រៀបរៀងដោយ

លោកគ្រូ ស្រ៊ុន ប៉េងហួរ

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ១២

* ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែ
* ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍
* ត្រៀមប្រឡងប្រកួតប្រជែងនានា

2021

ថ្ងៃនេះបើអ្នកមិនព្រមដើរ ថ្ងៃស្អែកអ្នកមិនអាចដើរទាន់គេឡើយ....!

[វិញ្ញាសាទី ១]

១. គេអោយ f ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ដូចខាងក្រោមៈ

i. $f(1)=1$

ii. $f(1)+2f(2)+3f(3)+\cdots+nf(n)=n(n+1)f(n)$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$

ចូរគណនា $f(2021)$ ។

២. ក. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចូរបង្ហាញថាៈ

$$A=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n)}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

ខ. គណនាផលបូកស៊េរី $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots$

៣. ចំនួនមួយមានលេខប្រាំខ្ទង់រៀបតាមលំដាប់ x , $x+1$, $x+2$, $3x$, $x+3$ ហើយគេដឹងថាចំនួននោះជាការេប្រាកដ ។ ចូររកចំនួននោះ ។

៤. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leq\dfrac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c និង d ។

៥. កំណត់ចំនួនពិត a , b និង c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt{n}$$

៦. គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត $a_0=a_1=1$ និង $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2$ គ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq1$ ។ បង្ហាញថា $a_{n^2+1}=a_n\times a_{n+1}$ ។

៧. ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ដែលមានប្រវែង $BC=a$ ហើយមានរង្វង់ដែលមានកាំ r ចារឹកក្នុងត្រីកោណនេះ ។ ចូររករង្វាស់ជ្រុងពីរទៀតនៃត្រីកោណ ABC ។

១. គណនា $f(2021)$

គេមាន $f(1)+2f(2)+3f(3)+\cdots+nf(n)=n(n+1)f(n) \quad (1)$

$$\Rightarrow f(1)+2f(2)+3f(3)+\cdots+(n+1)f(n+1)=(n+1)(n+2)f(n+1) \quad (2)$$

យក $(2)-(1)$: $(n+1)f(n+1)=(n+1)(n+2)f(n+1)-n(n+1)f(n)$

$$\Rightarrow (n+1)(n+2)f(n+1)-(n+1)f(n+1)=n(n+1)f(n)$$

$$(n+1)^2f(n+1)=n(n+1)f(n)$$

$$(n+1)f(n+1)=nf(n)$$

គេបាន $3f(3)=2f(2)$

$$4f(4)=3f(3)$$

$$5f(5)=4f(4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-1)f(n-1)=nf(n)$$

$$nf(n)=(n-1)f(n-1)$$

$$\Rightarrow 2f(2)=3f(3)=4f(4)=\cdots=nf(n)$$

គេបាន $f(1)+2f(2)+3f(3)+\cdots+nf(n)=n(n+1)f(n)$

$$f(1)+nf(n)+nf(n)+\cdots+nf(n)=n(n+1)f(n)$$

$$1+(n-1)nf(n)-n(n+1)f(n)=0$$

$$(n-1-n-1)nf(n)=-1$$

$$-2nf(n)=-1$$

$$f(n)=\frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow f(2021)=\frac{1}{2\times 2021}=\frac{1}{4042}$$

ដូចនេះ $\boxed{f(2021)=\frac{1}{4042}}$

២. ក. បង្ហាញថា $A = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$

គេមាន $A = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)}$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

ដូចនេះ $\boxed{A = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}}$

ខ. គណនាផលបូកស៊េរី $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$

គេមាន $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{5}{2}}$

សម្គាល់៖ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួដែលមានរេស៊ុង $q = \frac{u_2}{u_1} < 0$

មានផលបូកអនន្តតួតាងដោយ $S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \frac{u_1}{1-q}$

