^2\right)}$$

_បើ $a_1, a_2, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ជាចំនួនពិតនិង $b_1, b_2, \cdots, b_n > 0$ នោះ

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_1+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

សមភាពកើតមានកាលណា $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$

៣_វិសមភាព *Chebishev*

បើ $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$ និង $b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n$ គេបាន:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\leq n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

សមភាពកើតមានកាលណា $a_1=a_2=\cdots=a_n$ ឬ $b_1=b_2=\cdots=b_n$

៤_វិសមភាព *Holder*

បើ $a_1,a_2,\cdots,a_n\ ;\ b_1,b_2,\cdots,b_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននិង $p,q>1$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ គេបាន: $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$

សមភាពកើតមានកាលណា $\frac{a_1^p}{b_1^q}=\frac{a_2^p}{b_2^q}=\cdots=\frac{a_n^p}{b_n^q}$

៥_វិសមភាព *Bernoulli*

គេឲ្យ $a>-1$ និង $n\in\mathbb{Q}^+$

បើ $n\geq1$ នោះ $(1+a)^n\geq1+na$ សមភាពកើតមានពេល $a=0$ ឬ $n=1$

បើ $0<n<1$ នោះ $(1+a)^n<1+na$

៦_វិសមភាព *Jensen*

គេមានអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ (a,b) ។

ឧបមាថា $f''(x)<0$ លើចន្លោះ $(a\ ,\ b)$

និង $\forall x_1 , x_2 ,....,x_n \in (a , b) ; \forall n \geq 2$ យើងបាន:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+....+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}\right)$$

ឧបមាថា $f''(x)>0$ លើចន្លោះ (a , b) និង

$\forall x_1 , x_2 ,....,x_n \in (a , b) ; \forall n \geq 2$ យើងបាន:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+....+f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}\right)$$

វិសមភាពទាំងពីរខាងលើក្លាយជាសមភាពនៅពេល $x_1 = x_2 = ... = x_n$

៧_វិសមភាព *Minkowski*

បើ $a_1,a_2,\cdots,a_n$; $b_1,b_2,\cdots,b_n$ និង $c_1,c_2,\cdots,c_n$ ជាចំនួនពិតគេបាន:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}+....+\sqrt{a_n^2+b_n^2+c_n^2}$$
$$\geq \sqrt{(a_1+b_1+c_1)^2+(a_2+b_2+c_2)^2+....+(a_n+b_n+c_n)^2}$$

❖រូបមន្តសំខាន់មួយចំនួន

១_ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ

①បើត្រីកោណ *ABC* មានជ្រុង a,b,c និងកម្ពស់ h_a,h_b,h_b គេបាន:

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

②បើត្រីកោណ *ABC* មានជ្រុង a,b,c និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ កន្លះបរិមាត្រ

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **(រូបមន្តហេរ៉ុង)**

③គេឲ្យត្រីកោណ *ABC* មានជ្រុង a,b,c និង p កន្លះបរិមាត្រ ។

បើ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណនោះ

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$ ។

២_ក្រឡាផ្ទៃចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

បើចតុកោណ $ABCD$ មានជ្រុង a,b,c,d ចារឹកក្នុងរង្វង់ និង p កន្លះបរិមាត្រនោះក្រឡាផ្ទៃចតុកោណកំណត់ដោយ:

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ដែល $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ ។

៣_ក្រឡាផ្ទៃចតុកោណប៉ោង

គេឲ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មានជ្រុង a,b,c,d និងកន្លះបរិមាត្រនោះក្រឡាផ្ទៃរបស់វាកំណត់ដោយ:

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\dfrac{A+C}{2}}$ ។

៤_កន្សោម $\sin\dfrac{A}{2}$, $\cos\dfrac{A}{2}$, $\tan\dfrac{A}{2}$

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c និង p កន្លះបរិមាត្រគេបាន

$\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

$\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$ រូបមន្តលំនាំគ្នាចំពោះមុំ $\dfrac{B}{2}$ និង $\dfrac{C}{2}$ ។

$\tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

៥_រូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ

បើត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c និង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ កន្លះបរិមាត្រ ហើយ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះគេបាន:

$r = (p-a)\tan\dfrac{A}{2} = (p-b)\tan\dfrac{B}{2} = (p-c)\tan\dfrac{C}{2}$

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{b\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$ ។

៦_រូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំមួយនៃត្រីកោណ

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c និង p កន្លះបរិមាត្រ ។
បើ r_a ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A នៃត្រីកោណ ABC គេបាន:

$$r_a=p\tan\frac{A}{2}=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}}=\frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}$$ ។

រូបមន្តលំនាំគ្នាចំពោះ r_b, r_c និង ។

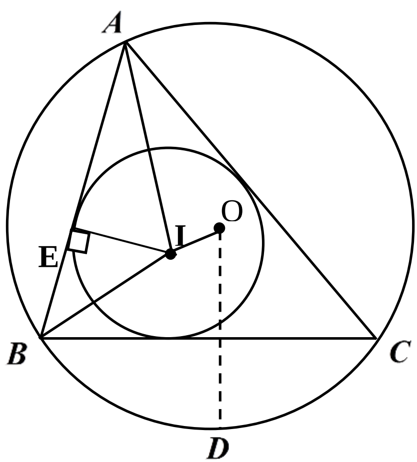
៧_ចម្ងាយពីផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណទៅកំពូលត្រីកោណ

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c ។ បើ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង នៃត្រីកោណនោះគេបាន:

$$IA=\sqrt{\frac{p-a}{p}\cdot bc}\qquad IB=\sqrt{\frac{p-b}{p}\cdot ac}\qquad IC=\sqrt{\frac{p-c}{p}\cdot ab}$$ ។

៨_ចម្ងាយពីផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងទៅផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ(រូបមន្តអឺលែ)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មាន I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ និង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។ បើ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងក្រៅត្រីកោណនោះ គេបាន: $OI=\sqrt{R(R-2r)}$ ។



❖ទ្រឹស្តីបទមួយចំនួន

១_ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

បើ ABC ជាត្រីកោណមានជ្រុង a,b,c ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R

គេបាន: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ ។

២_ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

បើ ABC ជាត្រីកោណមួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$

គេបាន: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

៣_រូបមន្តចំណោលកែង

បើ ABC ជាត្រីកោណមួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$

គេបាន: $a=b\cos C+c\cos B$

$$b=c\cos A+a\cos C$$

$$c=a\cos B+b\cos A$$

៤_ទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន

បើ ABC ជាត្រីកោណមួយមាន m_a, m_b, m_c ជាមេដ្យានត្រូវគ្នានឹង ជ្រុង a,b,c គេបាន: $4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$

$$4m_b^2=2a^2+2c^2-b^2$$

$$4m_c^2=2a^2+2b^2-c^2$$

៥_ទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមានជ្រុង a,b,c និង l_a, l_b, l_c ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង A,B,C រៀងគ្នា នោះគេបាន:

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}=\frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$$

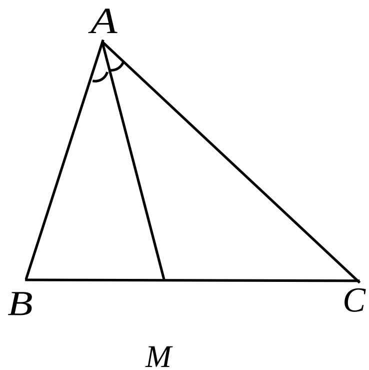
$$l_b=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}=\frac{2}{a+c}\sqrt{pac(p-b)}$$

$$l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}=\frac{2}{a+b}\sqrt{pab(p-c)}$$

៦_ទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ

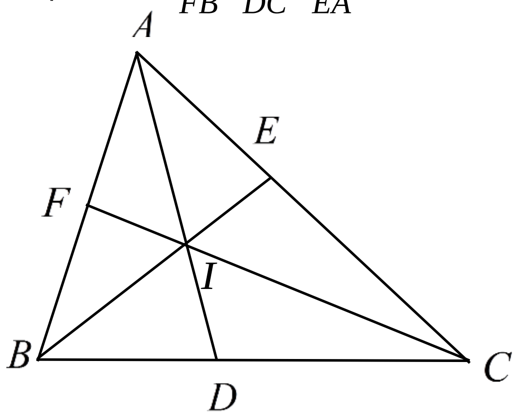
បើ AM ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A ក្នុង ត្រីកោណ ABC គេបាន:

$\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}$ ។



៧_ទ្រឹស្តីបទសេវ៉ា $(Ceva's\ theorem)$

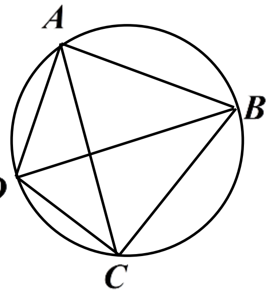
ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមានបន្ទាត់បី AD, BE, CF ប្រសព្វគ្នា ត្រង់ចំណុច I មួយលុះត្រាតែ $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$ ។



៨_ទ្រឹស្តីបទមីនីឡូស *(Menelaus's theorem)*

តាមរូបចំណុចទី៧ ABD ជាត្រីកោណ បើចំណុច F, I, C រត់ត្រង់គ្នា នោះគេបាន: $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DI}{IA}=1$

៩_ទ្រឹស្តីបទតូលេមី $(Ptolemy's\ theorem)$



បើ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់
និង AC, BD ជាអង្កត់ទ្រូង គេបាន:

$AC.BD = AB.CD + BC.AD$ ។

១០_វិសមភាពតូលេមី ($Ptolemy's\ inequality$)

បើ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់
និង AC, BD ជាអង្កត់ទ្រូង គេបាន:

$AB.CD + BC.AD \ge AC.BD$ ។

១១_ទ្រឹស្តីបទឡាយបនិច ($Leibniz's\ theorem$)

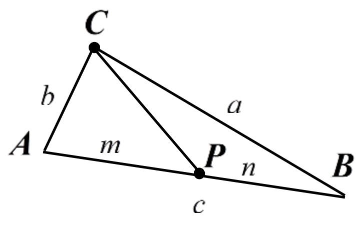
គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមានជ្រុង a,b,c ហើយ O ជាផ្ចិតរង្វង់
ចារឹកក្នុង G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណគេបាន:

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$ ។

១២_ទ្រឹស្តីបទ $Stewart$ ($Stewart's\ theorem$)

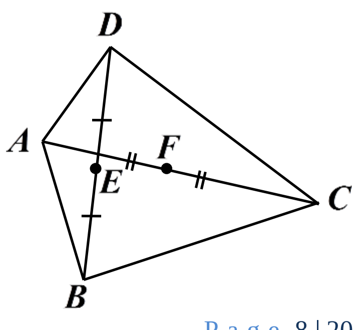
គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមានជ្រុង a,b,c ។
P ជាចំណុចមួយនៅលើ AB
ដែល $PA=m$, $PB=n$
និង $m+n=c$ ។ គេបាន:

$ma^2+nb^2=(m+n)PC^2+mn^2+nm^2$



១៣_ទ្រឹស្តីបទ $Euler$ ($Euler's\ theorem$)

បើ $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹក
ក្នុងរង្វង់និង AC, BD ជាអង្កត់
ទ្រូង បើ E កណ្តាល BD និង F
កណ្តាល AC គេបាន:



$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2$$

❖រូបមន្តអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

១_រូបមន្តផលបូក និងផលដក

$$\bullet\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\bullet\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\bullet\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\bullet\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\bullet\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \bullet\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\bullet\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta} \qquad \bullet\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

២_រូបមន្តមុំឌុប

$$\bullet\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \bullet\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\bullet\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \bullet\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha} \quad , \quad =1-2\sin^2\alpha$$

៣_រូបមន្តកន្លះមុំ

$$\bullet\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \bullet\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\bullet\cos^2\alpha=\frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad \bullet\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

៤_កន្សោម $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ជាអនុគមន៍ $t=\tan\frac{\alpha}{2}$

$$\bullet\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \bullet\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \bullet\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$$

៥_កន្សោមមុំ 3α , 4α និង 5α

$$\bullet \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\bullet \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\bullet \tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} = \tan x\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\bullet \cot 3\alpha = \frac{3\cot\alpha - \cot^3\alpha}{1 - 3\cot^2\alpha} = \cot x\cot\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\bullet \sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha\cos\alpha$$

$$\bullet \cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

$$\bullet \tan 4\alpha = \frac{4\tan\alpha - 3\tan^3\alpha}{1 - 6\tan^2\alpha + \tan^4\alpha}$$

$$\bullet \sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha$$

$$\bullet \cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$$

$$\bullet \tan 5\alpha = \frac{\tan^5\alpha - 10\tan^3\alpha + 5\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha + 5\tan^4\alpha}$$

៦_រូបមន្តបម្លែងពីផលគុណទៅផលបូក

$$\bullet \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\bullet \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\bullet \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\bullet \sin\beta\cos\alpha = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$$

៧_រូបមន្តបម្លែងពីផលបូកទៅផលគុណ

$\bullet \cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\bullet \tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

$\bullet \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$\bullet \tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

$\bullet \sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\bullet \cot p+\cot q=\frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$

$\bullet \sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$\bullet \cot p-\cot q=\frac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$

$\bullet \tan(a+b+c)=\frac{\tan a+\tan b+\tan c-\tan a\tan b\tan c}{1-\tan a\tan b-\tan b\tan c-\tan c\tan a}$

៨_សមីការត្រីកោណមាត្រ

- សមីការ $\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$
- សមីការ $\sin u(x)=\sin v(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u(x)=v(x)+2k\pi \\ u(x)=\pi-v(x)+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$
- សមីការ $\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$
- សមីការ $\cos u(x)=\cos v(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u(x)=v(x)+2k\pi \\ u(x)=-v(x)+2k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$
- សមីការ $\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$
- សមីការ $\tan u(x)=\tan v(x) \Leftrightarrow u(x)=v(x)+k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$
- សមីការ $\cot x=\cot\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$
- សមីការ $\cot u(x)=\cot v(x) \Leftrightarrow u(x)=v(x)+k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$

❖ សមភាពអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រមួយចំនួនៈ

បើ α,β,γ ជាមុំក្នុងត្រីកោណមួយគេបានសមភាពដូចខាងក្រោមៈ

1/ $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

$2/\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

$3/\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$4/\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$5/\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=1$

$6/\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1$

$7/\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

$8/\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$

❖ វិសមភាពអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រមួយចំនួនៈ

$1/\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$2/\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$3/\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$

$4/\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{3}{2}$

$5/\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}$

$6/\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le\frac{1}{8}$

$7/\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$8/\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$9/\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\frac{9}{4}$

$10/\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\ge\frac{3}{4}$

$11/\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\ge\frac{3}{4}$

$12/\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}\le\frac{9}{4}$

$13/\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\ge\sqrt{3}$

$14/\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\ge 3\sqrt{3}$

ផ្នែកទី២ ប្រធានលំហាត់

លំហាត់ទី១

គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{45}$ ដែលមានតួទី 1 គឺ $\alpha_1=1^o$ និង ផលសងរួម $d=4^o$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{i=1}^{45}\tan\alpha_i=45$ ។

លំហាត់ទី២

គេឲ្យ $k\in\mathbb{N}$ និង $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ ។ ស្រាយថា: $a_1^{-k}+a_2^{-k}+\cdots+a_n^{-k}\ge n^{k+1}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំណត់ដោយ $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ ។ កំណត់យក ΔA ជាស្វ៊ីតដែល $\Delta A=\{a_2-a_1,a_3-a_2,a_4-a_3,\ldots\}$ សន្មតថាគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $\Delta(\Delta A)$ គឺ 1 ដែល $a_{19}=a_{92}=0$ ។ រក a_1

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យស្វ៊ីត *Fibonacci* មួយកំណត់ដោយ: $f_1=f_2=1$ និង $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n\ (n\in\mathbb{N})$ ។ ស្រាយថា: $f_{2n}=\dfrac{f_{2n+2}^3+f_{2n-2}^3}{9}-2f_{2n}^3$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 2$ ។

លំហាត់ទី៥

ដោះស្រាយសមីការ: $2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1$

លំហាត់ទី៦

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម: $A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យ $\frac{a}{bc-a^2}+\frac{b}{ac-b^2}+\frac{c}{ab-c^2}=0$ ។ ស្រាយថា:

$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ac-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យ a,b ជាការេនៃពីរចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានតគ្នា។

ស្រាយថា: $ab-a-b+1 \vdots 192$ ។

លំហាត់ទី៩

រកចំនួន $\overline{xyz}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $\overline{xyz}+\overline{xzy}=\overline{zzz}$ ។

លំហាត់ទី១០

ស្រាយថា: $7^{9^{9^{9^9}}}-7^{9^9} \vdots 100$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ: $u_0=u_1=u_2=1$ និង

$\det\begin{pmatrix} u_{n+3} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}=n!\,, n\geq 0$ ។

ស្រាយថាគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត (u_n) ជាចំនួន គត់ចំពោះគ្រប់ n ។

លំហាត់ទី១២

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (T_n) ដែលកំណត់ដោយ: $T_1, T_n=T_{\sqrt{n}}+c\log_2 n$

ហើយ c ជាចំនួនថេរ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយស្រាយថា:

$\sin^3 A\sin(B-C)+\sin^3 B\sin(C-A)+\sin^3 C\sin(A-B)=0$

លំហាត់ទី១៤

គេឲ្យ $x,y,z\geq 0$ ដែល $x+y+z=6$ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម:

$S=\frac{2015}{7+3\ln(x+1)-y}+\frac{2015}{7+3\ln(y+1)-z}+\frac{2015}{7+3\ln(z+1)-z}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយស្រាយថា:

$$\frac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{a\cos A+b\cos B+c\cos C}=\cot A+\cot B+\cot C$$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយស្រាយថា:

$$(a-b)\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+(b-c)\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+(c-a)\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=0$$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ស្រាយថា:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\ge 3\sqrt{2}$$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យ $\sin x+\sin y=a$ និង $\cos x+\cos y=b$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $\tan\frac{x}{2}$ និង $\tan\frac{y}{2}$ ជាអនុគមន៍នៃ a,b ។

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យអនុគមន៍ដែលកំណត់ដោយ $g(t)=t^p-t$ ស្រាយថា $g(x+a)\equiv g(x)\pmod p$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a ។

លំហាត់ទី២០

គណនាផលបូក:

$$S=2.1^2C_{2015}^1+3.2^2C_{2015}^2+4.3^2C_{2015}^3+\cdots+2016.2015^2C_{2015}^{2015}$$ ។

លំហាត់ទី២១

រកតម្លៃធំបំផុតនៃកន្សោម: $A_{2015}=\sum_{k=0}^{2015}(k-2015x)^2x^kC_{2015}^k(1-x)^{2015-k}$

បើ $x\in[0,1]$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យ $S_n = a^n + b^n + c^n$ ដែល $n \in \mathbb{Z}$ ។ ស្រាយថា:

$$6S_{n+3} = 6S_1S_{n+2} - 3(S_1^2 - S_2)S_{n+1} + (S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3)S_n$$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $2a^2 + 3b^2 + 7c^2 = 1$ រកតម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(a,b,c) = 2013a - 2014b + 2015c$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n^2$ និង $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq n^3 + 1$ ។ ស្រាយថា: $n - 1 \leq a_k \leq n + 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k \leq n$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យ x_1, x_2, x_3 ជាឫសនៃសមីការ $x^3 + ax^2 + x + b = 0, (b \neq 0)$ ។

ស្រាយថា:

$$\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right) + \left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right)\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) = 4$$

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ។ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$$

លំហាត់ទី២៧

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព: $\tan\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1 = F_2 = 1$ និង

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, n\geq 2$ ស្រាយថា: $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

លំហាត់ទី២៩

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1=F_2=1$ និង

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, n\geq 2$ ស្រាយថា: $F_{n-1}F_{n+1}=F_n^2+(-1)^n$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1=F_2=1$ និង

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, n\geq 2$ ស្រាយថា: $F_{m+n+1}=F_{n+1}F_{m+1}+F_mF_n \ , m\in\mathbb{N}$

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1=F_2=1$ និង

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, n\geq 2$ ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ n,k ជាចំនួនគត់

ធម្មជាតិនោះប្រភាគ $\frac{kF_{n+2}+F_n}{kF_{n+3}+F_{n+1}}$ សម្រួលមិនបាន ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1=F_2=1$ និង

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, n\geq 2$ ស្រាយថា: $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1=F_2=1$ និង

$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n\geq 3$ ។ តាង $Q=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ ស្រាយថា:

$Q^n=\begin{pmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{pmatrix}, n\geq 2$ រួចទាញថា: $F_{3n}=F_{n+1}^3+F_n^3-F_{n-1}^3 \ , n\geq 1$

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1=F_2=1$ និង

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, n\geq 2$ ស្រាយថាបញ្ជាក់ថា: $F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1 = F_2 = 1$ និង

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 2$ ស្រាយថា: $F_{2n}F_{n-1} - F_{2n-1}F_n = (-1)^n F_n, n \geq 1$

រួចគណនា: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឲ្យ $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

$f(n+2) = f(n+1) - f(n)$; $f(1) = 1$, $f(2) = 0$

បង្ហាញថា: $|f(n)| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ។

លំហាត់ទី៣៧

អនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$f\left(x^2 + x + 3\right) + 2f\left(x^2 - 3x + 5\right) = 6x^2 - 10x + 7$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ។

គណនា $f(2015)$ ។

លំហាត់ទី៣៨

កំណត់អនុគមន៍ f ដែលកំណត់លើសំណុំចំនួនពិតវិជ្ជមាន ឬ សូន្យ $\mathbb{R}_+$ ទៅ $\mathbb{R}_+$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$(i). f(2) = 0$

$(ii). f(x) \neq 0$; $0 \leq x < 2$

$(iii). f(x.f(y)).f(y) = f(x+y)$ ចំពោះ $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$

លំហាត់ទី៣៩

ត្រីកោណ ABC មានជ្រុង $BC = x$, $AC = y$ និង $AB = z$ ។

រកតម្លៃតូចបំផុត $S = \sqrt{\frac{x}{2y+2z-x}} + \sqrt{\frac{y}{2z+2x-y}} + \sqrt{\frac{z}{2x+2y-z}}$

លំហាត់ទី៤០

ស្រាយថា: $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(5-3\sqrt[3]{7}\right)}$

លំហាត់ទី៤១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ $R=1$ និងមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ហើយ មុំ A , B , C បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀប

រួមស្មើ 2 ។ គណនា $a^2+b^2+c^2$ ។

លំហាត់ទី៤២

A និង B ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល:

$\frac{A}{B}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1342}+\frac{1}{1343}$ ។

បង្ហាញថា A ចែកដាច់នឹង 2015 ។

លំហាត់ទី៤៣

កំណត់ចំនួនថេរ k ដែលពហុធា:

$P(x,y,z)=x^5+y^5+z^5+k\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$ មានជាកត្តា $x+y+z$ ។ ស្រាយថាចំពោះតម្លៃ k ដែលរកឃើញនេះ

ពហុធា $P(x,y,z)$ មានជាកត្តា $(x+y+z)^2$ ។

លំហាត់ទី៤៤

ត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ចរឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត I និងកាំ r x,y,z ជាប្រវែងពីផ្ចិតទៅកំពូល A,B,C រៀងគ្នា ។

បង្ហាញថា: $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{\sqrt{2}}{yz}$ ។

លំហាត់ទី៤៥

ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង $AB=a,BC=b,CD=c$ និង $DA=d$ ចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត I ។

បង្ហាញថាក្រឡាផ្ទៃចតុកោណប៉ោង $S=\sqrt{abcd}.\sin\frac{A+C}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=b$ ។
r និង R ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងក្រៅត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ។ បង្ហាញថា:

$a)\ IA.IB.IC=4Rr^2$

$b)\ aIA^2+bIB^2+bIC^2=abc$

លំហាត់ទី៤៧

ចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O និងកាំ R ។ អង្កត់ទ្រូង AC និង BD កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច M ។ R_1,R_2,R_3,R_4 ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ MAB,MBC,MCD និង MDA រៀងគ្នា ។

ស្រាយថា: $R=\sqrt{\frac{(R_1R_4+R_2R_3)(R_1R_2+R_3R_4)}{R_1R_3+R_2R_4}}$

លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យ α,β,φ ជាមុំបីវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $\alpha+\beta+\varphi=\frac{\pi}{2}$ ។

រកតម្លៃធំបំផុតនៃ:

$P=\sqrt{1+\tan\alpha\tan\beta}+\sqrt{1+\tan\beta\tan\varphi}+\sqrt{1+\tan\varphi\tan\alpha}$

លំហាត់ទី៤៩

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a,AC=b,AB=c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $bc\sqrt{3}=R[2(b+c)-a]$ ។ R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

លំហាត់ទី៥០

កំណាត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$f(xy)+f(x-y)+f(x+y+1)=xy+2x+1\ ;\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

លំហាត់ទី៥១

គេមានអនុគមន៍ពីរ $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}+\sqrt[3]{\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}$

$$g(x)=x^4-4x^2+2$$

បង្ហាញថា $f[g(x)]=g[f(x)]$ ចំពោះគ្រប់ $\forall x\geq 2$ ។

លំហាត់ទី៥២

កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$f(x).f(y)-f(x+y)=\sin x.\sin y$ ។

លំហាត់ទី៥៣

ស្រាយថាគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$\forall x,y\in\mathbb{R}: f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y)$ លុះត្រាតែ

$\forall x,y\in\mathbb{R}: f(x+y)=f(x)+f(y)$

លំហាត់ទី៥៤

រកឫសជាចំនួនគត់របស់សមីការ:

$1/\ x^2+2015x+2016y^2+y=xy+2016xy^2+2017$

$2/\ x^4+2014x^3+1014049x^2+x-\sqrt{2x+2015}+1008=0$

លំហាត់ទី៥៥

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

$1/\log_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2+\log_{2-\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=6$

$2/\log_{2016}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=\log_{2015}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$

លំហាត់ទី៥៦

ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេបាន:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$$

លំហាត់ទី៥៧

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន (x_n) និង (y_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់

លក្ខខណ្ឌ $x_1=y_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ និង $\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2-1} \ ; \ \forall n=1,2,\ldots \\ y_{n+1}=\dfrac{y_n}{1-4x_{n+1}^2} \ ; \ \forall n=1,2,\ldots \end{cases}$

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $x_n^2+y_n^2=1 \ , \ \forall n=1,2,\ldots$

ខ) គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យ $p\,,q\,,r$ ជាចំនួនសនិទានមិនសូន្យដែល

$\sqrt[3]{pq^2}+\sqrt[3]{pr^2}+\sqrt[3]{rp^2}$ ជាចំនួនសនិទានមិនសូន្យ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{pq^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{qr^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$ ក៏ជាចំនួនសនិទានដែរ

លំហាត់ទី៥៩

គេឲ្យ $k\,,l$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល k ចែកដាច់ l ។

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m នោះ $1+(k+m)l$ និង

$1+ml$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

លំហាត់ទី៦០

គេឲ្យ z_1,z_2,z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនមែនជាចំនួនពិតទាំងអស់ដែល

$|z_1|=|z_2|=|z_3|$ និង $2\left(z_1+z_2+z_3\right)-3z_1z_2z_3\in\mathbb{R}$ ។

ស្រាយថា: $\max\left(\arg z_1\ ,\ \arg z_2\ ,\ \arg z_3\right)\ge\dfrac{\pi}{6}$ ។

លំហាត់ទី៦១

ចំពោះចំនួនពិត $a\,,b\,,c$ កំណត់យក $S_n=a^n+b^n+c^n$ ចំពោះគ្រប់

$n \geq 0$ បើ $S_1 = 2$, $S_2 = 6$ និង $S_3 = 14$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|S_n^2 - S_{n-1}.S_{n+1}\right| = 8$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

លំហាត់ទី៦២

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ជ្រុងនៃត្រីកោណ

6.10^{n+2} , $1125.10^{2n+1} - 8$, $1125.10^{2n+1} + 8$ ជាត្រីកោណកែង ។

លំហាត់ទី៦៣

ដាក់ជាផលគុណកត្តាចំពោះកន្សោមខាងក្រោម:

ក/ $(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$

ខ/ $(x+y)^7 - x^7 - y^7$

លំហាត់ទី៦៤

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនគត់វិជ្ជមាន និងកំណត់ដោយ:

$x = \gcd(b,c)$; $y = \gcd(a,c)$; $z = \gcd(a,b)$ ។

ស្រាយថា: $\gcd(a,b,c) = g(x,y,z)$ ។

លំហាត់ទី៦៥

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់ដែល $a+b+c+d=0$ ស្រាយថា:

ផលគុណ $(bc-ad)(ac-bd)(ab-cd)$ ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី៦៦

គេឲ្យ a,b,c,d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} + \frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d} + \frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a} + \frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} \geq a+b+c+d$$

លំហាត់ទី៦៧

គេឲ្យតួទី p និង q នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយគឺ q និង p រៀងគ្នា ។

គណនាតួទី $p+q$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ នៅលើជ្រុង AB, AC និង BC យកប ណ្តាចំណុចរៀងគ្នា C_1 , B_1 និង A_1 ដែលបណ្តាអង្កត់ AA_1 , BB_1 , CC_1 កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច M មួយ ។
ចំណុច A_2 , B_2 និង C_2 ឆ្លុះរៀងគ្នាជាមួយបណ្តាចំណុច A , B និង C ធៀបនឹងចំណុច A_1 , B_1 និង C_1 ។
ចូរស្រាយថា $S_{A_2B_2C_2} = 4S_{A_1B_1C_1} + 3S_{ABC}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - x - 2015\times 2016$ ។ ស្រាយថា $f\left(2014\sin 2013x\right)$ និង $f\left(2013\cos 2014x\right)$ ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

លំហាត់ទី៧០

ABC ជាត្រីកោណមួយមាន BD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ B ។ រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ BDC កាត់ជ្រុង AB ត្រង់ E ហើយរង្វង់ចារឹកក្រៅ ត្រីកោណ ABD កាត់ជ្រុង BC ត្រង់ចំណុច F ។ បង្ហាញថា $AE = CF$ ។ *សិស្សពូកែខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១៥*

លំហាត់ទី៧១

$ABCD$ ជាចតុកោណកែងមួយ។ E ជាចំណុចមួយនៅលើ AB (ចន្លោះ A និង B) និង F ជាចំណុចមួយនៅលើ AD (ចន្លោះ A និង D) ។ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ EBC គឺ $16m^2$ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ EAF គឺ $12m^2$ និង ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ FDC គឺ $30m^2$ ។
រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោ EFC ។ *សិស្សពូកែខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១៥*

លំហាត់ទី៧២

គេឲ្យ $A=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$ ។ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម A ដោយដឹងថា $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=2015$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គេឲ្យអនុគមន៍ $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt[2015]{1-x^{2015}}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង $f_n(x)=f_1\left(f_{n-1}(x)\right)$, $n\geq 2$ ។ គណនា $f_{2016}(2015)$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+2015$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិត ។ បើ $f(\log\log_3 10)=1$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $f(\log\log 3)$

លំហាត់ទី៧៥

ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$1/\ \frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=0$$

$$2/\ (a-b)\cot\frac{c}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}=0$$

$$3/\ \frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=0$$

$$4/\ bc\cot\frac{A}{2}+ac\cot\frac{B}{2}+ab\cot\frac{C}{2}=4Rp^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{p}\right)$$

$$5/\ \frac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}+\frac{b^2\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}+\frac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}}=ab+bc+ac$$

$$6/\ \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$$

លំហាត់ទី៧៦

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ហើយ S និង T ជា ចំនួនកុំផ្លិចកំណត់ដោយ: $S=z+z^2+z^4$ និង $T=z^3+z^5+z^6$ ។

១-បង្ហាញថា S មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន ហើយ S និង T ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា ។

២-គណនា $S+T$, $S.T$ រួចរក S និង T ។

៣-បង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

និងគណនា $\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}$ ។ *ខេត្តតាកែវឆ្នាំ ២០១៦*

លំហាត់ទី៧៧

គណនាផលបូក *(សិស្សពូកែខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១៦)*

$$S=\frac{C(n,0)}{C(2n-1,0)}+\frac{C(n,1)}{C(2n-1,1)}+\frac{C(n,2)}{C(2n-1,2)}+\cdots+\frac{C(n,n)}{C(2n-1,n)}$$

លំហាត់ទី៧៨

គេឲ្យចំណុច I មួយស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ គេដឹងថា AI , BI និង CI កាត់ជ្រុងឈម BC , CA និង AB ត្រង់ចំណុច D , E និង F រៀងគ្នា ។

ក. គណនា $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}$

ខ. បង្ហាញថា $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AI}{ID}$ *(សិស្សពូកែខេត្តតាកែវ ២០១៦)*

លំហាត់ទី៧៩

គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ដែលមាន $f(1)=1$ និង

$f(1)+2f(2)+3f(3)++nf(n)=n(n+1)f(n)\quad \forall n\in\mathbb{N}\,,\, n\geq 2$ ។

គណនា $f(1008)$

លំហាត់ទី៨0

បើ $\frac{\tan x}{2}=\frac{\tan y}{3}=\frac{\tan z}{5}$ និង $x+y+z=\pi$ ។

ចូរគណនា $\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z$ ។

លំហាត់ទី៨១

n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $1\le n\le 100$ ។

រកចំនួនឫសនៃសមីការ $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}$ ។

លំហាត់ទី៨២

សមីការ $x^5-3x^4-1=0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចប្រាំ r_1,r_2,r_3,r_4,r_5

គណនាតម្លៃនៃ $\frac{1}{r_1^9}+\frac{1}{r_2^9}+\frac{1}{r_3^9}+\frac{1}{r_4^9}+\frac{1}{r_5^9}$ ។

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យ $iz^2=1+\frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{5}{z^4}+\ldots$ និង $z=n\pm\sqrt{i^{-1}}$ ។

គណនាតម្លៃនៃ n ។

លំហាត់ទី៨៤

បង្ហាញថា: $1<\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\ldots+\frac{1}{3001}<\frac{4}{3}$

លំហាត់ទី៨៥

បើ $\left(\frac{y}{z}\right)^a\left(\frac{z}{x}\right)^b\left(\frac{x}{y}\right)^c=1$ និង $A=\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{b-c}}$, $B=\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{c-a}}$, $C=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{a-b}}$

បង្ហាញថា: $A=B=C$

លំហាត់ទី៨៦

គេមាន: $17!=\overline{3556xy428096000}$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $x+y$ ។

លំហាត់ទី៨៧

α និង β ជាឫសពីរផ្សេងគ្នានៃសមីការ $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ ។

បង្ហាញថា: $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យ $\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha}$ ជាឫសនៃសមីការ $(x+1)^n+x^n+1=0$ ដែល α , β ជាឫសនៃសមីការ $x^2+px+q=0$ ។ បើ α , β ក៏ជាឫសនៃសមីការ $x^{2n}+p^nx^n+q^n=0$ នោះបង្ហាញថា: n ជាចំនួនគត់គូ ដែល $p\neq 0$ ។

លំហាត់ទី៨៩

បើផលគុណឫសពីរនៃសមីការ $x^4-18x^3+kx^2+174x-2015=0$ ក្នុងចំណោមឫសបួនស្មើ -31 ។ គណនាតម្លៃ k ។

លំហាត់ទី៩០

រកចំនួនគត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $ax^{17}+bx^{16}+1$ ចែកដាច់នឹង x^2-x-1

លំហាត់ទី៩១

គេមាន x_1 និង y_1 ជាចំនួនពិត ។ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច ដែលមាន $|z_1|=|z_2|=4$ ។

បង្ហាញថា: $|x_1z_1-y_1z_2|^2+|y_1z_1+x_1z_2|^2=32\left(x_1^2+y_1^2\right)$

លំហាត់ទី៩២

បើ z_1,z_2,z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$

និង $\dfrac{z_1^2}{z_2z_3}+\dfrac{z_2^2}{z_1z_3}+\dfrac{z_3^2}{z_1z_2}=-1$ ។ គណនា $|z_1+z_2+z_3|$ ។

លំហាត់ទី៩៣

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមាន $\angle A=2\angle B$ ។ a,b,c ជាជ្រុងឈមនៃមុំ A,B,C រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $a^2=b(b+c)$ ។

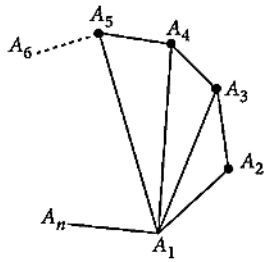
លំហាត់ទី៩៤

គេឲ្យ $\sin x+\sin y=a$ និង $\cos x+\cos y=b$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\tan\frac{x}{2}$ និង $\tan\frac{y}{2}$ ជាឫសនៃសមីការ

$\left(a^2+b^2+2b\right)t^2-4at+\left(a^2+b^2-2b\right)=0$ ។

លំហាត់ទី៩៥



ឧបមាថា $A_1A_2A_3...A_n$ ពហុកោណនិយ័ត

មាន n ជ្រុងដែល $\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}$ ។

រកចំនួនជ្រុងនៃពហុកោណនោះ ។

លំហាត់ទី៩៦

បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ n ណាដែលធ្វើឲ្យកន្សោម

$n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$ ជាការេប្រាកដបានទេ ។

លំហាត់ទី៩៧

f ជាអនុគមន៍ពហុធាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$2+f(x).f(y)=f(x)+f(y)+f(xy)$; $\forall x,y\in\mathbb{R}$ និង $f(2)=5$ ។

