១២៩

លំហាត់គណិតវិទ្យា

រៀបរៀងដោយ : **ចង ពៅ**

១. លំហាត់

១. ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង p ដែល $p \le n$ ។

ក. បង្ហាញថា $C_n^p = C_n^{n-p}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ ។

គ. បង្ហាញថា $C_n^{p+1} = \dfrac{n-p}{p+1} C_n^p$ ។

២. បង្ហាញថា $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! < (n+1)!$ ។

៣. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} < 3$ ។

៤. បង្ហាញថា $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$ ។

៥. បង្ហាញថា $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \cdots + C_{2n}^{2n}$

៦. គណនាផលបូក :

$A = 2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + \cdots$

$B = 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-3} C_n^3 + 2^{n-5} C_n^5 + \cdots$

៧. បង្ហាញថា $1 \times C_n^1 + 2 \times C_n^2 + 3 \times C_n^3 + \cdots + n \times C_n^n = n \times 2^{n-1}$ ។

៨. បង្ហាញថា $2 \times 1\ C_n^2 + 3 \times 2\ C_n^3 + \cdots + n(n-1) C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$ ។

៩. គណនាផលបូក $S = C_n^0 + \dfrac{1}{2} C_n^1 + \dfrac{1}{3} C_n^2 + \cdots + \dfrac{1}{n+1} C_n^n$ ។

១០. បង្ហាញថា $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \cdots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$ ។

១១. គេឱ្យ $n \in \mathbb{N}$ ដែល $n \ge 4$ ។ បង្ហាញថា $C_{C_n^2}^2 = 3C_{n+1}^4$ ។

១២. គេតាង $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} C_n^k$ ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $\dfrac{P_n}{P_{n-1}} = \dfrac{n^n}{n!}$ ។

១៣. រក $\log_{30} 8$ ជាអនុគមន៍នៃ c និង d បើគេដឹងថា $\log_{30} 3 = c$ និង $\log_{30} 5 = d$ ។

១៤. រក $\log_9 40$ ជាអនុគមន៍នៃ c និង d បើគេដឹងថា $\log 15 = c$ និង $\log_{20} 50 = d$ ។

១៥. ដោះស្រាយសមីការ $x^{\log x} = 100x$ ។

១៦. ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\log_{\frac{1}{4}}(1+7x-2x^2)}$ ។

១៧. ដោះស្រាយសមីការ $4^{\log x+1} - 6^{\log x} - 2\times 3^{2\log x+2} = 0$ ។

១៨. គេអោយ $a > 1$ និង $x > 1$ ដែល $\log_a(\log_a(\log_a 2) + \log_a 24 - 128) = 128$ និង $\log_a(\log_a x) = 256$ ។
រកចំនួនគត់ x ។

១៩. គេមានចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z \neq 0$ ។ ចូរដោះស្រាយសមីការ $2 - \dfrac{1}{z} = \bar{z}$ ។

២០. បង្ហាញថា បើផលគុណនៃ $z_1 z_2$ ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ នោះមានចំនួនពិត α មួយដែល $z_1 = \alpha\bar{z_2}$

២១. ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច z និង w ចូរបង្ហាញថា $|z+w| \leq |z| + |w|$ ។

២២. បង្ហាញថា $2+i$ ជាឫសរបស់សមីការ $z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 19z - 30 = 0$ រួចរកឫសផ្សេងទៀតរបស់សមីការនេះ។

២៣. បង្ហាញថា $x^4 + 4 = (x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$ ។

២៤. ដោះស្រាយសមីការ $(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0$ ។

២៥. រកគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច $z \neq 0$ ដែល $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ ។

២៦. បង្ហាញថា $z = \left(\dfrac{19+7i}{9-i}\right)^{2019} + \left(\dfrac{20+5i}{7+6i}\right)^{2019} + 19012019$ ជាចំនួនពិត។

២៧. គេឲ្យ $\tan A$ និង $\tan B$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + px + q = 0$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ:
$\sin^2(A+B) + p\sin(A+B)\cos(A+B) + q\cos^2(A+B)$ ។

២៨. គេមាន x, y និង z ជាចំនួនពិតដែល $x = \sqrt{11-2yz}, y = \sqrt{12-2xz}$, និង
$z = \sqrt{13-2xy}$ គណនាតម្លៃនៃ $x+y+z$ ។

២៩. គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a + b = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ ។
ចូរគណនាតម្លៃនៃ $(a^2+b^2)^{11} - 30ab$ ។

៣០. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\log_2(2x+y) = \log_4(x^2+xy+7y^2)$ មានចំនួនពិត K ដែល
$\log_3(3x+y) = \log_9(3x^2+4xy+Ky^2)$ ។
ចូររកផលគុណនៃតម្លៃដែលអាចកើតមាននៃ K ។

៣១. គេឱ្យ x, y និង z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xy = -80 - 320i, yz = 60$ និង
$zx = -96 + 24i$ ។ ចូរគណនា $|x+y+z|$ ។

៣២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន គេមានស្វ៊ែ (S) មួយមានផ្ចិត $C(a,b,c)$។ បង្ហាញថាបើ
ស្វ៊ែ (S) ប៉ះនឹងប្លង់ (yz) នោះ កាំនៃស្វ៊ែនោះគឺ $r = |a|$ ។

៣៣. បើ $x>0, y>0,\ \log_y x+\log_x y=\dfrac{10}{3}$ និង $xy=144$ គណនាតម្លៃនៃ $\dfrac{x+y}{2}$ ។

៣៤. បើ $R_n=\dfrac{1}{2}(a^n+b^n)$ ដែល $a=3+2\sqrt{2},\ b=3-2\sqrt{2}$ និង
$n=0,1,2,3,4,\dots$ គេបាន R_{12345} ជាចំនួនគត់។ ចូររកលេខខ្ទង់រាយនៃ R_{12345} ។

៣៥. បង្ហាញថា $z(1-z)(1+z+z^2)(1+z+z^3)(z+z^5)=z^2-1$ ដែល $z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$

៣៦. គេឲ្យ $S=\underbrace{111\dots1}_{2n\text{ ខ្ទង់នៃលេខ1}}+\underbrace{444\dots4}_{n\text{ ខ្ទង់នៃលេខ4}}+1$ ។ បង្ហាញថា S ជាការេនៃចំនួនគត់។

៣៧. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន
$z=(2018-i2019)^{2020^n}+(2018+i2019)^{2020^n}$ ជាចំនួនពិត។

៣៨. គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a},\vec{b}$ និង $\vec{c}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}\neq\vec{0}$ ។ បង្ហាញថា $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ។