៣. រកចំនួនដែលមានលេខប្រាំខ្ទង់

ចំនួនដែលមានលេខប្រាំខ្ទង់រៀបតាមលំដាប់ $x, x+1, x+2, 3x, x+3$

គេបាន $0 < x, x+1, x+2, 3x, x+3 \le 9$ សមមូល $0 < 3x \le 9 \Rightarrow x = 1, 2, 3$

. ចំពោះ $x = 1$ នោះចំនួនដែលត្រូវរកគឺ 12334 មិនមែនជាការេប្រាកដ

. ចំពោះ $x = 2$ នោះចំនួនដែលត្រូវរកគឺ 23465 មិនមែនជាការេប្រាកដ

. ចំពោះ $x = 3$ នោះចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $34596 = 186^2$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ } 34596}$

៤. បង្ហាញថា $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\le\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c និង d

គេមាន $\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}-\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\right)=\frac{1}{\frac{a+b+c+d}{(a+c)(b+d)}}-\left(\frac{1}{\frac{a+b}{ab}}+\frac{1}{\frac{c+d}{cd}}\right)$

$$=\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}\right)=\frac{ab+ad+bc+cd}{a+b+c+d}-\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{(a+b)(c+d)}$$

$$=\frac{(ab+ad+bc+cd)(ac+ad+bc+bd)}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)}-\frac{(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)}$$

$$=\frac{a^2bc+a^2bd+ab^2c+ab^2d+a^2cd+a^2d^2+abcd+abd^2+abc^2+abcd+b^2c^2}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)}$$

$$+\frac{b^2cd+ac^2d+acd^2+bc^2d+bcd^2-a^2bc-a^2bd-a^2cd-abcd-ab^2c-ab^2d}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)}$$

$$+\frac{-abcd-b^2cd-abc^2-abcd-ac^2d-bc^2d-abcd-abd^2-acd^2-bcd^2}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)}$$

$$=\frac{a^2d^2-2abcd+b^2c^2}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)}$$

$=\frac{(ad-bc)^2}{(a+b+c+d)(a+b)(c+d)}\ge 0$ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c និង d

គេបាន $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\le\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$ ហើយសមភាពកើតឡើងកាលណា $ad=bc$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\le\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}}$ គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c និង d

៥. កំណត់ចំនួនពិត a , b និង c

គេមាន $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^3=\left(\sqrt{n+1}\right)^3-3\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}\right)^2+3\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^3$

$$=(n+1)\sqrt{n+1}-(3n+3)\sqrt{n}+3n\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}$$

$$=(4n+1)\sqrt{n+1}-(4n+3)\sqrt{n}$$

$$=\sqrt{(4n+1)^2\cdot(n+1)}-\sqrt{(4n+3)^2\cdot n}$$

$$=\sqrt{(16n^2+8n+1)(n+1)}-\sqrt{n(16n^2+24n+9)}$$

$$=\sqrt{16n^3+24n^2+9n+1}-\sqrt{16n^3+24n^2+9n}$$

$$\Rightarrow\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\left(\sqrt{16n^3+24n^2+9n+1}-\sqrt{16n^3+24n^2+9n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}-\sqrt{16k^3+24k^2+9k}\right)^{\frac{1}{3}}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}-\sqrt{16k^3+24k^2+9k}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt{n} \qquad (1)$$

តែ $$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt{n} \qquad (2)$$

ផ្ទឹមសមីការ (1) និង (2) គេបាន $a=16$, $b=24$ និង $c=9$

ដូចនេះ $\boxed{a=16\ ,b=24 \text{ និង } c=9}$

៦. បង្ហាញថា $a_{n^2+1}=a_n\times a_{n+1}$

គេមាន $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2$ សមមូល $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}+2 \qquad (1)$

តាង $b_n=a_{n+1}-a_n \Rightarrow b_0=a_1-a_0=1-1=0$

$\Rightarrow b_{n-1}=a_n-a_{n-1}$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $b_n=b_{n-1}+2$

នោះ (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $b_0=0$ និងផលសងរួម $d=2$