គណនា $f\left(f(1)\right)$ ។

លំហាត់ទី៩៨

f ជាអនុគមន៍ពហុធាផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$f\left(\tan x\right)+f\left(\cot x\right)=f\left(\tan x\right).f\left(\cot x\right)$, $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\{0\}$ និង

$f(2)=9$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $\frac{f'(2)}{6}$ ។

លំហាត់ទី៩៩

ឧបមាថា $a,b,c\in\mathbb{R}$ និង $b\neq0$ ។ បើ α,β ជាឫសនៃសមីការ

$x^2+ax+b=0$ និង γ,δ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+c=0$ ។

ចូរសរសេរសមីការដែលមានឫស $\dfrac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$ និង 2 ។

លំហាត់ទី១០០

A,B,C,D ជាបួនចំណុចនៅលើរង្វង់មួយដែលមានផ្ចិត O កាំ R ។ អង្កត់ AC កែងនឹងអង្កត់ BD ត្រង់ E ។

បង្ហាញថា $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=4R^2$ ។

លំហាត់ទី១០១

រកគ្រប់អនុគមន៍ f ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$\left[f(x)\right]^2.f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=x^3$, $x\neq -1$ និង $f(x)\neq 0$ ។

លំហាត់ទី១០២

សន្មតថា $S=\dfrac{1}{n^4}\displaystyle\prod_{r=1}^{2n}\left(n^2+r^2\right)$ ។

បង្ហាញថា: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log S=\int_0^2\log\left(x^2-4x+5\right)dx$ ។

លំហាត់ទី១០៣

គេឲ្យ $p=\left(1+\cos\dfrac{\pi}{10}\right)\left(1+\cos\dfrac{3\pi}{10}\right)\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{10}\right)\left(1+\cos\dfrac{9\pi}{10}\right)$

$q=\left(1+\cos\dfrac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{9\pi}{8}\right)$

រកទំនាក់ទំនងរវាង p និង q ។

លំហាត់ទី១០៤

បង្ហាញថា $\tan\dfrac{\pi}{16}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}+1\right)$

លំហាត់ទី១០៥

បើ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង $a+b+c=6$ ។

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$

លំហាត់ទី១០៦

បើ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}$

លំហាត់ទី១០៧ USAJMO 2012

គេមាន a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា: $\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a}\geq\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

លំហាត់ទី១០៨

បើ $a_1,a_2,a_3,...,a_{4001}$ ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយមាន

$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{4000}a_{4001}}=10$ និង $a_1+a_{4001}=50$ ។

គណនា $|a_1-a_{4001}|$ ។

លំហាត់ទី១០៩

ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុងទាំងបី a,b,c បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន a ជាតួមធ្យម ។

បង្ហាញថា $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី១១០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ និង D,E,F ជាចំណុចនៅលើជ្រុង BC,CA,AB រៀងគ្នា ។ បើ $AFDE$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

បង្ហាញថា $\frac{4S_{DEF}}{S_{ABC}}\leq\left(\frac{EF}{AD}\right)^2$ ។

លំហាត់ទី១១១

រង្វង់ពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំណុច A និង B ។ P ជាចំណុចមួយនៅលើធ្នូ AB នៃរង្វង់មួយ ។ បន្ទាត់ PA និង PB កាត់រង្វង់មួយទៀតត្រង់ចំណុច R និង S (ដូចរូប) ។ បើ P' ជាចំណុចមួយនៅលើធ្នូ AB នៃរង្វង់ទី១ ហើយ $P'A$ និង $P'B$ កាត់រង្វង់មួយទៀតត្រង់ R' និង S' ។ បង្ហាញថាប្រវែងអង្កត់ធ្នូ $RS = R'S'$ ។

លំហាត់ទី១១២

កំណត់ក្រឡាផ្ទៃ S នៃត្រីកោណ ABC មួយដែលមានជ្រុង a , b , c និង ជា p កន្លះបរិមាត្រ បើគេដឹងថា

$$(p-b)(p-c)=\frac{a}{h}\,,\,(p-a)(p-c)=\frac{b}{k}\,,\,(p-a)(p-b)=\frac{c}{l}$$

ដែល h , k , l ជាចំនួនថេរ ។

លំហាត់ទី១១៣

បើ $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2015}$ ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែល $\sum_{r=1}^{2014}\frac{1}{a_r a_{r+1}}=\frac{2014}{2013}$

និង $a_{101}+a_{305}+a_{509}+a_{1507}+a_{1711}+a_{1915}=6042$ ។

សរសេរសមីការដែលមានឫស a_1 និង a_{2015} ។

លំហាត់ទី១១៤

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) មួយមាន $a_0 = a_1 = 1$ និង

$\sqrt{a_n.a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}.a_{n-2}}=2a_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

លំហាត់ទី១១៥

គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម:

$$A=\frac{1}{4029}+\frac{2\times 2014}{2014^2+2015^2}+\frac{4\times 2014^3}{2014^4+2015^4}-\frac{8\times 2014^7}{2014^8-2015^8}$$

លំហាត់ទី១១៦

គេឲ្យប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម:

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_2+x_3=x_3+x_4=...=x_{2014}+x_{2015}=x_{2015}+x_{2016}=1 \\ x_1+x_2+x_3+...+x_{2015}+x_{2016}=x_{2016} \end{cases}$$

គណនាតម្លៃ x_1 ។

លំហាត់ទី១១៧

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $n<1000$ ។ បើ $n^{2014}-1$ ចែកដាច់នឹង $(n-1)^2$ ។ គណនាតម្លៃធំបំផុតនៃ n ។

លំហាត់ទី១១៨

បើ $x^3+x^2+x+1=0$ ។ គណនាតម្លៃផលបូកខាងក្រោម:

$$S=x^{-2014}+x^{-2013}+x^{-2012}+...+x^{-1}+1+x+x^2+...+x^{2013}+x^{2014}$$

លំហាត់ទី១១៩

ត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB=32$, $AC=15$ និង $BC=x$ ដែល x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ D និង E ជាចំណុចនៅលើជ្រុង AB និង AC រៀងគ្នាដែល $AD=DE=EC=y$ និង y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ គណនាតម្លៃ x ។

លំហាត់ទី១២០

$ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន $AD=5$, $DC=14$, $BC=10$ និង $AB=11$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃចតុកោណ $ABCD$ ។

លំហាត់ទី១២១

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនថេរផ្សេងគ្នា និងមានសមីការ

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a+x)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(b+x)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c+x)}$$

$$=\frac{p+qx+rx^2}{(a+x)(b+x)(c+x)}$$ ដែល p,q,r ជាចំនួនថេរ

និង $S=7p+8q+9r$ ។ គណនាតម្លៃនៃ S ។

លំហាត់ទី១២២

គេមានទំនាក់ទំនងខាងក្រោម:

$$b\left(\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+...+\frac{1}{1999\times 2001}\right)=2\left(\frac{1^2}{1\times 3}+\frac{2^2}{3\times 5}+...+\frac{1000^2}{1999\times 2001}\right)$$

គណនាតម្លៃនៃ b ។

លំហាត់ទី១២៣

គេឲ្យ a,b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងសមីការ $x^2+ax+b=0$

$x^2+2bx+a=0$ មានឫសជាចំនួនពិត ។

គណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ $a+b$ ។

លំហាត់ទី១២៤

តាង k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $f(k)$ ជាអនុគមន៍មួយ

បើ $\frac{k-1}{k}=0.\overline{k_1k_2k_3...}$ នោះ $f(k)=\overline{k_1k_2k_3}$ ។

ឧទាហរណ៍ $f(3)=666$ ព្រោះ $\frac{3-1}{3}=0.666...$

គណនា $D=f(f(f(f(f(112)))))$ ។

លំហាត់ទី១២៥

ត្រីកោណ ABC មួយមានប្រវែងជ្រុងទាំងបីបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត និង ជាឫសនៃសមីការ $x^3-12x^2+47x-60=0$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC នោះ ។

លំហាត់ទី១២៦

បើ x ជាចំនួនពិត និង d ជាតម្លៃធំបំផុតនៃប្រភាគ $y=\frac{3x^2+3x+4}{x^2+x+1}$

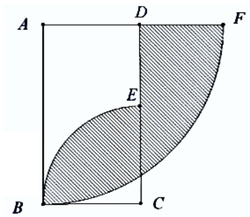
គណនាតម្លៃ d ។

លំហាត់ទី១២៧

បើ a និង b ជាចំនួនពិត ដែល $a^2+b^2=a+b$ ។
គណនាតម្លៃធំបំផុតនៃ $a+b$ ។

លំហាត់ទី១២៨

$ABCD$ ជាចតុកោណកែងមួយដែលមាន $AB=\sqrt{\frac{8+\sqrt{64-\pi^2}}{\pi}}$ និង $BC=\sqrt{\frac{8-\sqrt{64-\pi^2}}{\pi}}$ ។ BE និង BF ជាប្រវែងធ្នូ នៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត C និង A រៀងគ្នា ។
គណនាផលបូកក្រឡាផ្ទៃផ្នែកឆូត ។

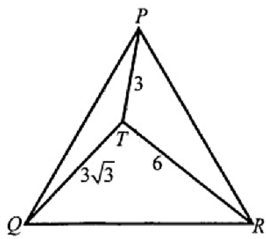


លំហាត់ទី១២៩

គេឲ្យពហុកោណនិយ័តមួយដែលមានជ្រុង 12 ។ x,y,z,w ជាកំពូល 4 ដែលជាប់តគ្នា ។ បើ $xy=2$ និងក្រឡាផ្ទៃចតុកោណ $xyzw$ ស្មើ $a+\sqrt{b}$ ។ គណនាតម្លៃ $B=2^a.3^b$ ។

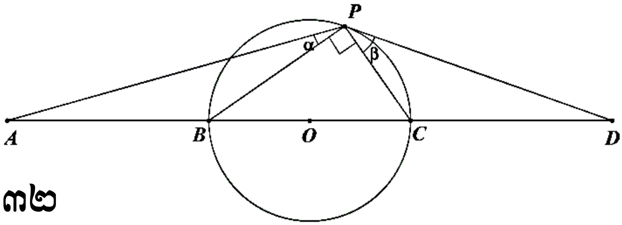
លំហាត់ទី១៣០

T ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណសម័ង្ស PQR ដែល $TP=3$ $TQ=3\sqrt{3}$ និង $TR=6$ (ដូចរូប) ។ គណនា $\angle PTR$ ។



លំហាត់ទី១៣១

P , B និង C ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ដែលមានផ្ចិត O និងអង្កត់ BC (ដូចរូប) ។ បើ A,B,C,D រត់ត្រង់គ្នាហើយ $AB=BC=CD$ $\alpha=\angle APB$ និង $\beta=\angle CPD$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $(\tan\alpha)(\tan\beta)$



លំហាត់ទី១៣២

គេឲ្យ a,b,x និង y ជាចំនួនគត់មិនសូន្យ ដែល $ax+by=4$
$ax^2+by^2=22$, $ax^3+by^3=46$ និង $ax^4+by^4=178$ ។
គណនាតម្លៃនៃ ax^5+by^5 ។ (HKMO 2015)

ផ្នែកទី៣ ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{45}$ ដែលមានតួទី 1 គឺ $\alpha_1 = 1^o$ និង ផលសងរួម $d = 4^o$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{i=1}^{45} \tan \alpha_i = 45$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{i=1}^{45} \tan \alpha_i = 45$

តួទី 45 នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (α_n) គឺ: $\alpha_{45} = \alpha_1 + 44d = 1^0 + 44 \times 4^0 = 177^0$

ចំពោះ $\forall \alpha$ គេបាន:

$$\tan \alpha + \tan(\alpha + 60^0) + \tan(\alpha + 120^0) = 3\tan 3\alpha \quad (1)$$

យក $\alpha = 1^0 + 4^0 k$ ដែល $k = 0, 1, 2, ..., 14$ នោះតាម (1) គេបាន:

$$\tan 1^0 + \tan 61^0 + \tan 121^0 = 3\tan 3^0$$

$$\tan 5^0 + \tan 65^0 + \tan 125^0 = 3\tan 15^0$$

$$\tan 9^0 + \tan 69^0 + \tan 129^0 = 3\tan 27^0$$

....

$$\tan 53^0 + \tan 113^0 + \tan 173^0 = 3\tan 159^0$$

$$\tan 57^0 + \tan 117^0 + \tan 177^0 = 3\tan 171^0$$

បូកអង្គនឹងអង្គគេបាន:

$$\sum_{k=1}^{45}\tan\alpha_k = 3(\tan 3^0+\tan 63^0+\tan 123^0)+3(\tan 15^0+\tan 75^0+\tan 135^0)$$
$$+3(\tan 27^0+\tan 87^0+\tan 147^0)+3(\tan 39^0+\tan 99^0+\tan 159^0)$$
$$+3(\tan 51^0+\tan 111^0+\tan 171^0) \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន:

$$\sum_{k=1}^{45}\tan\alpha_k = 9(\tan 9^0+\tan 45^0+\tan 81^0+\tan 117^0+\tan 153^0)$$
$$=9(\tan 9^0+\tan 81^0-\tan 63^0-\tan 27^0)+9$$

យើងមាន: $\tan 9^0+\tan 81^0-\tan 63^0-\tan 27^0$

$$=\frac{\sin(81^0+9^0)}{\cos 9^0\cos 81^0}-\frac{\sin(63^0+27^0)}{\cos 63^0\cos 27^0}=\frac{1}{\sin 9^0\cos 9^0}-\frac{1}{\sin 27^0\cos 27^0}$$

$=\dfrac{2(\sin 54^0-\sin 18^0)}{\sin 18^0\sin 54^0}=\dfrac{4\cos 36^0\sin 18^0}{\sin 18^0\sin 54^0}=4$ (3) តាម (4) និង (3) គេបាន: $\sum_{i=1}^{45}\tan\alpha_i=45$

លំហាត់ទី២

គេឲ្យ $k\in\mathbb{N}$ និង $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ ។ ស្រាយថា: $a_1^{-k}+a_2^{-k}+\cdots+a_n^{-k}\ge n^{k+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $a_1^{-k}+a_2^{-k}+\cdots+a_n^{-k}\ge n^{k+1}$

តាមវិសមភាព $AM\ge GM$ គេបាន:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow n\le\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}$$

$\Rightarrow n^k \le \sqrt[n]{a_1^{-k}.a_2^{-k}...a_n^{-k}} \le \dfrac{a_1^{-k}+a_2^{-k}+\cdots+a_n^{-k}}{n}$

$a_1^{-k}+a_2^{-k}+\cdots+a_n^{-k} \ge n^{k+1}$ ពិត

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៣

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំណត់ដោយ $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ ។ កំណត់យក ΔA ជាស្វ៊ីតដែល $\Delta A=\{a_2-a_1,a_3-a_2,a_4-a_3,\ldots\}$ សន្មតថាគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $\Delta(\Delta A)$ គឺ 1 ដែល $a_{19}=a_{92}=0$ ។ រក a_1

ដំណោះស្រាយ

រក a_1

សន្មតថាតួដំបូងនៃស្វ៊ីត ΔA គឺ d នោះ

$\Delta A=\{d,a_1+1,a_1+2,\ldots\}$

តួទី n នៃស្វ៊ីត ΔA កំណត់ដោយ: $d+(n-1)$

$\Rightarrow A=\{a_1,a_1+d,a_1+2d+1,a_1+3d+3,\ldots\}$

តួទី n នៃស្វ៊ីត A កំណត់ដោយ: $a_n=a_1+(n-1)d+\dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$

ដោយ $a_{19}=a_{92}=0$ គេបាន:

$$\begin{cases} a_{19}=a_1+18d+\dfrac{1}{2}\cdot 18\cdot 17=0 \\ a_{92}=a_1+91d+\dfrac{1}{2}\cdot 91\cdot 90=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_1=819$

ដូចនេះ $a_1=819$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យស្វ៊ីត *Fibonacci* មួយកំណត់ដោយ: $f_1 = f_2 = 1$ និង $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \, (n \in \mathbb{N})$ ។ ស្រាយថា: $f_{2n} = \dfrac{f_{2n+2}^3 + f_{2n-2}^3}{9} - 2f_{2n}^3$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $f_{2n} = \dfrac{f_{2n+2}^3 + f_{2n-2}^3}{9} - 2f_{2n}^3$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

យើងមាន:

$$f_{2n+2} - 3f_{2n} = f_{2n+1} - 2f_{2n} = f_{2n-1} - f_{2n} = -f_{2n-2}$$

$$\Leftrightarrow 3f_{2n} - f_{2n+2} - f_{2n-2} = 0 \; (1)$$

ចំពោះ $n \geq 2$

តាង $a = 3f_{2n}, b = -f_{2n+2}$ និង $c = -f_{2n-2}$ តាមសមភាព

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

គេបាន:

$$27f_{2n}^3 - f_{2n+2}^3 - f_{2n-2}^3 - 9f_{2n+2}f_{2n}f_{2n-2} = 0$$

$$f_{2n+2}^3 + f_{2n-2}^3 - 18f_{2n}^3 = -9f_{2n+2}f_{2n}f_{2n-2} + 9f_{2n}^3 \; (2)$$

យើងមាន:

$$f_{2n+2}f_{2n-2} - f_{2n}^2 = (3f_{2n} - f_{2n-2})f_{2n-2} - f_{2n}^2$$

$$= f_{2n}(3f_{2n-2} - f_{2n}) - f_{2n-2}^2 = f_{2n}f_{2n-4} - f_{2n-2}^2$$

$$= \cdots = f_6 f_2 - f_4^2 = -1$$

$$\Rightarrow -9f_{2n+2}f_{2n}f_{2n-2} + 9f_{2n}^3$$

$= -9 f_{2n}(f_{2n+2} f_{2n-2} - f_{2n}^2)$

$= 9 f_{2n}$

តាម (2) គេបាន: $f_{2n+2}^3 + f_{2n-2}^3 - 18 f_{2n}^3 = 9 f_{2n}$

$\Leftrightarrow f_{2n} = \dfrac{f_{2n+2}^3 + f_{2n-2}^3}{9} - 2 f_{2n}^3$ ពិត

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៥

ដោះស្រាយសមីការ: $2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ: $2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$

តាង $a = 2^x, b = 3^x$ គេបាន:

$a + b - a^2 + ab - b^2 = 1$

$2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a - 2b + 2 = 0$

$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a - 1 = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 3^x \\ 2^x = 1 \\ 3^x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 0$

ដូចនេះ $x = 0$ ជាឬសនៃសមីការ ។

លំហាត់ទី៦

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម: $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម: $A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2$

យើងមាន: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(k-1)+n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

$$=n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}+n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}$$

$$=n(n-1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n-2}{k}+n.2^{n-1}$$

$$=n(n-1).2^{n-2}+n.2^{n-1}$$

$$=n(n+1)2^{n-2}$$

ដូចនេះ $A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2=n(n+1)2^{n-2}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យ $\frac{a}{bc-a^2}+\frac{b}{ac-b^2}+\frac{c}{ab-c^2}=0$ ។ ស្រាយថា:

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ac-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ac-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0$

តាង $A=\frac{1}{bc-a^2}+\frac{1}{ac-b^2}+\frac{1}{ab-c^2}$

$$B=\frac{a}{bc-a^2}+\frac{b}{ac-b^2}+\frac{c}{ab-c^2}$$

$$C=\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ac-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}$$

$$\Rightarrow AB=\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(bc-a^2)(ac-b^2)}+\frac{c}{(bc-a^2)(ab-c^2)}$$

$$+\frac{a}{(bc-a^2)(ac-b^2)}+\frac{b}{(ac-b^2)^2}+\frac{c}{(ac-b^2)(ab-c^2)}$$

$$+\frac{a}{(bc-a^2)(ab-c^2)}+\frac{b}{(ab-c^2)(ac-b^2)}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow AB=C+\frac{b(ab-c^2)+b(bc-a^2)}{(ab-c^2)(bc-a^2)(ac-b^2)}+\frac{a(ab-c^2)+a(ac-b^2)}{(ab-c^2)(bc-a^2)(ac-b^2)}$$

$$+\frac{c(ac-b^2)+c(bc-a^2)}{(ab-c^2)(bc-a^2)(ac-b^2)}$$

$\Rightarrow C=0$ ពិត

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យ a,b ជាការេនៃពីរចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានតគ្នា។

ស្រាយថា: $ab-a-b+1\vdots 192$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $ab-a-b+1\vdots 192$

ដោយ a,b ជាចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានតគ្នាគេបាន:

$a=(2n-1)^2, b=(2n+1)^2 \ , n\in\mathbb{N}$

$a=4n^2-4n+1 \ , \ b=4n^2+4n+1$

$a-1=4n(n-1) \ , \ b-1=4n(n+1)$

$\Rightarrow (a-1)(b-1)=16n^2(n-1)(n+1)$

$\Leftrightarrow ab-a-b+1=16n^2(n-1)(n+1)$

ដោយ $n(n-1)\vdots 2, n(n+1)\vdots 2, n(n-1)(n+1) \ \vdots 6$

$\Rightarrow ab-a-b+1\vdots 192$ ពិត

ដូចនេះ $ab-a-b+1\vdots 192$ ។

លំហាត់ទី៩

រកចំនួន $\overline{xyz}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $\overline{xyz}+\overline{xzy}=\overline{zzz}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួន $\overline{xyz}$

លក្ខខណ្ឌ: $0<x,z\le 9; 0\le y\le 9$

យើងមាន: $\overline{xyz}+\overline{xzy}=\overline{zzz}$

$100x+10y+z+100x+10z+y=111z$

$200x+11y=100z \ (*)$

$11y\equiv 0 \pmod{100}$

$\Rightarrow y=0$

តាម $(*)$ គេបាន: $2x=z$

$\Rightarrow \overline{xyz}=102, 204, 306, 408$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $102, 204, 306, 408$ ។

លំហាត់ទី១០

ស្រាយថា: $7^{9^{9^{9^{9}}}} - 7^{9^{9}} \vdots 100$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $7^{9^{9^{9^{9}}}} - 7^{9^{9}} \vdots 100$

យើងមាន: $9^{9} = 4l + 1, l \in \mathbb{N}^{*}$

$\Rightarrow 9^{9^{9^{9}}} = 4k + 1, k \in \mathbb{N}^{*}$

$\Rightarrow 7^{9^{9^{9^{9}}}} = 7^{4k+1} = 7.2401^{k} \equiv 7(\text{mod}100)$

$\Rightarrow 7^{9^{9}} = 7^{4l+1} = 7.2401^{l} \equiv 7(\text{mod}100)$

$\Rightarrow 7^{9^{9^{9^{9}}}} - 7^{9^{9}} \equiv 0(\text{mod}100)$

$\Rightarrow 7^{9^{9^{9^{9}}}} - 7^{9^{9}} \vdots 100$ ពិត

ដូចនេះ $7^{9^{9^{9^{9}}}} - 7^{9^{9}} \vdots 100$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ: $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ និង

$\det\begin{pmatrix} u_{n+3} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} = n!, n \geq 0$ ។

ស្រាយថាគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត (u_n) ជាចំនួន គត់ចំពោះគ្រប់ n ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត (u_n) ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ n

យើងមាន: $\det\begin{pmatrix} u_{n+3} & u_{n+2} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} = n!$

$u_{n+3}.u_n - u_{n+1}.u_{n+2} = n!$

$u_{n+3}.u_n = u_{n+1}.u_{n+2} + n!$

$u_{n+3} = \dfrac{u_{n+1}.u_{n+2}}{u_n} + \dfrac{n!}{u_n}$

$u_3 = \dfrac{1.1}{1} + \dfrac{1}{1} = 2$

$u_4 = \dfrac{2.1}{1} + \dfrac{1}{1} = 3$

$u_5 = \dfrac{3.2}{1} + \dfrac{2}{1} = 4.2$

$u_6 = \dfrac{4.2.3}{2} + \dfrac{3.2}{2} = 4.3 + 3 = 5.3$

$u_7 = \dfrac{5.3.4.2}{3} + \dfrac{4.3.2}{3} = 5.4.2 + 4.2 = 6.4.2$

$u_8 = \dfrac{6.4.2.5.3}{4.2} + \dfrac{5.4.3.2}{4.2} = 6.5.3 + 5.3 = 7.5.3$

យើងសង្កេតឃើញថា: $u_n = (n-1)(n-3)(n-5)\dots$ ជាចំនួនគត់ សន្មត ថារូបមន្តទូទៅនេះពិតដល់តួទី u_n, u_{n+1} និង u_{n+2}

យើងត្រូវស្រាយថាវាពិតដល់តួទី u_{n+3}

យើងមាន: $u_{n+3} = \dfrac{u_{n+1}.u_{n+2}}{u_n} + \dfrac{n!}{u_n}$

$$= \frac{(n+1)(n-1)(n-3)\dots n(n-2)(n-4)\dots + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\dots}$$

$$= \frac{(n+1)n! + n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\dots}$$

$$= \frac{(n+2)n!}{(n-1)(n-3)(n-5)\dots}$$

$$= (n+2)n(n-2)(n-4)\dots$$

នេះបញ្ជាក់ថាតួទី u_{n+3} ជាចំនួនគត់

ដូចនេះ គ្រប់តួនៃស្វ៊ីត (u_n) ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ n ។

លំហាត់ទី១២

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (T_n) ដែលកំណត់ដោយ $T_1 = 1, T_n = T_{\sqrt{n}} + c\log_2 n$ ហើយ c ជាចំនួនថេរ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (T_n)

សមីការអូម៉ូសែន: $T_n - T_{\sqrt{n}} = 0$

សមីការសម្គាល់ស្វ៊ីត: $x - \sqrt{x} = 0$

$x^2 - x = 0$

$x = 0, x = 1$

$\Rightarrow T_{n_1} = A.0^n + B.1^n = B$

ដោយ $x_1 = 0$, $x_2 = 1 \neq c\log_2 n$

$T_{n_2} = Zc\log_2 n$

$\Leftrightarrow Zc\log_2 n - \dfrac{1}{2}Zc\log_2 n = c\log_2 n$

$\Leftrightarrow Z - \dfrac{1}{2}Z = 1$

$\Leftrightarrow Z = 2$

$T_{n_2} = 2c\log_2 n$

$\Rightarrow T_n = T_{n_1} + T_{n_2} = B + 2c\log_2 n$

បើ $n = 1 : T_1 = B + 2c\log_2 1 = 1 \Rightarrow B = 1$

$\Rightarrow T_n = 1 + 2c\log_2 n$

ដូចនេះ $T_n = 1 + 2c\log_2 n$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យ $x, y, z \ge 0$ ដែល $x + y + z = 6$ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម:

$$S = \frac{2015}{7 + 3\ln(x+1) - y} + \frac{2015}{7 + 3\ln(y+1) - z} + \frac{2015}{7 + 3\ln(z+1) - z}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម:

$$S = \frac{2015}{7 + 3\ln(x+1) - y} + \frac{2015}{7 + 3\ln(y+1) - z} + \frac{2015}{7 + 3\ln(z+1) - z}$$

ដោយ: $x, y, z \ge 0$ ដែល $x + y + z = 6 \Rightarrow 0 \le x, y, z \le 6$

$$\Rightarrow 7 + 3\ln(x+1) - y > 0, 7 + 3\ln(y+1) - z > 0, 7 + 3\ln(z+1) - z > 0$$

តាមវិសមភាព $Cauchy - Swcharz$ គេបាន:

$$\frac{(\sqrt{2015})^2}{7 + 3\ln(x+1) - y} + \frac{(\sqrt{2015})^2}{7 + 3\ln(y+1) - z} + \frac{(\sqrt{2015})^2}{7 + 3\ln(z+1) - z}$$

$$\ge \frac{(3\sqrt{2015})^2}{21 + 3\ln(x+1) + 3\ln(y+1) + 3\ln(z+1) - x - y - z}$$

$$= \frac{18135}{15 + 3\ln(x+1)(y+1)(z+1)}$$

តាមវិសមភាព $Cauchy$ គេបាន:

$$\sqrt[3]{(x+1)(y+1)(z+1)} \le \frac{x + y + z + 3}{3} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\ln(x+1)(y+1)(z+1) \le \ln 3$$

$$\Rightarrow 15+3\ln(x+1)(y+1)(z+1)\le 15+9\ln 3$$

$$\Rightarrow \frac{18135}{15+3\ln(x+1)(y+1)(z+1)}\ge \frac{18135}{15+9\ln 3}=\frac{6045}{5+3\ln 3}$$

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ S គឺ: $\frac{6045}{5+3\ln 3}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយស្រាយថា:

$$\sin^3 A\sin(B-C)+\sin^3 B\sin(C-A)+\sin^3 C\sin(A-B)=0$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sin^3 A\sin(B-C)+\sin^3 B\sin(C-A)+\sin^3 C\sin(A-B)=0$

យើងមាន: $A+B+C=\pi$

$\Rightarrow \sin(\pi-A)=\sin(B+C)\Rightarrow \sin A=\sin(B+C)$ គេបាន:

$$\sin^3 A\sin(B-C)=\sin^2 A\sin(B+C)\sin(B-C)$$

$$=-\frac{1}{4}(1-\cos 2A)(\cos 2B-\cos 2C)$$

$$=-\frac{1}{4}(\cos 2B-\cos 2C-\cos 2A\cos 2B+\cos 2A\cos 2C)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ

$$\sin^3 B\sin(C-A)=-\frac{1}{4}(\cos 2C-\cos 2A-\cos 2B\cos 2C+\cos 2B\cos 2A)$$

$$\sin^3 C\sin(A-B)=-\frac{1}{4}(\cos 2A-\cos 2B-\cos 2C\cos 2A+\cos 2C\cos 2B)$$

គេបាន:

$\sin^3 A\sin(B-C)+\sin^3 B\sin(C-A)+\sin^3 C\sin(A-B)=0$ ពិត

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយស្រាយថា:

$$\frac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{a\cos A+b\cos B+c\cos C}=\cot A+\cot B+\cot C$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\dfrac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{a\cos A+b\cos B+c\cos C}=\cot A+\cot B+\cot C$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{a\cos A+b\cos B+c\cos C}=\frac{2R(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{R(2\cos\mathrm{A}\sin\mathrm{A}+\cos\mathrm{B}\sin\mathrm{B}+\cos C\sin\mathrm{C})}$$

$$=\frac{2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

$$=\frac{2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{\sin C\left[\cos(\mathrm{A-B})-\cos(\mathrm{A+B})\right]}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin A}{\sin B\sin C}+\frac{\sin B}{\sin A\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A\sin B}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}+\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}+\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cot B+\cot C+\cot A+\cot C+\cot A+\cot B\right)$$

$=\cot A+\cot B+\cot C$ ពិត

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយស្រាយថា:

$(a-b)\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+(b-c)\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+(c-a)\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា:

$$(a-b)\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+(b-c)\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+(c-a)\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=0\ (*)$$

ចែក $(*)$ នឹង $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ គេបាន:

$$(a-b)\cot\frac{C}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}=0$$

$$\frac{a-b}{\tan\frac{C}{2}}+\frac{b-c}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{c-a}{\tan\frac{B}{2}}=0$$

យើងមាន: $a=p-b+p-c=r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$

$$b=p-a+p-c=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a-b=r\left(\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (a-b)\cot\frac{C}{2} = r\cot\frac{C}{2}\left(\cot\frac{B}{2} - \cot\frac{A}{2}\right)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ

$$(b-c)\cot\frac{A}{2} = r\cot\frac{A}{2}\left(\cot\frac{C}{2} - \cot\frac{B}{2}\right)$$

$$(c-a)\cot\frac{B}{2} = r\cot\frac{B}{2}\left(\cot\frac{A}{2} - \cot\frac{C}{2}\right)$$

គេបាន: $(a-b)\cot\frac{C}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} = 0$ ពិត

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ស្រាយថា:

$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}$

តាមវិសមភាព *Cauchy* ពីរដងគេបាន:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right)}}$$

$$= 3\sqrt[6]{\left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right)} \geq 3\sqrt[6]{\frac{2^3\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ac}}{abc}} = 3\sqrt{2} \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យ $\sin x+\sin y=a$ និង $\cos x+\cos y=b$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $\tan\frac{x}{2}$ និង $\tan\frac{y}{2}$ ជាអនុគមន៍នៃ a,b ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $\tan\frac{x}{2}$ និង $\tan\frac{y}{2}$ ជាអនុគមន៍នៃ a,b

យើងមាន: $\begin{cases}\sin x+\sin y=a\\ \cos x+\cos y=b\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a\ (1)\\ 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b\,(2)\end{cases}$$

យក (1) ចៀប (2) គេបាន: $\tan\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}$ (3)

យក (1) និង (2) លើកជាការេរួចបូកចូលគ្នាគេបាន:

$$4\sin^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}+4\cos^2\frac{x+y}{2}\cos^2\frac{x-y}{2}=a^2+b^2$$

$$4\cos^2\frac{x-y}{2}=a^2+b^2 \quad (*)$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x-y}{2}=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\\ \cos\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\end{array}\right.$$

ករណី $\cos\frac{x-y}{2}=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ (4)

តាម (2) គេបាន: $2\left(-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)\cos\frac{x+y}{2}=b$

$\Rightarrow \cos\frac{x+y}{2}=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (5)

យក $(5)-(4):\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$-2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=\frac{a^2+b^2-2b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

$2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=\frac{2b-a^2-b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ (6)

យក $(5)+(4):\cos\frac{x+y}{2}+\cos\frac{x-y}{2}=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}=-\frac{a^2+b^2+2b}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ (7)

យក (6) ធៀប (7) គេបាន: $\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2}=\frac{a^2+b^2-2b}{a^2+b^2+2b}$ (8)

ម្យ៉ាងទៀត: $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)=\frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2}}$

$\Rightarrow \tan\frac{x}{2}+\tan\frac{y}{2}=\tan\frac{x+y}{2}\left(1-\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2}\right)$

$\Rightarrow \tan\frac{x}{2}+\tan\frac{y}{2}=\frac{a}{b}\left(1-\frac{a^2+b^2-2b}{a^2+b^2+2b}\right)=\frac{4a}{a^2+b^2+2b}$ (9)

តាម (8) និង (9) គេបាន $\tan\frac{x}{2}$, $\tan\frac{y}{2}$ ជាឫសនៃសមីការ:

$$X^2-\frac{4a}{a^2+b^2+2b}X+\frac{a^2+b^2-2b}{a^2+b^2+2b}=0$$

$$(a^2+b^2+2b)X^2-4aX+a^2+b^2-2b=0$$

$\Delta' = 4a^2 - (a^2 + b^2 + 2b)(a^2 + b^2 - 2b)$

$= 4a^2 - (a^2 + b^2)^2 + 4b^2$

$= 4(a^2 + b^2) - (a^2 + b^2)^2$

$= (a^2 + b^2)(4 - a^2 - b^2)$

តាម $(*) : a^2 + b^2 = 4\cos^2 \dfrac{x-y}{2} \le 4 \Rightarrow 4 - a^2 - b^2 \ge 0$

$\Rightarrow \Delta' \ge 0$

$$X = \frac{2a \pm \sqrt{(a^2 + b^2)(4 - a^2 - b^2)}}{a^2 + b^2 + 2b}$$

ករណី $\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ ស្រាយដូចគ្នានឹងករណីខាងលើ ។

ដូចនេះតម្លៃ $\tan\dfrac{x}{2}, \tan\dfrac{y}{2}$ ដែលជាអនុគមន៍នៃ a, b កំណត់ដោយ:

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{2a + \sqrt{(a^2 + b^2)(4 - a^2 - b^2)}}{a^2 + b^2 + 2b}$$

$$\tan\frac{y}{2} = \frac{2a - \sqrt{(a^2 + b^2)(4 - a^2 - b^2)}}{a^2 + b^2 + 2b}$$

ឬ $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{2a - \sqrt{(a^2 + b^2)(4 - a^2 - b^2)}}{a^2 + b^2 + 2b}$

$$\tan\frac{y}{2} = \frac{2a + \sqrt{(a^2 + b^2)(4 - a^2 - b^2)}}{a^2 + b^2 + 2b}$$

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យអនុគមន៍ g ដែលកំណត់ដោយ $g(t) = t^p - t$ ស្រាយថា $g(x+a) \equiv g(x) \pmod{p}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $g(x+a) \equiv g(x) \pmod{p}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a

យើងមាន: $g(t)=t^p-t$

$\Rightarrow g(x+a)-g(x)=(x+a)^p-(x+a)-x^p-x$

$\Leftrightarrow g(x+a)-g(x)\equiv(x+a)^p-(x+a)-x^p-x(\text{mod } p)$

$\Leftrightarrow g(x+a)-g(x)\equiv x^p+a^p-x-a-x^p-x(\text{mod } p)$

$\Leftrightarrow g(x+a)-g(x)\equiv a^p-a\equiv 0\ (\text{mod } p)\ (Fermat)$

$\Rightarrow g(x+a)\equiv g(x)(\text{mod } p)$ ពិត

ដូចនេះ $g(x+a)\equiv g(x)(\text{mod } p)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a ។

លំហាត់ទី២០

គណនាផលបូក:

$S=2.1^2C_{2015}^1+3.2^2C_{2015}^2+4.3^2C_{2015}^3+\cdots+2016.2015^2C_{2015}^{2015}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក:

$S=2.1^2C_{2015}^1+3.2^2C_{2015}^2+4.3^2C_{2015}^3+\cdots+2016.2015^2C_{2015}^{2015}$

យើងមាន: $\sum_{k=0}^{n}(k+1)k^2C_n^k=n\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)C_{n-1}^{k-1}$