៣៩. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z=\dfrac{(2\sqrt{3}+2i)^8}{(1-i)^6}+\dfrac{(1+i)^6}{(2\sqrt{3}-2i)^8}$ ។

៤០. គណនាផលសងរួម d នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ដោយដឹងថាបើគេថែម 3 លើផលសងរួម នោះផលបូក n តួដំបូងកើនឡើងពីរដង ហើយបើតួទីមួយកើនឡើងបួនដង នោះផលបូក n តួដំបូងកើនឡើងពីរដងដែរ។

៤១. គេមានត្រីកោណ ABC និង A,B,C ជាមុំក្នុងត្រីកោណនេះ។
ក. បើគេដឹងថា $\sin A+\sin B+\sin C=1$ គណនា $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ ។
ខ. បង្ហាញថា $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-\cos A\cos B\cos C$ ។

៤២. គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា និងខុសពីសូន្យ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់
$a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{a}$ ។ បង្ហាញថា $|abc|=1$ ។

៤៣. រកគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $\dfrac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\dfrac{7}{6}$ ។

៤៤. គណនា $S=\dfrac{3}{1!+2!+3!}+\dfrac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\dfrac{2019}{2017!+2018!+2019!}$

៤៥. គណនាលីមីត
ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$ ខ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\cos x\right)\cdot\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{3}}$ ។

៤៦. រកគ្រប់តម្លៃ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1$ ។

៤៧. គេឲ្យ x,y និង z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=2, x^2+y^2+z^2=3$ និង $xyz=4$ ។ គណនា
$\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{zx+y-1}$ ។

៤៨. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ដែល $0\le\theta\le 2\pi$ ។
បង្ហាញថា $\dfrac{2}{1+z}=1-i\tan\dfrac{\theta}{2}$ ។

៤៩. ក. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n បង្ហាញថា

$$(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right)\ ។$$

ខ. ដោយដឹងថា $\sqrt{3}-i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^9+16(1+i)x^3+a+ib=0$ ។

ចូររកចំនួនពិត a និង b ។

៥០. បើ $a>1,b>1$ បង្ហាញថា $2(ab+1)>(a+1)(b+1)$ ។

៥១. រកគ្រប់ចំនួនពិត x,y,z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$\frac{4x^2}{1+4x^2}=y\ ,\ \frac{4y^2}{1+4y^2}=z\ ,\ \frac{4z^2}{1+4z^2}=x$$

៥២. ប្រៀបធៀបចំនួន $\log_3 108\ ,\ \log_4 192\ ,\ \log_5 500\ ,\ \log_6 1080$ ។

៥៣. បង្ហាញថា $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{6}{x^2-9}+\cdot+\dfrac{20}{x^2-100}$

$$=11\left[\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right]$$

៥៤. គេមាន a,b,c,d ជាឫសនៃសមីការ $x^4-\pi x-\sqrt{2019}=0$ ។
ចូររកសមីការដែលមានឫស $\dfrac{a+b+c}{d^2}\ ,\ \dfrac{b+c+d}{a^2}\ ,\ \dfrac{c+d+a}{b^2}\ ,\ \dfrac{d+a+b}{c^2}$ ។

៥៥. រកសមីការដែលមានដឺក្រេតូចបំផុត ហើយមានមេគុណជាចំនួនគត់ និងមាន
$\sqrt{19}+\sqrt{99}$ ជាឫសមួយរបស់វា។

៥៦. បើ a,b,c,x ជាចំនួនពិត ដែល $a+b+c\neq 0$ និង

$$\frac{xb+(1-x)c}{a}=\frac{xc+(1-x)a}{b}=\frac{xa+(1-x)b}{c}$$

បង្ហាញថា $a=b=c$ ។

៥៧. តាង a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

តាង $\lambda=\min\{a^3+a^2bc,b^2+ab^2c,c^3+abc^2\}$ ។ បង្ហាញថាសមីការ $x^2+x+4\lambda=0$ មានឫសពីរជាចំនួនពិត។

៥៨. ចំពោះចំនួនពិតខុសពីសូន្យ x,y,z ដែល $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ ។
បង្ហាញថា $\dfrac{yz}{x^2}+\dfrac{zx}{y^2}+\dfrac{xy}{z^2}=3$ ។

៥៩. រកចំនួនគត់ a និង b ដែលនាំឱ្យ x^2-x-1 ចែកដាច់ $ax^{17}+bx^{16}+1$ ។

បើ p,q,r ជាឫសនៃសមីការ $x^3-3px^2+3q^2x-r^3=0$ ។ បង្ហាញថា $p=q=r$

៦០. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ $u_n=\left\lfloor(2+\sqrt{3})^n\right\rfloor$ ។

បង្ហាញថា $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ ជាចំនួនគត់គូ រួចទាញថា u_n ជាចំនួនគត់សេស។

៦១. គេឱ្យ $a_n=3n+\sqrt{n^2-1}$ និង $b_n=2\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}\right)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ បង្ហាញថា

$\sqrt{a_1-b_1}+\sqrt{a_2-b_2}+\cdots+\sqrt{a_{49}-b_{49}}=A+B\sqrt{2}$ ចំពោះចំនួនគត់ A និង B ។

៦២. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ $u_n=\left\lfloor(2+\sqrt{3})^n\right\rfloor$ ។

បង្ហាញថា $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ ជាចំនួនគត់គូ រួចទាញថា u_n ជាចំនួនគត់សេស។

៦៣. គេឱ្យ $a_n=3n+\sqrt{n^2-1}$ និង $b_n=2\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}\right)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ បង្ហាញថា

$\sqrt{a_1-b_1}+\sqrt{a_2-b_2}+\cdots+\sqrt{a_{49}-b_{49}}=A+B\sqrt{2}$ ចំពោះចំនួនគត់ A និង B ។

៦៤. គេឱ្យ $a_n=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បង្ហាញថា $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{20}}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

៦៥. តាង $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$ ។ គេកំណត់ស្វ៊ីត

$U_n=\dfrac{f(1)\times f(3)\times f(5)\times\cdots\times f(2n-1)}{f(2)\times f(4)\times f(6)\times\cdots\times f(2n)}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$។

គណនា $\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{U_n}\right)$ ។

៦៦. គេឱ្យស្វ៊ីតពីរ (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតធម្មជាតិដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$a_n+\sqrt{2}b_n=(2+\sqrt{2})^n$ ។ គណនា $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ ។

៦៧. គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$ ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ និង (v_n) ជាស្វ៊ីតមួយទៀតដែល