$\Rightarrow b_n=b_0+nd=0+2n=2n$ នោះ $b_{n-1}=2(n-1)$

គេបាន $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-3})+\cdots+(a_1-a_0)+a_0$

$$=b_{n-1}+b_{n-2}+b_{n-3}+\cdots+b_0+a_0=\frac{(b_0+b_{n-1})\cdot n}{2}+1$$

$$a_n=\frac{2n(n-1)}{2}+1=n(n-1)+1$$

$$\Rightarrow a_{n+1}=(n+1)(n+1-1)+1=n(n+1)+1$$

និង $a_{n^2+1}=\left(n^2+1\right)\left(n^2+1-1\right)+1=n^2\left(n^2+1\right)+1$

គេបាន $a_n\times a_{n+1}=[n(n-1)+1]\times[n(n+1)+1]$

$$=n^2(n-1)(n+1)+n(n-1)+n(n+1)+1$$

$$=n^2\left(n^2-1\right)+n^2-n+n^2+n+1$$

$$=n^2\left(n^2-1\right)+2n^2+1$$

$$=n^2\left(n^2-1+2\right)+1$$

$$=n^2\left(n^2+1\right)+1$$

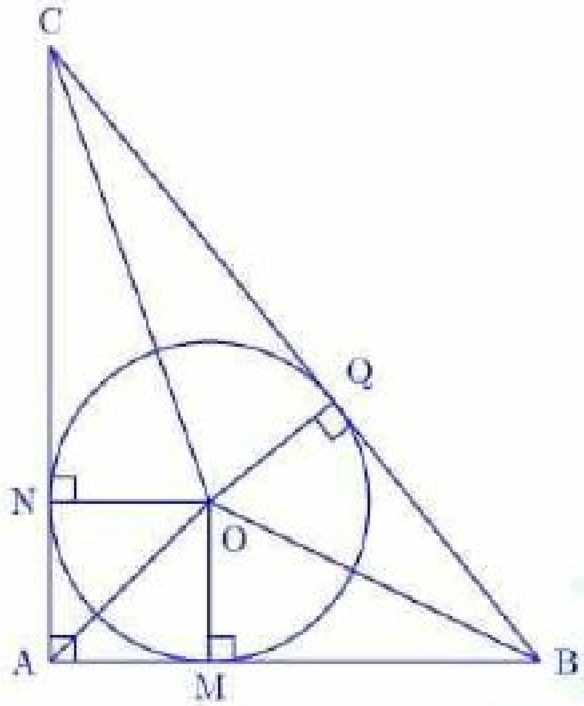
$$\Rightarrow a_n\times a_{n+1}=a_{n^2+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{a_{n^2+1}=a_n\times a_{n+1}}$

សម្គាល់៖ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន u_1 ជាតួទី 1 , u_n ជាតួទី n

គេបានផលបូក n តួគឺ $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{(u_1+u_n)\cdot n}{2}$

៧. រករង្វាស់ជ្រុងពីរទៀតនៃត្រីកោណ ABC



តាង p ជាបរិមាត្រត្រីកោណ ABC ដែល $p > 0$

r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណក្នុងត្រីកោណ ABC ដែល $r > 0$

គេមាន $p = AM + MB + BQ + QC + CN + NA$ តែ $NC = CQ$, $MB = QB$

និង $AN = AM = r \Rightarrow p = 2r + 2CQ + 2QB = 2r + 2BC = 2r + 2a$

តែ $p = a + b + c$ គេបាន $a + b + c = 2r + 2a \Rightarrow b + c = 2r + a \qquad (1)$

ក្នុងត្រីកោណកែង ABC មាន $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB = \frac{1}{2}bc$

តែ $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb = \frac{1}{2}r(a + b + c) = \frac{1}{2}rp$

គេបាន $\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}rp \Rightarrow bc = rp = r(2r + 2a) = 2r(r + a) \qquad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $\begin{cases} b + c = 2r + a & (1) \\ ab = 2r(r + a) & (2) \end{cases}$