$=n\sum_{k=1}^{n-1}(k-1+1)(k+1)C_{n-1}^{k-1}$

$=n\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)(k+1)C_{n-1}^{k-1}+n\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)C_{n-1}^{k-1}$

$=n(n-1)\sum_{k=2}^{n-2}(k+1)C_{n-2}^{k-2}+n\sum_{k=1}^{n-1}(k-1+2)C_{n-1}^{k-1}$

$=n(n-1)\sum_{k=2}^{n-2}(k-2+3)C_{n-2}^{k-2}+n\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)C_{n-1}^{k-1}+2n\sum_{k=1}^{n-1}C_{n-1}^{k-1}$

$=n(n-1)\sum_{k=2}^{n-2}(k-2)C_{n-2}^{k-2}+3n(n-1)\sum_{k=2}^{n-2}C_{n-2}^{k-2}+n(n-1)\sum_{k=2}^{n-2}C_{n-2}^{k-2}+2n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}$

$$=n(n-1)(n-2)\sum_{k=3}^{n-3}C_{n-3}^{k-3}+3n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}+n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}+2n.2^{n-1}$$

$$=n(n-1)(n-2)\sum_{k=0}^{n-3}C_{n-3}^{k}+3n(n-1).2^{n-2}+n(n-1).2^{n-2}+2^{n}n$$

$$=n(n-1)(n-2).2^{n-3}+3n(n-1).2^{n-2}+n(n-1).2^{n-2}+2^{n}n$$

$$=n.2^{n-3}\left[(n-1)(n-2)+6(n-1)+2(n-1)+8\right]$$

$$=n.2^{n-3}(n^2+5n+2)$$

យក $n=2015$ គេបាន៖ $S=(2015^2+5.2015+2).2015.2^{2012}$

ដូចនេះ៖ $S=(2015^2+5.2015+2).2015.2^{2012}$ ។

លំហាត់ទី២១

រកតម្លៃធំបំផុតនៃកន្សោម:

$A_{2015}=\sum_{k=0}^{2015}(k-2015x)^2x^kC_{2015}^{k}(1-x)^{2015-k}$ បើ $x\in[0,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃធំបំផុតនៃកន្សោម: $A_{2015}=\sum_{k=0}^{2015}(k-2015x)^2x^kC_{2015}^{k}(1-x)^{2015-k}$

បើ $x\in[0,1]$

យើងមាន:

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2x^kC_n^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(k^2-2nxk+n^2x^2)x^kC_n^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k^2x^kC_n^k(1-x)^{n-k}-2nx\sum_{k=0}^{n}kx^kC_n^k(1-x)^{n-k}+n^2x^2\sum_{k=0}^{n}x^kC_n^k(1-x)^{n-k}\,(*)$$

តែ $\sum_{k=0}^{n} k^2 x^k C_n^k (1-x)^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n-1} kx^k C_{n-1}^{k-1}(1-x)^{n-k}$

$= n\sum_{k=1}^{n-1}(k-1+1)x^k C_{n-1}^{k-1}(1-x)^{n-k}$

$= n\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)x^k C_{n-1}^{k-1}(1-x)^{n-k} + n\sum_{k=1}^{n-1} x^k C_{n-1}^{k-1}(1-x)^{n-k}$

$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n-2} x^k C_{n-2}^{k-2}(1-x)^{n-k} + nx\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$

$= n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} x^{k-2}(1-x)^{n-k} + nx\left[x+(1-x)\right]^{n-1}$

$= n(n-1)x^2\left[x+(1-x)\right]^{n-2} + nx$

$= n(n-1)x^2 + nx$

$= nx(nx-x+1)$

ហើយ: $\sum_{k=0}^{n} kx^k C_n^k \left(1-x\right)^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} x^k \left(1-x\right)^{n-k}$

$= nx\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$

$= nx\left[x+(1-x)\right]^{n-1}$

$= nx$

ម្យ៉ាងទៀត: $\sum_{k=0}^{n} x^k C_n^k (1-x)^{n-k} = \left[x+(1-x)\right]^n = 1$

តាម $(*)$: $\mathrm{A}_n = nx(nx-x+1) - 2nx(nx) + n^2x^2$

$= n^2x^2 - nx^2 + nx - 2n^2x^2 + n^2x^2$

$= nx - nx^2$

យក $n = 2015$ គេបាន: $A_{2015} = 2015x - 2015x^2$

$\Rightarrow A'_{2015}(x) = 2015 - 4030x$

បើ $A'_{2015}(x) = 0$ គេបាន: $2015 - 4030x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

តារាងសញ្ញានៃ $A'_{2015}(x)$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$A'_{2015}(x)$	$+$	0	$-$

ដោយ $A'_{2015}(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ $x=\frac{1}{2}$ នោះ $A_{2015}(x)$ មានតម្លៃធំបំផុតត្រង់ $x=\frac{1}{2}$ ។

តម្លៃធំបំផុតនៃ $A_{2015}(x)$ គឺ $A_{2015}\left(\frac{1}{2}\right)=2015.\frac{1}{2}-2015\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2015}{4}$

របៀបទី២

រកតម្លៃធំបំផុតនៃកន្សោម $A_{2015}=2015x-2015x^2=2015x(1-x)$

ដោយ $x\in[0,1]$ នោះ $x\geq 0,(1-x)\geq 0$ តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$$\sqrt{x(1-x)}\leq\frac{x+(1-x)}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow A_{2015}=2015x(1-x)\leq\frac{2015}{4}$$

ដូចនេះ តម្លៃធំបំផុតនៃ A_{2015} គឺ: $\frac{2015}{4}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យ $S_n=a^n+b^n+c^n$ ដែល $n\in\mathbb{Z}$ ។ ស្រាយថា:

$6S_{n+3}=6S_1S_{n+2}-3(S_1^2-S_2)S_{n+1}+(S_1^3-3S_1S_2+2S_3)S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $6S_{n+3}=6S_1S_{n+2}-3(S_1^2-S_2)S_{n+1}+(S_1^3-3S_1S_2+2S_3)S_n$

យើងមាន: $S_n = a^n + b^n + c^n$

$S_1 = a+b+c$

$S_1^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$ab+bc+ac = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2)$

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

$S_3 - 3abc = S_1\left[S_2 - \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2)\right] = S_1S_2 - \frac{1}{2}(S_1^3 - S_1S_2)$

$abc = \frac{1}{3}\left[S_3 - S_1S_2 + \frac{1}{2}(S_1^3 - S_1S_2)\right]$

នោះ a,b,c ជាឫសនៃសមីការ:

$X^3 - S_1X^2 + \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2)X - \frac{1}{3}\left[S_3 - S_1S_2 + \frac{1}{2}(S_1^3 - S_1S_2)\right] = 0$

$6X^3 - 6S_1X^2 + 3(S_1^2 - S_2)\mathrm{X} - 2\left[S_3 - S_1S_2 + \frac{1}{2}(S_2S_1^3 - S_1S_2)\right] = 0$

$6X^3 = 6S_1X^2 - 3(S_1^2 - S_2)\mathrm{X} + 2S_3 - 3S_1S_2 + S_1^3 \ (*)$

ដោយ a,b,c ជាឫសនៃសមីការ $(*)$ គេបាន:

$$\begin{cases} 6a^3 = 6S_1a^2 - 3(S_1^2 - S_2)a + 2S_3 - 3S_1S_2 + S_1^3 \\ 6b^3 = 6S_1b^2 - 3(S_1^2 - S_2)b + 2S_3 - 3S_1S_2 + S_1^3 \\ 6c^3 = 6S_1c^2 - 3(S_1^2 - S_2)c + 2S_3 - 3S_1S_2 + S_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a^{n+3} = 6S_1a^{n+2} - 3(S_1^2 - S_2)a^{n+1} + (2S_3 - 3S_1S_2 + S_1^3)a^n \\ 6b^{n+3} = 6S_1b^{n+2} - 3(S_1^2 - S_2)b^{n+1} + (2S_3 - 3S_1S_2 + S_1^3)b^n \\ 6c^{n+3} = 6S_1c^{n+2} - 3(S_1^2 - S_2)c^{n+1} + (2S_3 - 3S_1S_2 + S_1^3)c^n \end{cases}$$

$6S_{n+3} = 6S_1S_{n+2} - 3(S_1^2 - S_2)S_{n+1} + (S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3)S_n$ ពិត

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា: $2a^2+3b^2+7c^2=1$

រកតម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(a,b,c)=2013a-2014b+2015c$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(a,b,c)=2013a-2014b+2015c$

យើងមាន: $f(a,b,c)=2013a-2014b+2015c$

$$\left[f(a,b,c)\right]^2=(2013a-2014b+2015c)^2$$

$$=\left[\frac{2013}{\sqrt{2}}\sqrt{2}a-\frac{2014}{\sqrt{3}}\sqrt{3}b+\frac{2015}{\sqrt{7}}\sqrt{7}c\right]^2$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-swcharz$ គេបាន:

$$\left[f(a,b,c)\right]^2\le\left[\left(\frac{2013}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{2014}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2015}{\sqrt{5}}\right)^2\right](2a^2+3b^2+7c^2)$$

$$=\frac{2013^2}{2}+\frac{2014^2}{3}+\frac{2015^2}{7}$$

$$\Rightarrow f(a,b,c)\le\sqrt{\frac{2013^2}{2}+\frac{2014^2}{3}+\frac{2015^2}{7}}$$

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(a,b,c)$ គឺ $\sqrt{\frac{2013^2}{2}+\frac{2014^2}{3}+\frac{2015^2}{7}}$

លំហាត់ទី២៤ គេឲ្យ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1+a_2+\cdots+a_n\ge n^2$ និង $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\le n^3+1$ ។ ស្រាយថា: $n-1\le a_k\le n+1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k\le n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $n-1 \le a_k \le n+1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k \le n$

យើងត្រូវស្រាយថា: $-1 \le a_k - n \le 1$ ឬ $|a_k - n| \le 1$

យើងមាន: $\sum_{k=1}^{n}(a_k-n)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2n\sum_{k=1}^{n} a_k + n^3$

ដោយ: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge n^2$ និង $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \le n^3 + 1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(a_k-n)^2 \le n^3 + 1 - 2n.n^2 + n^3 = 1$

$\Rightarrow (a_k - n)^2 \le 1$

$\Rightarrow |a_k - n| \le 1$ ពិត

ដូចនេះ វិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យ x_1, x_2, x_3 ជាឫសនៃសមីការ $x^3 + ax^2 + x + b = 0, (b \ne 0)$ ។

ស្រាយថា:

$$\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)+\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)\left(x_3-\frac{1}{x_3}\right)+\left(x_3-\frac{1}{x_3}\right)\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)=4$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា:

$$\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)+\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)\left(x_3-\frac{1}{x_3}\right)+\left(x_3-\frac{1}{x_3}\right)\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)=4$$

យើងមាន:

$$\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)+\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)\left(x_3-\frac{1}{x_3}\right)+\left(x_3-\frac{1}{x_3}\right)\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)=4$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2x_3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)-(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$$

$$+x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3\ (*)$$

ដោយ x_1,x_2,x_3 ជាឫសនៃសមីការ $x^3+ax^2+x+b=0,(b\neq 0)$

តាមទ្រឹស្ដីបទវ្យែតគេបាន: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-a\\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1\\ x_1x_2x_3=-b\end{cases}$

តាមទំនាក់ទំនង (*) គេបាន: $-b+a-a=-b$ ពិត

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ។ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$$

យើងមាន: $\tan\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\dfrac{2}{\sin A}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ: $\tan\frac{B}{2}+\cot\frac{B}{2}=\dfrac{2}{\sin B}$, $\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{C}{2}=\dfrac{2}{\sin C}$

បូកសមភាពទាំងអស់បញ្ចូលគ្នាគេបាន:

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$$

$$=2\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$$

តែម្យ៉ាងទៀត: $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ គេបាន:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)$$

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី២៧

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព: $\tan\frac{3\pi}{11}+4\sin\frac{2\pi}{11}=\sqrt{11}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព: $\tan\frac{3\pi}{11}+4\sin\frac{2\pi}{11}=\sqrt{11}$

តាង: $a=\frac{\pi}{11}$ យើងត្រូវស្រាយថា: $\tan 3a+4\sin 2a=\sqrt{11}$

យើងមាន: $\tan 3a+4\sin 2a=\sqrt{11}$

$$\sin 3a+4\sin 2a\cos 3a=\sqrt{11}\cos 3a$$

$$\sin 3a+2\sin 5a-2\sin a=\sqrt{11}\cos 3a$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 3a+4\sin^2 5a+4\sin^2 a+4\sin 3a\sin 5a$$
$$-4\sin 3a\sin a-8\sin a\sin 5a=11\cos^2 3a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 6a}{2}+4\cdot\frac{1-\cos 10a}{2}+4\cdot\frac{1-\cos 2a}{2}+2(\cos 2a-\cos 8a)$$

$$-2(\cos 2a-\cos 4a)-4(\cos 4a-\cos 6a)=11\cdot\frac{1+\cos 6a}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos 6a+4-4\cos 10a+4-4\cos 2a+4\cos 2a-4\cos 8a$$
$$-4\cos 2a+4\cos 4a-8\cos 4a+8\cos 6a=11+11\cos 6a$$

$$\Leftrightarrow -4\cos 2a-4\cos 4a-4\cos 6a-4\cos 8a-4\cos 10a=2$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 2a+2\cos 4a+2\cos 6a+2\cos 8a+2\cos 10a=-1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2a\sin a+2\cos 4a\sin a+2\cos 6a\sin a$$
$$+2\cos 8a\sin a+2\cos 10a\sin a=-\sin a$$
$$\Leftrightarrow (\sin 3a-\sin a)+(\sin 5a-\sin 3a)+(\sin 7a-\sin 5a)$$
$$+(\sin 9a-\sin 7a)+(\sin 11a-\sin 9a)=-\sin a$$

$$\Leftrightarrow \sin 11a=0\Leftrightarrow \sin 11.\frac{\pi}{11}=0\Leftrightarrow \sin\pi=0$$ ពិត

ដូចនេះ សមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1=F_2=1$ និង

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, n\ge 2$ ស្រាយថា: $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

យើងមាន: $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ មានសមីការសម្គាល់: $x^2-x-1=0$

មានឫស: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ គេបាន:

$F_n=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ តែដោយ $F_1=F_2=1$ គេបាន:

$$\begin{cases} F_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ F_2 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(1+\sqrt{5}) + B(1-\sqrt{5}) = 2 \ (1) \\ A(3+\sqrt{5}) + B(3-\sqrt{5}) = 2 \ (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) + B(1-\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = 2(3-\sqrt{5}) \\ A(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) + B(3-\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) = 2(1-\sqrt{5}) \end{cases}$$

$$A\left[(-2+2\sqrt{5}) - (-2-2\sqrt{5})\right] = 4$$

$$A.4\sqrt{5} = 4 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(1): \frac{1}{\sqrt{5}}(1+\sqrt{5}) + B(1-\sqrt{5}) = 2$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt{5} + B(\sqrt{5}-5) = 2\sqrt{5}$$

$\Rightarrow B = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ គេបាន: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ ពិត

ដូចនេះ $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ ។ (ទ្រឹស្តីបទ *Binet*)

លំហាត់ទី២៩

គេឲ្យស្វីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1 = F_2 = 1$ និង $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 2$ ស្រាយថា: $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $F_{n-1}F_{n+1}=F_n^2+(-1)^n$

តាមទ្រឹស្តីបទ *Binet* តាង $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ គេបាន:

$F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n-b^n)$ ហើយ $\begin{cases}a-b=\sqrt{5}, a+b=1\\ ab=-1\end{cases}$

$$\Rightarrow F_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n-1}-b^{n-1})$$

$$\Rightarrow F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n+1}-b^{n+1})$$

$$\Rightarrow F_{n-1}.F_{n+1}=\frac{1}{5}\left[(a^{n-1}-b^{n-1})(a^{n+1}-b^{n+1})\right]$$

$$=\frac{1}{5}(a^{2n}-a^{n-1}b^{n+1}-a^{n+1}b^{n-1}+b^{2n})$$

$$=\frac{1}{5}\left[a^{2n}+b^{2n}-(ab)^{n-1}(a^2+b^2)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[(a^n-b^n)^2+2a^nb^n-(ab)^{n-1}\left((a+b)^2-2ab\right)\right]$$

តែ $ab=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=-1$ និង $a+b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1$

យើងបាន:

$F_{n-1}F_{n+1}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n-b^n)\right]^2+\dfrac{1}{5}\left[2(-1)^n-3(-1)^{n-1}\right]=F_n^2+(-1)^n$ ពិត

ដូចនេះ: $F_{n-1}F_{n+1}=F_n^2+(-1)^n$ ។ (ទ្រឹស្តីបទ *Cassini*)

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យស្វ៊ីត (*Febonacci*) កំណត់ដោយ: $F_1=F_2=1$ និង $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, n\geq 2$ ស្រាយថា: $F_{m+n+1}=F_{n+1}F_{m+1}+F_mF_n\ , m\in\mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $F_{m+n+1} = F_{n+1}F_{m+1} + F_m F_n \ , m \in \mathbb{N}$

តាមទ្រឹស្តីបទ *Binet* តាង $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ គេបាន:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$$

$$\Rightarrow F_{n+1}F_{m+1} + F_n F_m = \frac{1}{5}(a^{n+1} - b^{n+1})(a^{m+1} - b^{m+1}) + \frac{1}{5}(a^n - b^n)(a^m - b^m)$$

$$= \frac{1}{5}(a^{m+n+2} - a^{n+1}b^{m+1} - a^{m+1}b^{n+1} + b^{m+n+2} + a^{n+m} - a^n b^m - a^m b^n + b^{n+m})$$

$$= \frac{1}{5}\left[a^{m+n+2} + b^{m+n+2} + a^{n+m} + b^{n+m} - a^n b^m(ab+1) - a^m b^n(ab+1)\right]$$

តែ $ab = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1$ គេបាន:

$$F_{n+1}F_{m+1} + F_n F_m = \frac{1}{5}(a^{m+n+2} + b^{m+n+2} + a^{n+m} + b^{n+m})$$

$$= \frac{1}{5}(a^{m+n}.a^2 + b^{m+n}.b^2 + a^{m+n} + b^{n+m})$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 a^{m+n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 b^{m+n} + a^{m+n} + b^{n+m}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[a^{m+n}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} + 1\right) + b^{m+n}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4} + 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[a^{m+n}\left(\frac{\sqrt{5}+5}{2}\right) + b^{m+n}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^{m+n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - b^{m+n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n+m+1} - b^{n+m+1}) = F_{n+m+1}$$ ពិត

ដូចនេះ $F_{m+n+1} = F_{n+1}F_{m+1} + F_mF_n \ , m \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1 = F_2 = 1$ និង $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 2$ ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ n,k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិនោះប្រភាគ $\frac{kF_{n+2}+F_n}{kF_{n+3}+F_{n+1}}$ សម្រួលមិនបាន ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ n,k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិនោះប្រភាគ $\frac{kF_{n+2}+F_n}{kF_{n+3}+F_{n+1}}$ សម្រួលមិនបាន

តាង $d = GCD(kF_{n+2} + F_n, \mathrm{F}_{n+3} + F_{n+1})$

ដោយ $d \in \mathbb{N}$ ដើម្បីស្រាយថាប្រភាគ $\frac{kF_{n+2}+F_n}{kF_{n+3}+F_{n+1}}$ សម្រួលមិនបាន

យើងត្រូវស្រាយថា: $d = 1$ ។

$$\begin{cases} d \,|\, (kF_{n+2} + F_n) & (1) \\ d \,|\, (kF_{n+3} + F_{n+1}) & (2) \end{cases} \Rightarrow d \,\big|\, \left[k(\mathrm{F}_{n+3} - F_{n+2}) + F_{n+1} - F_n \right]$$

$$\Leftrightarrow d \,|\, (kF_{n+1} + F_{n-1}) \ (3)$$

$$(1)-(3): \Rightarrow d \,\big|\, \left[k(\mathrm{F}_{n+2} - F_{n+1}) + F_n - F_{n-1} \right]$$

$$\Leftrightarrow d \,|\, (kF_n + F_{n-2})$$

ធ្វើតាមលំនាំនេះគេបាន:

$$\begin{cases} d \,|\, (kF_3 + F_1) \\ d \,|\, (kF_4 + F_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \,\big|\, \left[k(\mathrm{F}_2 + F_1) + F_1 \right] \\ d \,\big|\, \left[k(2F_2 + F_1) + F_2 \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \,|\, 2k+1 \\ d \,|\, 3k+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d \mid 6k+3 \ (*) \\ d \mid 6k+2 \ (**) \end{cases} \Leftrightarrow (*)-(**): d \mid 1$$

ដោយ $d \in \mathbb{N}$ គេបាន: $d=1$

ដូចនេះប្រភាគ $\dfrac{kF_{n+2}+F_n}{kF_{n+3}+F_{n+1}}$ សម្រួលមិនបាន ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យស្ទីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1 = F_2 = 1$ និង $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 2$ ស្រាយថា: $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

យើងមាន: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

$\Rightarrow F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n+1} (F_{k+1} - F_k) = \sum_{k=2}^{n+1} F_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow F_{n+2} - F_2 = \sum_{k=1}^{n} F_k = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$$

$\Leftrightarrow F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1 \ ;(F_2 = 1)$ ពិត

ដូចនេះ $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៣៣ គេឲ្យស្ទីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1 = F_2 = 1$ និង $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$ ។ តាង $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ស្រាយថា:

$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, n \geq 2$ រួចទាញថា: $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3, n \geq 1$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ $, n \ge 2$ រួចទាញថា:

$F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$ $, n \ge 1$

យើងមាន: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

យើងនឹងស្រាយតាមវាចាអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចំពោះ $n = 2$

យើងបាន: $Q^2 = Q.Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ ដែល: $Q^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$

យើងនឹងបន្តស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ ដែល: $Q^{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}$

យើងមាន: $Q^{k+1} = Q.Q^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_k + F_{k-1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}$ តែ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ គេបាន:

$F_{k+1} + F_k = F_{k+2}$, $F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$ យើងបាន: $Q^{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}$ ពិត

ដូចនេះ $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ $, n \ge 2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ស្រាយថា: $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$ $, n \ge 1$

យើងមាន: $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{3n} = \begin{pmatrix} F_{3n+1} & F_{3n} \\ F_{3n} & F_{3n-1} \end{pmatrix}$

ម្យ៉ាងទៀត $Q^{3n} = Q^n.Q^n.Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} F_{n+1}^2+F_n^2 & F_nF_{n+1}+F_{n-1}F_n \\ F_nF_{n+1}+F_{n-1}F_n & F_n^2+F_{n-1}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} F_{n+1}^3+F_n^2F_{n+1}+F_{n+1}F_n^2+F_n^2F_{n-1} & F_{n+1}^2F_n+F_n^3+F_{n+1}F_nF_{n-1}+F_nF_{n-1}^2 \\ F_nF_{n+1}^2+F_{n-1}F_nF_{n+1}+F_n^3+F_{n-1}^2F_n & F_n^2F_{n+1}+F_{n-1}F_n^2+F_n^2F_{n-1}+F_{n-1}^3 \end{pmatrix}$$

គេបាន: $F_{3n}=F_nF_{n+1}^2+F_{n-1}F_nF_{n+1}+F_n^3+F_{n-1}^2F_n$

$=F_nF_{n+1}(F_{n+1}+F_{n-1})+F_n^3+F_{n-1}^2F_n$

$=F_{n+1}(F_{n+1}-F_{n-1})(F_{n+1}+F_{n-1})+F_n^3+F_{n-1}^2F_n$

$=F_{n+1}(F_{n+1}^2-F_{n-1}^2)+F_n^3+F_{n-1}^2F_n$

$=F_{n+1}^3+F_n^3-F_{n+1}F_{n-1}^2+F_{n-1}^2F_n$

$=F_{n+1}^3+F_n^3-F_{n-1}^2(F_{n+1}-F_n)$

$=F_{n+1}^3+F_n^3-F_{n-1}^3$ ពិត

ដូចនេះ $F_{3n}=F_{n+1}^3+F_n^3-F_{n-1}^3\ ,n\geq 1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1=F_2=1$ និង $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\,,n\geq 2$ ស្រាយថាបញ្ជាក់ថា: $F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាបញ្ជាក់ថា: $F_{2n}=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2$

តាមទ្រឹស្តីបទ $Binet$ តាង $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ គេបាន:

$F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n-b^n)$ ហើយ $\begin{cases} a-b=\sqrt{5}, a+b=1 \\ ab=-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow F_{n+1}^2-F_{n-1}^2=\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n+1}-b^{n+1})\right]^2-\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n-1}-b^{n-1})\right]^2$$

$$=\frac{1}{5}(a^{2n+2}-2a^{n+1}b^{n+1}+b^{2n+2}-a^{2n-2}+2a^{n-1}b^{n-1}-b^{2n-2})$$

$$=\frac{1}{5}\left[a^{2n+2}+b^{2n+2}-a^{2n-2}-b^{2n-2}-2(-1)^{n+1}+2(-1)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{5}(a^{2n}.a^{2}+b^{2n}.b^{2}-a^{2n}.a^{-2}-b^{2n}.b^{-2})$$

$$=\frac{1}{5}\left[a^{2n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}+b^{2n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-a^{2n}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^{2}-b^{2n}\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^{2}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[a^{2n}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)+b^{2n}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{3-\sqrt{5}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[a^{2n}\left(\frac{(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})}{2}\right)+b^{2n}\left(\frac{(3-\sqrt{5})-(3+\sqrt{5})}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^{2n}-b^{2n})=F_{2n}$$ ពិត

ដូចនេះ $F_{2n}=F_{n+1}^{2}-F_{n-1}^{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឲ្យស្វ៊ីត $(Febonacci)$ កំណត់ដោយ: $F_1=F_2=1$ និង $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}\,,n\ge 2$

ស្រាយថា: $F_{2n}F_{n-1}-F_{2n-1}F_n=(-1)^nF_n\,,n\ge 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $F_{2n}F_{n-1}-F_{2n-1}F_n=(-1)^nF_n\,,n\ge 1$ រួចគណនា: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{2^n}}$

តាមទ្រឹស្តីបទ $Binet$ តាង $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ គេបាន:

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ ហើយ $\begin{cases} a-b=\sqrt{5}, a+b=1 \\ ab=-1 \end{cases}$

យើងបាន: $F_{2n}F_{n-1} - F_{2n-1}F_n$

$= \frac{1}{5}(a^{2n} - b^{2n})(a^{n-1} - b^{n-1}) - \frac{1}{5}(a^{2n-1} - b^{2n-1})(a^n - b^n)$

$= \frac{1}{5}\left[a^{3n-1} - a^{2n}b^{n-1} - a^{n-1}b^{2n} + b^{3n-1} - (a^{3n-1} - a^{2n-1}b^n - a^n b^{2n-1} + b^{3n-1})\right]$

$= \frac{1}{5}(a^{n-1}b^{2n-1} + a^{2n-1}b^n - a^{2n}b^{n-1} - a^{n-1}b^{2n})$

$= \frac{1}{5}\left[a^{n-1}b^{2n-1}(a-b) + a^{2n-1}b^{n-1}(b-a)\right]$

$= \frac{1}{5}(\sqrt{5}a^{n-1}b^{2n-1} - \sqrt{5}a^{2n-1}b^{n-1})$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n-1}b^{2n-1} - a^{2n-1}b^{n-1})$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^n b^n \left(\frac{1}{ab}\cdot b^n - \frac{1}{ab}\cdot a^n\right)\right]$

$= a^n b^n \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$

$= (-1)^n F_n$ ពិត

ដូចនេះ $F_{2n}F_{n-1} - F_{2n-1}F_n = (-1)^n F_n, n \geq 1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ្ញុំដើរយឺត តែខ្ញុំមិនដើរថយក្រោយ

លំហាត់ទី៣៦

គេឲ្យ $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

$f(n+2)=f(n+1)-f(n)\ ;\ f(1)=1\ ,\ f(2)=0$

បង្ហាញថា: $|f(n)| \le \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $|f(n)| \le \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

យើងមាន: $f(n+2)=f(n+1)-f(n)\ ;\ f(1)=1\ ,\ f(2)=0$

តាង $f(n)=u_n$ គេបាន $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n\ ;\ u_1=f(1)=1\ ,\ u_2=f(2)=0$

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីតគឺ $\lambda^2-\lambda+1=0$ មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិច

$\lambda_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\ ,\ \lambda_2=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$

ដោយ $\lambda=\cos\dfrac{\pi}{3}\pm i\sin\dfrac{\pi}{3}$ គេបាន: $u_n=f(n)=A\cos\dfrac{n\pi}{3}+B\sin\dfrac{n\pi}{3}$

ដែល A, B ជាចំនួនថេរដែលត្រូវរក ។

យើងមាន: $\begin{cases} 1=u_1=A\cos\dfrac{\pi}{3}+B\sin\dfrac{\pi}{3} \\ 0=u_2=A\cos\dfrac{2\pi}{3}+B\sin\dfrac{2\pi}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}B=1 \quad (1) \\ -\dfrac{1}{2}A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}B=0 \quad (2) \end{cases}$$

យក $(1)+(2)$ គេបាន: $B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ហើយ $A=1$ ។

យើងបាន: $f(n)=\cos\dfrac{n\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{n\pi}{3}$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$|f(n)|=\left|\cos\frac{n\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right|\le\sqrt{\left(1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)\left(\cos^2\frac{n\pi}{3}+\sin^2\frac{n\pi}{3}\right)}$$

ឬ $|f(n)|\le\sqrt{1+\dfrac{3}{9}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ពិត

ដូចនេះ $|f(n)|\le\sqrt{1+\dfrac{3}{9}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$f\left(x^2+x+3\right)+2f\left(x^2-3x+5\right)=6x^2-10x+7\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ។

គណនា $f(2015)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $f(2015)$

យើងមាន: $f\left(x^2+x+3\right)+2f\left(x^2-3x+5\right)=6x^2-10x+7\ \ (1)$

ជំនួស x ដោយ $1-x$ ក្នុង (1) យើងបាន:

$f\left(x^2-3x+5\right)+2f\left(x^2+x+3\right)=6x^2-2x+13\ \ (2)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (2) នឹង -2 គេបាន:

$-2f\left(x^2-3x+5\right)-4f\left(x^2+x+3\right)=-12x^2+4x-26\ \ (3)$

យក $(1)+(3)$ យើងបាន:

$-3f\left(x^2+x+3\right)=-6x^2-6x-9$

$f\left(x^2+x+3\right)=2\left(x^2+x+3\right)-3$

$f\left(2015\right)=2\times 2015-3=4027$

ដូចនេះ $f\left(2015\right)=4027$ ។

លំហាត់ទី៣៨

កំណត់អនុគមន៍ f ដែលកំណត់លើសំណុំចំនួនពិតវិជ្ជមាន ឬ សូន្យ $\mathbb{R}_+$ ទៅ $\mathbb{R}_+$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$(i).f(2)=0$

$(ii).f(x)\neq 0 \quad 0\leq x<2$

$(iii).f(x.f(y)).f(y)=f(x+y)$ ចំពោះ $\forall x,y\in\mathbb{R}_+$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ f

យើងមាន:

$f:\mathbb{R}_+\rightarrow\mathbb{R}_+$

$(i).f(2)=0$

$(ii).f(x)\neq 0 \quad , \; 0\leq x<2$

$(iii).f(x.f(y)).f(y)=f(x+y) \quad , \; \forall x,y\in\mathbb{R}_+$

-បើ $y=2$ តាម (iii) គេបាន: $f(x.f(2)).f(2)=f(x+2)$

$f(x.0).0=f(x+2)$ ព្រោះ $f(2)=0$

$f(x+2)=0$

តែ $x\geq 0\Rightarrow x+2\geq 2$ គេបាន: $f(x)=0$ ចំពោះ $x\geq 2$

-បើ $x=2-y$ តាម (iii) គេបាន:

$f\left[(2-y).f(y)\right].f(y)=f(2)=0$

$f\left[(2-y).f(y)\right].f(y)=0$ តែ $f(y)\neq 0$ តាម (ii) យើងបាន:

$(2-y).f(y)=2$

$f(y)=\dfrac{2}{2-y}$ ចំពោះ $y<2$

នោះ $f(x)=\dfrac{2}{2-x}$ ចំពោះ $x<2$

ដូចនេះ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{2-x} & , \ 0\leq x<2\\ 0 & , \ x\geq 2\end{cases}$

លំហាត់ទី៣៩

ត្រីកោណ ABC មានជ្រុង $BC=x$, $AC=y$ និង $AB=z$ ។

រកតម្លៃតូចបំផុត $S=\sqrt{\dfrac{x}{2y+2z-x}}+\sqrt{\dfrac{y}{2z+2x-y}}+\sqrt{\dfrac{z}{2x+2y-z}}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុត $S=\sqrt{\dfrac{x}{2y+2z-x}}+\sqrt{\dfrac{y}{2z+2x-y}}+\sqrt{\dfrac{z}{2x+2y-z}}$

យើងមាន: $S=\sqrt{\dfrac{x}{2y+2z-x}}+\sqrt{\dfrac{y}{2z+2x-y}}+\sqrt{\dfrac{z}{2x+2y-z}}$

$=\sqrt{3}\left[\dfrac{x}{\sqrt{3x(2y+2z-x)}}+\dfrac{y}{\sqrt{3y(2z+2x-y)}}+\dfrac{z}{\sqrt{3z(2x+2y-z)}}\right]$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន:

$2(x+y+z)=3x+\left(2y+2z-x\right)\geq 2\sqrt{3x(2y+2z-x)}$

$x+y+z\geq\sqrt{3x(2y+2z-x)}$

$$\frac{x}{\sqrt{3x(2y+2z-x)}} \ge \frac{x}{x+y+z} \quad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន: $\frac{y}{\sqrt{3y(2z+2x-y)}} \ge \frac{y}{x+y+z}$ (2)

$$\frac{z}{\sqrt{3z(2x+2y-z)}} \ge \frac{z}{x+y+z} \quad (3)$$

យក $(1)+(2)+(3)$ រួចគុណនឹង $\sqrt{3}$ យើងបាន:

$S \ge \sqrt{3}\left(\frac{x+y+z}{x+y+z}\right) = \sqrt{3}$ សមភាពកើតមានពេលណា $x=y=z$ ។

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ S គឺ $\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៤០

ស្រាយថា: $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(5-3\sqrt[3]{7}\right)}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(5-3\sqrt[3]{7}\right)}$

យើងឃើញថា $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$ ជាឫសនៃសមីការ $3x+4x=2k\pi$

យើងបាន: $\cos 3x = \cos 4x$

$$4\cos^3 x - 3\cos x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$(\cos x - 1)\left(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1\right) = 0$$

ដោយ $\cos x - 1 \ne 0$ គេបាន: $8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$

យក $t_1 = 2\cos\frac{2\pi}{7}$, $t_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7}$, $t_3 = 2\cos\frac{6\pi}{7}$ នោះ t_1 , t_2 , t_3

ជាឫសនៃសមីការ $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$

ដែល $\begin{cases} t_1+t_2+t_3=-1 \\ t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-2 \\ t_1t_2t_3=1 \end{cases}$

តាង $A=\sqrt[3]{t_1}+\sqrt[3]{t_2}+\sqrt[3]{t_3}$; $B=\sqrt[3]{t_1t_2}+\sqrt[3]{t_2t_3}+\sqrt[3]{t_3t_1}$ យើងបាន:

$A^3=t_1+t_2+t_3+3AB-3\sqrt[3]{t_1t_2t_3}=3AB-4\ (*)$

$B^3=t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1+3B\sqrt[3]{t_1t_2t_3}.A-3\sqrt[3]{t_1^2t_2^2t_3^2}$

$B^3=3AB-5\ (**)$

យក $(*)\times(**)$ គេបាន:

$(AB)^3=9(AB)^2-27AB+20$

$(AB-3)^3+7=0$

$AB=3-\sqrt[3]{7}$

$A^3=5-3\sqrt[3]{7}$

$\Rightarrow A=\sqrt[3]{5-3\sqrt[3]{7}}$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{6\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(5-3\sqrt[3]{7}\right)}$

អនុវត្តន៍: ស្រាយថា: $\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3\sqrt[3]{9}-6\right)}$

លំហាត់ទី៤១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ $R=1$ និងមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ហើយ
មុំ A , B , C បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួមស្មើ 2 ។ គណនា $a^2+b^2+c^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $a^2+b^2+c^2$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$\Rightarrow a=2R\sin A\ ,\ b=2R\sin B\ ,\ c=2R\sin C$

យើងបាន: $a^2+b^2+c^2=\left(2R\sin A\right)^2+\left(2R\sin B\right)^2+\left(2R\sin C\right)^2$

$=4R^2\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)$

$=4\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)\quad ,\ R=1$

ដោយ $A\ ,\ B\ ,\ C$ ជាស្វីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q=2$

នោះ: $B=2A\ ,\ C=4A$

តែ $A+B+C=\pi\Rightarrow A+2A+4A=7A=\pi\Rightarrow A=\dfrac{\pi}{7}$

គេបាន: $a^2+b^2+c^2=4\left(\sin^2\dfrac{\pi}{7}+\sin^2\dfrac{2\pi}{7}+\sin^2\dfrac{4\pi}{7}\right)$

$$=4\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}+1-\cos\frac{4\pi}{7}+1-\cos\frac{8\pi}{7}\right)\right]$$

$$=2\left[3-\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)\right]\quad (*)$$