$v_n=u_{n+1}-au_n$ ។ កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

៦៨. ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង $x,\ x+1$ និង $x+2$ ជាត្រីកោណសមញ្ញដែលមានមុំទាលមួយ។ ចូររកវ៉ង់នៃតម្លៃ x ។

៦៩. ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង $a_n=19^n+(-1)^{n-1}\cdot 2^{4n-3}$ ។ រកចំនួនបឋមតូចបំផុតដែលចែកដាច់ a_n ។

៧០. ចំពោះចំនួនពិត a គេមានចំណុច $A(a,0)$ និង $B(-a,0)$ ។ ចូររកសំណុំចំណុច P នៅក្នុងប្លង់មួយដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\angle APB=90^\circ$ ។

៧១. ឧបមាថាចំណុច P ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល $y^2 = ax$ ហើយមិនស្ថិតនៅលើគល់ $O(0,0)$ ។ គេគូសបន្ទាត់មួយកែងនឹងប៉ារ៉ាបូលត្រង់ P ។ តាង Q ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់កែងនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយ R ជាចំណុចប្រសព្វរវាងចំណោលកែងត្រង់ P លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រវែងអង្កត់ QR មានតម្លៃថេរ មិនទាក់ទងនឹងទីតាំងរបស់ P ទេ។

៧២. បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x + y + 1 = 0$ កាត់រង្វង់ដែលមានសមីការ $x^2 + y^2 = 4$ ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា។ គេគូសបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុចប្រសព្វទាំងពីរនោះ។ តាង θ ជាមុំដែលបង្កើតឡើងដោយបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរនោះ ហើយគេដឹងថា $0 \le \theta \le 90^\circ$ ។ រកតម្លៃនៃ $\tan\theta$ ។

៧៣. តាង a, b និង c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនោះ និង $a + b + c = 2p$។ ចូរបង្ហាញថា $p^2 \ge 3\sqrt{3}S$ ។

៧៤. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រសិនបើចំនួនពិត x, y, z និង a បំពេញលក្ខខណ្ឌ
$x + y + z = a$ និង $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$ នាំឱ្យយ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម
x, y និង z ស្មើនឹង a ។

៧៥. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រសិនបើចំនួនពិត x, y, z និង a បំពេញលក្ខខណ្ឌ
$x + y + z = 3a$ និង $xy + yz + zx = 3a^2$ នាំឱ្យ $x = y = z = a$ ។

៧៦. ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n បើ $a_n > 0$ ហើយផ្ទៀតផ្ទាត់ $\sum_{j=1}^{n} a_j^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2$ ។
ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = n$ ។

៧៧. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

៧៨. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $5^x \times 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$

ខ. $\log_3\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) = \log_2\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$

៧៩. ដោះស្រាយវិសមីការ $x^2 + (x+1)^2 \le \dfrac{15}{x + (x+1)}$ ។

៨០. បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x) = (x+2)e^{-x}$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតចំពោះ $x > 0$

៨១. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃអេលីប $9x^2 + 16y^2 = 52$ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ $9x - 8y = 1$ ។

៨២. គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_0 = 0, v_0 = 1$ និង $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។ X_n និង A ជាពីរម៉ាទ្រីសដែល $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ និង $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ។

ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $X_n = A^n X_0$ ។

ខ. P, P' និង B ជាម៉ាទ្រីសដែល $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

១. គណនា PP' និងបង្ហាញថា $P'BP = A$ រួចគណនា A^n ។

២. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) ។

៨៣. ដោះស្រាយសមីការ $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 2$ ។

៨៤. គេឱ្យ A ជាម៉ាទ្រីសការេដែល $A^2 = I$ ហើយ I ជាម៉ាទ្រីសឯកតា។

សម្រួលកន្សោម $(A - I)^3 + (A + I)^3 - 7A$ ។

៨៥. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \sin\theta & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \cos\theta \end{vmatrix}$ ។

៨៦. គណនា $L = \sum_{s=1}^{10} \sum_{r=0}^{s-1} (2^s - 2^r)$ ។

៨៧. គេមានសំណុំ $S = \{a \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 100\}$ និងសមីការ

$\lfloor \tan^2 x \rfloor - \tan x - a = 0$ មានឫសជាចំនួនពិត។ កំណត់ចំនួនធាតុនៃ S ។

($\lfloor x \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់ធំបំផុត $\le x$)

៨៨. គេមាន $x = \sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$ និង

$y = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{8\pi}{7}$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $x^2 + y^2$ ។

៨៩. គេឱ្យ $f(x) = \displaystyle\int_0^{g(x)} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^3}}$ និង $g(x) = \displaystyle\int_0^{\cos x} (1 + \sin t^2)dt$ ។

គណនា $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ ។

៩០. គេឱ្យ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+1)^2 + y - 3}{x + 1}$ និង $y(1) = 1$ ។ រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $y(x)$ ។

៩១. រកវ៉ង់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x+2\sin x+3}{\sin^2 x+\sin x+1}$ ។

៩២. គណនា $\displaystyle\int_{1/8}^{\sin^2 x}\left(\sin^{-1}\sqrt{t}\right)dt+\int_{1/8}^{\cos^2 x}\left(\cos^{-1}\sqrt{t}\right)dt$ ដែល $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ ។

៩៣. គេឱ្យ z និង z_0 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z-i|\le 2$ និង $z_0=5+3i$ ។

គណនាតម្លៃអតិបរមានៃ $|iz+z_0|$ ។

៩៤. គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $g(1)=1$ និង
$\displaystyle\int_0^x 2xg^2(t)dt=\left(\int_0^x 2g(x-t)dt\right)^2$ ។ កំណត់អនុគមន៍ g ។

៩៥. គេមាន a,b,c ជាឫសនៃសមីការ $px^3+qx^2+r=0$ ។

ចូរគណនាដេទែមីណង់ $\Delta=\begin{vmatrix}\frac{1}{a}&\frac{1}{b}&\frac{1}{c}\\ \frac{1}{b}&\frac{1}{c}&\frac{1}{a}\\ \frac{1}{c}&\frac{1}{a}&\frac{1}{b}\end{vmatrix}$ ។

៩៦. គេឱ្យ $\tan A=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}$ និង $\tan B=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}$ ដែល $0<A,B<\dfrac{\pi}{2}$ ។
គណនា $A+B$ ។

៩៧. គេឱ្យបន្ទាត់ $L_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ និងបន្ទាត់ $L_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ ។ រកវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{p}$ ដែលអរត្តូកូណាល់នឹងបន្ទាត់ទាំងពីរនេះ។

៩៨. គេឱ្យ α និង β ជាឫសនៃសមីការ $x^2-6x-2=0$ ដែល $\alpha>\beta$ ។ តាង $t_n=\alpha^n-\beta^n$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $\dfrac{t_{22}-2t_{20}}{2t_{21}}$ ។