នោះ a និង b ជាឬសនៃការ $x^2 - (2r + a)x + 2r(r + a) = 0$

គេបាន $\Delta = [(2r + a)]^2 - 4(1)[2r(r + a)]$

$= 4r^2 + 4ra + a^2 - 8r^2 - 8ra$

$= a^2 - 4ar - 4r^2$

ដើម្បីអោយសមីការ $x^2-(2r+a)x+2r(r+a)=0$ មានឬសលុះត្រាតែ $\Delta \geq 0$

គេបាន $a^2-4ar-4r^2 \geq 0$

$$(a-2r)^2 \geq 8r^2$$

$$a-2r \geq 2\sqrt{2}r \quad \text{ព្រោះ } a>0$$

$$\Rightarrow a \geq 2r+2\sqrt{2}r$$

នោះ $\Delta \geq 0$ កាលណា $a \geq 2r+2\sqrt{2}r$

គេបាន $b=\dfrac{2r+a+\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}, c=\dfrac{2r+a-\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}$

ឬ $b=\dfrac{2r+a-\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}, c=\dfrac{2r+a+\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}$

ដូចនេះ $b=\dfrac{2r+a+\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}, c=\dfrac{2r+a-\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}$

ឬ $b=\dfrac{2r+a-\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}, c=\dfrac{2r+a+\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}$

វិញ្ញាសារត្រៀមប្រលងសិស្សពូកែ
បង្រៀនដោយៈ ស្រ៊ុន ប៉េងហួរ
គ្រូបង្រៀនកម្រិតឧត្តម

ទូរសព្ទ: 096 44 87 589

ថ្ងៃនេះបើអ្នកមិនព្រមដើរ ថ្ងៃស្អែកអ្នកមិនអាចដើរទាន់គេឡើយ....!

[វិញ្ញាសាទី ២]

១. បង្ហាញថា $F=\frac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

២. រកចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុតដែលមាន 6 ជាលេខខ្ទង់ឯកតាហើយបើគេប្តូរលេខ 6 ទៅខាងមុខគេបំផុតនោះគេនឹងទទួលបានចំនួនថ្មីដែលស្មើ 4 ដងនៃចំនួនដើមនោះ

៣. កំណត់គ្រប់អនុគមន៍លេខ g ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$(x-y)g(x+y)-(x+y)g(x-y)=4xy\left(x^2-y^2\right)$$

៤. ក. បង្ហាញថា $S=\sum_{n=1}^{9999}\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)}=9$

ខ. គណនា $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2020^2}+\frac{1}{2021^2}}$

៥. គេអោយស្វ៊ីត (u_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases}u_0=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}}\end{cases}$ $,n\geq 0$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦. គេមាន a , b និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ក. ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $S=\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$

ខ. កំណត់តម្លៃ b និង c ជាអនុគមន៍នៃ a នៅពេល S យកតម្លៃអប្បបរមា

៧. គេអោយ a , b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងត្រីកោណទាំងបីនៃត្រីកោណមួយ។

បង្ហាញថា $\sqrt[3]{\left(\frac{3a}{3b+3c-a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3b}{3c+3a-b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3c}{3a+3b-c}\right)^2}\geq\frac{3\sqrt[3]{45}}{5}$

១. បង្ហាញថា $F=\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

ឧបមាថា F ជាប្រភាគសម្រួលបានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

តាង d ជាតួចែករួមនៃ $21n+4$ និង $14n+3$ ដែល $d\neq 1$

គេបាន $\begin{cases}21n+4=dk_1\\14n+3=dk_2\end{cases}$ $,k_1,k_2\in\mathbb{N}$ សមមូល $\begin{cases}42n+8=2dk_1 & (1)\\42n+9=3dk_2 & (2)\end{cases}$

យក $(2)-(1)$ គេបាន $1=3dk_2-2dk_1$ សមមូល $1=(3k_2-2k_1)d$

ដោយ $3k_2-2k_1$ ជាចំនួនគត់ នោះ $d=1$ ផ្ទុយពីការពិត

ដូចនេះ $\boxed{F \text{ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ } n}$