គណនា $S=\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$

ដោយគុណអង្គនឹង $2\sin\dfrac{\pi}{7}$ យើងបាន:

$$2\sin\frac{\pi}{7}S=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$$

$$=\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{9\pi}{7}-\sin\pi\right)$$

$$=\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\frac{9\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}$$

$$= 2\sin\pi.\cos\left(\frac{\frac{9\pi}{7}-\frac{5\pi}{7}}{2}\right)-\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$$

$$\Rightarrow S = \frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}$$

តាម (*) គេបាន: $a^2+b^2+c^2 = 2\left(3+\frac{1}{2}\right) = 7$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 = 7$ ។

លំហាត់ទី៤២

A និង B ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល:

$$\frac{A}{B} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1342}+\frac{1}{1343}$$ ។

បង្ហាញថា A ចែកដាច់នឹង 2015 ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា A ចែកដាច់នឹង 2015

យើងមាន: $\frac{A}{B} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1342}+\frac{1}{1343}$

$$= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1343}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1342}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1343}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{671}\right)$$

$$= \frac{1}{672}+\frac{1}{673}+\cdots+\frac{1}{1342}+\frac{1}{1343}$$

$$=\left(\frac{1}{672}+\frac{1}{1343}\right)+\left(\frac{1}{673}+\frac{1}{1342}\right)+\cdots$$

$$=\frac{2015}{672\times1343}+\frac{2015}{673\times1342}+\cdots$$

ដូចនេះ A ចែកដាច់នឹង 2015 ។

លំហាត់ទី៤៣

កំណត់ចំនួនថេរ k ដែលពហុធា: $P(x,y,z)=x^5+y^5+z^5+k\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$ មានជាកត្តា $x+y+z$ ។ ស្រាយថាចំពោះតម្លៃ k ដែលរកឃើញនេះពហុធា $P(x,y,z)$ មានជាកត្តា $(x+y+z)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនថេរ k

សន្មតថា ជាចំនួនថេរ និង ជាអញ្ញាត

បើ $x+y+z$ ឬ $x-(-y-z)$ ជាកត្តានៃ $P(x,y,z)$ កាលណា

$P(-y-z,y,z)=0$

យើងមាន: $P(x,y,z)=x^5+y^5+z^5+k\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$

យើងបាន: $P(-y-z,y,z)$

$$=(-y-z)^5+y^5+z^5+k\left[(-y-z)^3+y^3+z^3\right]\left[(-y-z)^2+y^2+z^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow -\left(y^5+5y^4z+10y^3z^2+10y^2z^3+5yz^4+z^5\right)+y^5+z^5$$

$$+k\left(-3y^2z-3yz^2\right)\left(2y^2+2z^2+2yz\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -5yz\left(y^3+2y^2z+2yz^2+z^3\right)-6kyz\left(y+z\right)\left(y^2+z^2+yz\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -5yz\left[(y+z)\left(y^2-yz+z^2\right)+2yz(y+z)\right]$$

$$-6kyz(y+z)\left(y^2+z^2+yz\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -5yz(y+z)\left(y^2+yz+z^2\right)-6kyz(y+z)\left(y^2+yz+z^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -(5+6k)=0$$

$$\Rightarrow k=-\frac{5}{6}$$

ដូចនេះ $k=-\dfrac{5}{6}$ ។

ស្រាយថាពហុធា $P(x,y,z)$ មានជាកត្តា $(x+y+z)^2$ ចំពោះ $k=-\dfrac{5}{6}$

ចំពោះ $k=-\dfrac{5}{6}$ គេបាន:

$$P(x,y,z)=x^5+y^5+z^5-\frac{5}{6}\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$\Leftrightarrow P(x,y,z)=\frac{1}{6}\left[6\left(x^5+y^5+z^5\right)-5\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\ (*)$$

យក x,y,z ជាឫសនៃសមីការ $t^3-at^2+bt-c=0$

ដែលមាន $a=x+y+z$, $b=xy+yz+xz$, $c=xyz$

យើងបាន: $$\begin{cases} x^3-ax^2+bx-c=0 \\ y^3-ay^2+by-c=0 \\ z^3-az^2+bz-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{n+3}-ax^{n+2}+bx^{n+1}-cx^n=0 \\ y^{n+3}-ax^{n+2}+bx^{n+1}-cx^n=0 \\ z^{n+3}-ax^{n+2}+bx^{n+1}-cx^n=0 \end{cases}$$

បូកអង្គ នឹងអង្គរួចតាង $S_n=x^n+y^n+z^n$ គេបាន:

$$S_{n+3}-aS_{n+2}+bS_{n+1}-cS_n=0$$

$$S_{n+3}=aS_{n+2}-bS_{n+1}+cS_n$$

ដោយ $S_0=x^0+y^0+z^0=3$

$$S_1=x+y+z=a$$

$$S_2=x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=a^2-2b$$

$$S_3 = aS_2 - bS_1 + cS_0$$
$$= a\left(a^2 - 2b\right) - ba + 3c$$
$$= a^3 - 3ab + 3c$$
$$S_4 = aS_3 - bS_2 + cS_1$$
$$= a\left(a^3 - 3ab + 3c\right) - b\left(a^2 - 2b\right) + ca$$
$$= a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$$
$$S_5 = aS_4 - bS_3 + cS_2$$
$$= a\left(a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2\right) - b\left(a^3 - 3ab + 3c\right) + c\left(a^2 - 2b\right)$$
$$= a^5 - 5a^3b + 5a^2c + 5ab^2 - 5bc$$

តាម (*) យើងបាន: $P(x,y,z) = \frac{1}{6}(6S_5 - 5S_3S_2)$

$$= \frac{1}{6}\left[6\left(a^5 - 5a^3b + 5a^2c + 5ab^2 - 5bc\right) - 5\left(a^3 - 3ab + 3c\right)\left(a^2 - 2b\right)\right]$$
$$= \frac{1}{6}\left[6\left(a^5 - 5a^3b + 5a^2c + 5ab^2 - 5bc\right) - 5\left(a^5 - 5a^3b + 6ab^2 + 3a^2c - 6bc\right)\right]$$
$$= \frac{1}{6}\left(a^5 - 5a^3b + 15a^2c\right)$$
$$= \frac{1}{6}a^2\left(a^3 - 5ab + 15c\right)$$
$$= \frac{1}{6}(x+y+z)^2\left[(x+y+z)^3 - 5(x+y+z)(xy+yz+zx) + 15xyz\right]$$

ដូចនេះពហុធា $P(x,y,z)$ មាន $(x+y+z)^2$ ជាកត្តា ។

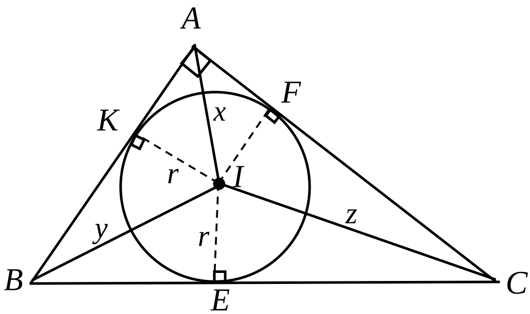
លំហាត់ទី៤៤

ត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត I និងកាំ r x,y,z ជាប្រវែងពីផ្ចិតទៅកំពូល A,B,C រៀងគ្នា ។

បង្ហាញថា: $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{\sqrt{2}}{yz}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{\sqrt{2}}{yz}$



រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណប៉ះជ្រុង BC,AC,AB ត្រង់ចំណុច E,F,K រៀងគ្នា ។ AI,BI,CI ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង A,B,C រៀងគ្នា ។

ក្នុងត្រីកោណកែង AKI មាន: $x=\dfrac{r}{\sin 45^0}=\dfrac{r}{\sin\dfrac{B+c}{2}}$

ក្នុងត្រីកោណកែង IBK មាន: $y=\dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}$

ក្នុងត្រីកោណកែងមាន: $z=\dfrac{r}{\sin\dfrac{C}{2}}$

យើងបាន: $\dfrac{yz}{x}=\dfrac{\dfrac{r^2}{\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}}}{\dfrac{r}{\sin\dfrac{B+C}{2}}}=\dfrac{r\sin\dfrac{B+C}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}}$

$$= r\cdot\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}} = \left(\frac{r}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{r}{\tan\frac{C}{2}}\right) \quad (1)$$

ក្នុងត្រីកោណកែង IBE មាន: $BE = \dfrac{r}{\tan\frac{B}{2}}$

ក្នុងត្រីកោណកែង ICE មាន: $CE = \dfrac{r}{\tan\frac{C}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{r}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{r}{\tan\frac{C}{2}} = BE+CE = BC = a$$

តាម (1) គេបាន: $a = \dfrac{yz}{x} \Rightarrow a^2 = \dfrac{y^2z^2}{x^2}$ (2)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ BIC គេបាន:

$$BC^2 = a^2 = y^2+z^2-2yz\cos\angle BIC$$

$$= y^2+z^2-2yz\cos\left(180^0-\frac{B+C}{2}\right)$$

$$= y^2+z^2-2yz\cos\left(180^0-45^0\right)$$

$$= y^2+z^2-2yz\cos135^0$$

$$= y^2+z^2+2yz.\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

តាម (2) និង (3) គេបាន: $\dfrac{y^2z^2}{x^2} = y^2+z^2+yz.\sqrt{2}$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{\sqrt{2}}{yz} \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{\sqrt{2}}{yz}$ ។

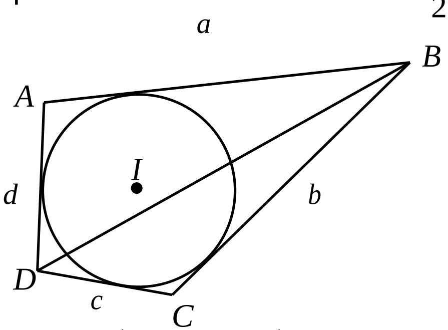
លំហាត់ទី៤៥

ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង $AB=a, BC=b, CD=c$ និង $DA=d$ ចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត I ។

បង្ហាញថាក្រឡាផ្ទៃចតុកោណប៉ោង $S=\sqrt{abcd}.\sin\frac{A+C}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាក្រឡាផ្ទៃចតុកោណប៉ោង $S=\sqrt{abcd}.\sin\frac{A+C}{2}$



យើងមាន: $S=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C$

$4S=2ad\sin A+2bc\sin C$ លើអង្គជាការេ

គេបាន: $16S^2=4a^2d^2\sin^2 A+4b^2c^2\sin^2 c+8abcd\sin A\sin C \quad (1)$

តាមទ្រឹស្តីកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABD និង BCD :

$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C$

$\Rightarrow a^2+d^2-b^2-c^2=2ad\cos A-2bc\cos C$ លើអង្គជាការេ

$\Rightarrow\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2=\left(2ad\cos A-2bc\cos C\right)^2$

$=4a^2d^2\cos^2 A-8abcd\cos A\cos C+4b^2c^2\cos^2 c \quad (2)$

យក $(1)+(2)$ គេបាន:

$$16S^2+\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2=4a^2d^2+4b^2c^2-8adcd\cos(A+C)$$

$$=\left(2ad\right)^2+\left(2bc\right)^2-8abcd\left[2\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)-1\right]$$

$$=\left(2ad\right)^2+\left(2bc\right)^2-16adcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)+8abcd$$

$$=\left(2ad+2bc\right)^2-16\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2=\left(2ad\right)+\left(2bc\right)^2-\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2-16abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$=\left(2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2\right)\left(2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2\right)$$

$$-16abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$=\left[(b+c)^2-(a-d)^2\right]\left[(a+d)^2-(b-c)^2\right]-16abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$=(b+c+a-d)(b+c+d-a)(a+d+b-c)(a+d+c-b)$$

$$-16abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$=(a+b+c+d-2d)(a+b+c+d-2c)(a+b+c+d-2b)(a+b+c+d-2a)$$

$$-16abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)\quad(3)$$

តែ $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}\Rightarrow a+b+c+d=2p$ តាម (3) គេបាន:

$$16S^2=(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c(2p-2d)-16abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)\quad(4)$$

ដោយ $ABCD$ ជាចតុកោណប៉ោងចារឹកក្រៅរង្វង់នោះ $a+c=b+d$

$$\Rightarrow p-a=\frac{a+b+c+d}{2}-a=\frac{2(a+c)}{2}-a=c$$

$$p-b=\frac{a+b+c+d}{2}-b=\frac{2(b+d)}{2}-b=d$$

$$p-c=\frac{a+b+c+d}{2}-c=\frac{2(a+c)}{2}-c=a$$

$$p-d=\frac{a+b+c+d}{2}-d=\frac{2(b+d)}{2}-d=b$$

តាម (4) យើងបាន:

$$S^2=abcd-abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)=abcd\left[1-\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)\right]=abcd\sin^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$\Rightarrow S=\sqrt{abcd}.\sin\frac{A+C}{2}$ ពិត

ដូចនេះក្រឡាផ្ទៃចតុកោណប៉ោង $S=\sqrt{abcd}.\sin\frac{A+C}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

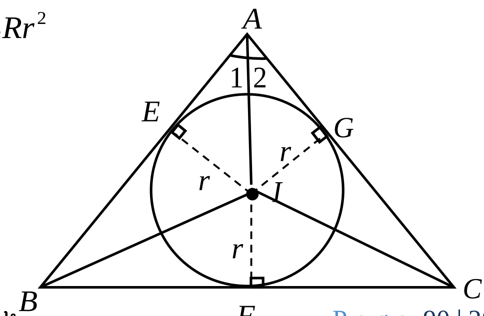
ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=b$ ។ r និង R ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងក្រៅត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ។ បង្ហាញថា:

$a)\ IA.IB.IC=4Rr^2$

$b)\ aIA^2+bIB^2+bIC^2=abc$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $a)\ IA.IB.IC=4Rr^2$



រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណប៉ះជ្រុង AB, BC, AC ត្រង់ចំណុច E, F, G រៀងគ្នា ។ AI, BI, CI ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង A, B, C រៀងគ្នា ។

ក្នុងត្រីកោណកែង AIE មាន: $IA = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$

ក្នុងត្រីកោណកែង BIF មាន: $IB = \dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ IBC :

$$\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{IC}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{BC}{\sin\left(180^0 - \frac{B+C}{2}\right)} = \frac{a}{\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{IC}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{2R\sin A}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow IC = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

យើងបាន: $IA.IB.IC = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cdot\dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}\cdot\dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}} = 4Rr^2$ ពិត ។

ដូចនេះ $IA.IB.IC = 4Rr^2$ ។

$b)\ aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABC :

$a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$

យើងបាន: $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2$

$$= 2R\sin A\cdot\frac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}} + 2R\sin B\cdot\frac{r^2}{\sin^2\frac{B}{2}} + 2R\sin C\cdot\frac{r^2}{\sin^2\frac{C}{2}}$$

$$= 4Rr^2\left(\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}}\right)$$

$$= 4Rr^2\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right) \quad (1)$$

ដោយ $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \cot\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}\ ,\ \cot\frac{B}{2}=\frac{p-b}{r}\ ,\ \cot\frac{C}{2}=\frac{p-c}{r}$$

តាម (1) គេបាន:

$$aIA^2+bIB^2+cIC^2=4Rr^2\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{r}\right)=4Rpr \quad (2)$$

តែ $S=\frac{abc}{4R}$, $S=pr\Rightarrow\frac{abc}{4R}=pr\Rightarrow 4Rpr=abc$

តាម (2) គេបាន: $aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$ ពិត

ដូចនេះ: $aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$ ។

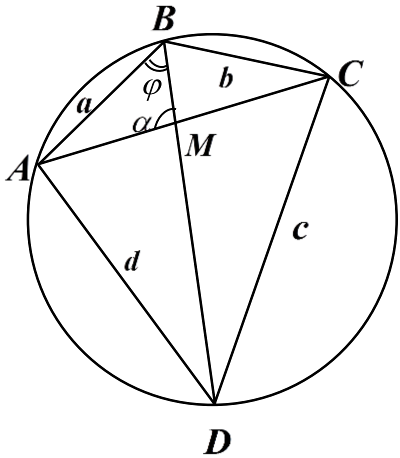
លំហាត់ទី៤៧

ចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O និងកាំ R ។ អង្កត់ទ្រូង AC និង BD កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច M ។ R_1, R_2, R_3, R_4 ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ MAB, MBC, MCD និង MDA រៀងគ្នា ។

ស្រាយថា: $R=\sqrt{\frac{(R_1R_4+R_2R_3)(R_1R_2+R_3R_4)}{R_1R_3+R_2R_4}}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $R=\sqrt{\dfrac{(R_1R_4+R_2R_3)(R_1R_2+R_3R_4)}{R_1R_3+R_2R_4}}$



តាង $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, \angle AMB=\alpha, \angle ABM=\varphi$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ MAB, MBC, MCD, MDA:

$R_1=\dfrac{a}{2\sin\alpha}$

$R_2=\dfrac{b}{\sin\angle BMC}=\dfrac{b}{2\sin(180^0-\alpha)}=\dfrac{b}{2\sin\alpha}$ ($\alpha+\angle BMC=180^0$ មុំរាប)

$R_3=\dfrac{c}{2\sin\angle CMD}=\dfrac{c}{2\sin\alpha}$ ($\angle CMD=\alpha$ មុំទល់កំពូល)

$R_4=\dfrac{d}{2\sin\alpha}$ ($\alpha=\angle CMB=\angle AMD$ មុំទល់កំពូល)

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ MAB: $MA=2R_1\sin\varphi$ (1)

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ BAD:

$\sin\varphi=\dfrac{d}{2R}$ (ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅចតុកោណ $ABCD$)

តាម (1) គេបាន: $MA=\dfrac{R_1d}{R}$ (2)

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ MAD : $d=2R_4\sin\alpha$

តាម (2) គេបាន: $MA=\dfrac{2R_1R_4\sin\alpha}{R}$ (3)

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន: $MC=\dfrac{2R_2R_3\sin\alpha}{R}$ (4)

យក $(3)+(4)$ យើងបាន:

$$MA+MC=AC=\frac{2\sin\alpha\left(R_1R_4+R_2R_3\right)}{R} \quad (5)$$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន: $BD=\dfrac{2\sin\alpha\left(R_1R_2+R_3R_4\right)}{R}$ (6)

តាមទ្រឹស្តីបទតូលេមីចំពោះចតុកោណ $ABCD$:

$AC.BD=ac+bd$ យើងបាន:

$$\frac{4\sin^2\alpha\left(R_1R_4+R_2R_3\right)\left(R_1R_2+R_3R_4\right)}{R^2}=4\sin^2\alpha\left(R_1R_3+R_2R_4\right)$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{\frac{\left(R_1R_4+R_2R_3\right)\left(R_1R_2+R_3R_4\right)}{R_1R_3+R_2R_4}}$$ ពិត

ដូចនេះ: $R=\sqrt{\dfrac{\left(R_1R_4+R_2R_3\right)\left(R_1R_2+R_3R_4\right)}{R_1R_3+R_2R_4}}$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យ α,β,φ ជាមុំបីវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $\alpha+\beta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ ។

រកតម្លៃធំបំផុតនៃ:

$$P=\sqrt{1+\tan\alpha\tan\beta}+\sqrt{1+\tan\beta\tan\varphi}+\sqrt{1+\tan\varphi\tan\alpha}$$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃធំបំផុតនៃ:

$P=\sqrt{1+\tan\alpha\tan\beta}+\sqrt{1+\tan\beta\tan\varphi}+\sqrt{1+\tan\varphi\tan\alpha}$

យើងមាន: $\alpha+\beta+\varphi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\varphi$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot\varphi=\frac{1}{\tan\varphi}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$\Rightarrow\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\varphi+\tan\varphi\tan\alpha=1$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$:

$\sqrt{1+\tan\alpha\tan\beta}+\sqrt{1+\tan\beta\tan\varphi}+\sqrt{1+\tan\varphi\tan\alpha}$

$\leq\sqrt{\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(3+\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\varphi+\tan\varphi\tan\alpha\right)}$

$\Leftrightarrow P\leq\sqrt{3(3+1)}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃ

$P=\sqrt{1+\tan\alpha\tan\beta}+\sqrt{1+\tan\beta\tan\varphi}+\sqrt{1+\tan\varphi\tan\alpha}$ គឺ $2\sqrt{3}$

ពេល $\alpha=\beta=\varphi=\frac{\pi}{6}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $bc\sqrt{3}=R\left[2(b+c)-a\right]$ ។ R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

យើងមាន: $bc\sqrt{3}=R\left[2(b+c)-a\right]$ (1)

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases}$

តាម (1) យើងបាន:

$$2R\sin B.2R\sin C\sqrt{3}=R\left[2\left(2R\sin B+2R\sin C\right)-2R\sin A\right]$$

$$\Rightarrow 4R^2\sqrt{3}\sin B\sin C=2R^2\left[2(\sin B+\sin C)-\sin A\right]$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}\sin B\sin C=2(\sin B+\sin C)-\sin A$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}\sin B\sin C+\sin(B+C)=2(\sin B+\sin C)$$

$$\Rightarrow \sin B(\cos C+\sqrt{3}\sin C)+\sin C(\cos B+\sqrt{3}\sin B)=2(\sin B+\sin C)$$

$$\Rightarrow 2\sin B\cos(C-60^0)+2\sin C\cos(B-60^0)=2(\sin B+\sin C)$$

$$\Rightarrow \sin B\left[1-\cos(C-60^0)\right]+\sin C\left[1-\cos(B-60^0)\right]=0 \quad (1)$$

ដោយ

$$\begin{cases}\sin B>0\\ 1-\cos(C-60^0)\ge 0\end{cases}\Rightarrow \sin B\left[1-\cos(C-60^0)\right]\ge 0$$

$$\begin{cases}\sin C>0\\ 1-\cos(B-60^0)\ge 0\end{cases}\Rightarrow \sin C\left[1-\cos(B-60^0)\right]\ge 0$$

សមីការ (1) ផ្ទៀងផ្ទាត់កាលណា:

$$\begin{cases}1-\cos(C-60^0)=0\\ 1-\cos(B-60^0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos(C-60^0)=1=\cos 0\\ \cos(B-60^0)=1=\cos 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=60^0\\ B=60^0\end{cases}$$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

លំហាត់ទី៥០

កំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$$f(xy)+f(x-y)+f(x+y+1)=xy+2x+1\ ;\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$

យើងមាន: $f(xy)+f(x-y)+f(x+y+1)=xy+2x+1$

យក $y=-1 \Rightarrow f(-x)+f(x+1)+f(x)=x+1 \quad (1)$

យក $y=0 \Rightarrow f(0)+f(x+1)+f(x)=2x+1 \quad (2)$

យក $(1)-(2)$ គេបាន: $f(-x)-f(0)=-x \quad (3)$

តាង $t=-x$ នោះតាម (3) : $f(t)-f(0)=t \Rightarrow f(t)-t=f(0)-0 \quad (*)$

តាង $g(t)=f(t)-t$ នោះតាម $(*)$: $g(t)=g(0)$; $\forall t\in\mathbb{R}$

យើងមាន: $f(xy)+f(x-y)+f(x+y+1)=xy+2x+1$

$$\left[f(xy)-xy\right]+\left[f(x-y)-(x-y)\right]+\left[f(x+y+1)-(x+y+1)\right]=0$$

$$g(xy)+g(x-y)+g(x+y+1)=0$$

$3g(0)=0$ ឬ $g(0)=0 \Rightarrow f(t)-t=0 \Rightarrow f(t)=t \Rightarrow f(x)=x$, $\forall x$

ដូចនេះ $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

លំហាត់ទី៥១

គេមានអនុគមន៍ពីរ $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}+\sqrt[3]{\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}$

$$g(x)=x^4-4x^2+2$$

បង្ហាញថា $f\left[g(x)\right]=g\left[f(x)\right]$ ចំពោះគ្រប់ $\forall x\geq 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $f\left[g(x)\right]=g\left[f(x)\right]$ ចំពោះគ្រប់ $\forall x\geq 2$

យើងមាន: $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}+\sqrt[3]{\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}$

$$g(x)=x^4-4x^2+2$$

តាង $x=t+\dfrac{1}{t}$ នោះ $t\geq 1$ គេបាន:

$$g(x)=x^4-4x^2+2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^4-4\left(t+\frac{1}{t}\right)^2+2$$

$$=t^4+4t^2+6+4\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}-4\left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right)+2=t^4+\frac{1}{t^4}$$

យើងបាន:

$$\sqrt{\frac{[g(x)]^2}{4}-1}=\sqrt{\frac{\left(t^4+\frac{1}{t^4}\right)^2}{4}-1}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(t^4+\frac{1}{t^4}\right)^2-4}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(t^4\right)^2-2+\left(\frac{1}{t^4}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(t^4-\frac{1}{t^4}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(t^4-\frac{1}{t^4}\right)$$

$$\frac{g(x)}{2}+\sqrt{\frac{[g(x)]^2}{4}-1}=\frac{t^4+\frac{1}{t^4}}{2}+\frac{t^4-\frac{1}{t^4}}{2}=t^4$$

$$\frac{g(x)}{2}-\sqrt{\frac{[g(x)]^2}{4}-1}=\frac{t^4+\frac{1}{t^4}}{2}-\frac{t^4-\frac{1}{t^4}}{2}=\frac{1}{t^4}$$

តែ $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}+\sqrt{\dfrac{x^2}{2}-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}-\sqrt{\dfrac{x^2}{4}-1}}$ គេបាន:

$$f\left[g(x)\right]=\sqrt[3]{\frac{g(x)}{2}+\sqrt{\frac{[g(x)]^2}{2}-1}}+\sqrt[3]{\frac{g(x)}{2}-\sqrt{\frac{[g(x)]^2}{4}-1}}$$

$$=\sqrt[3]{t^4}+\sqrt[3]{\frac{1}{t^4}}=t^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{t^{\frac{4}{3}}}\quad (*)$$

យើងមាន:

$$\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}=\sqrt{\frac{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}{4}-1}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+2+\frac{1}{t^2}-4}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}=\frac{t+\frac{1}{t}}{2}+\frac{t-\frac{1}{t}}{2}=t$$

$$\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}=\frac{t+\frac{1}{t}}{2}-\frac{t-\frac{1}{t}}{2}=\frac{1}{t}$$

គេបាន: $g[f(x)]=[f(x)]^4-4[f(x)]^2+2$

$$=\left(\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{\frac{1}{t}}\right)^4-4\left(\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{\frac{1}{t}}\right)^2+2$$

$$=\sqrt[3]{t^4}+4\sqrt[3]{t^2}+6+4\sqrt[3]{\frac{1}{t^2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{t^4}}-4\left(\sqrt[3]{t^2}+2+\sqrt[3]{\frac{1}{t^2}}\right)+2$$

$$=\sqrt[3]{t^4}+\frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}=t^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{t^{\frac{4}{3}}}\quad(**)$$

តាម (*) និង (**) យើងបាន: $f[g(x)]=g[f(x)]\ ;\ \forall x\geq 2$

ដូចនេះ $f[g(x)]=g[f(x)]\ ;\ \forall x\geq 2$ ។

លំហាត់ទី៥២

កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$f(x).f(y)-f(x+y)=\sin x.\sin y$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $f(x).f(y)-f(x+y)=\sin x.\sin y\quad(*)$

យក $x=y=0\Rightarrow f^2(0)-f(0)=0$

$\Rightarrow f(0)[f(0)-1]=0$ ទាញបាន: $f(0)=0$, $f(0)=1$

-ករណី $f(0)=0$:

យក $y=0$ តាម $(*)$: $f(x).f(0)-f(x)=\sin x.\sin 0=0$

$\Rightarrow -f(x)=0$ នោះ $f(x)=0$ ។

-ករណី $f(0)=1$:

យក $x=-y$ តាម $(*)$: $f(x).f(-x)=1-\sin^2 x=\cos^2 x$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right).f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ នោះ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ឬ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$

យក $y=\frac{\pi}{2}$ តាម $(*)$: $f(x).f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x.\sin\frac{\pi}{2}=\sin x$

ដោយ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ នោះ $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

យក $y=-\frac{\pi}{2}$ តាម $(*)$: $f(x).f\left(-\frac{\pi}{2}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x.\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

ដោយ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ នោះ $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(t)=\cos t$ ឬ $f(x)=\cos x$ ។

លំហាត់ទី៥៣

ស្រាយថាគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ:

$\forall x,y\in\mathbb{R}: f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y)$ លុះត្រាតែ

$\forall x,y\in\mathbb{R}: f(x+y)=f(x)+f(y)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា:ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ គេបាន:

$f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y)\Leftrightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)$

-ស្រាយថា: ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ គេបាន:

$f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y)\Rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)$

យើងមាន: $x,y\in\mathbb{R}:f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y)\quad(1)$

តាង $y=u+v+uv$ តាម (1) គេបាន:

$f\left[x(u+v+uv)+x+(u+v+uv)\right]=f\left[x(u+v+uv)\right]+f(x)+f(u+v+uv)$

$=f\left[x(u+v+uv)\right]+f(x)+f(u)+f(v)+f(uv)\quad(2)$

ជំនួស $x\to u$ និង $u\to x$ តាម (2) គេបាន:

$f\left[x(u+v+uv)+x+(u+v+uv)\right]=f\left[u(x+v+xv)+u+(x+v+xv)\right]$

$=f\left[u(x+v+xv)\right]+f(u)+f(x)+f(v)+f(xv)\quad(3)$

ផ្ទឹម (2) និង (3) យើងបាន:

$f\left[x(u+v+uv)\right]+f(uv)=f\left[u(x+v+xv)\right]+f(xv)\quad(4)$

យក $x=1$ តាម (4) គេបាន:

$f(u+v+uv)+f(uv)=f(u+2uv)+f(v)\quad(5)$

តាម (1) និង (5) គេបាន:

$f(u)+f(v)+f(uv)+f(uv)=f(u+2uv)+f(v)$

$f(u)+2f(uv)=f(u+2uv)\quad(6)$

យក $u=0$ តាម (6) យើងបាន:

$3f(0)=0$ នោះ $f(0)=0\quad(7)$

យក $v=-1$ តាម (6) គេបាន:

$f(u)+2f(-u)=f(-u)$ នោះ $f(-u)=-f(u)\quad(8)$

យក $v=-\dfrac{1}{2}$ តាម (6) គេបាន:

$f(u)+2f\left(-\dfrac{u}{2}\right)=f(0)=0$ (តាម (7))

$f(u)=-2f\left(-\frac{u}{2}\right)=2f\left(\frac{u}{2}\right)$ (តាម (8))

ឬ $f(2u)=2f(u)$ (9)

តាម (6) និង (9) យើងបាន:

$f(u+2uv)=f(u)+f(2uv)$ (10)

តាង $t=2v$ តាម (10) គេបាន:

$f(u+ut)=f(u)+f(ut)$ (11)

ចំពោះ $u=0$ តាម (11) គេបាន: $f(0)=0$ ពិត

ចំពោះ $u\neq 0$ តាង $u=x\ ,\ t=\frac{y}{x}$ តាម (11) គេបាន:

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ ពិត ។

-ស្រាយថា: ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ គេបាន:

$f(x+y)=f(x)+f(y)\Rightarrow f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y)$

យើងមាន: $f(x+y)=f(x)+f(y)$

យើងបាន: $f(xy+x+y)=f\left[xy+(x+y)\right]=f(xy)+f(x+y)$

$=f(xy)+f(x)+f(y)$ ពិត ។

លំហាត់ទី៥៤

រកឫសជាចំនួនគត់របស់សមីការ:

$1/\ x^2+2015x+2016y^2+y=xy+2016xy^2+2017$

$2/\ x^4+2014x^3+1014049x^2+x-\sqrt{2x+2015}+1008=0$

ដំណោះស្រាយ

រកឫសជាចំនួនគត់របស់សមីការ:

$1/\ x^2+2015x+2016y^2+y=xy+2016xy^2+2017$

យើងមាន: $x^2+2015x+2016y^2+y=xy+2016xy^2+2017$

$\left(x^2+2015x-2016\right)+\left(2016y^2-2016xy^2\right)+y-xy=1$

$(x-1)(x+2016)-2016y^2(x-1)-y(x-1)=1$

$(x-1)\left(x+2016-2016y^2-y\right)=1$

ដោយ $x,y\in\mathbb{Z}$ គេបាន:

$$\begin{cases}x-1=1\\x+2016-2016y^2-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\2016y^2+y-2017=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-1=-1\\x+2016-2016y^2-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\2016y^2+y-2017=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $(x=2,y=1)$; $(x=0,y=1)$ ។

$2/\ x^4+2014x^3+1014049x^2+x-\sqrt{2x+2015}+1008=0$

យើងមាន: $x^4+2014x^3+1014049x^2+x-\sqrt{2x+2015}+1008=0$

សមីការមានន័យកាលណា $2x+2015\ge 0\Rightarrow x\ge-\dfrac{2015}{2}$

យើងបាន:

$$x^2\left(x^2+2.1007x+1007^2\right)+\frac{1}{2}\left(2x-2\sqrt{2x+2015}+2016\right)=0$$

$$x^2(x+1007)^2+\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2x+2015}\right)^2-2\sqrt{2x+2015}+1\right]=0$$

$$[x(x+1007)]^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+2015}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+1007)=0\\\sqrt{2x+2015}-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\x+1007=0\end{array}\right.\\\sqrt{2x+2015}=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1007 \end{array}\right. \\ 2x+2015=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1007 \end{array}\right. \\ x=-1007 \end{cases} \Rightarrow x=-1007$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=-1007$ ។

លំហាត់ទី៥៥

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម:

$1/\log_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2+\log_{2-\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=6$

$2/\log_{2016}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=\log_{2015}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$

ដំណោះស្រាយ

$1/\log_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2+\log_{2-\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=6 \quad (1)$

លក្ខខណ្ឌ $\sqrt{x^2+1}-x>0$, $\sqrt{x^2+1}+x>0$

យើងមាន: $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}$$

យើងមាន: $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

$$\Rightarrow 2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$$

តាម (1) យើងបាន:

$$2\log_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\log_{\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}=6$$

$$2\log_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\log_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=6$$

$$\log_{2+\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=2=\log_{2+\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

$$\sqrt{x^2+1}+x=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

$$\sqrt{x^2+1}=7+4\sqrt{3}-x \quad (2)$$

ដោយ $7+4\sqrt{3}-x\geq 0$ តាម (2) គេបាន:

$$x^2+1=\left(7+4\sqrt{3}\right)^2-2x\left(7+4\sqrt{3}\right)+x^2$$

$$\Rightarrow x=\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)^2-1}{2\left(7+4\sqrt{3}\right)}=\frac{48+28\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=\dfrac{48+28\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}$ ។

$$2/\log_{2016}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=\log_{2015}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

-បើ $x=0$ សមីការទៅជា $\log_{2016}\left(\sqrt{1+0^2}+0\right)=\log_{2015}\left(\sqrt{1+0^2}+0\right)$

$$\log_{2016}1=\log_{2015}1$$

$0=0$ ពិត ។

យើងបាន $x=0$ ជាឫសសមីការ ។

-បើ $x>0$ គេបាន:

$$\sqrt{1+x^2}+x>1\Rightarrow\log_{2016}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)>\log_{2016}1$$

$$\Rightarrow\log_{2016}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)>0 \quad (1)$$

$$\sqrt{1+x^2}-x=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}<1$$

ឬ $0<\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}<1$

នោះ $\log_{2015}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)<\log_{2015}1$

$\log_{2015}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)<0 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន:

$\log_{2016}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)>\log_{2015}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$

នាំឲ្យសមីការមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $x>0$ ។

-បើ $x<0$ គេបាន:

$\sqrt{1+x^2}-x>1\Rightarrow\log_{2015}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)>0 \quad (3)$

$$\sqrt{1+x^2}+x=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}<1$$

ឬ $0<\sqrt{1+x^2}+x<1\Rightarrow\log_{2016}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)<\log_{2016}1$

$$\Rightarrow\log_{2016}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)<0 \quad (4)$$

តាម (3) និង (4) គេបាន: $\log_{2016}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)<\log_{2015}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$

នាំឲ្យសមីការមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $x<0$ ។

ដូចនេះសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x=0$ ។

លំហាត់ទី៥៦

ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេបាន:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{3}{2}\left(a+b+c\right)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{3}{2}\left(a+b+c\right)$

យើងមាន: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$

$$=\frac{a^2}{a+b}+\frac{a^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{c^2}{a+c}$$

$$\geq\frac{3}{2}\left(a+b+c\right)\quad (*)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a^2(b+c)}{4(b+c)}}=a$$

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a^2(a+b)}{4(a+b)}}=a$$

$$\frac{a^2}{c+a}+\frac{a+c}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a^2(a+c)}{4(a+c)}}=a$$

ស្រាយដូចគ្នា

$$\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\geq 2\sqrt{\frac{b^2(a+c)}{4(a+c)}}=b$$

$$\frac{b^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq 2\sqrt{\frac{b^2(b+c)}{4(b+c)}}=b$$

$$\frac{b^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq 2\sqrt{\frac{b^2(a+b)}{4(a+b)}}=b$$

ស្រាយដូចគ្នា

$$\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq 2\sqrt{\frac{c^2(a+b)}{4(a+b)}}=c$$

$$\frac{c^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq 2\sqrt{\frac{c^2(b+c)}{4(b+c)}}=c$$

$$\frac{c^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\geq 2\sqrt{\frac{c^2(c+a)}{4(c+a)}}=c$$