៩៩. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ $(0,+\infty)$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(1)=1$ និង
$\displaystyle\lim_{t\to x}\frac{t^2f(x)-x^2f(t)}{t-x}=1$ ចំពោះ $x>0$ ។ កំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ ។

១០០. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}}\frac{x\sin x^2}{\sin x^2+\sin(\ln 6-x^2)}dx$ ។

១០១. គេឱ្យ A ជាម៉ាទ្រីសការេ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $A^2=I$ ។ រកម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A ។

១០២. គេមានម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}1&\sin\theta&1\\-\sin\theta&1&\sin\theta\\-1&-\sin\theta&1\end{bmatrix}$ ។ រកវ៉ង់នៃ $|A|$ ។

១០៣. គេឱ្យ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រឯកតា និងមិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា។ បើ $\vec{u} = \vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}$ និង $\vec{v} = \vec{a}\times\vec{b}$ បង្ហាញថា $|\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{u}\cdot\vec{b}|$ ។

១០៤. គណនាផលបូក $\dfrac{1}{1!(n-1)!} + \dfrac{1}{3!(n-3)!} + \dfrac{1}{5!(n-5)!} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)!1!}$ ។

១០៥. គេមាន $\sin^3 x \sin 3x = \sum\limits_{m=0}^{n} C_m \cos(mx)$ ដែល $C_0, C_1, \cdots, C_n$ ជាចំនួនពិត និង $C_n \neq 0$ ។ រកតម្លៃនៃ n ។

១០៦. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $\sin\dfrac{\pi}{14}\sin\dfrac{3\pi}{14}\sin\dfrac{5\pi}{14}\sin\dfrac{7\pi}{14}\sin\dfrac{9\pi}{14}\sin\dfrac{13\pi}{14}$ ។

១០៧. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $L = \sin\dfrac{\pi}{18}\sin\dfrac{5\pi}{18}\sin\dfrac{7\pi}{18}$ ។

១០៨. គេឱ្យ $A > 0, B > 0$ និង $A + B = \dfrac{\pi}{3}$ ។ រកតម្លៃអតិបរមានៃកន្សោម $y = \tan A \tan B$ ។

១០៩. ដោះស្រាយសមីការ $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$ លើចន្លោះ $(-\pi, \pi)$ ។

១១០. គេឱ្យ $A = \sin^2 x + \cos^4 x$ ។ ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃចំនួនពិត x រកវ៉ែងនៃ A ។

១១១. ដោះស្រាយសមីការ $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$

១១២. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cdots \cos x_n$ បើគេដឹងថា $0 \le x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \le \dfrac{\pi}{2}$ និង $\cot x_1 \cot x_2 \cot x_3 \cdots \cot x_n = 1$ ។

១១៣. ប្រៀបធៀប $t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta}, t_2 = (\tan\theta)^{\cot\theta}, t_3 = (\cot\theta)^{\tan\theta}$ និង $t_4 = (\cot\theta)^{\cot\theta}$ ចំពោះ $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ ។

១១៤. គណនា $S = \sum\limits_{k=1}^{13} \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{(k-1)\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{6}\right)}$ ។

១១៥. គណនា $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\dfrac{7\pi}{8}\right)$ ។

១១៦. សម្រួលកន្សោម $3\left[\sin^4\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin^4(3\pi + \alpha)\right] - 2\left[\sin^6\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin^6(5\pi - \alpha)\right]$ ។

១១៧. រកតម្លៃនៃ θ ដែល $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 4\theta \end{vmatrix} = 0 \quad ។$$

១១៨. បង្ហាញថា

ក. $(\sin 12^\circ)(\sin 48^\circ)(\sin 54^\circ) = \dfrac{1}{8}$

ខ. $16\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}\cos\dfrac{16\pi}{15} = 1$

១១៩. រកគ្រប់តម្លៃនៃ $x \in (-\pi, \pi)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $8^{1+|\cos x|+|\cos^2 x|+|\cos^3 x|+\cdots} = 4^3$ ។

១២០. បង្ហាញថា $\tan x + 2\tan 2x + 4\tan 4x + 8\cot 8x = \cot x$ ។

១២១. រកតម្លៃនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានតូចបំផុត x (គិតជាដឺក្រេ) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\tan(x+100^\circ) = \tan(x+50^\circ)\tan x\tan(x-50^\circ) \text{ ។}$$

១២២. ស្វ៊ីត (a_n) បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k + \frac{1}{k+1}\right) = 2^n + 1 - \frac{1}{n+1} \text{ ។}$$

ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ។

១២៣. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$

ខ. $\lim_{x\to 3}\left[\log_a\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\right)\right] \quad , a > 0, a \neq 1$

គ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$

១២៤. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to 1}\sum_{r=1}^{n}\dfrac{x^r - 1}{x-1}$

ខ. $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^4}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) + 3\left(\sum_{k=1}^{n-2} k\right) + \cdots + n\right]$

គ. $\lim_{n\to+\infty}\prod_{r=3}^{n}\left(\dfrac{r^3-1}{r^3+1}\right)$

១២៥. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}\lfloor k^2 x\rfloor\right)$ ដែល $\lfloor x\rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់ ធំបំផុត $\leq x$ ។

១២៦. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cos\dfrac{x}{2^3}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$ ។

១២៧. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{7}{10} + \dfrac{29}{10^2} + \dfrac{133}{10^3} + \cdots + \dfrac{5^n + 2^n}{10^n}\right)$ ។

១២៨. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left(\tan\theta+\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right)$ ។

១២៩. គណនាលីមីត $\lim_{x\to0}\frac{\tan(\lfloor-\pi^2\rfloor x^2)-x^2\tan(\lfloor-\pi^2\rfloor)}{\sin^2 x}$ ។

១៣០. គណនាលីមីត $\lim_{h\to0}\frac{2\left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+h\right)\right]}{\sqrt{3}h(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}$ ។

១៣១. គេឱ្យ $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\frac{[f(x)]^{2n}-1}{[f(x)]^{2n}+1}$ ។

១៣២. គណនាលីមីត $\lim_{x\to0}\frac{729^x-243^x-81^x+9^x+3^x-1}{x^3}$ ។

១៣៣. គេឱ្យ α និង β ជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2+bx+c=0$ ។

គណនាលីមីត $\lim_{x\to\alpha}(1+ax^2+bx+c)^{\frac{1}{x-\alpha}}$ ។

១៣៤. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$, $a\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