សម្គាល់៖ ប្រភាគ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាននោះ $\gcd[f(x),g(x)]=1$

២. រកចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត

តាង $N=\overline{x_1x_2x_3\cdots x_n6}$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក ដែល $0\le x_i\le 9\ ,\forall i\in\overline{1,n}$

និង $x_1\neq 0\Rightarrow N=x_1\times10^n+x_2\times10^{n-1}+\cdots+x_n\times10+6$

គេបាន $\overline{6x_1x_2x_3\cdots x_n}=4N$

$$6\times10^n+x_1\times10^{n-1}+x_2\times10^{n-2}+\cdots+x_n=4N$$

$$6\times10^{n+1}+\left(x_1\times10^n+x_2\times10^{n-1}+\cdots+x_n\times10+6\right)-6=40N$$

$$6\times10^{n+1}+N-6=40N$$

$$6\left(10^{n+1}-1\right)=39N$$

$$2\left(10^{n+1}-1\right)=13N$$

ដោយ $\gcd(2,13)=1$ នោះ $13\,|\,10^{n+1}-1$ និង N ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត

. បើ $n=1$ នោះ $10^2-1=99$ ចែកមិនដាច់នឹង 13

. បើ $n=2$ នោះ $10^3-1=999$ ចែកមិនដាច់នឹង 13

. បើ $n=3$ នោះ $10^4-1=9999$ ចែកមិនដាច់នឹង 13

. បើ $n=4$ នោះ $10^5-1=99999$ ចែកមិនដាច់នឹង 13

. បើ $n=5$ នោះ $10^6-1=999999$ ចែកដាច់នឹង 13

នោះ $2\left(10^6-1\right)=13N\Rightarrow N=\dfrac{2\times999999}{13}=153846$

ដូចនេះ $\boxed{N=153846}$

៣. រកគ្រប់អនុគមន៍លេខ g

គេមាន $(x-y)g(x+y)-(x+y)g(x-y)=4xy\left(x^2-y^2\right)$

$$(x-y)g(x+y)-(x+y)g(x-y)=4xy\,(x-y)\,(x+y)$$

$$\frac{(x-y)g(x+y)}{(x-y)(x+y)}-\frac{(x+y)g(x-y)}{(x-y)(x-y)}=4xy$$

$$\frac{g(x+y)}{x+y}-\frac{g(x-y)}{x-y}=4xy$$

តាង $f(x)=\frac{g(x)}{x}$ នោះ $g(x)=xf(x)$ គេបាន $f(x+y)-f(x-y)=4xy$ (1)

យក $x=x_0+\frac{h}{2}$ និង $y=\frac{h}{2}$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $f\left(x_0+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_0+\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right)=4\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\frac{h}{2}$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=(2x_0+h)\,h$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=2x_0+h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)$$

$$f'(x_0)=2x_0$$

$$\Rightarrow f'(x)=2x$$

$$f(x)=\int 2x\,dx=x^2+c\ ,c\in\mathbb{R}$$

គេបាន $g(x)=xf(x)=x\left(x^2+c\right)=x^3+cx\ ,x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=x^3+cx\ ,c\in\mathbb{R}}$

៤. ក. បង្ហាញថា $S=\sum_{n=1}^{9999}\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)}=9$

គេមាន $\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}-\sqrt[4]{n+1}\right)=(\sqrt[4]{n})^2+\left(\sqrt[4]{n+1}\right)^2$

$$=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$$

$$\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}-\sqrt[4]{n+1}\right)=\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$\sqrt[4]{n}-\sqrt[4]{n+1}=\frac{-1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)}$$

គេបាន $\dfrac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)}=\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}$

បើ $n=1$ នោះ $\dfrac{1}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{1+1}\right)\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{1+1}\right)}=\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{1}$

បើ $n=2$ នោះ $\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2+1}\right)\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2+1}\right)}=\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}$

បើ $n=3$ នោះ $\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3+1}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{3+1}\right)}=\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{3}$