យើងបាន

$$\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\right)+\left(\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\right)+\left(\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\right)\geq a+b+c$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\geq a+b+c$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq \frac{a+b+c}{2} \quad (A)$$

ស្រាយដូចគ្នា $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq \frac{a+b+c}{2} \quad (B)$

$$\frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{b+a}+\frac{c^2}{c+b}\geq \frac{a+b+c}{2} \quad (C)$$

តាម $(A),(B),(C)$ និង $(*)$ គេបាន:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq \frac{3}{2}\left(a+b+c\right)$$ ពិត ។

ដូចនេះ: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq \frac{3}{2}\left(a+b+c\right)$ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន (x_n) និង (y_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់

លក្ខខណ្ឌ $x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ និង $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1} \; ; \; \forall n = 1, 2, ... \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2} \; ; \; \forall n = 1, 2, ... \end{cases}$

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $x_n^2 + y_n^2 = 1 \; , \; \forall n = 1, 2, ...$

ខ) គណនាលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ និង $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $x_n^2 + y_n^2 = 1 \; , \; \forall n = 1, 2, ...$

យើងមាន: $x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1} \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = x_{n+1}\left(4y_{n+1}^2 - 1\right) \\ y_n = y_{n+1}\left(1 - 4x_{n+1}^2\right) \end{cases}$$

បើ $n = 1$ គេបាន: $x_1^2 + y_1^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ ពិត

ឧបមាថាពិតចំពោះ $n = k$ គេបាន: $x_k^2 + y_k^2 = 1$ ពិត

បន្តស្រាយឲ្យពិតដល់ $n = k+1$ គឺ $x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = 1$

យើងមាន: $x_k^2 + y_k^2 = 1$

$$\left[x_{k+1}\left(4y_{k+1}^2 - 1\right)\right]^2 + \left[y_{k+1}\left(1 - 4x_{k+1}^2\right)\right]^2 = 1$$

$$x_{k+1}^2\left(16y_{k+1}^4 - 8y_{k+1}^2 + 1\right) + y_{k+1}^2\left(1 - 8x_{k+1}^2 + 16x_{k+1}^4\right) = 1$$

$16x_{k+1}^2y_{k+1}^4-8x_{k+1}^2y_{k+1}^2+x_{k+1}^2+y_{k+1}^2-8x_{k+1}^2.y_{k+1}^2+16x_{k+1}^4.y_{k+1}^2=1$

$16x_{k+1}^2y_{k+1}^4+16x_{k+1}^4.y_{k+1}^2-16x_{k+1}^2y_{k+1}^2+x_{k+1}^2+y_{k+1}^2=1$

$16x_{k+1}^2y_{k+1}^2\left(x_{k+1}^2+y_{k+1}^2\right)-16x_{k+1}^2y_{k+1}^2+x_{k+1}^2+y_{k+1}^2=1$

$16x_{k+1}^2y_{k+1}^2\left(x_{k+1}^2+y_{k+1}^2-1\right)+x_{k+1}^2+y_{k+1}^2-1=0$

$\left(x_{k+1}^2+y_{k+1}^2-1\right)\left(16x_{k+1}^2y_{k+1}^2+1\right)=0$

ដោយ $16x_{k+1}^2y_{k+1}^2+1>0$ គេបាន:

$x_{k+1}^2+y_{k+1}^2-1=0\Rightarrow x_{k+1}^2+y_{k+1}^2=1$ ពិត ។

ដូចនេះ $x_n^2+y_n^2=1$, $\forall n=1,2,...$ ។

ខ) គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$

តាមសំណួរកយើងមាន: $x_n^2+y_n^2=1$, $\forall n=1,2,...$

យើងតាង $x_n=\sin\alpha_n$, $y_n=\cos\alpha_n$; $\left(\alpha_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$

ដោយ $\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2-1} , \forall n=1,2,... \\ y_{n+1}=\dfrac{y_n}{1-4x_{n+1}^2} , \forall n=1,2,... \end{cases}$

យើងបាន: $\sin\alpha_{n+1}=x_{n+1}=\dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2-1}=\dfrac{\sin\alpha_n}{4\cos^2\alpha_{n+1}-1}=\dfrac{\sin\alpha_n}{3-4\sin^2\alpha_{n+1}}$

$\Rightarrow 3\sin\alpha_{n+1}-4\sin^3\alpha_{n+1}=\sin\alpha_n\Leftrightarrow\sin\left(3\alpha_{n+1}\right)=\sin\alpha_n\Leftrightarrow\alpha_{n+1}=\dfrac{1}{3}\alpha_n$

នោះ (α_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\dfrac{1}{3}$ និងតួទី១ $\alpha_1=\dfrac{\pi}{4}$

ព្រោះ $\sin\alpha_1=x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha_1=\dfrac{\pi}{4}$ ។

តួទី n នៃស្វ៊ីត $\alpha_n=\alpha_1q^{n-1}=\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{3^{n-1}}$ ។

$x_n=\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}\right)$, $y_n=\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}\right)$; $\forall n=1,2,...$

យើងបាន: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sin 0=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\cos 0=1$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យ p , q , r ជាចំនួនសនិទានមិនសូន្យដែល

$\sqrt[3]{pq^2}+\sqrt[3]{pr^2}+\sqrt[3]{rp^2}$ ជាចំនួនសនិទានមិនសូន្យ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$ ក៏ជាចំនួនសនិទានដែរ

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$ ក៏ជាចំនួនសនិទានដែរ

តាង $a=\sqrt[3]{pq^2}$, $b=\sqrt[3]{qr^2}$, $c=\sqrt[3]{rp^2}$

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}\in\mathbb{Q}$

ដោយ $abc=pqr\in\mathbb{Q}$ ព្រោះ p , q , $r\in\mathbb{Q}$

នោះគ្រាន់តែស្រាយថា $ab+bc+ca\in\mathbb{Q}$ ជាការគ្រប់គ្រាន់ហើយ

យើងមាន:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^3+3abc-\left(a^3+b^3+c^3\right)}{3(a+b+c)}$$

តាមបម្រាប់ $a+b+c\in\mathbb{Q}$ និង $a+b+c\neq 0$

គេបាន: $(a+b+c)^3\in\mathbb{Q}$ និង $a^3+b^3+c^3=pq^2+qr^2+rp^2\in\mathbb{Q}$

$\Rightarrow ab+bc+ca\in\mathbb{Q}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\frac{1}{\sqrt[3]{pq^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{qr^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{rp^2}}$ ក៏ជាចំនួនសនិទានដែរ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឲ្យ $k\,,l$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល k ចែកដាច់ l ។

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m នោះ $1+(k+m)l$

និង $1+ml$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m នោះ $1+(k+m)l$

និង $1+ml$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

ដោយ $k|l \Rightarrow l=kn\ ,\ n\in\mathbb{N}$

តាង $d=\gcd\left(1+(k+m)l\ ,1+ml\right)$

$=\gcd\left(1+(k+m)kn\ ,1+ml\right)$

$=\gcd\left(1+k^2n+kmn\ ,1+kmn\right)$

$=\gcd\left(1+kmn\ ,\ k^2n\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} d\,|(1+kmn) \\ d\,|k^2n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} d\,|(k+k^2mn) \\ d\,|k^2mn \end{cases}$$

$\Rightarrow d\,|k \Rightarrow d\,|kmn \Rightarrow d\,|\left(1+kmn-kmn\right)$

$\Rightarrow d|1$ នោះ $d=1$

ដូចនេះ $d=1\Leftrightarrow \gcd\left(1+(k+m)\ ,1+ml\right)=1$ ។

លំហាត់ទី៦០

គេឲ្យ z_1, z_2, z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចមិនមែនជាចំនួនពិតទាំងអស់ដែល $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ និង $2(z_1 + z_2 + z_3) - 3z_1z_2z_3 \in \mathbb{R}$ ។

ស្រាយថា: $\max(\arg z_1 \ , \arg z_2 \ , \arg z_3) \geq \frac{\pi}{6}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\max(\arg z_1 \ , \arg z_2 \ , \arg z_3) \geq \frac{\pi}{6}$

តាង $z_k = \cos t_k + i \sin t_k \ , \ k \in \{1, 2, 3\}$

ដោយ $2(z_1 + z_2 + z_3) - 3z_1z_2z_3 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 2(\sin t_1 + \sin t_2 + \sin t_3) = 3\sin(t_1 + t_2 + t_3) \quad (1)$

សន្មតឲ្យផ្ទុយនឹងការពិតថា: $\max(t_1, t_2, t_3) < \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1, t_2, t_3 < \frac{\pi}{6}$

តាង $f(x) = \sin x \ , \ x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x$

$\Rightarrow f''(x) = -\sin x < 0$

តាមវិសមភាព *jensen*:

$$\frac{f(t_1) + f(t_2) + f(t_3)}{3} \leq f\left(\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}\right)$$

$$\sin t_1 + \sin t_2 + \sin t_3 \leq 3\sin\left(\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}\right) = 3\sin t$$

$$\frac{3\sin 3t}{2} \leq 3\sin t$$

$$3\sin t - 4\sin^3 t \leq 2\sin t$$

$4\sin^3 t - \sin t \ge 0$, $\sin t > 0$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$

$4\sin^2 t - 1 \ge 0 \Rightarrow \sin^2 t \ge \dfrac{1}{4} \Rightarrow \sin t \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow t \ge \dfrac{\pi}{6}$ ផ្ទុយពីការពិត

ព្រោះ $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\max\left(\arg z_1 , \arg z_2 , \arg z_3\right) \ge \dfrac{\pi}{6}$ ។

លំហាត់ទី៦១

ចំពោះចំនួនពិត a , b , c កំណត់យក $S_n = a^n + b^n + c^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ បើ $S_1 = 2$, $S_2 = 6$ និង $S_3 = 14$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|S_n^2 - S_{n-1}.S_{n+1}\right| = 8$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|S_n^2 - S_{n-1}.S_{n+1}\right| = 8$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$

យើងមាន: $S_n = a^n + b^n + c^n$

$$S_1 = a + b + c = 2$$

$$S_2 = a^2 + b^2 + c^2 = 6$$

$$S_3 = a^3 + b^3 + c^3 = 14$$

តាមសមភាព $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = -1$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b+c) + 3(bc+ca)(a+b+c)$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab+bc+ca)(a+b+c) - 3abc$$

$\Leftrightarrow 8 = 14 + 3(-1).2 - 3abc \Rightarrow abc = 0$

នោះ a , b , c ជាឫសនៃសមីការ $x^3 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 1) = 0$

តាម $\Delta'=1+1=2\Rightarrow x=0\ ,\ x=1+\sqrt{2}\ ,\ x=1-\sqrt{2}$

$$\Rightarrow S_n=\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n\Rightarrow S_n^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}+2(-1)^n$$

$$\Rightarrow S_{n-1}.S_{n+1}=\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}\right]\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}+(-1)^{n-1}\left(1+\sqrt{2}\right)^2+(-1)^{n-1}\left(1-\sqrt{2}\right)^2$$

$$=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}+6(-1)^{n-1}$$

$$\Rightarrow\left|S_n^2-S_{n-1}.S_{n+1}\right|=\left|(-1)^n.2-(-1)^{n-1}.6\right|=8$$ ពិត ។

លំហាត់ទី៦២

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ជ្រុងនៃត្រីកោណ $6.10^{n+2}\ ,\ 1125.10^{2n+1}-8\ ,\ 1125.10^{2n+1}+8$ ជាត្រីកោណកែង ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ជ្រុងនៃត្រីកោណ

$6.10^{n+2}\ ,\ 1125.10^{2n+1}-8\ ,\ 1125.10^{2n+1}+8$ ជាត្រីកោណកែង

តាង $a=6.10^{n+2}\ ,\ b=1125.10^{2n+1}-8\ ,\ c=1125.10^{2n+1}+8$

យើងបាន: $a^2+b^2=36.10^{2n+4}+1125^2.10^{4n+2}-16.1125.10^{2n+1}+64$

$$=1125^2.10^{2(2n+1)}+3600-16.1125.10^{2n+1}+64$$

$$=1125^2.10^{2(2n+1)}+2.1125.10^{2n+1}.8+8^2$$

$$=\left(1125.10^{2n+1}+8\right)^2$$

$=c^2$ ពិត ។

លំហាត់ទី៦៣

ដាក់ជាផលគុណកត្តាចំពោះកន្សោមខាងក្រោម:

ក/ $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

ខ/ $(x+y)^7-x^7-y^7$

ដំណោះស្រាយ

ដាក់ជាផលគុណកត្តាចំពោះកន្សោមខាងក្រោម:

ក/ $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

តាង $P(x,y,z)=(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

នោះ $P(-y,y,z)=0\ ;\ P(x,-z,z)=0\ ;\ P(x,y,-x)=0$

យើងបាន:

$$P(x,y,z)=(x+y)(y+z)(z+x)\left[a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)\right]$$

បើ $x=y=z=1: 3^5-3=8(3a+3b)\Rightarrow a+b=10$

$x=y=1\ ,\ z=0: 2^5-2=2(2a+b)\Rightarrow 2a+b=15$

នោះ $a=b=5$

$\Rightarrow P(x,y,z)=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$ ។

ខ/ $(x+y)^7-x^7-y^7$

យើងមាន: $(x+y)^7-(x^7+y^7)$

$$=(x+y)\left[(x+y)^6-(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6\right]$$

$$=(x+y)\left[(x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6\right.$$

$$\left.-(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)\right]$$

$$=(x+y)\left[7x^5y+14x^4y^2+21x^3y^3+14x^2y^4+7xy^5\right]$$

$= 7(x+y)xy(x^2+xy+y^2)^2$

ដូចនេះ $(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនគត់វិជ្ជមាន និងកំណត់ដោយ:

$x = \gcd(b,c)$; $y = \gcd(a,c)$; $z = \gcd(a,b)$ ។

ស្រាយថា: $\gcd(a,b,c) = g(x,y,z)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា: $\gcd(a,b,c) = g(x,y,z)$

យើងមាន: $x = \gcd(b,c)$; $y = \gcd(a,c)$; $z = \gcd(a,b)$

តាង $d = \gcd(a,b,c)$; $d' = \gcd(x,y,z)$

នោះ $d|a$, $d|b$, $d|c$ និង $d|x$, $d|y$, $d|z$

គេបាន: $d|\gcd(x,y,z) \Rightarrow d|d'$ (1)

តែ $d'|x$, $d'|y$, $d'|z$

$\Rightarrow d'|a$, $d'|b$, $d'|c$

$\Rightarrow d'|\gcd(a,b,c)$ នោះ $d'|d$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន: $d = d' \Leftrightarrow \gcd(a,b,c) = \gcd(x,y,z)$

ដូចនេះ $\gcd(a,b,c) = g(x,y,z)$ ។

លំហាត់ទី៦៥

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់ដែល $a+b+c+d=0$ ស្រាយថា:

ផលគុណ $(bc-ad)(ac-bd)(ab-cd)$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា:ផលគុណ $(bc-ad)(ac-bd)(ab-cd)$ ជាការេប្រាកដ

យើងមាន: $a+b+c+d=0 \Rightarrow d=-(a+b+c)$ នោះគេបាន:

$$\begin{aligned} bc-ad &= bc+a(a+b+c) \\ &= bc+a^2+ab+ac \\ &= c(b+a)+a(a+b) \\ &= (a+b)(a+c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ac-bd &= ac+b(a+b+c) \\ &= ac+ab+b^2+bc \\ &= a(b+c)+b(b+c) \\ &= (b+c)(a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab-cd &= ab+c(a+b+c) \\ &= ab+ac+bc+c^2 \\ &= a(b+c)+c(b+c) \\ &= (b+c)(a+c) \end{aligned}$$

នោះយើងបាន: $(bc-ad)(ac-bd)(ab-cd)=(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2$

ដូចនេះសំណើខាងលើជាសំណើពិត ។

លំហាត់ទី៦៦

គេឲ្យ a,b,c,d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d}+\frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a}+\frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b} \ge a+b+c+d$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d}+\frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a}+\frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b}\ge a+b+c+d$$

ដោយ $a,b,c,d\in\mathbb{R}^+$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$(a+b+c)^2\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\ge\frac{a+b+c}{3} \qquad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន:

$$\frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d}\ge\frac{b+c+d}{3} \qquad (2)$$

$$\frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a}\ge\frac{c+d+a}{3} \qquad (3)$$

$$\frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b}\ge\frac{d+a+b}{3} \qquad (4)$$

យក $(1)+(2)+(3)+(4)$ គេបាន:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}+\frac{b^2+c^2+d^2}{b+c+d}+\frac{c^2+d^2+a^2}{c+d+a}+\frac{d^2+a^2+b^2}{d+a+b}\ge a+b+c+d$$

លំហាត់ទី៦៧

គេឲ្យតួទី p និង q នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយគឺ q និង p រៀងគ្នា ។ គណនាតួទី $p+q$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតួទី $p+q$

តាមរូបមន្ត: $a_n=a_1+(n-1)d$ គេបាន:

$$\begin{cases} a_p = a_1 + (p-1)d = q \\ a_q = a_1 + (q-1)d = p \end{cases} \Leftrightarrow (p-q)d = q-p \Rightarrow d = -1$$

$$\Rightarrow a_1 = q+p-1 \Rightarrow a_{p+q} = a_1 + (p+q-1)d = p+q-1-(p+q-1) = 0$$

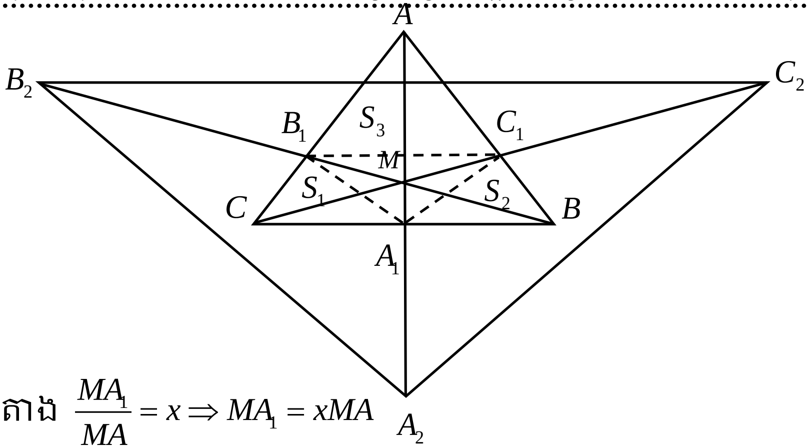
ដូចនេះ $a_{p+q} = 0$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ នៅលើជ្រុង AB, AC និង BC យកបណ្តាចំណុចរៀងគ្នា C_1 , B_1 និង A_1 ដែលបណ្តាអង្កត់ AA_1 , BB_1 , CC_1 កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច M មួយ ។
ចំណុច A_2 , B_2 និង C_2 ឆ្លុះរៀងគ្នាជាមួយបណ្តាចំណុច A , B និង C ធៀបនឹងចំណុច A_1 , B_1 និង C_1 ។
ចូរស្រាយថា $S_{A_2B_2C_2} = 4S_{A_1B_1C_1} + 3S_{ABC}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចូរស្រាយថា $S_{A_2B_2C_2} = 4S_{A_1B_1C_1} + 3S_{ABC}$



តាង $\frac{MA_1}{MA} = x \Rightarrow MA_1 = xMA$

$MA_2 = A_1A_2 + MA_1 = MA + MA_1 + MA_1 = MA + xMA + xMA = (1+2x)MA$

$\Rightarrow \frac{MA_2}{MA} = 2x+1$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ: បើ $\frac{MB_1}{MB} = y \Rightarrow \frac{MB_2}{MB} = 2y+1$

$\frac{MC_1}{MC} = z \Rightarrow \frac{MC_2}{MC} = 2z+1$

កំណត់យក: $S_1 = S_{BMC}$, $S_2 = S_{AMB}$, $S_3 = S_{CMA}$ គេបាន:

$$\frac{S_{B_2MC_2}}{S_1} = \frac{MC_2}{MC} \cdot \frac{MB_2}{MB} = (2y+1)(2z+1) \Rightarrow S_{B_2MC_2} = (2y+1)(2z+1)S_1$$

$$\frac{S_{B_2MA_2}}{S_2} = \frac{MA_2}{MA} \cdot \frac{MB_2}{MB} = (2x+1)(2y+1) \Rightarrow S_{B_2MA_2} = (2x+1)(2y+2)S_2$$

$$\frac{S_{A_2MC_2}}{S_3} = \frac{MA_2}{MA} \cdot \frac{MC_2}{MC} = (2x+1)(2z+1) \Rightarrow S_{A_2MC_2} = (2x+1)(2z+1)S_3$$

តែ $S_{A_2B_2C_2} = S_{B_2MC_2} + S_{B_2MA_2} + S_{A_2MC_2}$

$= (2y+1)(2z+1)\mathrm{S}_1 + (2x+1)(2y+1)S_2 + (2x+1)(2z+1)S_3$

$= 4(yzS_1 + xyS_2 + xzS_3) + 2(y+z)S_1 + 2(x+y)S_2 + 2(x+z)S_3 + S_1 + S_2 + S_3$

$= 4(xyS_2 + yzS_1 + xzS_3) + 2\left[(y+z)S_1 + (y+x)S_2 + (z+x)S_3\right] + S_{ABC}$ (1)

យើងមាន:

$$\frac{S_{B_1MC_1}}{S_1}=\frac{MB_1}{MB}\cdot\frac{MC_1}{MC}=yz\Rightarrow S_{B_1MC_1}=S_1yz$$

$$\frac{S_{B_1MA_1}}{S_2}=\frac{MB_1}{MB}\cdot\frac{MA_1}{MA}=xy\Rightarrow S_{B_1MA_1}=S_2xy$$

$$\frac{S_{A_1MC_1}}{S_3}=\frac{MA_1}{MA}\cdot\frac{MC_1}{MC}=xz\Rightarrow S_{A_1MC_1}=S_3xz$$

តែ $S_{A_1B_1C_1}=S_{B_1MC_1}+S_{B_1MA_1}+S_{A_1MC_1}=yzS_1+xyS_2+xzS_3$

$(1):\ S_{A_2B_2C_2}=4S_{A_1B_1C_1}+2\left[(y+z)S_1+(x+y)S_2+(x+z)S_3\right]+S_{ABC}\,(2)$

យើងមាន: $\frac{S_{ABC}}{S_1}=\frac{AA_1}{MA_1}\Leftrightarrow\frac{S_{ABC}}{AA_1}=\frac{S_1}{MA_1}=\frac{S_{ABC}-S_1}{AA_1-MA_1}=\frac{S_2+S_3}{AM}$

$$\Rightarrow\frac{MA_1}{MA}=\frac{S_1}{S_2+S_3}\Rightarrow S_1=x(S_2+S_3)$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_2}=\frac{CC_1}{MC_1}\Leftrightarrow\frac{S_{ABC}}{CC_1}=\frac{S_2}{MC_1}=\frac{S_{ABC}-S_2}{CC_1-MC_1}=\frac{S_1+S_3}{CM}$$

$$\Rightarrow\frac{MC_1}{CM}=\frac{S_2}{S_1+S_3}\Rightarrow S_2=z(S_1+S_3)$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_3}=\frac{BB_1}{MB_1}\Leftrightarrow\frac{S_{ABC}}{BB_1}=\frac{S_3}{MB_1}=\frac{S_{ABC}-S_3}{BB_1-MB_1}=\frac{S_1+S_2}{MB}$$

$$\Rightarrow\frac{MB_1}{MB}=\frac{S_3}{S_1+S_2}\Rightarrow S_3=y(S_1+S_2)$$

ដោយ $S_1+S_2+S_3=x(S_2+S_3)+z(S_1+S_3)+y(S_1+S_2)$

$=(y+z)S_1+(x+y)S_2+(x+z)S_3$ ពិត ។

ដូចនេះ $S_{A_2B_2C_2}=4S_{A_1B_1C_1}+3S_{ABC}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^2-x-2015\times2016$ ។ ស្រាយថា $f\left(2014\sin 2013x\right)$ និង $f\left(2013\cos 2014x\right)$ ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $f\left(2014\sin 2013x\right)$ និង $f\left(2013\cos 2014x\right)$

ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

យើងមាន $f(x)=x^2-x-2015\times 2016=\left(x-2016\right)\left(x+2015\right)$

យើងបាន:

$f\left(2014\sin 2013x\right)=\left(2014\sin 2013x-2016\right)\left(2014\sin 2013x+2015\right)(1)$

ដោយ $-1\le \sin 2013x\le 1$ នោះ $-4030\le 2014\sin 2013x-2016\le -2$

$\Rightarrow 2014\sin 2013x-2016<0$

ហើយ $-2014\le 2014\sin 2013x\le 2014$

នោះ $1\le 2014\sin 2013x+2015\le 4029\Rightarrow 2014\sin 2013x+2015>0$

តាម (1) គេបាន: $f\left(2014\sin 2013x\right)<0$

យើងមាន:

$f\left(2013\cos 2014x\right)=\left(2013\cos 2014x-2016\right)\left(2013\cos 2014x+2015\right)(2)$

ដោយ $-1\le \cos 2014x\le 1$ នោះ $-4029\le 2013\cos 2014x-2016\le -3$

$\Rightarrow 2013\cos 2014x-2016<0$

ហើយ $-2013\le 2013\cos 2014x\le 2013$

នោះ $2\le 2013\cos 2014x+2015\le 4028\Rightarrow 2013\cos 2014x+2015>0$

តាម (2) គេបាន: $f\left(2013\cos 2014x\right)<0$

ដូចនេះ $f\left(2014\sin 2013x\right)$ និង $f\left(2013\cos 2014x\right)$

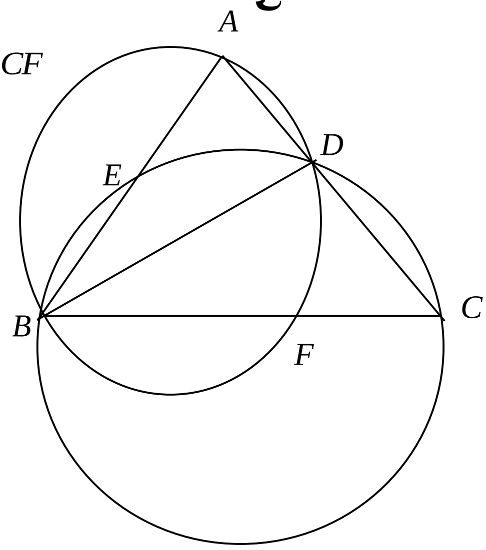
ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

លំហាត់ទី៧០

ABC ជាត្រីកោណមួយមាន BD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ B ។ រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ BDC កាត់ជ្រុង AB ត្រង់ E ហើយរង្វង់ចារឹកក្រៅ ត្រីកោណ ABD កាត់ជ្រុង BC ត្រង់ចំណុច F ។ បង្ហាញថា $AE = CF$ ។ *សិស្សពូកែខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១៥*

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $AE = CF$



ត្រីកោណ ABC មាន BD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ B យើងបាន

$\frac{BC}{BA} = \frac{CD}{AD}$ (ទ្រឹស្តីបទនៃកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ)

អង្កត់ធ្នូ BE និង CD កាត់គ្នាត្រង់ A នោះតាម *Euclid*

$BA\times EA=CA\times DA\ (1)$

អង្កត់ធ្នូ BF និង AD កាត់គ្នាត្រង់ C នោះតាម *Euclid*

$BC\times FC=AC\times DC\ (2)$

យក (2) ចែកនឹង (1) គេបាន $\frac{BC}{BA}\times\frac{FC}{EA}=\frac{AC}{CA}\times\frac{DC}{DA}$

តែ $\frac{BC}{BA}=\frac{CD}{AD}\quad\Rightarrow\frac{FC}{EA}=1\Rightarrow CF=AE$

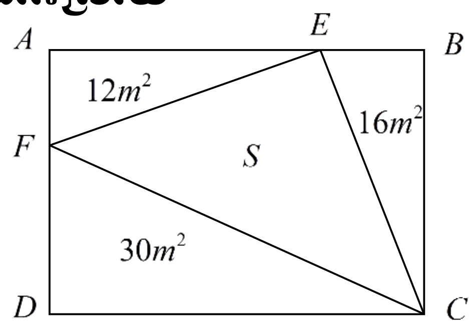
ដូចនេះ $CF=AE$

លំហាត់ទី៧១

$ABCD$ ជាចតុកោណកែងមួយ។ E ជាចំណុចមួយនៅលើ AB (ចន្លោះ A និង B) និង F ជាចំណុចមួយនៅលើ AD (ចន្លោះ A និង D) ។ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ EBC គឺ $16m^2$ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ EAF គឺ $12m^2$ និង ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ FDC គឺ $30m^2$ ។ រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោ EFC ។

ដំណោះស្រាយ

រកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោ EFC



តាង $EB = x$, $AE = y$ យើងបាន

$$S_{AEF} = \frac{1}{2}AF \times y = 12 \Rightarrow AF = \frac{24}{y}$$

$$S_{BCE} = \frac{1}{2}BC \times x = 16 \Rightarrow BC = \frac{32}{x}$$

$$FD = \frac{32}{x} - \frac{24}{y} \ , \ DC = x + y$$

តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ EFC

ដោយក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ FCD ស្មើនឹង $30m^2$ យើងបាន

$$\frac{1}{2}FD \times CD = 30 \Rightarrow FD \times CD = 60$$

$$\left(\frac{32}{x} - \frac{24}{y}\right)(x+y) = 60$$

$$(32y - 24x)(x+y) = 60xy$$

$$(8y - 6x)(x+y) = 15xy$$

$$8xy + 8y^2 - 6x^2 - 6xy = 15xy$$

$$8y^2 - 6x^2 = 13xy \Leftrightarrow 8y^2 - 6x^2 - 13xy = 0 \ (1)$$

ហើយ $16 + 12 + S + 30 = \frac{32}{x}(x+y) \Rightarrow S = 32\left(1 + \frac{y}{x}\right) - 58 \ \ (2)$

តាម (1) $8y^2 - 6x^2 - 13xy = 0 \Rightarrow 8\left(\frac{y}{x}\right) - 6\left(\frac{x}{y}\right) - 13 = 0$

$$8\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{6}{\frac{y}{x}} - 13 = 0$$

តាង $t = \frac{y}{x} > 0 \ , \ x \ , \ y > 0$

$$8t - \frac{6}{t} = 13 \Leftrightarrow 8t^2 - 13t - 6 = 0$$

$8t^2-16t+3t-6=0$

$8t(t-2)+3(t-2)=0$

$(t-2)(8t+3)=0$

$t-2=0\Rightarrow t=2\ ,\ 8t+3>0$

យើងបាន $\frac{y}{x}=2$ យក $\frac{y}{x}=2$ ជំនួសក្នុង (2)

$S=32(1+2)-58=96-58=38$

ដូចនេះ $S=38m^2$

លំហាត់ទី៧២

គេឲ្យ $A=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$ ។ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម A ដោយដឹងថា $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=2015$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $A=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$

យើងមាន $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=2015$

$\left[xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\right]^2=2015^2$

$x^2y^2+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+(1+x^2)(1+y^2)=2015^2$

$2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+x^2+y^2+2x^2y^2+1=2015^2$

$2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}+x^2+y^2+2x^2y^2=2015^2-1 \qquad (1)$

$$A=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow A^2=\left[x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\right]^2$$

$$=x^2\left(1+y^2\right)+2xy\sqrt{\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)}+y^2\left(1+x^2\right)$$

$$=2xy\sqrt{\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)}+2x^2y^2+x^2+y^2 \ (2)$$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) យើងបាន

$$A^2=2015^2-1\Rightarrow A=\sqrt{2015^2-1}$$

ដូចនេះ $A=\sqrt{2015^2-1}$

លំហាត់ទី៧៣

គេឲ្យអនុគមន៍ $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt[2015]{1-x^{2015}}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

និង $f_n(x)=f_1\left(f_{n-1}(x)\right)$, $n\geq 2$ ។ គណនា $f_{2016}(2015)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt[2015]{1-x^{2015}}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង

$$f_n(x)=f_1\left(f_{n-1}(x)\right) , n\geq 2$$

$$f_3(x)=f_1\left(f_2(x)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt[2015]{1-\left(\dfrac{\sqrt[2015]{1-x^{2015}}}{-x}\right)^{2015}}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt[2015]{x^{2015}+1-x^{2015}}}=x$$

$$f_4(x) = f_1\left(f_3(x)\right) = \frac{1}{\sqrt[2015]{1-x^{2015}}}$$

$$\Rightarrow f_4(x) = f_1\left(f_3(x)\right) = f_1(x)$$

យើងបាន $f_n(x)$ មានខួបស្មើនឹង 3 គឺ

$f_{3k+1}(x) = f_1(x)$, $f_{3k+2}(x) = f_2(x)$ និង $f_{3k+3}(x) = f_3(x)$

ដោយ $f_{2016}(x) = f_{3k+3}(x) = f_3(x) = x$

ដូចនេះ $f_{2016}(2015) = 2015$

លំហាត់ទី៧៤

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = a\sin x + b\sqrt[3]{x} + 2015$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិត ។ បើ $f(\log\log_3 10) = 1$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $f(\log\log 3)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $f(\log\log 3)$

$$f(\log\log 3) = a\sin(\log\log 3) + b\sqrt[3]{(\log\log 3)} + 2015$$

$$\begin{aligned} f(\log\log_3 10) &= a\sin(\log\log_3 10) + b\sqrt[3]{(\log\log_3 10)} + 2015 \\ &= a\sin(-\log\log 3) + b\sqrt[3]{(-\log\log 3)} + 2015 \\ &= -a\sin(\log\log 3) - b\sqrt[3]{(\log\log 3)} + 2015 \end{aligned}$$

ដោយ $f(\log\log_3 10) = 1$

$$-a\sin\left(\log\log 3\right)-b\sqrt[3]{\left(\log\log 3\right)}+2015=1$$

$$a\sin\left(\log\log 3\right)+b\sqrt[3]{\left(\log\log 3\right)}=2014$$

$$\Rightarrow f\left(\log\log 3\right)=2014+2015=4029$$

ដូចនេះ $f\left(\log\log 3\right)=4029$

លំហាត់ទី៧៥

ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$1/\ \frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=0$$

$$2/\ (a-b)\cot\frac{C}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}=0$$

$$3/\ \frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=0$$

$$4/\ bc\cot\frac{A}{2}+ac\cot\frac{B}{2}+ab\cot\frac{C}{2}=4Rp^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{p}\right)$$

$$5/\ \frac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}+\frac{b^2\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}+\frac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}}=ab+bc+ac$$

$$6/\ \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា:

$$1/\ \frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=0$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$

យើងបាន: $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2R(\sin B - \sin C)}{2R\sin A}\cdot\cos^2\frac{A}{2}$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\sin A}\cdot\cos^2\frac{A}{2}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cdot\cos^2\frac{A}{2}$$

$= \sin\frac{B-C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$ តែ $\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B+C}{2}$

$$\Rightarrow \frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2} = \frac{1}{2}(\cos C - \cos B)$$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន: $\frac{c-a}{b}\cdot\cos^2\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(\cos A - \cos C)$

$$\frac{a-b}{c}\cdot\cos^2\frac{C}{2} = \frac{1}{2}(\cos B - \cos A)$$

$2/\ (a-b)\cot\frac{c}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (b-c)\cot\frac{A}{2} = 0$

យើងមាន: $(a-b)\cot\frac{C}{2} = 2R(\sin A - \sin B)\cot\frac{C}{2}$

$$= 2R\left(2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)\cdot\frac{\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$

$$= 2R(\cos B - \cos A)$$

ស្រាយដូចគ្នា: $(c-a)\cot\frac{B}{2} = 2R(\cos\mathrm{A} - \cos\mathrm{C})$

$$(b-c)\cot\frac{A}{2}=2R(\cos C-\cos B)$$

គេបាន: $(a-b)\cot\frac{c}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}=0$ ពិត

ដូចនេះ $(a-b)\cot\frac{c}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}=0$

3/ $\dfrac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=0$

យើងមាន:

$$\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{2R\sin A\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$=4R\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}=2R(\cos C-cosB)$$

ស្រាយដូចគ្នា: $\dfrac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=2R(\cos A-\text{cosC})$

$$\frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=2R(\cos B-\cos A)$$

គេបាន: $\dfrac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=0$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{a\sin\dfrac{B-C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{b\sin\dfrac{C-A}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{c\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}=0$

4/ $bc\cot\dfrac{A}{2}+ac\cot\dfrac{B}{2}+ab\cot\dfrac{C}{2}=4Rp^2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{3}{p}\right)$

យើងមាន: $4Rp^2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{3}{p}\right)=4Rp\left(\dfrac{p}{a}+\dfrac{p}{b}+\dfrac{p}{c}-3\right)$

$$=4Rp\left(\frac{p-a}{a}+\frac{p-b}{b}+\frac{p-c}{c}\right)$$

$$=4Rp\left(\frac{r}{a\tan\frac{A}{2}}+\frac{r}{b\tan\frac{B}{2}}+\frac{r}{c\tan\frac{C}{2}}\right)$$

$$=4rRp\left(\frac{bc\cot\frac{A}{2}+ac\cot\frac{B}{2}+ab\cot\frac{C}{2}}{abc}\right)$$

$$=\frac{4R}{abc}\cdot rp\left(bc\cot\frac{A}{2}+ac\cot\frac{B}{2}+ab\cot\frac{C}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{S}\cdot S\left(bc\cot\frac{A}{2}+ac\cot\frac{B}{2}+ab\cot\frac{C}{2}\right)$$

$$=bc\cot\frac{A}{2}+ac\cot\frac{B}{2}+ab\cot\frac{C}{2}$$

ដូចនេះ $bc\cot\dfrac{A}{2}+ac\cot\dfrac{B}{2}+ab\cot\dfrac{C}{2}=4Rp^2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{3}{p}\right)$