ខ. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

គ. $\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$, $a\neq0$

ឃ. $\lim_{x\to0}(\cos x+a\sin bx)^{\frac{a}{x}}$

ង. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

ច. $\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^4+x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\frac{1-\cos(x+1)}{(x+1)^2}}$

ឆ. $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n$

១៣៥. គណនាលីមីត $\lim_{x\to5}\frac{x^2-9x+20}{x-\lfloor x\rfloor}$ ដែល $\lfloor x\rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់ធំបំផុត $\le x$ ។

១៣៦. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\frac{\{x\}+\{2x\}+\{3x\}+\cdots+\{nx\}}{n^2}$

ដែល $\{k\}=k-\lfloor k\rfloor$ ផ្នែកទសភាគនៃ k ។

១៣៧. បើ $5^{1+x}+5^{1-x},\frac{a}{2}$ និង 25^x+25^{-x} ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត បង្ហាញថា $a\ge12$ ។

១៣៨. ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមានខុសពីមួយ x,y,z បើ $1,\log_y x,\log_z y,-15\log_x z$ ជាតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ បង្ហាញថា $x=z^3$ ។

១៣៩. គេមានបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត និង $abc=4$ ។ រកតម្លៃអប្បបរមានៃ b ។

១៤០. គណនាផលបូក $\frac{1^4}{1\cdot3}+\frac{2^4}{3\cdot5}+\frac{3^4}{5\cdot7}+\cdots+\frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)}$ ។

១៤១. រកតម្លៃអតិបរមានៃផលបូកស៊េរី $20+19\frac{1}{3}+18\frac{2}{3}+18+\cdots$ ។ (សម្គាល់ $19\frac{1}{3}$ ជាចំនួនចម្រុះ)

១៤២. ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង r ចូរគណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\log a, \log(ar), \log(ar^2), \ldots$ ។

១៤៣. តាង S_n ជាផលបូក n តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះជាចំនួនវិជ្ជមាន និងផលសងរួម d ដែល $d = S_n - kS_{n-1} + S_{n-2}$ ។ ចូររកតម្លៃនៃចំនួនពិត k ។

១៤៤. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងជាតម្លៃនៃតួទី x, y, z រៀងគ្នា នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ។ ចូរគណនា $(y-z)\log a + (z-x)\log b + (x-y)\log c$ ។

១៤៥. គេឱ្យតួទី $p+q$ នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយគឺ a ដែល និងតួទី $p-q$ គឺ b ដែល $a > 0, b > 0,\ p, q$ ជាចំនួនគត់ និង $p > q$ ។ គណនាតម្លៃនៃតួទី p នៃស្វ៊ីតនេះ។

១៤៦. គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយដែលមានតួទី n តាងដោយ a_n និង $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$។ បើ $\sum_{k=1}^{100} a_{2k} = \alpha$ និង $\sum_{k=1}^{100} a_{2k-1} = \beta$ រកផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះ។

១៤៧. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$ ។

១៤៨. គណនាផលបូកនៃស៊េរី $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots$ ដែល $|x| < 1$។

១៤៩. គណនាផលបូក

$$\frac{3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{3\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{n+2}{n(n+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ ។}$$

១៥០. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម

$$a^{\log b - \log c} + b^{\log c - \log a} + c^{\log a - \log b} \text{។}$$

១៥១. គណនាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកមិនដាច់នឹង 3 ឬ 5 ។

១៥២. គណនា $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1$ ។

១៥៣. គណនាផលបូកនៃស៊េរី $\frac{9}{5^2\cdot 2\cdot 1} + \frac{13}{5^3\cdot 3\cdot 2} + \frac{17}{5^4\cdot 4\cdot 3} + \cdots$ ។

១៥៤. ចំពោះចំនួនគត់សេស $n \geq 1$ គណនាផលបូក

$$n^3 - (n-1)^3 + (n-2)^3 - (n-3)^3 + \cdots + (-1)^{n-1}1^3 \text{ ។}$$

១៥៥. គេឱ្យ p, q, r ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $27pqr \geq (p+q+r)^3$ និង $3p + 4q + 5r = 12$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $p^3 + q^4 + r^5$ ។

១៥៦. គណនាផលបូក

$$S_n = \frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \frac{3}{1+3^2+3^4} + \cdots + \frac{n}{1+n^2+n^4} \text{ ។}$$

១៥៧. បើ $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = a$ និង $\sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} = b$ ដែល $|x| < 1, |y| < 1$ ។

គណនា $\sum_{n=1}^{+\infty} (xy)^{n-1}$ ជាអនុគមន៍នៃ a, b ។

១៥៨. បើ $\lambda = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^4}$ ។ គណនា $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(2i-1)^4}$ ជាអនុគមន៍នៃ λ ។

១៥៩. រកតម្លៃអប្បរមានៃកន្សោម $8^{\sin\frac{x}{8}} + 8^{\cos\frac{x}{8}}$ ។

១៦០. រកមេគុណនៃ x^{49} នៃផលគុណ $(x-1)(x-3)\cdots(x-99)$ ។

១៦១. គណនាផលបូក

$$\frac{1^3}{1} + \frac{1^3+2^3}{1+3} + \frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + \cdots + \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3}{1+3+5+\cdots+17} \text{ ។}$$

១៦២. គណនាផលបូកនៃស៊េរី $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ ។

១៦៣. គេមាន $S_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{C(n,r)}$ និង $P_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{r}{C(n,r)}$ ដែល $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ។ គណនា $\frac{P_n}{S_n}$ ។

១៦៤. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_0 = 3, x_1 = 4$ និង $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$។

១៦៥. គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

(i) $-1 \le x_i \le 2$, ចំពោះ $i = 1, 2, ..., n$

(ii) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 19$

(iii) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 99$

រកតម្លៃតូចបំផុត និងធំបំផុតនៃ $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3$ ។

១៦៦. ចំពោះស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ តាង ΔA ជាស្វ៊ីតនៃ $\{a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, ...\}$ ។ បើគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $\Delta(\Delta A)$ ស្មើនឹង 1 និង $a_{19} = a_{92} = 0$ ចូររក a_1 ។

១៦៧. គេមាន $(a_n)_{n\ge1}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត ដែល $a_1 = 2$ និង

$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។ កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះ។

១៦៨. ABC ជាត្រីកោណមួយដែលមាន $\sin(2A+B) = \sin(C-A) = -\sin(B+2C) = \frac{1}{2}$

បើ A, B និង C ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ចូររកតម្លៃនៃមុំ A, B និង C ។

១៦៩. បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\cos\frac{2k\pi}{n} = -\frac{n}{2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \ge 3$ ។

២. ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី ១. ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង p ដែល $p \leq n$ ។

ក. បង្ហាញថា $C_n^p = C_n^{n-p}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ ។

គ. បង្ហាញថា $C_n^{p+1} = \dfrac{n-p}{p+1} C_n^p$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $C_n^p = C_n^{n-p}$

គេមាន $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = C_n^{n-p}$

ដូចនេះ $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}$

ខ. បង្ហាញថា $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

$$\begin{aligned}
\text{គេមាន } C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p-1)} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p} \right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p-1)!} \times \frac{n-p+p}{p(n-p)} \\
&= \frac{n(n-1)!}{p(p-1)!\,(n-p)(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}}$

គ. បង្ហាញថា $C_n^{p+1} = \dfrac{n-p}{p+1} C_n^p$

គេមាន $C_n^{p+1} = \dfrac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \dfrac{n-p}{p+1} \times \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n-p}{p+1} C_n^p$

ដូចនេះ $\boxed{C_n^{p+1} = \dfrac{n-p}{p+1} C_n^p}$

លំហាត់ទី ២. បង្ហាញថា $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! < (n+1)!$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $\forall k \in \mathbb{N}$ គេបាន $k \cdot k! = [(k+1)-1]k! = (k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{បើ } k=1: & 1 \cdot 1 = \cancel{2!} - 1! \\ \text{បើ } k=2: & 2 \cdot 2 = \cancel{3!} - \cancel{2!} \\ \text{បើ } k=3: & 3 \cdot 3! = \cancel{4!} - \cancel{3!} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{បើ } k=n: & n \cdot n! = (n+1)! - \cancel{n!} \end{array}\right\} +$$

គេបាន $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1! < (n+1)!$

ដូចនេះ $\boxed{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! < (n+1)!}$

លំហាត់ទី ៣. បង្ហាញថា $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$

គេបាន $\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \times 2 \times \cdots \times (k-1) \times k} < \frac{1}{(k-1)k}$

នាំឱ្យ $\frac{1}{k!} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{បើ } k=2: & \frac{1}{2!} < \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \\ \text{បើ } k=3: & \frac{1}{3!} < \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \\ \text{បើ } k=4: & \frac{1}{4!} < \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{បើ } k=n: & \frac{1}{n!} < \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} \end{array}\right\} +$$

គេបាន $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 - \frac{1}{n} < 1$

នាំឱ្យ $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 3$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<3}$

លំហាត់ទី ៤. បង្ហាញថា $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្វេធា $Newton$ គេបាន $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}$

យក $x=y=1$

គេបាន $(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k 1^k 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$

ដូចនេះ $\boxed{C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n}$

លំហាត់ទី ៥. បង្ហាញថា $C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+\cdots+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+\cdots+C_{2n}^{2n}$

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្វេធា $Newton$ គេបាន $(x-y)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k C_{2n}^k\ x^k y^{2n-k}$

យក $x=y=1$ គេបាន

$(1-1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k 2n^k=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+C_{2n}^4-C_{2n}^5-\cdots-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$

$0=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+C_{2n}^4-C_{2n}^5-\cdots-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$

$\Longleftrightarrow C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+\cdots+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+\cdots+C_{2n}^{2n}$

ដូចនេះ $\boxed{C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+\cdots+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+\cdots+C_{2n}^{2n}}$

លំហាត់ទី ៦. គណនាផលបូក :

$A=2^nC_n^0+2^{n-2}C_n^2+2^{n-4}C_n^4+\cdots$

$B=2^{n-1}C_n^1+2^{n-3}C_n^3+2^{n-5}C_n^5+\cdots$

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្វធា $Newton$ គេបាន $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{n-k}y^k$ និង $(x-y)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{n-k}y^k$ គេបាន

$$A+B=\left(2^nC_n^0+2^{n-2}C_n^2+2^{n-4}C_n^4+\cdots\right)+\left(2^{n-1}C_n^1+2^{n-3}C_n^3+2^{n-5}C_n^5+\cdots\right)$$
$$=2^nC_n^0+2^{n-1}C_n^1+2^{n-2}C_n^2+2^{n-3}C_n^3+2^{n-4}C_n^4+2^{n-5}C_n^5+\cdots$$

$$= (2+1)^n$$
$$= 3^n \quad (1)$$
$$A - B = \left(2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + \cdots\right) - \left(2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-3} C_n^3 + 2^{n-5} C_n^5 + \cdots\right)$$
$$= 2^n C_n^0 - 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 - 2^{n-3} C_n^3 + 2^{n-4} C_n^4 - 2^{n-5} C_n^5 + \cdots$$
$$= (2-1)^n$$
$$= 1 \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន $\begin{cases} A + B = 3^n \\ A - B = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow A = \dfrac{1}{2}(3^n + 1)$ និង $B = \dfrac{1}{2}(3^n - 1)$

ដូចនេះ $\boxed{A = \dfrac{1}{2}(3^n + 1) \ \text{ និង } \ B = \dfrac{1}{2}(3^n - 1)}$

លំហាត់ទី ៧. បង្ហាញថា $1 \times C_n^1 + 2 \times C_n^2 + 3 \times C_n^3 + \cdots + n \times C_n^n = n \times 2^{n-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ ធ្វើដេរីវេធៀបអង្គទាំងពីរ

គេបាន $n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(kx^{k-1}\right) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}$

យក $x = 1$ នាំឱ្យ $n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k = 1 \times C_n^1 + 2 \times C_n^2 + 3 \times C_n^3 + \cdots + n \times C_n^n$

ដូចនេះ $\boxed{C_n^1 + 2 \times C_n^2 + 3 \times C_n^3 + \cdots + n \times C_n^n = n \times 2^{n-1}}$

លំហាត់ទី ៨. បង្ហាញថា $2 \times 1\ C_n^2 + 3 \times 2\ C_n^3 + \cdots + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ ធ្វើដេរីវេធៀបអង្គទាំងពីរ

គេបាន $n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(kx^{k-1}\right) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}$

ធ្វើដេរីវេម្តងទៀតធៀបអង្គទាំងពីរ គេបាន

$$n(n-1)(x+1)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k x^{k-2}$$

យក $x = 1$ គេបាន $n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = 2 \times 1\ C_n^2 + 3 \times 2\ C_n^3 + \cdots + n(n-1)C_n^n$

ដូចនេះ $\boxed{2\times 1\, C_n^2 + 3\times 2\, C_n^3 + \cdots + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}}$

លំហាត់ទី ៩. គណនាផលបូក $S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ ធ្វើអាំងតេក្រាលលើរបអង្គទាំងពីរ