………………………………………………………………………………

បើ $n=9999$ នោះ $\dfrac{1}{\left(\sqrt{9999}+\sqrt{10000}\right)\left(\sqrt[4]{9999}+\sqrt[4]{10000}\right)}=\sqrt[4]{10000}-\sqrt[4]{9999}$

បូកអង្គ និងអង្គគេបាន $S=\sqrt[4]{1000}-\sqrt[4]{1}=10-1=9$

ដូចនេះ $\boxed{S=\sum_{n=1}^{9999}\dfrac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)}=9}$

១. គណនា $S=\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{1}{2020^2}+\dfrac{1}{2021^2}}$

គេមាន
$$\begin{aligned}1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}&=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}\\&=\frac{n^2(n^2+2n+1)+n^2+2n+1+n^2}{[n(n+1)]^2}\\&=\frac{n^4+2n^3+n^2+n^2+2n+1+n^2}{[n(n+1)]^2}\\&=\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{[n(n+1)]^2}\\&=\frac{n^4+n^2+1+2(n^3+n^2+n)}{[n(n+1)]^2}\end{aligned}$$

$$1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n^2+n+1)^2}{[n(n+1)]^2}=\left[\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}$$

គេបាន $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

បើ $n=1$ នោះ $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

បើ $n=2$ នោះ $\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

បើ $n=3$ នោះ $\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

……………………………………………………………………

បើ $n=2020$ នោះ $\sqrt{1+\frac{1}{2020^2}+\frac{1}{2021^2}}=1+\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}$

បូកអង្គ និងអង្គគេបាន $S=2020+1-\frac{1}{2021}=2021-\frac{1}{2021}=\frac{2021^2-1}{2021}$

$$S=\frac{2020\times 2022}{2021}$$

ដូចនេះ $\boxed{S=\frac{2020\times 2022}{2021}}$

៥. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $u_0=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{2^2}$

បើ $n=0$ នោះ $u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-u_0^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^2}}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^2\times 2}}$$

$$\Rightarrow u_1=\sin\frac{\pi}{2^3}$$

បើ $n=1$ នោះ $u_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-u_1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^3}}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^3\times 2}}$$

$$\Rightarrow u_2=\sin\frac{\pi}{2^4}$$

……………………………………………………………………

សន្និដ្ឋាន $u_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$, $n\geq 0$

. បើ $n = 0$ នោះ $u_0 = \sin\frac{\pi}{2^2}$ ពិត

. ឧបមាពិតរហូតដល់ $n = k$ គឺ $u_k = \sin\frac{\pi}{2^{k+2}}$

. ស្រាយថាពិតរហូតដល់ $n = k+1$ គឺស្រាយថា $u_{k+1} = \sin\frac{\pi}{2^{k+3}}$

គេមាន $u_{k+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-u_k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^{k+2}\times 2}}$$

$$\Rightarrow u_{k+1} = \sin\frac{\pi}{2^{k+3}}$$ ពិត

តាមវិចារនុមានរួមគេបាន $u_n = \sin\frac{\pi}{2^{2^{n+2}}}$ ពិតចំពោះ $n \ge 0$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \sin\frac{\pi}{2^{2^{n+2}}}, n \ge 0}$

៦. ក. កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម S

គេមាន $S = \frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}$

តាង $\begin{cases} x = a+2b+c & (1) \\ y = a+b+2c & (2) \\ z = a+b+3c & (3) \end{cases}$

តាម (1) និង (2) គេបាន $-\begin{cases} x = a+2b+c & (1) \\ y = a+b+2c & (2) \end{cases}$

$$x - y = b - c \quad (4)$$

តាម (2) និង (3) គេបាន $-\begin{cases} y = a+b+2c & (2) \\ z = a+b+3c & (3) \end{cases}$

$$y - z = -c \Rightarrow c = -y + z \quad (5)$$

យក (5) ជំនួសក្នុង (4) គេបាន $x - y = b + y - z \Rightarrow b = x - 2y + z$

តាម (3) : $z = a + b + 3c \Leftrightarrow a + 3c = z - b = z - (x - 2y + z)$

$$= z - x + 2y - z$$

$$\Rightarrow a + 3c = -x + 2y$$

គេបាន $S=\dfrac{-x+2y}{x}+\dfrac{4(x-2y+z)}{y}-\dfrac{8(-y+z)}{z}$

$$=-1+\frac{2y}{x}+\frac{4x}{y}-8+\frac{4z}{y}+\frac{8y}{z}-8$$

$$=\left(\frac{2y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{8y}{z}\right)-17$$