5/ $\dfrac{a^2\cos\dfrac{B-C}{2}}{2\sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{b^2\cos\dfrac{A-C}{2}}{2\sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{c^2\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\sin\dfrac{C}{2}}=ab+bc+ac$

យើងមាន: $$\frac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}=\frac{a2R\sin A\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}=2aR\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=aR\left(2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)=aR(\sin B+\sin C)$$

$$=\frac{a}{2}(2R\sin B+2R\sin C)=\frac{a(b+c)}{2}$$

ស្រាយដូចគ្នា: $$\frac{b^2\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}=\frac{b(a+c)}{2}$$

$$\frac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}}=\frac{c(a+b)}{2}$$

យើងបាន: $$\frac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}+\frac{b^2\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}+\frac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}}=ab+bc+ac$$

ដូចនេះ $$\frac{a^2\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}+\frac{b^2\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}}+\frac{c^2\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}}=ab+bc+ac$$

$$6/\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$$

យើងមាន: $$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)+\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)+\left(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C+A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\right]$$

$$=\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{3+\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

គេបាន: $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\dfrac{4+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

ម្យ៉ាងទៀត $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$P=\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)$$

$$=R\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)$$

$$=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

យើងបាន: $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\dfrac{R\left(4+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$$=\frac{4R+r}{P}$$ ពិត ។

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$

លំហាត់ទី៧៦

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ ហើយ S និង T ជា ចំនួនកុំផ្លិចកំណត់ដោយ: $S=z+z^2+z^4$ និង $T=z^3+z^5+z^6$ ។

១-បង្ហាញថា S មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន ហើយ S និង T ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា ។

២-គណនា $S+T$, $S.T$ រួចរក S និង T ។

៣-បង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

និងគណនា $\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}$ ។ *ខេត្តតាកែវឆ្នាំ ២០១៦*

ដំណោះស្រាយ

១-បង្ហាញថា S មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន ហើយ S និង T ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា

យើងមាន: $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\Rightarrow z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

យើងមាន: $S=z+z^2+z^4$

$$=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}+\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^2+\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^4$$

$$=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7}$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)+i\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\right)$$

ផ្នែកនិមិត្តនៃ S គឺ $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}$

$$=\sin\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\cos\frac{5\pi}{14}$$

ដោយ $\frac{3\pi}{14}<\frac{2\pi}{7}<\frac{5\pi}{14}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\frac{2\pi}{7}>0$, $\sin\frac{3\pi}{14}>0$, $\cos\frac{5\pi}{14}>0$

ដូចនេះ S មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន ។

គេមាន: $T=z^3+z^5+z^6\Rightarrow\overline{T}=\overline{z}^3+\overline{z}^5+\overline{z}^6$

គេបាន: $z^7.\overline{T}=\left(z.\overline{z}\right)^3.z^4+\left(z.\overline{z}\right)^5.z^2+\left(z.\overline{z}\right)^6.z$, $z.\overline{z}=|z|^2=1$

$\Rightarrow\overline{T}=z^4+z^2+z=z+z^2+z^4=S$

ដូចនេះ S និង T ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា ។

២-គណនា $S+T$, $S.T$ រួចរក S និង T

$$S+T=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{z\left(z^6-1\right)}{z-1}=\frac{z^7-z}{z-1}=\frac{1-z}{z-1}=-1$$

$$S.\mathrm{T}=\left(z+z^2+z^4\right)\left(z^3+z^5+z^6\right)=z^4+z^6+1+z^5+1+z+1+z^2+z^3$$

$$=3+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=3-1=2$$

ដូចនេះ $S+T=-1$ និង $S.T=2$ ។

រក S និង T

គេមាន: $\begin{cases}S+T=-1\\ S.T=2\end{cases}$ នោះ S និង T ជាឫសនៃសមីការ

$X^2+X+2=0$ គេបាន: $X=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$

ដោយ S មានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន គេបាន: $S=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$

$$P=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

ដូច្នេះ $S=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$ និង $P=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

៣-បង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

គេមាន: $S=z+z^2+z^4=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$

តែ $S=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)+i\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\right)$

គេបាន: $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

$$\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

គណនា $\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}$

គេមាន:

$$S=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)+i\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\right)$$

$S=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$ គេបាន: $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

$$\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$$

ដូច្នេះ $\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៧៧

គណនាផលបូក *(សិស្សពូកែខេត្តតាកែវ ឆ្នាំ ២០១៦)*

$$S=\frac{C(n,0)}{C(2n-1,0)}+\frac{C(n,1)}{C(2n-1,1)}+\frac{C(n,2)}{C(2n-1,2)}+\cdots+\frac{C(n,n)}{C(2n-1,n)}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក

$$S=\frac{C(n,0)}{C(2n-1,0)}+\frac{C(n,1)}{C(2n-1,1)}+\frac{C(n,2)}{C(2n-1,2)}+\cdots+\frac{C(n,n)}{C(2n-1,n)}$$

ផលបូកអាចសរសេរបានជា: $S=\sum_{k=0}^{n}\frac{C(n,k)}{C(2n-1,k)}$

គេមាន: $\frac{C(n,k)}{C(2n,k)}-\frac{C(n,k+1)}{C(2n,k+1)}=\frac{n!(2n-k)!}{(n-k)!(2n)!}-\frac{n!(2n-k-1)!}{(n-k-1)!(2n)!}$

$$=\frac{n!(2n-1-k)!}{(n-k)!(2n-1)!}\left(\frac{2n-k}{2n}-\frac{n-k}{2n}\right)=\frac{1}{2}\frac{C(n,k)}{C(2n-1,k)}$$

គេបាន: $S=2\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{C(n,k)}{C(2n,k)}-\frac{C(n,k+1)}{C(2n,k+1)}\right)$

ដោយឲយតម្លៃ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ នោះយើងទាញបាន:

$$S=2\left(\frac{C(n,0)}{C(2n,0)}-\frac{C(n,n+1)}{C(2n,n+1)}\right)=2$$

ដូចនេះ $S=2$ ។

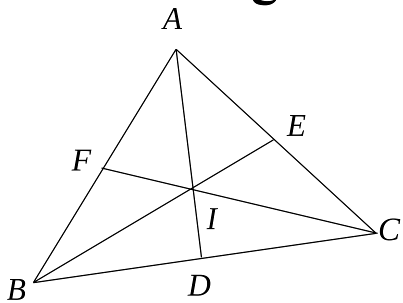
លំហាត់ទី៧៨

គេឲ្យចំណុច I មួយស្ថិតនៅផ្ទៃកខាងក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ គេដឹងថា AI , BI និង CI កាត់ជ្រុងឈម BC , CA និង AB ត្រង់ចំណុច D , E និង F រៀងគ្នា ។

ក. គណនា $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}$

ខ. បង្ហាញថា $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AI}{ID}$ *(សិស្សពូកែខេត្តតាកែវ ២០១៦)*

ដំណោះស្រាយ



ក. គណនា $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}$

យើងមាន: $\frac{BD}{DC}=\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{S_{BID}}{S_{CID}}=\frac{S_{ABD}-S_{BID}}{S_{ACD}-S_{CID}}=\frac{S_{ABI}}{S_{ACI}}$

ដូចគ្នាដែរ: $\frac{CE}{EA}=\frac{S_{BCI}}{S_{BAI}}$, $\frac{AF}{FB}=\frac{S_{ACI}}{S_{BCI}}$

យើងបាន: $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{S_{ABI}}{S_{ACI}}\cdot\frac{S_{BCI}}{S_{ABI}}\cdot\frac{S_{ACI}}{S_{BCI}}=1$

ដូចនេះ: $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$

បង្ហាញថា $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AI}{ID}$

របៀបទី ១

យើងមាន: $\frac{AF}{FB}=\frac{S_{ACI}}{S_{BCI}} \quad (1)$

$$\frac{AE}{EC}=\frac{S_{ABE}}{S_{CBE}}=\frac{S_{AIE}}{S_{CIE}}=\frac{S_{ABE}-S_{AIE}}{S_{CBE}-S_{CIE}}=\frac{S_{ABI}}{S_{CBI}} \quad (2)$$

យក $(1)+(2)$ យើងបាន: $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{S_{ACI}+S_{ABI}}{S_{BCI}} \quad (3)$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{AI}{ID}=\frac{S_{ABI}}{S_{DBI}}=\frac{S_{CAI}}{S_{DCI}}=\frac{S_{ABI}+S_{CAI}}{S_{BCI}} \quad (4)$

តាម (3) និង (4) យើងបាន $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AI}{ID}$

ដូចនេះ: $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AI}{ID}$ ។

របៀបទី ២

តាមទ្រឹស្តីបទ *Ceva*

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot=1\Rightarrow\frac{AE}{CE}=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}$$

$$\Rightarrow\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AF}{FB}+\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=\frac{AF}{FB}\left(1+\frac{BD}{DC}\right)=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{DC} \quad (i)$$

តាមទ្រឹស្តីបទ *Menelaus* ចំពោះត្រីកោណ *ABD*

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{DI}{AI}=1\Rightarrow\frac{AI}{DI}=\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC} \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន: $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AI}{ID}$

ដូចនេះ: $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AI}{ID}$ ។

លំហាត់ទី៧៩

គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ដែលមាន $f(1)=1$ និង

$f(1)+2f(2)+3f(3)+\cdots+nf(n)=n(n+1)f(n) \quad \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ n\geq 2$

គណនា $f(1008)$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $f(1008)$

គេមាន: $f(1)+2f(2)+3f(3)+\cdots+nf(n)=n(n+1)f(n) \qquad (i)$

យក $n=n+1$ គេបាន:

$$f(1)+2f(2)+\cdots+nf(n)+(n+1)f(n+1)=(n+1)(n+2)f(n+1) \quad (ii)$$

យក $(ii)-(i):(n+1)f(n+1)=(n+1)(n+2)f(n+1)-n(n+1).f(n)$

$\Rightarrow f(n+1)=(n+2)f(n+1)-nf(n)$

$\Rightarrow (n+1)f(n+1)=nf(n)$

$\Rightarrow 2f(2)=3f(3)=4f(4)=...=nf(n)$

តាម $(i):\underbrace{nf(n)+nf(n)+nf(n)+...+nf(n)}_{n-1\,of\,nf(n)}=n(n-1)f(n)$

$\Rightarrow 1+(n-1)nf(n)=n(n+1)f(n)$

$\Rightarrow 2nf(n)=1$ ឬ $f(n)=\dfrac{1}{2n}$

យក $n=1008$ គេបាន: $f(1008)=\dfrac{1}{2\times 1008}=\dfrac{1}{2016}$

ដូចនេះ $f(1008)=\dfrac{1}{2016}$ ។

លំហាត់ទី៨០

បើ $\frac{\tan x}{2}=\frac{\tan y}{3}=\frac{\tan z}{5}$ និង $x+y+z=\pi$ ។

ចូរគណនា $\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z$

យើងមាន: $\frac{\tan x}{2}=\frac{\tan y}{3}=\frac{\tan z}{5}=t$

$$\Rightarrow \tan x=2t\ ,\ \tan y=3t\ ,\ \tan z=5t$$

$$\Rightarrow \tan x+\tan y+\tan z=10t$$

$$\Rightarrow \tan x.\tan y.\tan z=30t^3$$

តែ $x+y+z=\pi \Rightarrow \tan x+\tan y+\tan z=\tan x.\tan y.\tan z$

$$\Rightarrow 30t^3=10t \Rightarrow t^2=\frac{1}{3}$$ យើងបាន:

$$\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z=4t^2+9t^2+25t^2=(4+9+25)t^2=\frac{38}{3}$$

ដូចនេះ $\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z=\frac{38}{3}$

លំហាត់ទី៨១

n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $1\le n\le 100$ ។

រកចំនួនឫសនៃសមីការ $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនឫសនៃសមីការ $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}$

គេមាន: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}$

$$\left(\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\left(\frac{n}{3}-\left[\frac{n}{3}\right]\right)+\left(\frac{n}{5}-\left[\frac{n}{5}\right]\right)=0$$

$$\left\{\frac{n}{2}\right\}+\left\{\frac{n}{3}\right\}+\left\{\frac{n}{5}\right\}=0$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{n}{2}\right\}=0\ ,\ \left\{\frac{n}{3}\right\}=0\ ,\ \left\{\frac{n}{5}\right\}=0$$

នោះ $\frac{n}{2}\ ,\ \frac{n}{3}\ ,\ \frac{n}{5}$ ជាចំនួនគត់

តែ $PPCM(2,3,5)=30\Rightarrow n=30k\quad,\quad k\in\mathbb{Z}$

ដោយ $1\le n\le 100\Rightarrow n=\{30,60,90\}$

ដូចនេះសមីការ $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}$ មានឫសចំនួនបី ។

លំហាត់ទី៨២

សមីការ $x^5-3x^4-1=0$ មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចប្រាំ r_1,r_2,r_3,r_4,r_5

គណនាតម្លៃនៃ $\frac{1}{r_1^9}+\frac{1}{r_2^9}+\frac{1}{r_3^9}+\frac{1}{r_4^9}+\frac{1}{r_5^9}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $\frac{1}{r_1^9}+\frac{1}{r_2^9}+\frac{1}{r_3^9}+\frac{1}{r_4^9}+\frac{1}{r_5^9}$

គេមាន: $x^5-3x^4-1=0\Rightarrow x^4(x-3)=1$

$$\frac{1}{x^4}=x-3$$
$$x^{-4}=x-3$$
$$\left(x^{-4}\right)^2=(x-3)^2$$
$$x^{-8}=x^2-6x+9$$
$$x^{-9}=\frac{x^2-6x+9}{x}=x-6+9x^{-1}$$

គេបាន: $\sum_{i=1}^{5}r_i^{-9}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{r_i^9}=\sum_{i=1}^{5}\left(r_i-6+9r_i^{-1}\right)=\sum_{i=1}^{5}r_i-\sum_{i=1}^{5}6+9\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{r_i}\quad (i)$

តែ r_1,r_2,r_3,r_4,r_5 ជាឫសនៃសមីការ $x^5-3x^4-1=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន: $\sum_{i=1}^{5}r_i=3$, $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{r_i}=0$

តាម (i) គេបាន: $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{r_i^9}=3-6\times 5+0=-27$

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{r_i^9}=\frac{1}{r_1^9}+\frac{1}{r_2^9}+\frac{1}{r_3^9}+\frac{1}{r_4^9}+\frac{1}{r_5^9}=-27$

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យ $iz^2=1+\frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{5}{z^4}+\dots$ និង $z=n\pm\sqrt{i^{-1}}$ ។

គណនាតម្លៃនៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ n

គេមាន: $iz^2=1+\frac{2}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{5}{z^4}+\dots\quad (i)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (i) នឹង z

គេបាន: $iz^3 = z + 2 + \frac{3}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \dots \quad (ii)$

យក $(ii)-(i)$ គេបាន: $iz^3 - iz^2 = z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$

$$iz^2(z-1) = z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots = \frac{z}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z^2}{z-1}$$

$\Rightarrow iz^2(z-1)^2 = z^2$ ឬ $(z-1)^2 = \frac{1}{i} = i^{-1}$ ឬ $z = 1 \pm \sqrt{i^{-1}}$ តែ $z = n \pm \sqrt{i^{-1}}$

ដូចនេះ $n = 1$ ។

លំហាត់ទី៨៤

បង្ហាញថា: $1 < \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{3001} < \frac{4}{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $1 < \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{3001} < \frac{4}{3}$

គេមាន: $S = \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{3001} = \sum_{k=1001}^{3001} \frac{1}{k}$ (មាន 2001 តួ)

តាមវិសមភាព $AM - HM$ គេបាន: $\left(\sum_{k=1001}^{3001} k\right)\left(\sum_{k=1001}^{3001} \frac{1}{k}\right) > (2001)^2$

តែ $\sum_{k=1001}^{3001} k = (2001)^2$ គេបាន: $\sum_{k=1001}^{3001} \frac{1}{k} > 1 \quad (i)$

ម៉្យាងទៀត

$$\sum_{k=1001}^{3001} \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{1500}\right) + \left(\frac{1}{1501} + \frac{1}{1502} + \dots + \frac{1}{2000}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \dots + \frac{1}{2500}\right) + \left(\frac{1}{2501} + \frac{1}{2501} + \dots + \frac{1}{3000}\right) + \frac{1}{3001}$$

ហើយ $\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+...+\frac{1}{1500}<\frac{500}{1000}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{1501}+\frac{1}{1502}+...+\frac{1}{2000}<\frac{500}{1500}=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2001}+\frac{1}{2002}+...+\frac{1}{2500}<\frac{500}{2000}=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2501}+\frac{1}{2501}+...+\frac{1}{3000}<\frac{500}{2500}=\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1001}^{3001}\frac{1}{k}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3001}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3000}=\frac{3851}{3000}<\frac{4}{3}\ (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន: $1<\sum_{k=1001}^{3001}\frac{1}{k}<\frac{4}{3}$

ដូចនេះ $1<\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+...+\frac{1}{3001}<\frac{4}{3}$

លំហាត់ទី៨៥

បើ $\left(\frac{y}{z}\right)^a\left(\frac{z}{x}\right)^b\left(\frac{x}{y}\right)^c=1$ និង $A=\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{b-c}}$, $B=\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{c-a}}$, $C=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{a-b}}$

បង្ហាញថា: $A=B=C$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $A=B=C$

$$\left(\frac{y}{z}\right)^a\left(\frac{z}{x}\right)^b\left(\frac{x}{y}\right)^c=1\Rightarrow\left(\frac{z}{x}\right)^b\left(\frac{x}{y}\right)^c=\left(\frac{z}{y}\right)^a=\left(\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}\right)^a=\left(\frac{z}{x}\right)^a\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^a$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^{c-a}=\left(\frac{z}{x}\right)^{a-b}\Rightarrow\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{c-a}\right]^{\frac{1}{(a-b)(c-a)}}=\left[\left(\frac{z}{x}\right)^{a-b}\right]^{\frac{1}{(a-b)(c-a)}}$$

គេបាន: $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{a-b}}=\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{c-a}}$ នាំឲ្យ $C=B \quad (i)$

$$\left(\frac{y}{z}\right)^{a}\left(\frac{z}{x}\right)^{b}\left(\frac{x}{y}\right)^{c}=1\Rightarrow\left(\frac{y}{z}\right)^{a}\left(\frac{z}{x}\right)^{b}=\left(\frac{y}{x}\right)^{c}=\left(\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}\right)^{c}=\left(\frac{y}{z}\right)^{c}\cdot\left(\frac{z}{x}\right)^{c}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{y}{z}\right)^{a-c}=\left(\frac{z}{x}\right)^{c-b}\Rightarrow\left[\left(\frac{y}{z}\right)^{a-c}\right]^{\frac{1}{(a-c)(c-b)}}=\left[\left(\frac{z}{x}\right)^{c-b}\right]^{\frac{1}{(a-c)(c-b)}}$$

គេបាន: $\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{c-b}}=\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{a-c}}$ ឬ $\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{b-c}}=\left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{c-a}}$ នាំឲ្យ $A=B \quad (ii)$

តាម (i) និង (ii) គេបាន: $A=B=C$

ដូចនេះ $A=B=C$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គេមាន: $17!=\overline{3556xy428096000}$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $x+y$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $x+y$

គេមាន: $17!=\overline{3556xy428096000}$

ហើយ $17!=1\times2\times3\times...\times9\times10\times11\times...\times17$ នោះ $17!$ ចែកដាច់នឹង 9 និង 11 ។

ដោយ $17!$ ចែកដាច់នឹង 9 គេបាន:

$3+5+5+6+x+y+4+2+8+9+6=48+x+y\vdots9$ ឬ $3+x+y\vdots9$

គេបាន: $x+y=6$ ឬ $x+y=15$

ចំនួនចែកដាច់នឹង 11 កាលណាផលបូកលេខខ្ទង់សេស ដកនឹង ផលបូកលេខខ្ទង់គូស្មើសូន្យ ឬចែកដាច់នឹង 11 ។

ដោយ 17! ចែកដាច់នឹង 11 នោះគេអាចតាង

$a=3+5+x+4+8+9=29+x$ និង $b=5+6+y+2+0+6=19+y$

គេបាន: $a-b=10+x-y \Rightarrow x-y=1$ ព្រោះ $0\le x,y\le 9$

តែ $x+y=6$, $x-y=1 \Rightarrow x=\frac{7}{2}\notin\mathbb{N}$ គេបាន: $x+y=15$ ។

លំហាត់ទី៨៧

α និង β ជាឫសពីរផ្សេងគ្នានៃសមីការ $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ ។

បង្ហាញថា: $\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

គេមាន: $a\cos\theta+b\sin\theta=c$

គេបាន: $a\cdot\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}+b\cdot\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=c$

$$a\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)+2b\tan\frac{\theta}{2}=c\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(a+c)\tan^2\frac{\theta}{2}-2b\tan\frac{\theta}{2}+(c-a)=0 \quad (i)$$

នោះ $\tan\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$ ជាឫសនៃសមីការនៃ (i) គេបាន:

$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}=\frac{2b}{a+c}$ និង $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{c-a}{c+a}$

គេបាន: $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}}=\frac{\frac{2b}{c+a}}{1-\frac{c-a}{c+a}}=\frac{b}{a}$

យើងបាន: $\cos\left(\alpha+\beta\right)=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\cos\left(\alpha+\beta\right)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យ $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ ជាឫសនៃសមីការ $\left(x+1\right)^n+x^n+1=0$ ដែល α , β ជាឫសនៃសមីការ $x^2+px+q=0$ ។ បើ α , β ក៏ជាឫសនៃសមីការ $x^{2n}+p^nx^n+q^n=0$ នោះបង្ហាញថា: n ជាចំនួនគត់គូ ដែល $p\neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: n ជាចំនួនគត់គូ

ដោយ $\frac{\alpha}{\beta}$ ជាឫសនៃសមីការ $\left(x+1\right)^n+x^n+1=0$ គេបាន:

$\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^n+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+1=0$ ឬ $\left(\alpha+\beta\right)^n+\alpha^n+\beta^n=0 \quad (i)$

តែ α,β ជាឫសនៃសមីការ $x^2+px+q=0\Rightarrow\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$

តាម (i) គេបាន: $\left(-p\right)^n+\alpha^n+\beta^n=0 \quad (ii)$

ហើយ α,β ក៏ជាឫសនៃសមីការ $x^{2n}+p^nx^n+q^n=0$

$\Rightarrow \alpha^{2n}+p^n\alpha^n+q^n=0$, $\beta^{2n}+p^n\beta^n+q^n=0$

ដកគ្នាគេបាន: $\alpha^{2n}-\beta^{2n}+p^n\left(\alpha^n-\beta^n\right)=0$

$$\left(\alpha^n-\beta^n\right)\left(\alpha^n+\beta^n\right)+p^n\left(\alpha^n-\beta^n\right)=0$$

$$\left(\alpha^n-\beta^n\right)\left(\alpha^n+\beta^n+p^n\right)=0$$

ដោយ $\alpha\neq\beta$ នោះ $\alpha^n-\beta^n\neq 0\Rightarrow \alpha^n+\beta^n+p^n=0 \quad (iii)$

យក $(ii)-(iii)$ គេបាន: $(-p)^n-p^n=0$ នោះ n ជាចំនួនគត់គូ ។

ដូចនេះ n ជាចំនួនគត់គូ ។

លំហាត់ទី៨៩

បើផលគុណឫសពីរនៃសមីការ $x^4-18x^3+kx^2+174x-2015=0$ ក្នុងចំណោមឫសបួនស្មើ -31 ។ គណនាតម្លៃ k ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ k

តាង a,b,c,d ជាឫសសមីការ $x^4-18x^3+kx^2+174x-2015=0$ (1)

និង $ab=-31$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន: $\begin{cases} a+b+c+d=18 & (i) \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=k & (ii) \\ abc+abd+acd+cdb=-174 & (iii) \\ abcd=-2015 & (iv) \end{cases}$

តាម (iv) គេបាន: $cd=65$

តាម (iii) គេបាន: $ab(c+d)+cd(b+a)=-174$

$$\Rightarrow -31(c+d)+65(a+b)=-174$$

តាង $c+d=p$, $a+b=q \Rightarrow p+q=18$, $65q-31p=-174$

គេបាន៖ $p=4$, $q=14 \Rightarrow c+d=4$, $a+b=14$

តាម (ii) គេបាន៖ $ab+a(c+d)+b(c+d)+cd=k$

$\Rightarrow -31+(c+d)(a+b)+65=k$

$\Rightarrow -31+4.14+65=k$ គេទាញបាន៖ $k=90$

ដូចនេះ $k=90$ ។

លំហាត់ទី៩០

រកចំនួនគត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $ax^{17}+bx^{16}+1$ ចែកដាច់នឹង x^2-x-1 ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនគត់ a និង b

តាង α ជាឫសនៃសមីការ $x^2-x-1=0 \Rightarrow \alpha^2-\alpha-1=0$

ឬ $\alpha^2=\alpha+1$

ដោយ $ax^{17}+bx^{16}+1$ ចែកដាច់នឹង x^2-x-1 នោះ α ក៏ជាឫសនៃសមីការ $ax^{17}+bx^{16}+1=0$ គេបាន៖ $a\alpha^{17}+b\alpha^{16}+1=0$

$\Rightarrow \alpha^{16}\left(a\alpha+b\right)+1=0$

$\Rightarrow \left(\alpha^2\right)^8\left(a\alpha+b\right)+1=0 \Rightarrow \left(\alpha+1\right)^8\left(a\alpha+b\right)+1=0$ (ព្រោះ $\alpha^2=\alpha+1$)

$\Rightarrow \left(\alpha^2+2\alpha+1\right)^4\left(a\alpha+b\right)+1=0 \Rightarrow \left(3\alpha+2\right)^4\left(a\alpha+b\right)+1=0$

$\Rightarrow \left(9\alpha^2+12\alpha+4\right)^2\left(a\alpha+b\right)+1=0 \Rightarrow \left(21\alpha+13\right)^2\left(a\alpha+b\right)+1=0$

$\Rightarrow \left(441\alpha^2+546\alpha+169\right)\left(a\alpha+b\right)+1=0 \Rightarrow \left(987\alpha+610\right)\left(a\alpha+b\right)+1=0$

$\Rightarrow 987a\alpha^2+\alpha(987b+610a)+610b+1=0$

$\Rightarrow \alpha(987b+610a+987a)+987a+610b+1=0$

$\Rightarrow \alpha(1597a+987b)+987a+610b+1=0$

គេទាញបាន: $\begin{cases}1597a+987b=0 & (i)\\ 987a+610b+1=0 & (ii)\end{cases}$

តាម (i): $a=-\dfrac{987}{1597}b$ ជួសក្នុង (ii) គេបាន: $b=-1597$, $a=987$

ដូចនេះ $b=-1597$, $a=987$ ។

លំហាត់ទី៩១

គេមាន x_1 និង y_1 ជាចំនួនពិត ។ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច ដែលមាន $|z_1|=|z_2|=4$ ។

បង្ហាញថា: $|x_1z_1-y_1z_2|^2+|y_1z_1+x_1z_2|^2=32(x_1^2+y_1^2)$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $|x_1z_1-y_1z_2|^2+|y_1z_1+x_1z_2|^2=32(x_1^2+y_1^2)$

យើងមាន: $|x_1z_1-y_1z_2|^2+|y_1z_1+x_1z_2|^2$

$=|x_1z_1|^2+|y_1z_2|^2-2\operatorname{Re}(x_1y_1z_1z_2)+|y_1z_1|^2+|x_1z_2|^2+2\operatorname{Re}(x_1y_1z_1z_2)$

$=|x_1z_1|^2+|y_1z_2|^2+|y_1z_1|^2+|x_1z_2|^2$

$=x_1^2|z_1|^2+y_1^2|z_2|^2+y_1^2|z_1|^2+x_1^2|z_2|^2$

$=4^2.x_1^2+4^2y_1^2+4^2y_1^2+4^2x_1^2$

$=32(x_1^2+y_1^2)$ ពិត ។

ដូចនេះ $|x_1z_1-y_1z_2|^2+|y_1z_1+x_1z_2|^2=32(x_1^2+y_1^2)$ ។

លំហាត់ទី៩២

បើ z_1, z_2, z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$

និង $\dfrac{z_1^2}{z_2 z_3} + \dfrac{z_2^2}{z_1 z_3} + \dfrac{z_3^2}{z_1 z_2} = -1$ ។ គណនា $|z_1 + z_2 + z_3|$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $|z_1 + z_2 + z_3|$

តាង $z = z_1 + z_2 + z_3$ គេបាន:

$\overline{z} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3 = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3}$ ព្រោះ $\overline{z} \times z = |z|^2 = 1 \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

$\overline{z} = \dfrac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3}{z_1 z_2 z_3} \Rightarrow \overline{z}.b = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$ (តាង $b = z_1 z_2 z_3$)

យើងមាន: $\dfrac{z_1^2}{z_2 z_3} + \dfrac{z_2^2}{z_1 z_3} + \dfrac{z_3^2}{z_1 z_2} = -1 \Rightarrow z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = -z_1 z_2 z_3$

$\Rightarrow z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3 = -4z_1 z_2 z_3$

$\Rightarrow (z_1 + z_2 + z_3)\left[(z_1 + z_2 + z_3)^2 - 3(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)\right] = -4b$

$\Rightarrow z\left(z^2 - 3\overline{z}.b\right) = -4b$

$\Rightarrow z^3 - 3|z|^2.b + 4b = 0$ ឬ $z^3 = \left(3|z|^2 - 4\right)b$

$\Rightarrow |z^3| = \left|3|z|^2 - 4\right|$ ព្រោះ $|b| = |z_1 z_2 z_3| = 1$

បើ $3|z|^2 - 4 \geq 0$ នោះ $\left|3|z|^2 - 4\right| = 3|z|^2 - 4$ គេបាន:

$|z^3| = 3|z|^2 - 4 \Rightarrow |z^3| - 3|z|^2 + 4 = 0$ ឬ $\left(|z| - 2\right)^2\left(|z| + 1\right) = 0$

គេទាញបាន: $|z| = 2$ ។

បើ $3|z|^2 - 4 < 0$ នោះ $\left|3|z|^2 - 4\right| = -\left(3|z|^2 - 4\right) = 4 - 3|z|^2$ គេបាន:

$\left|z^3\right| = 4 - 3\left|z\right|^2 \Rightarrow \left|z^3\right| + 3\left|z\right|^2 - 4 = 0$ ឬ $\left(\left|z\right|+2\right)^2\left(\left|z\right|-1\right) = 0$

គេទាញបាន: $\left|z\right| = 1$

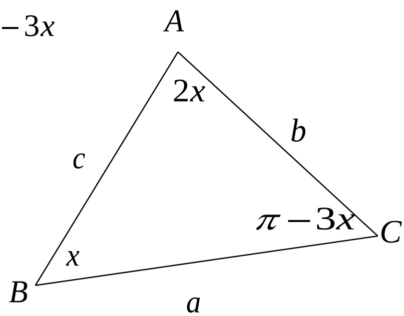
ដូចនេះ $\left|z_1+z_2+z_3\right| = 1$, $\left|z_1+z_2+z_3\right| = 2$ ។

លំហាត់ទី៩៣

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមាន $\angle A = 2\angle B$ ។ a, b, c ជាជ្រុងឈមនៃមុំ A, B, C រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $a^2 = b(b+c)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\angle B = x \Rightarrow \angle A = 2x$, $\angle C = \pi - 3x$



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស:

$$\frac{a}{\sin 2x} = \frac{b}{\sin x} = \frac{c}{\sin(\pi - 3x)} \Rightarrow \frac{a}{2\sin x\cos x} = \frac{b}{\sin x} = \frac{c}{\sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2\cos x} = b = \frac{c}{4\cos^2 x - 1} \qquad (\text{ដែល } \sin x \neq 0 \text{ , } x \neq n\pi\text{ })$$

គេបាន: $\cos x = \dfrac{a}{2b} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{a^2}{4b^2} \quad (i)$

ហើយ $4\cos^2 x - 1 = \dfrac{c}{b} \Rightarrow \cos^2 x = \left(\dfrac{\dfrac{c}{b}+1}{4}\right) \quad (ii)$

តាម (i) និង (ii) គេបាន: $\frac{a^2}{4b^2}=\frac{b+c}{4b}\Rightarrow a^2=b(b+c)$ ពិត ។

ដូចនេះ $a^2=b(b+c)$ ។

លំហាត់ទី៩៤

គេឲ្យ $\sin x+\sin y=a$ និង $\cos x+\cos y=b$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\tan\frac{x}{2}$ និង $\tan\frac{y}{2}$ ជាឫសនៃសមីការ

$\left(a^2+b^2+2b\right)t^2-4at+\left(a^2+b^2-2b\right)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $\tan\frac{x}{2}$ និង $\tan\frac{y}{2}$ ជាឫសនៃសមីការ

$\left(a^2+b^2+2b\right)t^2-4at+\left(a^2+b^2-2b\right)=0 \quad (1)$

គេមាន $\sin x+\sin y=a\Rightarrow 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=a \quad (i)$

$\cos x+\cos y=b\Rightarrow 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=b \quad (ii)$

ឧបថាថា α,β ជាឫសនៃសមីការ (1) គេបាន:

ផលបូកឫស $\alpha+\beta=\frac{4a}{a^2+b^2+2b}$

ផលគុណឫស $\alpha\beta=\frac{a^2+b^2-2b}{a^2+b^2+2b}$

យើងមាន:

$a^2+b^2=\sin^2 x+\sin^2 y+2\sin x\sin y+\cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y$

$=2\left(1+\sin x\sin y+\cos x\cos y\right)=2\left[1+\cos\left(x-y\right)\right]=4\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$a^2+b^2+2b=4\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)+4\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$=4\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]$$

$$=4\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\left[2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right]\quad (iii)$$

$$a^2+b^2-2b=4\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-4\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$=4\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)-\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]$$

$$=4\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right]\quad (iv)$$

ផលបូកឫស $\alpha+\beta=\dfrac{4a}{a^2+b^2+2b}=\dfrac{4\cdot 2\sin\frac{x+y}{2}}{8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}}=\tan\dfrac{x}{2}+\tan\dfrac{y}{2}$ ពិត

ផលគុណឫស $\alpha\beta=\dfrac{a^2+b^2-2b}{a^2+b^2+2b}=\dfrac{8\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}{8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}}=\tan\dfrac{x}{2}\cdot\tan\dfrac{y}{2}$ ពិត

ដូចនេះ $\tan\dfrac{x}{2}$ និង $\tan\dfrac{y}{2}$ ជាឫសនៃសមីការ

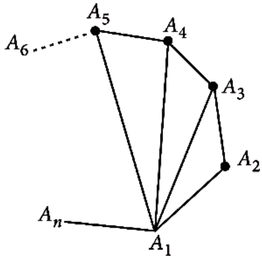
$\left(a^2+b^2+2b\right)t^2-4at+\left(a^2+b^2-2b\right)=0$ ។

លំហាត់ទី៩៥

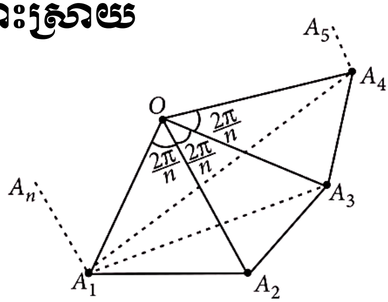
ឧបមាថា $A_1A_2A_3...A_n$ ពហុកោណនិយ័ត

មាន n ជ្រុងដែល $\dfrac{1}{A_1A_2}=\dfrac{1}{A_1A_3}+\dfrac{1}{A_1A_4}$ ។

រកចំនួនជ្រុងនៃពហុកោណនោះ ។



ដំណោះស្រាយ



រកចំនួនជ្រុងនៃពហុកោណ

ពហុកោណនិយ័ត n ជ្រុង

មានកំពូល $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$

គេបាន: $\angle A_1OA_2 = \frac{2\pi}{n}$

តាងជ្រុង $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = ... = r$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ A_1OA_2 គេបាន:

$$(A_1A_2)^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2r^2\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = 4r^2\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow A_1A_2 = 2r\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

ស្រាយដូចគ្នាចំពោះត្រីកោណ A_1OA_3 គេបាន: $A_1A_3 = 2r\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

ត្រីកោណ A_1OA_4 គេបាន: $A_1A_4 = 2r\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)$

មាន: $\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4} \Leftrightarrow \frac{1}{2r\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{1}{2r\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} + \frac{1}{2r\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right).\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)$$

ដោយ $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\neq 0$ គេបាន: $\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)$ មានចម្លើយ

$$\left[\begin{array}{l}\frac{4\pi}{n}=\pi-\frac{3\pi}{n}\\ \frac{4\pi}{n}=\frac{3\pi}{n}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{7\pi}{n}=\pi\\ \frac{\pi}{n}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow n=7$$

ដូចនេះពហុកោណនោះជ្រុងចំនួន 7 ។

លំហាត់ទី៩៦

បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ n ណាដែលធ្វើឲ្យកន្សោម $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$ ជាការេប្រាកដបានទេ ។