គេបាន $\int_0^1 (x+1)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\, dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_0^1 x^k\, dx$

$\Longrightarrow \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1$

ឬ $\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{k+1} - 0\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}C_n^k$

គេបាន $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}C_n^k = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

ដូចនេះ $\boxed{S = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

លំហាត់ទី ១០. បង្ហាញថា $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \cdots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^n(x+1)^n \quad (1)$

ដោយ

$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \cdots + C_{2n}^n x^n + \cdots + C_{2n}^{2n} x^{2n} \quad (2)$

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n \quad (3)$

$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} x + C_n^n \quad (4)$

គេបាន មេគុណនៃ x^n របស់សមភាព (2) គឺ C_{2n}^n

និង មេគុណនៃ x^n របស់សមភាព $(3)\times(4)$ គឺ $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \cdots + \left(C_n^n\right)^2$

តាម (1) គេបាន $C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \cdots + \left(C_n^n\right)^2$

ដូចនេះ $\boxed{C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \cdots + \left(C_n^n\right)^2}$

លំហាត់ទី ១១. គេឱ្យ $n \in \mathbb{N}$ ដែល $n \geq 4$ ។ បង្ហាញថា $C_{C_n^2}^2 = 3C_{n+1}^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $C_{C_n^2}^2=\dfrac{(C_n^2)!}{2!\left(C_n^2-2\right)!}=\dfrac{C_n^2\left(C_n^2-1\right)\left(C_n^2-2\right)!}{2!\left(C_n^2-2\right)!}=\dfrac{\frac{n!}{2!(n-2)!}\left(\frac{n!}{2!(n-2)!}-1\right)}{2!}$

$$=\frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}-1\right)}{2}=\frac{n(n-1)(n^2-n-2)}{2\times 4}=\frac{n(n-1)(n+1)(n-2)}{2\times 4}$$

$$=3\times\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{2\times 3\times 4}=3\times\frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n(n+1)}{4!(n-3)!}$$

$$=3\times\frac{(n+1)!}{4![(n+1)-4]!}=3C_{n+1}^4$$

ដូចនេះ $\boxed{C_{C_n^2}^2=3C_{n+1}^4}$

លំហាត់ទី ១២. គេតាង $P_n=\prod_{k=0}^{n}C_n^k$ ។ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ គេបាន $\dfrac{P_n}{P_{n-1}}=\dfrac{n^n}{n!}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\dfrac{P_n}{P_{n-1}}=\dfrac{\prod_{k=0}^{n}C_n^k}{\prod_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k}=\dfrac{\left(\prod_{k=0}^{n-1}C_n^k\right)C_n^n}{\prod_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k}=\prod_{k=0}^{n-1}\dfrac{C_n^k}{C_{n-1}^k}$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n-k}$$

នាំឱ្យ $\dfrac{P_n}{P_{n-1}}=\dfrac{n}{n}\times\dfrac{n}{n-1}\times\dfrac{n}{n-2}\times\dfrac{n}{n-3}\times\cdots\times\dfrac{n}{2}\times\dfrac{n}{1}=\boxed{\dfrac{n^n}{n!}}$

លំហាត់ទី ១៣. រក $\log_{30}8$ ជាអនុគមន៍នៃ c និង d បើគេដឹងថា $\log_{30}3=c$ និង $\log_{30}5=d$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\log_{30}8=3\log_{30}2=3\log_{30}\left(\dfrac{30}{15}\right)=3\left(\log_{30}30-\log_{30}15\right)$

$$=3\left(1-\log_{30}3-\log_{30}5\right)=3(1-c-d)$$

ដូចនេះ $\boxed{\log_{30} 8 = 3(1-c-d)}$

លំហាត់ទី ១៤. រក $\log_9 40$ ជាអនុគមន៍នៃ c និង d បើគេដឹងថា $\log 15 = c$ និង $\log_{20} 50 = d$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន

$$\log_9 40 = \frac{\log 40}{\log 9} = \frac{\log 4 + \log 10}{2\log 3} = \frac{2\log 2 + 1}{2\log 3}$$

$$c = \log 15 = \log 3 + \log 5$$

$$d = \log_{20} 50 = \frac{\log 50}{\log 20} = \frac{\log 5 + \log 10}{\log 2 + \log 10} = \frac{\log 5 + 1}{\log 2 + 1}$$

សម្គាល់

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (រូបមន្តប្តូរគោល)

ចំពោះ $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$

តាង $x = \log 2,\ y = \log 3$ និង $z = \log 5$ គេបាន $\begin{cases} \log_9 40 = \dfrac{2x+1}{2y} \\ c = y + z \\ d = \dfrac{z+1}{x+1} \end{cases}$

តែ $x + z = \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$

គេបាន $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = c \\ \dfrac{z+1}{x+1} = d \end{cases} \iff \begin{cases} y + (1-x) = c \\ \dfrac{1-x+1}{x+1} = d \end{cases} \iff \begin{cases} y - x = c - 1 \\ x = \dfrac{2-d}{1+d} \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} y = \dfrac{c - 2d + cd + 1}{1+d} \\ x = \dfrac{2-d}{1+d} \end{cases}$$

គេបាន $\log_9 40 = \dfrac{2x+1}{2y} = \dfrac{2\left(\dfrac{2-d}{1+d}\right)+1}{2\left(\dfrac{c-2d+cd+1}{1+d}\right)} = \dfrac{4-2d+1+d}{2(c-2d+cd+1)}$

$$\log_9 40 = \frac{5-d}{2(c-2d+cd+1)}$$

ដូចនេះ $\boxed{\log_9 40 = \dfrac{5-d}{2(c-2d+cd+1)}}$

លំហាត់ទី ១៥. ដោះស្រាយសមីការ $x^{\log x} = 100x$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការមានន័យកាលណា $x > 0$

គេបាន $x^{\log x} = 100x \Longrightarrow \log x^{\log x} = \log 100x$

$\Longrightarrow \log^2 x = \log 100 + \log x = 2 + \log x \Longleftrightarrow \log^2 x - \log x - 2 = 0$

$\Longleftrightarrow \log x = -1 \lor \log x = 2 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{10} \lor x = 100$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានចម្លើយ } x = \dfrac{1}{10} \lor x = 100}$

លំហាត់ទី ១៦. ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\log_{\frac{1}{4}}(1+7x-2x^2)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការមានន័យកាលណា

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 1 + 7x - 2x^2 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{7-\sqrt{57}}{4} < x < \dfrac{7+\sqrt{57}}{4} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{7+\sqrt{57}}{4} \quad (1)$

គេបាន $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\log_{\frac{1}{4}}(1+7x-2x^2)} \quad (2)$