ដោយ a , b និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន តាមវិសមភាព Cauchy

គេបាន $\dfrac{2y}{x}+\dfrac{4x}{y}\geq 2\sqrt{\dfrac{2y}{x}\times\dfrac{4x}{y}}2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$

$$\frac{4z}{y}+\frac{8y}{z}\geq 2\sqrt{\frac{4z}{y}\times\frac{8y}{z}}=2\sqrt{32}=8\sqrt{2}$$

$\Rightarrow S\geq 4\sqrt{2}+8\sqrt{2}-17=12\sqrt{2}-17$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម } S \text{ គឺ } \min(S)=12\sqrt{2}-17}$

2. កំណត់តម្លៃ b និង c ជាអនុគមន៍នៃ a នៅពេល S យកតម្លៃអប្បបរមា

គេមាន $S=\left(\dfrac{2y}{x}+\dfrac{4x}{y}\right)+\left(\dfrac{4z}{y}+\dfrac{8y}{z}\right)-17\geq 12\sqrt{2}-17$

សមភាពកើតឡើងកាលណា $\begin{cases}\dfrac{2y}{x}=\dfrac{4x}{y}\\ \dfrac{4z}{y}=\dfrac{8y}{z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=2x^2\\ z^2=2y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt{2}x\\ z^2=2y^2\end{cases}$

គេបាន $z^2=2\left(2x^2\right)=4x^2\Rightarrow z=2x$ ព្រោះ $x,y,z>0$

ចំពោះ $z=2x$ គេបាន $a+b+3c=2(a+2b+c)$

$$a+b+3c=2a+4b+2c$$

$$-3b+c=a \qquad \text{(i)}$$

ចំពោះ $y=\sqrt{2}x$ គេបាន $a+b+2c=\sqrt{2}(a+2b+c)$

$$a+b+2c=\sqrt{2}a+2\sqrt{2}b+\sqrt{2}c$$

$$\left(1-2\sqrt{2}\right)b+\left(2-\sqrt{2}\right)c=\left(\sqrt{2}-1\right)a \qquad \text{(ii)}$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $\begin{cases}-3b+c=a & \text{(i)}\times\left(2-\sqrt{2}\right)\\ \left(1-2\sqrt{2}\right)b+\left(2-\sqrt{2}\right)c=\left(\sqrt{2}-1\right)a & \text{(ii)}\end{cases}$

សមមូល $-\begin{cases}\left(-6+3\sqrt{2}\right)b+\left(2-\sqrt{2}\right)c=\left(2-\sqrt{2}\right)a\\ \left(1-2\sqrt{2}\right)b+\left(2-\sqrt{2}\right)c=\left(\sqrt{2}-1\right)a\end{cases}$

$$\left(-7+5\sqrt{2}\right)b=\left(3-2\sqrt{2}\right)a$$

$$\Rightarrow b=\frac{3-2\sqrt{2}}{-7+5\sqrt{2}}a=\frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(-7-5\sqrt{2}\right)}{49-50}a$$

$$=\frac{-21-15\sqrt{2}+14\sqrt{2}+20}{-1}a$$

$b=\left(1+\sqrt{2}\right)a$ ជំនួសក្នុង (i)

គេបាន $-3\left(1+\sqrt{2}\right)a+c=a\Rightarrow c=3a+3\sqrt{2}a+a=\left(4+3\sqrt{2}\right)a$

ដូចនេះ $\boxed{b=\left(1+\sqrt{2}\right)a \text{ និង } c=\left(4+3\sqrt{2}\right)a}$