ដំណោះស្រាយ

-បើ n ជាចំនួនគត់គូនោះគេអាចតាង $n=2k$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

គេបាន: $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$

$=(2k)^6+3(2k)^5-5(2k)^4-15(2k)^3+4(2k)^2+12(2k)+3$

$=64k^6+96k^5-80k^4-120k^3+16k^2+24k+3=4\lambda+3$ ដែល $\lambda\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ: $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់គូ ។

-បើ n ជាចំនួនគត់សេសនោះគេអាចតាង $n=2k'+1$ ដែល $k'\in\mathbb{Z}$

គេបាន: $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$

$=(2k'+1)^6+3(2k'+1)^5-5(2k'+1)^4-15(2k'+1)^3$

$+4(2k'+1)^2+12(2k'+1)+3$

ដោយ $(2k'+1)^6\equiv 12k'+1 \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$

$3(2k'+1)^5\equiv 30k'+3 \pmod 4 \equiv 2k'+3\equiv 0 \pmod 4$

$5(2k'+1)^4\equiv 40k'+5 \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$

$15(2k'+1)^3\equiv 90k'+15 \pmod 4 \equiv 2k'+3 \pmod 4$

$4(2k'+1)^2\equiv 0 \pmod 4$ គេបាន:

$$n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3\equiv 1+2k'+3+1+2k'+3+3 \pmod 4$$
$$\equiv 4(k'+2)+3 \pmod 4$$

$\Rightarrow n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3=4\lambda'+3$ ដែល $\lambda'\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់សេស ។

ដូចនេះ $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$ មិនអាចជាការេប្រាកដ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ។

លំហាត់ទី៩៧

f ជាអនុគមន៍ពហុធាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$2+f(x).f(y)=f(x)+f(y)+f(xy)\ ;\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ និង $f(2)=5$ ។

គណនា $f(f(1))$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $f(f(1))$

យើងមាន: $2+f(x).f(y)=f(x)+f(y)+f(xy)\ ;\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (i)$

និង $f(2)=5$

យក $y=\dfrac{1}{x}\Rightarrow 2+f(x).f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(1)\ \ (ii)$

យក $x=1\Rightarrow 2+f(1).f(1)=f(1)+f(1)+f(1)$

$\Rightarrow f^2(1)-3f(1)+2=0$ ឬ $\left[f(1)-1\right]\left[f(1)-2\right]=0$

ដោយ $f(1)\neq 1$ ព្រោះ $f(2)=5$ រួចយក $x=1\,,\,y=2$ ជំនួសក្នុង (i)

គេបាន: $f(1)=2$

តាម (ii) គេបាន: $f(x).f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ហើយ $f(x)$ ជា

អនុគមន៍ពហុធាគេបាន: $f(x)=\pm x^n+1$

ដោយ $f(2)=5\Rightarrow 2^n+1=5\Rightarrow n=2$

គេបាន: $f(x)=x^2+1$

ផ្ទៀងផ្ទាត់: បើ $x=1\Rightarrow f(1)=1^2+1=2$ ពិត

បើ $x=2\Rightarrow f(2)=2^2+1=5$ ពិត

ដូចនេះ $f(x)=x^2+1$ ។

សំគាល់: បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$f(x).f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ គេបាន៖

ក- $f(x)=x^n+1$ ។

ខ- $f(x)=1-x^n$ បើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

លំហាត់ទី៩៨

f ជាអនុគមន៍ពហុធាផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$f(\tan x)+f(\cot x)=f(\tan x).f(\cot x)\ ,\ \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\{0\}$$

និង $f(2)=9$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $\frac{f'(2)}{6}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $\frac{f'(2)}{6}$

គេមាន: $f(\tan x)+f(\cot x)=f(\tan x).f(\cot x)\quad (i)$

យក $t=\tan x\Rightarrow \frac{1}{t}=\cot x$

តាម (i) គេបាន: $f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=f(t).f\left(\frac{1}{t}\right)$ នោះ $f(t)=\pm t^n+1$

យក $t=2$, $f(2)=9\Rightarrow f(2)=2^n+1=9\Rightarrow n=3$

គេបាន: $f(t)=t^3+1\Rightarrow f'(t)=3t^2$ ឬ $f'(2)=12$

នោះ $\frac{f'(2)}{6}=\frac{12}{6}=2$

ដូចនេះ $\frac{f'(2)}{6}=2$ ។

លំហាត់ទី៩៩

ឧបមាថា $a,b,c\in\mathbb{R}$ និង $b\neq 0$ ។ បើ α,β ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+b=0$ និង γ,δ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+c=0$

ចូរសរសេរសមីការដែលមានឫស $\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$ និង 2 ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការដែលមានឫស $\dfrac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$ និង 2

ដោយ α,β ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+b=0$

$\Rightarrow x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$

ដោយ γ,δ ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+c=0$

$\Rightarrow x^2+ax+c=(x-\gamma)(x-\delta)$

គេមាន: $\dfrac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}=\dfrac{\alpha^2+a\alpha+c}{\beta^2+a\beta+c}\quad (i)$

តែ α ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+b=0\Rightarrow\alpha^2+a\alpha+b=0$

ហើយ β ជាឫសនៃសមីការ $x^2+ax+b=0\Rightarrow\beta^2+a\beta+b=0$

$\Rightarrow\alpha^2+a\alpha=-b\ ,\ \beta^2+a\beta=-b$

តាម (i) គេបាន: $\dfrac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}=\dfrac{\alpha^2+a\alpha+c}{\beta^2+a\beta+c}=\dfrac{-b+c}{-b+c}=1$

ផលបូកឫស $S=1+2=3$ និងផលគុណឫស $P=1.2=2$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត សមីការដែលមានឫសស្មើ 1 និង 2

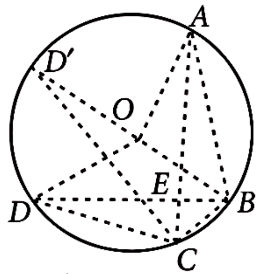
គឺ: $x^2-Sx+P=0$ នោះ $x^2-3x+2=0$ ។

ដូចនេះសមីការមានឫស $\dfrac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$ និង 2 គឺ $x^2-3x+2=0$

លំហាត់ទី១០០

A,B,C,D ជាបួនចំណុចនៅលើរង្វង់មួយដែលមានផ្ចិត O កាំ R ។ អង្កត់ AC កែងនឹងអង្កត់ BD ត្រង់ E ។ បង្ហាញថា $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=4R^2$ ។

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=4R^2$

បន្លាយ BO កាត់រង្វង់ត្រង់ចំណុច D'

ក្នុង ΔDEC និង ΔAEB មាន:

$\angle DEC=\angle AEB=90^0$

$\angle CDB=\angle CAB$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូរួម BC)

នោះ $\Delta DEC\sim\Delta AEB$ តាមករណីម-ម

គេបានផលធៀបដំណូច: $\dfrac{ED}{EC}=\dfrac{EA}{EB}$ ឬ $\dfrac{ED^2}{EC^2}=\dfrac{EA^2}{EB^2}$

$$\Rightarrow \frac{ED^2+EC^2}{EC^2}=\frac{EA^2+EB^2}{EB^2}\Rightarrow ED^2+EC^2=\frac{EC^2}{EB^2}\left(EA^2+EB^2\right)\quad (i)$$

យើងបាន: $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=EA^2+EB^2+\dfrac{EC^2}{EB^2}\left(EA^2+EB^2\right)$

$$=\frac{\left(EA^2+EB^2\right)\left(EB^2+EC^2\right)}{EB^2}=\frac{AB^2.BC^2}{EB^2}\quad (ii)$$

ក្នុង ΔEAB និង $\Delta CD'B$ មាន: $\angle BD'C=\angle BAC$

$$\angle D'CB=\angle AEB=90^0$$

នោះ $\Delta AEB\sim\Delta D'CB\sim\Delta AEB$ តាមករណីម-ម

គេបានផលធៀបដំណូច $\dfrac{BA}{BE}=\dfrac{BD'}{BC}\Rightarrow\dfrac{BA^2}{BE^2}\cdot BC^2=BD'^2\quad (iii)$

តាម (ii) និង (iii) គេបាន: $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=BD'^2$

ដោយ BD' ជាអង្កត់ផ្ចិតនោះ $BD'=2R$ គេបាន:

$EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=4R^2$ ពិត ។

ដូចនេះ $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=4R^2$ ។

លំហាត់ទី១០១

រកគ្រប់អនុគមន៍ f ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$[f(x)]^2 . f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x^3$, $x \neq -1$ និង $f(x) \neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន: $[f(x)]^2 . f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x^3$, $x \neq -1$ (i)

ជំនួស x ដោយ $\frac{1-x}{1+x}$ គេបាន: $\left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]^2 . f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3$ (ii)

តាម (i) និង (ii) គេបាន: $\left(\frac{x^3}{(f(x))^2}\right)^2 . f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3$

$\Rightarrow \frac{[f(x)]^3}{x^6} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$ គេទាញបាន: $f(x) = x^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

ដូចនេះ $f(x) = x^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ។

លំហាត់ទី១០២

សន្មតថា $S = \frac{1}{n^4}\prod_{r=1}^{2n}\left(n^2 + r^2\right)$ ។

បង្ហាញថា: $\lim_{n\to\infty} \log S = \int_0^2 \log\left(x^2 - 4x + 5\right)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\lim_{n\to\infty}\log S=\int_0^2\log\left(x^2-4x+5\right)dx$

គេមាន: $S=\frac{1}{n^4}\prod_{r=1}^{2n}\left(n^2+r^2\right)$ បំពាក់ log លើអង្គទាំងពីរគេបាន:

$$\log S=\log\left[\frac{1}{n^4}\prod_{r=1}^{2n}\left(n^2+r^2\right)\right]=\sum_{r=1}^{2n}\frac{1}{n}\log\left(n^2+r^2\right)-4\log n$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{2n}\log\left(n^2\left(1+\left(\frac{r}{n}\right)^2\right)\right)-4\log n$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{r=1}^{2n}2\log n+\sum_{r=1}^{2n}\log\left(1+\left(\frac{r}{n}\right)^2\right)\right)-4\log n$$

$$=4\log(n)+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{2n}\log\left(1+\left(\frac{r}{n}\right)^2\right)-4\log n$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{2n}\log\left(1+\left(\frac{r}{n}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\log S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{2n}\log\left(1+\left(\frac{r}{n}\right)^2\right)$$

$$=\int_0^2\log\left(1+x\right)^2=\int_0^2\log\left(x^2-4x+5\right)dx$$ ពិត

ព្រោះ: $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$

ដូចនេះ: $\lim_{n\to\infty}\log S=\int_0^2\log\left(x^2-4x+5\right)dx$

លំហាត់ទី១០៣

គេឲ្យ $p=\left(1+\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{9\pi}{10}\right)$

$q=\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{9\pi}{8}\right)$

រកទំនាក់ទំនងរវាង p និង q ។

ដំណោះស្រាយ

រកទំនាក់ទំនងរវាង p និង q

យើងមាន: $1+\cos\frac{9\pi}{10}=1+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)=1-\cos\frac{\pi}{10}$

$$1+\cos\frac{7\pi}{10}=1+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{10}\right)=1-\cos\frac{3\pi}{10}$$

យើងបាន: $p=\left(1+\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{9\pi}{10}\right)$

$$=\left(1+\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$=\left(1-\cos^2\frac{\pi}{10}\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{10}\right)=\left(\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}\right)^2 \quad (i)$$

តាង $A=\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}$ គុណអង្គនឹង $4\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}$ គេបាន:

$$4\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}A=\left(2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(2\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\right)=\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}}{4\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}} \quad (ii)$$

ដោយ $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\Rightarrow\cos\frac{3\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}$

$\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}=-\frac{\pi}{10}\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)\Rightarrow\sin\frac{3\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{10}$

តាម (ii) គេបាន: $A=\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}}{4\cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{4}$ ឬ $\sin\frac{\pi}{10}\cdot\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}$

តាម (i) គេបាន: $p=\frac{1}{16}$

គេមាន: $1+\cos\frac{5\pi}{8}=1+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)=1-\cos\frac{3\pi}{8}$

$1+\cos\frac{7\pi}{8}=1+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=1-\cos\frac{\pi}{8}$

គេបាន: $q=\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{9\pi}{8}\right)$

$$=\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$=\left(1-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)=\left(\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{3\pi}{8}\right)^2 \quad (iii)$$

តាង $B=\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{3\pi}{8}$ គុណអង្គនឹង $2\cos\frac{\pi}{8}$ គេបាន:

$2\cos\frac{\pi}{8}B=2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{3\pi}{8}$

$\Rightarrow B=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

តាម (iii) $q=\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{9\pi}{8}\right)$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}=\frac{2}{16}=2p$$

ដូចនេះ $q=2p$ ។

លំហាត់ទី១០៤

បង្ហាញថា $\tan\frac{\pi}{16}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}+1\right)$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\tan\frac{\pi}{16}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}+1\right)$

របៀបទី ១

គេមាន: $\tan\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\Rightarrow \tan\frac{\pi}{16}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}\quad (i)$

$$\sin 2\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 4\theta}{2}}\Rightarrow \sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}==\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\quad (ii)$$

$$\cos 2\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 4\theta}{2}}\Rightarrow \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\quad (iii)$$

តាម $(i),(ii)$ និង (iii) គេបាន:

$$\tan\frac{\pi}{16}=\frac{1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}}=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)\left(\sqrt{2\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)}{\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}-\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}}$$

$$=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2-1}}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}+1\right)$$ ពិត

ដូចនេះ $\tan\frac{\pi}{16}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}+1\right)$ ។

របៀបទី ២

តាមរូបមន្ត $\tan^2\frac{\pi}{16}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{8}}{1+\cos\frac{\pi}{8}}$ (i)

ដោយ $\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1\Rightarrow\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2}$

$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}$ $\Rightarrow\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ ព្រោះ $\cos\frac{\pi}{8}>0$

តាម (i) គេបាន:

$$\tan^2\frac{\pi}{16}=\frac{1-\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2+\sqrt{\sqrt{2}+2}}=\frac{\left(2-\sqrt{\sqrt{2}+2}\right)^2}{4-\sqrt{2}-2}$$

$$=\frac{4+\sqrt{2}+2-4\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(6+\sqrt{2}-4\sqrt{\sqrt{2}+2}\right)}{2}$$

$$=\frac{12+2\sqrt{2}-8\sqrt{\sqrt{2}+2}+6\sqrt{2}+2-4\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$$

$$=7+4\sqrt{2}-4\sqrt{\sqrt{2}+2}-2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

$$=7+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}-2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

$$=4+2\sqrt{2}-2\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\pi}{16}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}+1\right) \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{\pi}{16}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}-\left(\sqrt{2}+1\right)$

លំហាត់ទី១០៥

បើ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង $a+b+c=6$ ។

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$

របៀបទី១

តាមវិសមភាព $AM-HM$ គេបាន:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\ge\frac{3}{a+b+c}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{2}$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន:

$$3\left[\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\right]\ge\left[\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq\frac{\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{3}$$

$$\geq\frac{\left(6+\frac{3}{2}\right)^2}{3}=\frac{75}{4}$$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$ គឺ $\frac{75}{4}$ ។

របៀបទី២

គេមាន: $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$

$$=a^2+b^2+c^2+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\quad (i)$$

តាមវិសមភាព *Cauchy* : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{abc}}=3\quad (ii)$

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}=\frac{6}{3}=2$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^2}}\geq\frac{3}{2^2}=\frac{3}{4}\quad (iii)$$

តាមវិសមភាព *Cauchy – Schwarz*

$$\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq\frac{6^2}{3}=12\quad (iv)$$

តាម $(i),(ii),(iii)$ និង (iv) គេបាន:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq 12+2\times 3+\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$ គឺ $\frac{75}{4}$ ។

លំហាត់ទី១០៦

បើ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}$

តាមវិសមភាព $Cauchy$ ពីរតួ

$$a^2+1\geq 2a \Rightarrow \frac{a^2+1}{b+c}\geq\frac{2a}{b+c} \quad (i)$$

$$b^2+1\geq 2b \Rightarrow \frac{b^2+1}{c+a}\geq\frac{2b}{c+a} \quad (ii)$$

$$c^2+1\geq 2c \Rightarrow \frac{c^2+1}{a+b}\geq\frac{2c}{a+b} \quad (iii)$$

តាម $(i),(ii)$ និង (iii) គេបាន:

$$\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b} \quad (*)$$

តាមវិសមភាព $AM-HM$

$$\frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}+\ldots+x_n^{-1}}{n}\geq\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2$$ គេបាន:

$$\frac{\left(\frac{b+c}{a+b+c}\right)^{-1}+\left(\frac{c+a}{a+b+c}\right)^{-1}+\left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^{-1}}{3}$$

$$\geq \left(\frac{\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}}{3} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}}{3} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{a+c}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)}{3} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{a+c}+\frac{2c}{a+b} \geq 3 \quad (**)$$

តាម (*) និង (**) គេបាន: $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b} \geq 3$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}$ គឺ 3 ។

លំហាត់ទី១០៧ (USAJMO 2012)

គេមាន a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា: $\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geq \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា: $\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geq \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$

$$\left[a(5a+b)+b(5b+c)+c(5c+a)\right]\left(\frac{a^3}{5a+b}+\frac{b^3}{5b+c}+\frac{c^3}{5c+a}\right)$$

$\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \quad (i)$ គេបាន:

$$\frac{a^3}{5a+b}+\frac{b^3}{5b+c}+\frac{c^3}{5c+a}\geq\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{5a^2+5b^2+5c^2+ab+ac+bc}$$

តែ $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$ គេបាន:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{5a^2+5b^2+5c^2+ab+ac+bc}\geq\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{6a^2+6b^2+6c^2}=\frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

តាម (i) គេបាន: $\dfrac{a^3}{5a+b}+\dfrac{b^3}{5b+c}+\dfrac{c^3}{5c+a}\geq\dfrac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right) \quad (ii)$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$

$$\left[b(5a+b)+c(5b+c)+a(5c+a)\right]\left(\frac{b^3}{5a+b}+\frac{c^3}{5b+c}+\frac{a^3}{5c+a}\right)$$

$\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$

$$\Rightarrow\frac{b^3}{5a+b}+\frac{c^3}{5b+c}+\frac{a^3}{5c+a}\geq\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+5ab+5ac+5bc}$$

តែ $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$ គេបាន:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+5ab+5ac+5bc}\geq\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{6a^2+6b^2+6c^2}=\frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{b^3}{5a+b}+\frac{c^3}{5b+c}+\frac{a^3}{5c+a}\geq\frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{3b^3}{5a+b}+\frac{3c^3}{5b+c}+\frac{3a^3}{5c+a}\geq\frac{3}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right) \quad (iii)$$

យក $(ii)+(iii)$ គេបាន:

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a}\geq\frac{1+3}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

ដូចនេះ $\dfrac{a^3+3b^3}{5a+b}+\dfrac{b^3+3c^3}{5b+c}+\dfrac{c^3+3a^3}{5c+a}\geq\dfrac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ ។

លំហាត់ទី១០៨

បើ $a_1, a_2, a_3, ..., a_{4001}$ ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយមាន

$\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+...+\dfrac{1}{a_{4000}a_{4001}}=10$ និង $a_1+a_{4001}=50$ ។

គណនា $|a_1-a_{4001}|$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $|a_1-a_{4001}|$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{4000}a_{4001}}=10 \quad (i)$$

តាង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

បើ $d=0$ នោះ $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+...+\dfrac{1}{a_{4000}a_{4001}}=\dfrac{4000}{a_1^2}=\dfrac{4000}{a_1.a_n}$

ព្រោះ $a_1=a_2=...=a_{4001}$

បើ $d\neq 0$ នោះ $\dfrac{1}{a_1a_2}=\dfrac{d}{da_1a_2}=\dfrac{a_2-a_1}{da_1.a_2}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}\right)$ គេបាន:

$$\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$$

$$\frac{1}{a_2a_3}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{a_{4000}a_{4001}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{4000}}-\frac{1}{a_{4001}}\right)$$

បូកអង្គនឹងអង្គគេបាន: $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_{4000}a_{4001}}$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{4001}}\right)=\frac{a_{4001}-a_1}{da_1.a_{4001}}=\frac{4000d}{da_1.a_{4001}}=\frac{4000}{a_1.a_{4001}} \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន: $\frac{4000}{a_1a_{4001}}=10 \Rightarrow a_1a_{4001}=400$

ដោយ $a_1+a_{4001}=50 \Rightarrow (a_1-a_{4001})^2=(a_1+a_{4001})^2-4a_1a_{4001}$

$$=2500-4\times400=900 \ \Rightarrow |a_1-a_{4001}|=30$$

ដូចនេះ $|a_1-a_{4001}|=30$ ។

លំហាត់ទី១០៩

ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុងទាំងបី a,b,c បង្កើតបាន ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន a ជាតួមធ្យម ។

បង្ហាញថា $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$

របៀបទី ១

តាមរូបមន្ត $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$, $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

គេបាន: $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\times\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

$$=\frac{p-a}{p}=\frac{\frac{a+b+c}{2}-a}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{b+c-a}{a+b+c} \quad (i) \quad \text{ព្រោះ } p=\frac{a+b+c}{2}$$

ដោយ a,b,c បង្កើតបានជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមាន a ជាតួមធ្យម

គេបាន: $b+c=2a$

តាម (i) គេបាន: $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{2a-a}{2a+a}=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$ ពិត

ដូចនេះ $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$ ។

របៀបទី ២

ដោយ a,b,c បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ដែលមាន a ជាតួមធ្យម

នោះ $b+c=2a$ អនុវត្តទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABC

គេបាន: $2R(\sin B+\sin C)=4R\sin A$

តែ $\sin B+\sin C=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(90^0-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$ និង $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$; $\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=2\sin\frac{A}{2}$

$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=2\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$

$=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

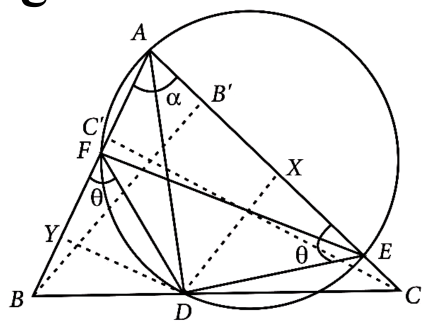
$3\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\Rightarrow\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$ ពិត

ដូចនេះ $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី១១០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ និង D,E,F ជាចំណុចនៅលើជ្រុង BC, CA, AB រៀងគ្នា ។ បើ $AFDE$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ បង្ហាញថា $\frac{4S_{DEF}}{S_{ABC}} \le \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $\frac{4S_{DEF}}{S_{ABC}} \le \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$

យើងមាន: $\angle EDF + \angle EAF = \pi$

(ផលបូកមុំឈមនៃចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់)

$\Rightarrow \angle EDF = \pi - \angle EAF$

$\Rightarrow \sin\angle EDF = \sin(\pi - \angle EAF) = \sin\angle EAF = \sin\angle BAC$

គេមាន: $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}DE.DF.\sin\angle EDF}{\frac{1}{2}AB.AC.\sin\angle BAC} = \frac{DE.DF}{AB.AC} \quad (i)$

តាងចំណុច B' និង X ជាជើងចំណោលកែងពី B, D ទៅ AC រៀងគ្នា និង C', Y ជាជើងចំណោលកែងពី C និង D ទៅ AB រៀងគ្នា គេបាន: BB' ស្របនឹង DX ហើយ YD ស្របនឹង CC'

តាមទ្រឹស្តីបទតាលែសគេបាន: $\frac{DX}{BB'} = \frac{DC}{BC}$ និង $\frac{DY}{CC'} = \frac{BD}{BC}$

$\Rightarrow \frac{DX}{BB'} \cdot \frac{DY}{CC'} = \frac{BD.DC}{BC^2} \quad (ii)$

តែ $BC^2=(BD+DC)^2=(BD-DC)^2+4BD.DC\geq 4BD.DC$

តាម (ii) គេបាន: $\dfrac{DX}{BB'}\cdot\dfrac{DY}{CC'}\leq\dfrac{1}{4}\quad(iii)$

យក $\angle EAF=\alpha$, $\angle DEA=\angle DFB=\theta$ និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅចតុកោណ $AFDE$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសគេបាន: $EF=2R\sin\alpha$, $AD=2R\sin\theta$

$$\Rightarrow\frac{EF}{AD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\quad(iv)$$

ក្នុងត្រីកោណកែង ABB' មាន: $\sin\alpha=\dfrac{BB'}{AB}\Rightarrow BB'=AB\sin\alpha$

ក្នុងត្រីកោណកែង ACC' មាន: $\sin\alpha=\dfrac{CC'}{AC}\Rightarrow CC'=AC.\sin\alpha$

ក្នុងត្រីកោណកែង DEX មាន: $\sin\theta=\dfrac{DX}{DE}\Rightarrow DX=DE\sin\theta$

ក្នុងត្រីកោណកែង DFY មាន: $\sin\theta=\dfrac{DY}{DF}\Rightarrow DY=DF\sin\theta$

$$\Rightarrow\frac{DX}{BB'}\cdot\frac{DY}{CC'}=\frac{DEDF\sin^2\theta}{AB.AC\sin^2\alpha}$$

តាម (iii) គេបាន: $\dfrac{ED.DF\sin^2\theta}{AB.AC\sin^2\alpha}\leq\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{4DE.DF}{AB.AC}\leq\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}\quad(v)$

តាម $(i),(iv)$ និង (v) គេបាន: $\dfrac{4S_{DEF}}{S_{ABC}}\leq\left(\dfrac{EF}{AD}\right)^2$ ពិត ។

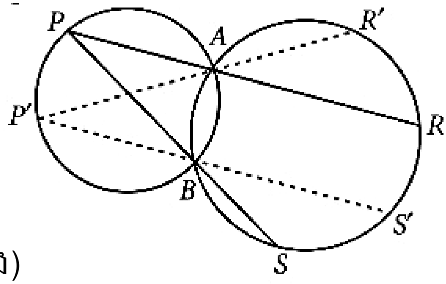
ដូចនេះ $\dfrac{4S_{DEF}}{S_{ABC}}\leq\left(\dfrac{EF}{AD}\right)^2$ ។

លំហាត់ទី១១១

រង្វង់ពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំណុច A និង B ។ P ជាចំណុចមួយនៅលើធ្នូ AB នៃរង្វង់មួយ ។ បន្ទាត់ PA និង PB កាត់រង្វង់មួយទៀតត្រង់ចំណុច R និង S (ដូចរូប) ។ បើ P' ជាចំណុចមួយនៅលើធ្នូ AB នៃរង្វង់ទី១ ហើយ $P'A$ និង $P'B$ កាត់រង្វង់មួយទៀតត្រង់ R' និង S' ។ បង្ហាញថាប្រវែងអង្កត់ធ្នូ $RS = R'S'$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាប្រវែងអង្កត់ធ្នូ $RS = R'S'$



យើងមាន:

$\angle PBA + \angle ABS = \pi$ (មុំរាប)

$\Rightarrow \angle PBA = \pi - \angle ABS$

$\angle ABS + \angle ARS = \pi$ (ផលបូកមុំឈមនៃចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់)

$\Rightarrow \pi - \angle ABS = \angle ARS \Rightarrow \angle PBA = \angle ARS$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន: $\angle PAB = \angle BSR$

នោះ $\Delta PAB \sim \Delta PSR$ តាមករណីម-ម

គេបាន:ផលធៀបដំណូច $\dfrac{PA}{PS} = \dfrac{PB}{PR} = \dfrac{AB}{RS}$ (i)

ដូចគ្នាគេបាន: $\dfrac{P'A}{P'S} = \dfrac{P'B}{P'R'} = \dfrac{AB}{R'S'}$ (ii)

ក្នុងត្រីកោណ APS និង $AP'S'$ មាន:

$\angle APS = \angle APB = \angle AP'B = \angle AP'S'$ (មុំស្កាត់ធ្នូរួម AB)

ដោយ P និង P' នៅលើធ្នូ AB នៃរង្វង់តែមួយ ហើយ S និង S' នៅលើធ្នូ AB នៃរង្វង់មួយទៀតតែមួយដូចគ្នា

គេបាន: $\angle AS'P' = \angle ASP$ នោះ $\Delta APS \sim \Delta AP'S'$ តាមករណី ម-ម

គេបានផលធៀបដំណូច $\frac{PA}{PS} = \frac{P'A}{P'S'} \quad (iii)$

តាម $(i),(ii)$ និង (iii) គេបាន: $\frac{AB}{RS} = \frac{AB}{R'S'} \Rightarrow RS = R'S'$ ពិត

ដូចនេះប្រវែងអង្កត់ធ្នូ $RS = R'S'$ ។

លំហាត់ទី១១២

កំណត់ក្រឡាផ្ទៃ S នៃត្រីកោណ ABC មួយដែលមានជ្រុង a, b, c និង ជា p កន្លះបរិមាត្រ បើគេដឹងថា

$$(p-b)(p-c) = \frac{a}{h}, (p-a)(p-c) = \frac{b}{k}, (p-a)(p-b) = \frac{c}{l}$$

ដែល h, k, l ជាចំនួនថេរ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ក្រឡាផ្ទៃ S នៃត្រីកោណ ABC

គេមាន: $(p-b)(p-c) = \frac{a}{h} \Rightarrow h = \frac{a}{(p-b)(p-c)} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$

ដូចគ្នាគេបាន: $k = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c}$, $l = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b}$

តាង $p' = h + k + l$ គេបាន:

$$p' = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \Rightarrow p-a = \frac{1}{p'-h}$$

$$p-b = \frac{1}{p'-h} , \quad p-c = \frac{1}{p'-h}$$

$$\Rightarrow (p-a)+(p-b)+(p-c)=\frac{1}{p'-h}+\frac{1}{p'-k}+\frac{1}{p'-l}$$

$$p=\frac{1}{p'-h}+\frac{1}{p'-k}+\frac{1}{p'-l}$$

តាមរូបមន្តហេរុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេបាន: $S=\left[\dfrac{\frac{1}{p'-h}+\frac{1}{p'-k}+\frac{1}{p-l}}{(p'-h)(p'-k)(p'-l)}\right]^{\frac{1}{2}}$

ដូចនេះក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S=\left[\dfrac{\frac{1}{p'-h}+\frac{1}{p'-k}+\frac{1}{p-l}}{(p'-h)(p'-k)(p'-l)}\right]^{\frac{1}{2}}$ ។

លំហាត់ទី១១៣

បើ $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2015}$ ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែល $\sum_{r=1}^{2014}\frac{1}{a_r a_{r+1}}=\frac{2014}{2013}$

និង $a_{101}+a_{305}+a_{509}+a_{1507}+a_{1711}+a_{1915}=6042$ ។

សរសេរសមីការដែលមានឫស a_1 និង a_{2015} ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការដែលមានឫស a_1 និង a_{2015}

តាង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះគេបាន:

$$\sum_{r=1}^{2014}\frac{1}{a_r a_{r+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+...+\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{2014}}-\frac{1}{a_{2015}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2015}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{a_{2015}-a_1}{a_1a_{2015}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{a_1+2014d-a_1}{a_1a_{2015}}\right)=\frac{2014}{a_1a_{2015}}$$

តែ $\sum_{r=1}^{2014}\frac{1}{a_ra_{r+1}}=\frac{2014}{2013}\Rightarrow\frac{2014}{a_1a_{2015}}=\frac{2014}{2013}\Rightarrow a_1a_{2015}=2013$

ហើយ $a_{101}+a_{305}+a_{509}+a_{1507}+a_{1711}+a_{1915}=6042$ គេបាន:

$$a_1+100d+a_1+304d+a_1+508d+a_1+1506d+a_1+1710d+a_1+1914d$$

$$=6a_1+6042d=6042\ \Rightarrow a_1+1007d=1007$$

គេបាន: $a_1+a_{2015}=a_1+a_1+2014d=2(a_1+1007d)=2\times1007=2014$

ដោយផលបូកឫស $S=a_1+a_{2015}=2014$

ផលគុណឫស $P=a_1.a_{2015}=2013$

ដូចនេះ: a_1 និង a_{2015} ជាឫសនៃសមីការ $x^2-Sx+P=0$

ឬ $x^2-2014x+2013=0$ ។

លំហាត់ទី១១៤

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) មួយមាន $a_0=a_1=1$ និង

$\sqrt{a_n.a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}.a_{n-2}}=2a_{n-1}$ ចំពោះ: $n\ge2$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

គេមាន: $\sqrt{a_n.a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}.a_{n-2}}=2a_{n-1}\Rightarrow\sqrt{a_n.a_{n-2}}-2a_{n-1}=\sqrt{a_{n-1}.a_{n-2}}$

ចែកអង្គនឹង $\sqrt{a_{n-1}.a_{n-2}}$ គេបាន: $\frac{\sqrt{a_n.a_{n-2}}}{\sqrt{a_{n-1}.a_{n-2}}}-\frac{2a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-1}.a_{n-2}}}=1$

$$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}-2\sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}.a_{n-2}}}=1$$

$$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}-2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}=1 \quad (i)$$

តាង $b_n=\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}\Rightarrow b_{n-1}=\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$ តាម (i) គេបាន: $b_n-2b_{n-1}=1 \quad (ii)$

$b_1=\sqrt{\frac{a_1}{a_0}}=\sqrt{\frac{1}{1}}=1$, $b_2=2b_1+1=2\times1+1=3$ និង $b_{n-1}-2b_{n-2}=1 \quad (iii)$

យក $(ii)-(iii)$ គេបាន: $b_n-3b_{n-1}+2b_{n-2}=0$

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)=0$

សមីការសម្គាល់មានឫស $x=1$, $x=2$

គេបាន: $b_n=c_1+2^nc_2 \quad ; \quad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$

ដោយ $1=b_1=c_1+2c_2$ និង $3=b_2=c_1+4c_2\Rightarrow c_1=-1$, $c_2=1$

គេបាន: $b_n=2^n-1$

ចំពោះ $\forall n\geq2$ គេបាន: $b_n=\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}\Rightarrow a_n=a_{n-1}.b_n^2=a_{n-1}\left(2^n-1\right)^2$

$=a_{n-2}\left(2^n-1\right)^2\left(2^{n-1}-1\right)^2$

$=\dots$

$=a_0\left(2^n-1\right)^2\left(2^{n-1}-1\right)^2\dots\left(2^2-1\right)^2\left(2-1\right)^2$

$=\left(2^n-1\right)^2\left(2^{n-1}-1\right)^2\dots\left(2^2-1\right)^2\left(2-1\right)^2$ ព្រោះ $a_0=1$

ដូចនេះតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) គឺ

$a_n=\left(2^n-1\right)^2\left(2^{n-1}-1\right)^2\dots\left(2^2-1\right)^2\left(2-1\right)^2$ ។

លំហាត់ទី១១៥

គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម:

$$A=\frac{1}{4029}+\frac{2\times 2014}{2014^2+2015^2}+\frac{4\times 2014^3}{2014^4+2015^4}-\frac{8\times 2014^7}{2014^8-2015^8}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម:

$$A=\frac{1}{4029}+\frac{2\times 2014}{2014^2+2015^2}+\frac{4\times 2014^3}{2014^4+2015^4}-\frac{8\times 2014^7}{2014^8-2015^8}$$

គេមាន: $A=\frac{1}{4029}+\frac{2\times 2014}{2014^2+2015^2}+\frac{4\times 2014^3}{2014^4+2015^4}-\frac{8\times 2014^7}{2014^8-2015^8}$

$$=1-\frac{1}{2015-2014}+\frac{1}{2015+2014}+\frac{2\times 2014}{2014^2+2015^2}+\frac{4\times 2014^3}{2014^4+2015^4}$$

$$-\frac{8\times 2014^7}{2014^8-2015^8}$$

$$=-\frac{2\times 2014}{2015^2-2014^2}+\frac{2\times 2014}{2015^2+2014^2}+\frac{4\times 2014^3}{2015^4+2014^4}-\frac{8\times 2014^7}{2014^8-2015^8}+1$$

$$=-\frac{4\times 2014^3}{2015^4-2014^4}+\frac{4\times 2014^3}{2015^4+2014^4}-\frac{8\times 2014^7}{2014^8-2015^8}+1$$

$$=-\frac{8\times 2014^7}{2015^8-2014^8}+\frac{8\times 2014^7}{2015^8-2014^8}+1=1$$

ដូចនេះ $A=1$ ។

លំហាត់ទី១១៦

គេឲ្យប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម:

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_2+x_3=x_3+x_4=...=x_{2014}+x_{2015}=x_{2015}+x_{2016}=1 \\ x_1+x_2+x_3+...+x_{2015}+x_{2016}=x_{2016} \end{cases}$$

គណនាតម្លៃ x_1 ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ x_1

គេមាន: $x_1+x_2=x_2+x_3 \Rightarrow x_1=x_3$

$x_2+x_3=x_3+x_4 \Rightarrow x_2=x_4$

$x_3+x_4=x_4+x_5 \Rightarrow x_3=x_5$

$x_4+x_5=x_5+x_6 \Rightarrow x_4=x_6$

....