ឥ. បង្ហាញថា $\sqrt[3]{\left(\frac{3a}{3b+3c-a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3b}{3c+3a-b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3c}{3a+3b-c}\right)^2}\geq\frac{3\sqrt[3]{45}}{5}$

គេមាន $\sqrt[3]{\left(\frac{3a}{3b+3c-a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3b}{3c+3a-b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3c}{3a+3b-c}\right)^2}\geq\frac{3\sqrt[3]{45}}{5}$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{45}{125}}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{3a}{3b+3c-a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3b}{3c+3a-b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3c}{3a+3b-c}\right)^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{9}{25}}$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{\left(\frac{5a}{3b+3c-a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{5b}{3c+3a-b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{5c}{3a+3b-c}\right)^2}\geq 3$$

ដើម្បីបង្ហាញថា $\sqrt[3]{\left(\frac{3a}{3b+3c-a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3b}{3c+3a-b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3c}{3a+3b-c}\right)^2}\geq\frac{3\sqrt[3]{45}}{5}$

យើងគ្រាន់តែបង្ហាញ $\sqrt[3]{\left(\frac{5a}{3b+3c-a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{5b}{3c+3a-b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{5c}{3a+3b-c}\right)^2}\geq 3$

ឬ $\left(\frac{5a}{3b+3c-a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{5b}{3c+3a-b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{5c}{3a+3b-c}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 3$

តាង $P=\left(\frac{5a}{3b+3c-a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{5b}{3c+3a-b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{5c}{3a+3b-c}\right)^{\frac{2}{3}}$

បង្ហាញថា $P \geq 3$

ដោយ $a, b, c > 0$ តាមវិសមភាព Bernoulli

គេមាន $\left(\frac{3b+3c-a}{5a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(1+\frac{3b+3c-a}{5a}-1\right)^{\frac{2}{3}} = \left(1+\frac{3b+3c-6a}{5a}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$\leq 1+\frac{2}{3}\left(\frac{3b+3c-6a}{5a}\right) = \frac{5a+2b+2c-4a}{5a}$$

$$\left(\frac{3b+3c-a}{5a}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \frac{a+2b+2c}{5a}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5a}{3b+3c-a}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{5a}{a+2b+2c} \quad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\left(\frac{5b}{3c+3a-b}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{5b}{b+2c+2a} \quad (2)$

$$\left(\frac{5c}{3a+3b-c}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{5c}{c+2a+2b} \quad (3)$$

យក $(1)+(2)+(3)$ គេបាន

$$P \geq \frac{5a}{a+2b+2c}+\frac{5b}{b+2c+2a}+\frac{5c}{c+2a+2b}$$

$$\geq 5\left(\frac{a}{a+2b+2c}+\frac{b}{b+2c+2a}+\frac{c}{c+2a+2b}\right)$$

$$\Rightarrow P \geq 5\left[\frac{a^2}{a(a+2b+2c)}+\frac{b^2}{b(b+2c+2a)}+\frac{c^2}{c(c+2a+2b)}\right]$$

តាមវិសមភាព Cauchy – Swarz

គេបាន $\frac{a^2}{a(a+2b+2c)}+\frac{b^2}{b(b+2c+2a)}+\frac{c^2}{c(c+2a+2b)}$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{a(a+2b+2c)+b(b+2c+2a)+c(c+2a+2b)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+2ab+c^2+2ac+2bc}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\right)+2(ab+bc+ca)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+\frac{2}{3}(a+b+c)^2}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow P \geq 5\times\frac{3}{5}=3$$

គេបាន $\sqrt[3]{\left(\frac{3a}{3b+3c-a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3b}{3c+3a-b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3c}{3a+3b-c}\right)^2} \geq \frac{3\sqrt[3]{45}}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt[3]{\left(\frac{3a}{3b+3c-a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3b}{3c+3a-b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3c}{3a+3b-c}\right)^2} \geq \frac{3\sqrt[3]{45}}{5}}$