$\Rightarrow x_1=x_3=x_5=...=x_{2015}$ និង $x_2=x_4=x_6=...=x_{2016}$

តាង $a=x_1+x_3+x_5+...+x_{2015}$ និង $b=x_2+x_4+x_6+...+x_{2016}$

$\Rightarrow a+b=1008\left(x_1+x_2\right)=x_{2016}=x_2 \Rightarrow x_2=1008\times1=1008$

ដោយ $x_1+x_2=1 \Rightarrow x_1=1-x_2=1-1008=-1007$

ដូចនេះ: $x_1=-1007$ ។

លំហាត់ទី១១៧

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $n<1000$ ។ បើ $n^{2014}-1$ ចែកដាច់នឹង $(n-1)^2$ ។ គណនាតម្លៃធំបំផុតនៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ n

តាង $p=2014$ គេបាន: $\frac{n^p-1}{(n-1)^2}=\frac{(n-1)\left(n^{p-1}+n^{p-2}+...+1\right)}{(n-1)^2}$

$=\frac{\left(n^{p-1}-1\right)+\left(n^{p-2}-1\right)+...+(n-1)+p}{n-1}$

$=\frac{n^{p-1}-1}{n-1}+\frac{n^{p-2}-1}{n-1}+...+1+\frac{p}{n-1}$

ដោយ $n-1$ ជាតួចែកនៃ $n^{p-1}-1$, $n^{p-2}-1$, $n-1$

$\Rightarrow$ $\frac{n^{p-1}-1}{n-1}+\frac{n^{p-2}-1}{n-1}+...+1$ ជាចំនួនគត់ នោះ $\frac{p}{n-1}$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ដែរ គេបាន: $\frac{p}{n-1}=\frac{2014}{n-1}=\frac{2\times19\times53}{n-1}$

តម្លៃធំបំផុតនៃ $n-1$ គឺ $n-1=2\times53=106\Rightarrow n=107$ $(n<1000)$

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃ n គឺ 107 ។

លំហាត់ទី១១៨

បើ $x^3+x^2+x+1=0$ ។ គណនាតម្លៃផលបូកខាងក្រោម:

$$S=x^{-2014}+x^{-2013}+x^{-2012}+...+x^{-1}+1+x+x^2+...+x^{2013}+x^{2014}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃផលបូកខាងក្រោម:

$$S=x^{-2014}+x^{-2013}+x^{-2012}+...+x^{-1}+1+x+x^2+...+x^{2013}+x^{2014}$$

គេមាន: $x^3+x^2+x+1=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)(x+1)=0$

គេបាន: $x=-1$, $x=\pm i$

គេមាន: $S = x^{-2014}\left(1+x+x^2+x^3\right)+...+x^{-6}\left(1+x+x^2+x^3\right)+x^{-2}+x^{-1}$

$+1+x+x^2+x^3\left(1+x+x^2+x^3\right)+...+x^{2011}\left(1+x+x^2+x^3\right)$

$= x^{-2}+x^{-1}+1+x+x^2 = x^{-2}\left(1+x+x^2+x^3\right)+x^2 = x^2$

បើ $x=-1$ គេបាន: $S=1$

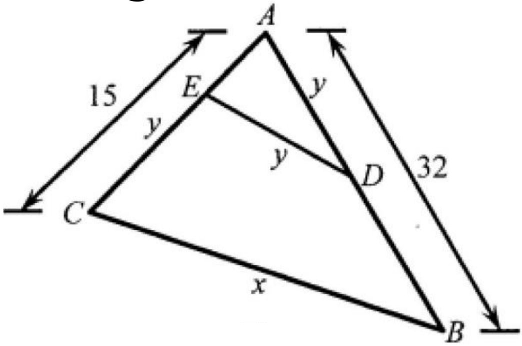
បើ $x=\pm i$ គេបាន: $S=-1$

លំហាត់ទី១១៩

ត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB=32$, $AC=15$ និង $BC=x$ ដែល x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។D និង E ជាចំណុចនៅលើជ្រុង AB និង AC រៀងគ្នាដែល $AD=DE=EC=y$ និង y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ គណនាតម្លៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ x



តាង $\angle BAC=\theta$

តាមវិសមភាពក្នុងត្រីកោណ ADE : $2y>15-y \Rightarrow y>5$

ហើយ $y<15$ នោះ $5<y<15 \quad (i)$

ចំពោះត្រីកោណសមបាត ADE

តាម D គូសកម្ពស់ DE កាត់បាត AE ត្រង់ F

គេបាន: $AF = EF = \frac{AE}{2} = \frac{15-y}{2}$

ក្នុងត្រីកោណកែង ADF មាន: $\cos\theta = \frac{AF}{AD} = \frac{15-y}{2y} \quad (ii)$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABC

គេបាន: $x^2 = 15^2 + 32^2 - 2(15)(32)\cos\theta \quad (iii)$

តាម (ii) និង (iii) គេបាន: $x^2 = 1249 - 480.\frac{15-y}{y}$ ឬ

$x^2 = 1729 - \frac{7200}{y}$

ដោយ x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ x^2 ក៏ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ

$\Rightarrow \frac{7200}{y}$ ជាចំនួគត់វិជ្ជមាន ឬ y ជាតួចែកវិជ្ជមាននៃ 7200 (iv)

តាម (i) និង (iv) គេបាន: $y = \{6,8,9,10,12\}$

បើ $y = 6 \Rightarrow x^2 = 1729 - 7200 = 529 \Rightarrow x = 23$

បើ $y = 8 \Rightarrow x^2 = 1729 - 900 = 829$ មិនពិត

បើ $y = 9 \Rightarrow x^2 = 1729 - 800 = 929$ មិនពិត

បើ $y = 10 \Rightarrow x^2 = 1729 - 720 = 1009$ មិនពិត

បើ $y = 12 \Rightarrow x^2 = 1729 - 600 = 1129$ មិនពិត

ដូចនេះ $x = 23$ ។

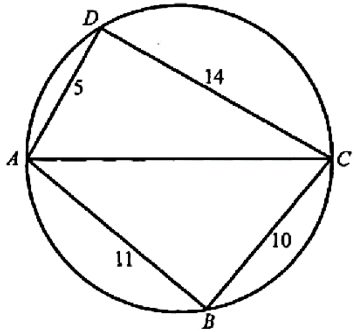
លំហាត់ទី១២០

តាមរូបខាងក្រោម $ABCD$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់មាន

$AD = 5$, $DC = 14$, $BC = 10$ និង $AB = 11$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃចតុកោណ $ABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ



គណនាក្រឡាផ្ទៃចតុកោណ $ABCD$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ACD គេបាន:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD.CD\cos\angle D$$
$$= 5^2 + 14^2 - 2.5.14\cos\angle D \quad (i)$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos\angle B$

$$= 11^2 + 10^2 - 2.11.10\cos\angle B \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន:

$$221 - 220\cos\angle B = 221 - 140\cos\angle D \quad (iii)$$

ដោយ $\angle B + \angle D = \pi \Rightarrow \cos\angle D = -\cos\angle B$ (ផលបូកមុំឈមនៃចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់)

តាម (iii) គេបាន: $-220\cos\angle B = 140\cos\angle B$

$(220+140)\cos\angle B = 0 \Rightarrow \cos\angle B = 0$ នោះ $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $\angle D = \frac{\pi}{2}$

នោះ ACD និង ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D និង B រៀងគ្នា

យើងមាន: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$

ដោយ $S_{ADC} = \frac{1}{2}\times 5\times 14 = 35$ និង $S_{ABC} = \frac{1}{2}\times 10\times 11 = 55$

យើងបាន: $S_{ABCD} = 35 + 55 = 90$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ដូចនេះ $S_{ABCD} = 90$ ឯកតាផ្ទៃ ។

លំហាត់ទី១២១

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនថេរផ្សេងគ្នា និងមានសមីការ

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a+x)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(b+x)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c+x)}$$

$=\dfrac{p+qx+rx^2}{(a+x)(b+x)(c+x)}$ ដែល p,q,r ជាចំនួនថេរ

និង $S=7p+8q+9r$ ។ គណនាតម្លៃនៃ S ។

ទ្រឹស្តីបទ: បើ α,β,δ ជាឫសបីផ្សេងគ្នានៃសមីការ $dx^2+ex+f=0$ នោះ $d=e=f=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ S

គេមាន:

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a+x)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(b+x)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c+x)}$$

$$=\frac{p+qx+rx^2}{(a+x)(b+x)(c+x)} \quad (i)$$

គុណសមីការ (i) ដោយ $(a+x)(b+x)(c+x)$ គេបាន:

$$\frac{a^2(b+x)(c+x)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(a+x)(c+x)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(a+x)(b+x)}{(c-a)(c-b)}=p+qx+rx^2 \ (ii)$$

យក $x=-a, x=-b, x=-c$ រៀងគ្នាជំនួសចូលក្នុង (ii) គេបាន:

$$\begin{cases} a^2=p-qa+ra^2 \\ b^2=p-qb+rb^2 \\ c^2=p-qc+rc^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r-1)a^2-qa-p=0 \\ (r-1)b^2-qb-p=0 \\ (r-1)c^2-qc-p=0 \end{cases}$$

នោះ a,b,c ជាឫសនៃសមីការ $(r-1)x^2-qx-p=0$

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើគេបាន: $p=0$, $q=0$, $r=1$

យើងបាន: $S=7p+8q+9r=7\times 0+8\times 0+9\times 1=9$

ដូចនេះតម្លៃនៃ $S=9$ ។

លំហាត់ទី១២២

គេមានទំនាក់ទំនងខាងក្រោម:

$$b\left(\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+...+\frac{1}{1999\times 2001}\right)=2\left(\frac{1^2}{1\times 3}+\frac{2^2}{3\times 5}+...+\frac{1000^2}{1999\times 2001}\right)$$

គណនាតម្លៃនៃ b ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ b

គេមាន: $\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2r-1}-\frac{1}{2r+1}\right)$

$$\frac{r^2}{(2r-1)(2r+1)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2r-1}-\frac{1}{2r+1}\right)$$

គេបាន: $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+...+\frac{1}{1999\times 2001}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{1999}-\frac{1}{2001}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2001}\right)=\frac{1000}{2001}$$

$$\frac{1^2}{1\times 3}+\frac{2^2}{3\times 5}+...+\frac{1000^2}{1999\times 2001}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+...+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1999}-\frac{1}{2001}\right)$$

$$=\frac{1000}{4}+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2001}\right)=250+\frac{250}{2001}=250\left(1+\frac{1}{2001}\right)=\frac{250.2002}{2001}$$

$$b\left(\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+...+\frac{1}{1999\times2001}\right)=2\left(\frac{1^2}{1\times3}+\frac{2^2}{3\times5}+...+\frac{1000^2}{1999\times2001}\right)$$

គេបាន: $b\frac{1000}{2001}=\frac{250.2002}{2001}\Rightarrow b=1001$

ដូចនេះ $b=1001$ ។

លំហាត់ទី១២៣

គេឲ្យ a,b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងសមីការ $x^2+ax+2b=0$

$x^2+2bx+a=0$ មានឫសជាចំនួនពិត ។

គណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ $a+b$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ $a+b$

ដោយសមីការ $x^2+ax+2b=0$ និង $x^2+2bx+a=0$ មានឫសជា

ចំនួនពិតនោះគេបាន: $a^2-8b\geq0\Rightarrow a^2\geq8b\Rightarrow a^4\geq64b^2 \quad (i)$

$$(2b)^2-4a\geq0\Rightarrow b^2-a\geq0\Rightarrow b^2\geq a \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន: $a^4\geq64a\Rightarrow a^4-64a\geq0$

$\Rightarrow a(a-4)(a^2+4a+16)\geq0\Rightarrow a(a-4)\left[(a+2)^2+12\right]\geq0$

$\Rightarrow a(a-4)\geq0$ គេបាន: $a\leq0$ ឬ $a\geq4$

ដោយ a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន: $a\geq4$

បើ $a=4$ តាម (ii) គេបាន: $b^2-4\geq0\Rightarrow(b-2)(b+2)\geq0$

គេបាន: $b\leq-2$ ឬ $b\geq2$

ដោយ b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន: $b\geq2$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $a+b$ គឺ 6 ។

លំហាត់ទី១២៤

តាង k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $f(k)$ ជាអនុគមន៍មួយ

បើ $\frac{k-1}{k}=0.\overline{k_1k_2k_3\ldots}$ នោះ $f(k)=\overline{k_1k_2k_3}$ ។

ឧទាហរណ៍ $f(3)=666$ ព្រោះ $\frac{3-1}{3}=0.666\ldots$

គណនា $D=f(f(f(f(f(112)))))$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $D=f(f(f(f(f(112)))))$

គេមានៈ $0.99=1-\frac{1}{100}<\frac{112-1}{112}=1-\frac{1}{112}<1\Rightarrow f(112)=\overline{99k_3}$

$$0.998=1-\frac{1}{500}<\frac{\overline{99k_3}-1}{\overline{99k_3}}=1-\frac{1}{\overline{99k_3}}<1-\frac{1}{1000}=0.999$$

$\Rightarrow f(f(112))=998\Rightarrow f(f(f(112)))=998\Rightarrow D=998$

ដូចនេះ $D=f(f(f(f(f(112)))))=998$

លំហាត់ទី១២៥

ត្រីកោណ ABC មួយមានប្រវែងជ្រុងទាំងបីបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត និង ជាឫសនៃសមីការ $x^3-12x^2+47x-60=0$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC នោះ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

តាង $a-d$, a , $a+d$ ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC នោះ

ដោយ $a-d$, a , $a+d$ ជាឫសនៃសមីការ $x^3-12x^2+47x-60=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន:

$$\begin{cases} a-d+a+a+d=12 \quad (i) \\ (a-d).a+a(a+d)+(a-d)(a+d)=47 \quad (ii) \\ (a-d).a.(a+d)=60 \quad (iii) \end{cases}$$

តាម (i) គេបាន: $3a=12 \Rightarrow a=4$

តាម (ii) គេបាន: $3a^2-d^2=47 \Rightarrow d=\pm 1$ ព្រោះ $a=4$

តាម (iii) គេបាន: $a^3-ad^2=60 \Rightarrow 4^3-4.1=60$ ពិត

នោះជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណនោះគឺ 3 , 4 និង 5

ដោយ $3^2+4^2=5^2$ នោះ ABC ជាត្រីកោណកែង (ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ)

គេបានក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះក្រឡាផ្ទៃ $S_{ABC}=6$ ឯកតាផ្ទៃ ។

លំហាត់ទី១២៦

បើ x ជាចំនួនពិត និង d ជាតម្លៃធំបំផុតនៃប្រភាគ

$y=\frac{3x^2+3x+4}{x^2+x+1}$ ។ គណនាតម្លៃ d ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ d

គេមាន: $y=\frac{3x^2+3x+4}{x^2+x+1} \Rightarrow y\left(x^2+x+1\right)=3x^2+3x+4$

$$\Rightarrow (3-y)x^2+(3-y)x+4-y=0$$

តាម $\Delta=(3-y)^2-4(3-y)(4-y)$

ដោយ x ជាចំនួនពិតគេបាន: $\Delta\geq 0$

$\Rightarrow (3-y)^2-4(3-y)(4-y)\geq 0$

$\Rightarrow (3-y)(3-y-16+4y)\geq 0$

$\Rightarrow (y-3)(3y-13)\leq 0$ គេបាន: $3\leq y\leq\dfrac{13}{3}$

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃ d គឺ $\dfrac{13}{3}$ ។

លំហាត់ទី១២៧

បើ a និង b ជាចំនួនពិត ដែល $a^2+b^2=a+b$ ។

គណនាតម្លៃធំបំផុតនៃ $a+b$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃធំបំផុតនៃ $a+b$

គេមាន: $a^2+b^2=a+b\Rightarrow\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}\quad(i)$

$$\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)-\left(b-\frac{1}{2}\right)\right]^2\geq 0\Rightarrow\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)\geq 0$$

គេបាន: $\dfrac{1}{2}-2\left(a-\dfrac{1}{2}\right)\left(b-\dfrac{1}{2}\right)\geq 0\Rightarrow\dfrac{1}{2}\geq 2\left(a-\dfrac{1}{2}\right)\left(b-\dfrac{1}{2}\right)\quad(ii)$

គេមាន: $(a+b-1)^2=\left[\left(a-\dfrac{1}{2}\right)+\left(b-\dfrac{1}{2}\right)\right]^2$

$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\quad(iii)$$

$-1\leq a+b-1\leq 1\Rightarrow 0\leq a+b\leq 2$

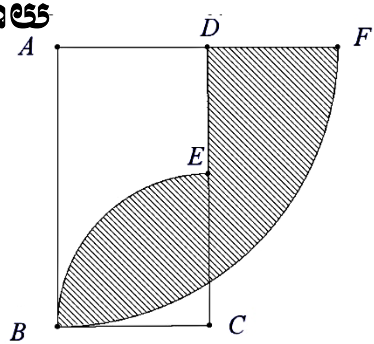
ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃ $a+b$ គឺ 2 ។

លំហាត់ទី១២៨

$ABCD$ ជាចតុកោណកែងមួយដែលមាន $AB=\sqrt{\dfrac{8+\sqrt{64-\pi^2}}{\pi}}$ និង $BC=\sqrt{\dfrac{8-\sqrt{64-\pi^2}}{\pi}}$ (តាមរូប) ។ BE និង BF ជាប្រវែងធ្នូ នៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត C និង A រៀងគ្នា ។

គណនាផលបូកក្រឡាផ្ទៃផ្នែកឆូត ។

ដំណោះស្រាយ



គណនាផលបូកក្រឡាផ្ទៃផ្នែកឆូត

គេមាន: $AB=AF$, $BC=CE$

ក្រឡាផ្ទៃផ្នែកឆូតគឺ

$$S=S_{ABF}-S_{ABCD}+S_{BCE}$$

$$=\frac{\pi}{4}AB^2-AB.BC+\frac{\pi}{4}.BC^2$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{\frac{8+\sqrt{64-\pi^2}}{\pi}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{8+\sqrt{64-\pi^2}}{\pi}}\right)\left(\sqrt{\frac{8-\sqrt{64-\pi^2}}{\pi}}\right)$$

$$+\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{\frac{8-\sqrt{64-\pi^2}}{\pi}}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{8+\sqrt{64-\pi^2}}{\pi}+\frac{8-\sqrt{64-\pi^2}}{\pi}\right)-\sqrt{\frac{64-\left(64-\pi^2\right)}{\pi^2}}$$

$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{16}{\pi}\right)-\sqrt{\frac{\pi^2}{\pi^2}}=4-1=3$ ឯកតាផ្ទៃ

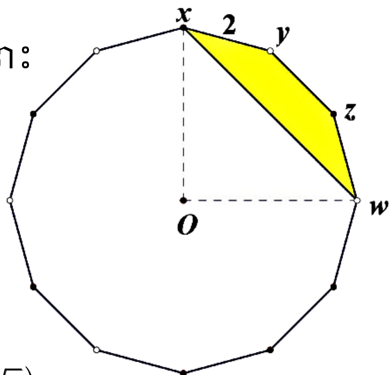
ដូចនេះក្រឡាផ្ទៃផ្នែកឆូតគឺ $S=3$ ឯកតាផ្ទៃ ។

លំហាត់ទី១២៩

គេឲ្យពហុកោណនិយ័តមួយដែលមានជ្រុង 12 ។ x,y,z,w ជាកំពូល 4 ដែលជាប់តគ្នា ។ បើ $xy=2$ និងក្រឡាផ្ទៃចតុកោណ $xyzw$ ស្មើ $a+\sqrt{b}$ ។ គណនាតម្លៃ $B=2^a.3^b$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $B=2^a.3^b$



តាង O ជាផ្ចិតនៃពហុកោណនិយ័តនោះ

តាង $Ox=Oy=Oz=Ow=r$

$\angle xOy=\angle yOz=\angle zOw=\frac{360^0}{12}=30^0$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុង ΔxOy

$r^2+r^2-2r^2\cos 30^0=2^2=4$

$\left(2-\sqrt{3}\right)r^2=4\Rightarrow r^2=\frac{4}{2-\sqrt{3}}=4\left(2+\sqrt{3}\right)$

គេមាន: $S_{xyzw}=S_{Oxyzw}-S_{Oxw}=3\times\frac{1}{2}r^2\sin 30^0-\frac{1}{2}r^2\sin 90^0$

$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times r^2-\frac{1}{2}\times 1\times r^2=\frac{3}{4}r^2-\frac{1}{2}r^2=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)r^2$

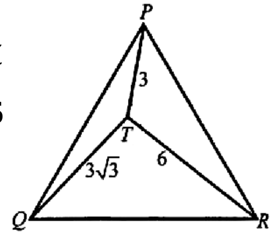
$=\frac{1}{4}\times 4\left(2+\sqrt{3}\right)=2+\sqrt{3}$

តែ $S_{xyzw}=a+\sqrt{b}$ គេបាន: $a=2$, $b=3$

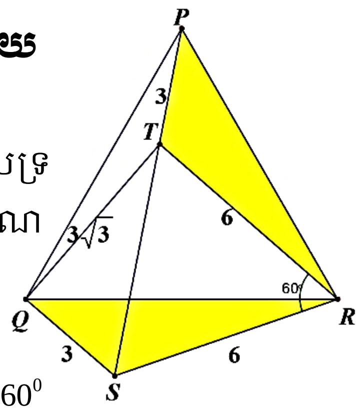
ដូចនេះ $B=2^2\times3^3=108$ ។

លំហាត់ទី១៣០

T ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណសម័ង្ស PQR ដែល $TP=3$ $TQ=3\sqrt{3}$ និង $TR=6$ (ដូចរូប) ។ គណនា $\angle PTR$ ។



ដំណោះស្រាយ



គណនា $\angle PTR$

បង្វិលត្រីកោណ PTR តាមទិសដៅច្រាសទ្រនិចនាឡិកាឲ្យបានមុំ 60^0 គេបានត្រីកោណថ្មីមួយទៀតគឺ ΔQSR

$\Rightarrow \Delta PTR\cong\Delta QSR$

គេទាញបាន: $SR=6$, $QS=3$, $\angle SRT=60^0$

ក្នុងត្រីកោណ TRS មាន: $SR=TR=6$ នោះ TRS ជាត្រីកោណសមបាត ។ ម៉្យាងទៀត $\angle RTS=\angle RST=60^0$ នោះ TRS ជាត្រីកោណសម័ង្ស គេបាន: $TS=6$

ក្នុងត្រីកោណ TQS មាន

$QS^2+QT^2=3^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2=9+27=36=6^2=TS^2$

នោះ TQS ជាត្រីកោណកែងត្រង់ Q (តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក័រ)

$\Rightarrow \angle TQS=90^0$

ក្នុងត្រីកោណ TQS មាន: $\tan\angle TSQ=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}\Rightarrow\angle TSQ=60^0$

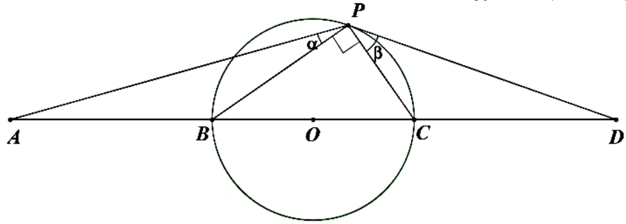
គេមាន: $\angle QSR=\angle TSQ+\angle RST=60^0+60^0=120^0$

$\Rightarrow\angle PTR=\angle QSR=120^0$ ព្រោះ: $\Delta PTR\cong\Delta QSR$

ដូចនេះ: $\angle PTR=120^0$ ។

លំហាត់ទី១៣១

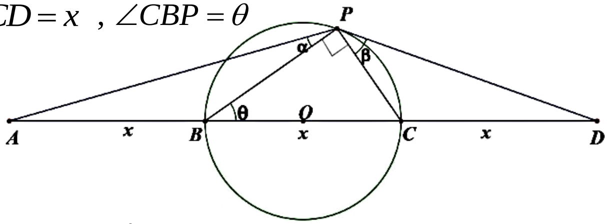
P , B និង C ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ដែលមានផ្ចិត O និងអង្កត់ BC (ដូចរូប) ។ បើ A,B,C,D រត់ត្រង់គ្នាហើយ $AB=BC=CD$ $\alpha=\angle APB$ និង $\beta=\angle CPD$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $(\tan\alpha)(\tan\beta)$



ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $(\tan\alpha)(\tan\beta)$

តាង $AB=BC=CD=x$, $\angle CBP=\theta$



គេមាន: $\angle BPC=90^0$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

$\Rightarrow BCP=90^0-\theta$

ក្នុងត្រីកោណកែង BPC មាន: $BP=x\cos\theta$, $CP=x\sin\theta$

$\angle BAP=\theta-\alpha$, $\angle CDP=90^0-\theta-\beta$ (មុំក្រៅត្រីកោណ)

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ $ABP: \dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{BP}{\sin\angle BAP}$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin\alpha}=\frac{x\cos\theta}{\sin(\theta-\alpha)} \quad (i)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ $CDP: \dfrac{x}{\sin\beta}=\dfrac{CP}{\sin\angle CDP}$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin\beta}=\frac{x\sin\theta}{\sin\left[90^0-(\theta+\beta)\right]}=\frac{x\sin\theta}{\cos(\theta+\beta)} \quad (ii)$$

តាម (i) គេបាន: $\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha=\cos\theta\sin\alpha$

$$\sin\theta\cos\alpha=2\cos\theta\sin\alpha \Rightarrow \tan\alpha=\frac{\tan\theta}{2}$$

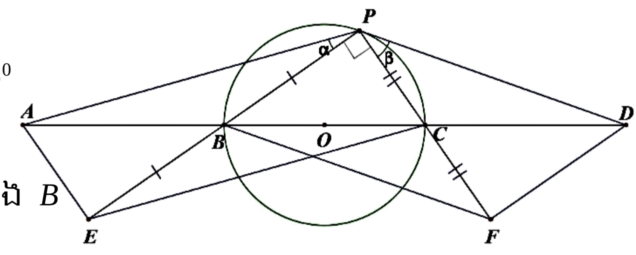
តាម (ii) គេបាន: $\cos\theta\cos\beta-\sin\theta\sin\beta=\sin\theta\sin\beta$

$$\cos\theta\cos\beta=2\sin\theta\sin\beta \Rightarrow \tan\beta=\frac{1}{2\tan\theta}$$

គេបាន: $(\tan\alpha)(\tan\beta)=\dfrac{\tan\theta}{2}\times\dfrac{1}{2\tan\theta}=\dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ $(\tan\alpha)(\tan\beta)=\dfrac{1}{4}$ ។

របៀបទី២



គេមាន: $\angle BPC=90^0$

(មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

បន្លាយជ្រុង BP ខាង B

ឲ្យបាន $PB=BE$

បន្លាយជ្រុង PC ខាង C

ឲ្យបាន $PC=CF$

$AB=BC=CD$ (សម្មតិកម្ម)

ចតុកោណ $APCE$ មានអង្កត់ទ្រូង AC និង PE កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នា នោះ $APCE$ ជាប្រលេឡូក្រាម $\Rightarrow [AP] \parallel [CE]$

គេបាន: $\angle APE = \angle PFC$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង) ឬ $\angle PEC = \alpha$

ចតុកោណ $PBFD$ មានអង្កត់ទ្រូង PF និង BD កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នា នោះ $PBFD$ ជាប្រលេឡូក្រាម $\Rightarrow [PD] \parallel [BF]$

គេបាន: $\angle DPF = \angle PFB$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង) ឬ $\angle PFB = \beta$

ក្នុងត្រីកោណកែង EPC មាន: $\tan\alpha = \frac{PC}{PE} = \frac{PC}{2PB}$

ក្នុងត្រីកោណកែង BPF មាន: $\tan\beta = \frac{PB}{PF} = \frac{PB}{2PC}$

គេបាន: $(\tan\alpha)(\tan\beta) = \frac{PC}{2PB} \cdot \frac{PB}{2PC} = \frac{1}{4}$

ដូចនេះ $(\tan\alpha)(\tan\beta) = \frac{1}{4}$ ។

លំហាត់ទី១៣២

គេឲ្យ a, b, x និង y ជាចំនួនគត់មិនសូន្យ ដែល $ax + by = 4$ $ax^2 + by^2 = 22$, $ax^3 + by^3 = 46$ និង $ax^4 + by^4 = 178$ ។

គណនាតម្លៃនៃ $ax^5 + by^5$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $ax^5 + by^5$

របៀបទី១

គេមាន: $ax + by = 4 \quad (1) \qquad ax^2 + by^2 = 22 \quad (2)$

$$ax^3 + by^3 = 46 \quad (3) \qquad ax^4 + by^4 = 178 \quad (4)$$

តាម $(1),(2),(3)$ និង (4) គេបាន: $x \neq y$

យក $y(1) - (2)$ គេបាន: $x(y-x)a = 4y - 22 \Rightarrow a = \frac{2(2y-11)}{x(y-x)}$ (5)

យក $x(1)-(2)$ គេបាន: $y(x-y)b = 4x-22 \Rightarrow b = \dfrac{2(11-2x)}{y(y-x)}$ (6)

យក $y(3)-(4)$ គេបាន $x^3(y-x)a = 46y-178 \Rightarrow a = \dfrac{2(23y-89)}{x^3(y-x)}$ (7)

យក $x(3)-(4)$ គេបាន $y^3(x-y)b = 46x-178 \Rightarrow b = \dfrac{2(89-23x)}{y^3(y-x)}$ (8)

តាម (5) និង (7) គេបាន: $\dfrac{2(2y-11)}{x(y-x)} = \dfrac{2(23y-89)}{x^3(y-x)}$

$$\Rightarrow x^2(2y-11) = 23y-89 \quad (9)$$

តាម (6) និង (8) គេបាន: $\dfrac{2(11-2x)}{y(y-x)} = \dfrac{2(89-23x)}{y^3(y-x)}$

$$\Rightarrow y^2(11-2x) = 89-23x \quad (10)$$

យក $(9)+(10)$ គេបាន: $11(y-x)(y+x)-2xy(y-x) = 23(y-x)$

$$\Rightarrow 11(x+y)-2xy = 23 \quad (11)$$

បើ $x+y=1$ និង $xy=-6$ តាម $(11): 11\times 1 - 2(-6) = 23$ ពិត

នោះគេតាង $x+y = 1+2t$, $xy = -6+11t$ (*) ជាចម្លើយទូទៅនៃ

សមីការ (11) ដែល t ជាចំនួនគត់ណាមួយ ។

ជាឫសនៃសមីការ $u^2-(1+2t)u+11t-6=0$

តាម $\Delta = (1+2t)^2-4(11t-6) = 4t^2-40t+25 = 0 = 4(t-5)^2-75$

ដោយ x, y ជាចំនួនគត់នោះ Δ ត្រូវតែជាការេប្រាកដ

តាង $\Delta = 4(t-5)^2-75 = m^2$ ដែល m ជាចំនួនគត់ណាមួយ

គេបាន: $4(t-5)^2-m^2 = 75 \Leftrightarrow (2t-10+m)(2t-10-m) = 75$ គេបាន:

$\begin{cases} 2t-10+m=1 \\ 2t-10-m=75 \end{cases}$ (12) ឬ $\begin{cases} 2t-10+m=75 \\ 2t-10-m=1 \end{cases}$ (13)

$\begin{cases} 2t-10+m=3 \\ 2t-10-m=25 \end{cases}$ (14) ឬ $\begin{cases} 2t-10+m=25 \\ 2t-10-m=3 \end{cases}$ (15)

$\begin{cases}2t-10+m=5\\2t-10-m=15\end{cases}$ (16) ឬ $\begin{cases}2t-10+m=15\\2t-10-m=5\end{cases}$ (17)

$\begin{cases}2t-10+m=-1\\2t-10-m=-75\end{cases}$ (18) ឬ $\begin{cases}2t-10+m=-75\\2t-10-m=-1\end{cases}$ (19)

$\begin{cases}2t-10+m=-3\\2t-10-m=-25\end{cases}$ (20) ឬ $\begin{cases}2t-10+m=-25\\2t-10-m=-3\end{cases}$ (21)

$\begin{cases}2t-10+m=-5\\2t-10-m=-15\end{cases}$ (22) ឬ $\begin{cases}2t-10+m=-15\\2t-10-m=-5\end{cases}$ (23)

ចម្លើយនៃ (12) និង (13) គឺ $t=24$

ចម្លើយនៃ (14) និង (15) គឺ $t=12$

ចម្លើយនៃ (16) និង (17) គឺ $t=10$

ចម្លើយនៃ (18) និង (19) គឺ $t=-14$

ចម្លើយនៃ (20) និង (21) គឺ $t=-2$

ចម្លើយនៃ (22) និង (23) គឺ $t=0$

ជំនួស $t=24$ ក្នុងសមីការ (*) គេបាន: $x+y=49$, $xy=258$

$$\Rightarrow x=43\ ,\ y=6$$

ជំនួស $x=43\,,y=6$ ក្នុងសមីការ (5) គេបាន: $a=\dfrac{2(2\times 6-11)}{43(6-43)}$

មិនមែនជាចំនួនគត់ (មិនយក)

ជំនួស $t=12$ ក្នុងសមីការ (*) គេបាន: $x+y=25,\ xy=126$

$$\Rightarrow x=18\ ,\ y=7$$

ជំនួស $x=18\,,y=7$ ក្នុងសមីការ (5) គេបាន: $a=\dfrac{2(2\times 7-11)}{18(7-18)}$

មិនមែនជាចំនួនគត់ (មិនយក)

ជំនួស $t=10$ ក្នុងសមីការ (*) គេបាន: $x+y=21$, $xy=104$

$$\Rightarrow x=13\ ,\ y=8$$

ជំនួស $x=13\,,y=8$ ក្នុងសមីការ (5) គេបាន: $a=\dfrac{2(2\times 8-11)}{13(8-13)}$

មិនមែនជាចំនួនគត់ (មិនយក)

ជំនួស $t=-14$ ក្នុងសមីការ (*) គេបាន: $x+y=-27\ ,\ xy=-160$

$$\Rightarrow x=-32\ ,\ y=5$$

ជំនួស $x=-32\,,y=5$ ក្នុងសមីការ (5) គេបាន: $a=\dfrac{2(2\times 5-11)}{-32(5+32)}$

មិនមែនជាចំនួនគត់ (មិនយក)

ជំនួស $t=-2$ ក្នុងសមីការ (*) គេបាន: $x+y=-3\ ,\ xy=-28$

$$\Rightarrow x=4\ ,\ y=-7$$

ជំនួស $x=4\,,y=-7$ ក្នុងសមីការ (5) គេបាន: $a=\dfrac{2(-2\times 7-11)}{4(-7-4)}$

មិនមែនជាចំនួនគត់ (មិនយក)

ជំនួស $t=0$ ក្នុងសមីការ (*) គេបាន: $x+y=1\ ,\ xy=-6$

$$\Rightarrow x=3\ ,\ y=-2$$

ជំនួស $x=3\,,y=-2$ ក្នុងសមីការ (5) គេបាន: $a=\dfrac{2(-2\times 2-11)}{3(-2-3)}=2$

ជំនួស $x=3\,,y=-2$ ក្នុងសមីការ (6) គេបាន: $b=\dfrac{2(11-2\times 3)}{-2(-2-3)}=1$

ផ្ទៀងផ្ទាត់:

បើ $a=2\ ,\ b=1\ ,\ x=3\ ,\ y=-2$

តាម (1) គេបាន: $ax+by=2\times 3+1(-2)=4$ ពិត

តាម (2) គេបាន: $ax^2+by^2=2\times 3^2+1(-2)^2=22$ ពិត

តាម (3) គេបាន: $ax^3+by^3=2\times 3^3+1(-2)^3=46$ ពិត

តាម (4) គេបាន: $ax^4+by^4=2\times 3^4+1(-2)^4=178$ ពិត

គេបាន: $ax^5+by^5=2\times 3^5+1(-2)^5=454$

ដូចនេះ $ax^5+by^5=454$

របៀបទី២

គេមាន: $ax+by=4 \quad (1) \qquad ax^2+by^2=22 \quad (2)$

$$ax^3+by^3=46 \quad (3) \qquad ax^4+by^4=178 \quad (4)$$

យក $(x+y)$ គុណនឹងសមីការ (2) គេបាន:

$$(x+y)(ax^2+by^2)=22(x+y) \Rightarrow ax^3+by^3+xy(ax+by)=22(x+y) \quad (5)$$

យក (1) និង (3) ជំនួសក្នុង (5) គេបាន: $46+4xy=22(x+y)$

$$\Rightarrow 23+2xy=11(x+y) \quad (6)$$

យក $(x+y)$ គុណនឹងសមីការ (3) គេបាន:

$$(x+y)(ax^3+by^3)=46(x+y)$$

$$\Rightarrow ax^4+by^4+xy(ax^2+by^2)=46(x+y) \quad (7)$$

យក (2) និង (4) ជំនួសក្នុង (7) គេបាន: $178+22xy=46(x+y)$

$$\Rightarrow 89+11xy=23(x+y) \quad (8)$$

យក $11(8)-23(6)$ គេបាន: $450+75xy=0 \Rightarrow xy=-6 \quad (9)$

យក $11(6)-2(8)$ គេបាន: $75(x+y)=75 \Rightarrow x+y=1 \quad (10)$

យក $(x+y)$ គុណនឹងសមីការ (4) គេបាន:

$$(x+y)(ax^4+by^4)=178(x+y)$$

$$\Rightarrow ax^5+by^5+xy(ax^3+by^3)=178(x+y) \quad (11)$$

យក (3) និង (5) ជំនួសក្នុង (11) គេបាន:

$$ax^5+by^5+46xy=178(x+y) \quad (12)$$

យក (9) និង (10) ជំនួសក្នុង (12) គេបាន:

$$ax^5+by^5+46(-6)=178\times 1=454$$

ដូចនេះ $ax^5+by^5=454$