$\Longleftrightarrow (2x-1)^{-\frac{1}{2}} = (2x-1)^{\log_{\frac{1}{4}}(1+7x-2x^2)}$

− បើ $2x - 1 = 1 \Longleftrightarrow x = 1$ គេបាន (2) ពិត

− បើ $2x - 1 \neq 1 \Longleftrightarrow x \neq 1$ តាម (2) គេបាន

$\log_{\frac{1}{4}}(1 + 7x - 2x^2) = -\dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow -\dfrac{1}{2}\log_2(1 + 7x - 2x^2) = -\dfrac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow 1 + 7x - 2x^2 = 2 \Longleftrightarrow 2x^2 - 7x + 1 = 0$

គេបាន $x = \dfrac{7-\sqrt{41}}{4} \lor x = \dfrac{7+\sqrt{41}}{4}$

តាម (1) $\Longrightarrow x = \dfrac{7+\sqrt{41}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានចម្លើយ } x = 1 \lor x = \dfrac{7+\sqrt{41}}{4}}$

លំហាត់ទី ១៧. ដោះស្រាយសមីការ $4^{\log x+1} - 6^{\log x} - 2\times 3^{2\log x+2} = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការមានន័យកាលណា $x > 0$

គេមាន $4^{\log x+1} - 6^{\log x} - 2\times 3^{2\log x+2} = 0 \Longleftrightarrow 4\times 4^{\log x} - 6^{\log x} - 18\times 9^{\log x} = 0 \;\; (1)$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង 4^x គេបាន $4 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} - 18\left(\frac{9}{4}\right)^{\log x} = 0$

តាង $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}$, $t > 0$ គេបាន $18t^2 + t - 4 = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{16}{36} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

នាំឱ្យ $\left(\frac{3}{2}\right)^{\log x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \Longleftrightarrow \log x = -2 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{100}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានចម្លើយ } x = \frac{1}{100}}$

លំហាត់ទី ១៨. គេអោយ $a > 1$ និង $x > 1$ ដែល $\log_a(\log_a(\log_a 2) + \log_a 24 - 128) = 128$ និង $\log_a(\log_a x) = 256$ ។ រកចំនួនគត់ x ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន

$$\begin{aligned}
128 &= \log_a(\log_a(\log_a 2) + \log_a 24 - 128)\\
a^{128} &= \log_a(\log_a 2) + \log_a 24 - 128\\
128 + a^{128} &= \log_a(\log_a 2) + \log_a 24\\
&= \log_a(24\log_a 2)\\
&= \log_a \log_a 2^{24}\\
a^{128+a^{128}} &= \log_a 2^{24}\\
(a^{128})(a^{a^{128}}) &= \log_a 2^{24}\\
a^{(a^{128})(a^{a^{128}})} &= 2^{24}\\
(a^{a^{128}})^{(a^{a^{128}})} &= 8^8
\end{aligned}$$

គេបាន $\quad a^{(a^{128})} = 8 \Longrightarrow (a^{128})^{(a^{128})} = 8^{128} = 64^{64}$ (លើកអង្គទាំងពីរជាស្វ័យគុណ 128)

នាំអោយ $\quad a^{128} = 64 = 2^6 \Longleftrightarrow a = 2^{\frac{6}{128}} = 2^{\frac{3}{64}}$

តែ $\quad \log_a(y) = \frac{\log_2(y)}{\log_2 a} = \frac{64}{3}\log_2(y) \quad$ (ព្រោះ$a = 2^{3/64}$)

គេបាន

$$256 = \log_a(\log_a(x)) = \frac{64}{3}\log_2(\frac{64}{3}\log_2(x))$$
$$2^{12} = \frac{64}{3}\log_2(x) \Longleftrightarrow 192 = \log_2(x) \Longleftrightarrow x = 2^{192}$$

ដូចនេះ $\boxed{x = 2^{192}}$

លំហាត់ទី ១៩. គេមានចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $z \neq 0$ ។ ចូរដោះស្រាយសមីការ $2 - \frac{1}{z} = \bar{z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $2 - \frac{1}{z} = \bar{z}$

គេមាន $2 - \frac{1}{z} = \bar{z} \Longrightarrow 2z - 1 = z\bar{z} = |z|^2 \quad$ (ព្រោះ $\; z\bar{z} = |z|^2$)

នាំឱ្យ $2z = |z|^2 + 1 \quad (1)$ ដោយ $|z|^2 + 1 \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow z \in \mathbb{R}_+$

ដោយ $z \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow |z| = z$

តាម (1) គេបាន $2z = z^2 + 1 \Longleftrightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \Longleftrightarrow (z-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow z = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានចម្លើយ } z = 1}$

លំហាត់ទី ២០. បង្ហាញថា បើផលគុណនៃ $z_1 z_2$ ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ នោះមានចំនួនពិត α មួយដែល $z_1 = \alpha\bar{z_2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បើផលគុណនៃ $z_1 z_2 \neq 0$ នោះ $z_1 \neq 0 \wedge z_2 \neq 0$

គេមាន $z_1 z_2$ ជាចំនួនពិត នោះ $z_1 z_2 = a$ ដែល $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

គេបាន $z_1 = \frac{a}{z_2} = \frac{a\bar{z_2}}{z_2\bar{z_2}} = \frac{a}{|z_2|^2} \times \bar{z_2}$

ដោយ $\frac{a}{|z|^2} \in \mathbb{R}$ តាង $\alpha = \frac{a}{|z|^2} \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

គេបាន $z_1 = \alpha\bar{z_2}$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 = \alpha\bar{z_2}}$

លំហាត់ទី ២១. ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច z និង w ចូរបង្ហាញថា $|z + w| \leq |z| + |w|$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $|z+w|^2=(z+w)(\overline{z+w})=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})$

$=z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}=|z|^2+|w|^2+z\overline{w}+w\overline{z}$

$=|z|^2+|w|^2+z\overline{w}+\overline{z\overline{w}}$ (ព្រោះ $\overline{z\overline{w}}=\overline{z}\,\overline{\overline{w}}=\overline{z}w$)

$=|z|^2+|w|^2+2Re(z\overline{w})$ ($Re(z)$ តាងឱ្យផ្នែកពិតនៃចំនួនកុំផ្លិច z និង $Re(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$)

$\leq |z|^2+|w|^2+2|z\overline{w}|$ (ព្រោះ $Re(z\overline{w})\leq |z\overline{w}|$)

$\leq |z|^2+|w|^2+2|z||\overline{w}|$

$\leq |z|^2+|w|^2+2|z||w|$ (ព្រោះ$|w|=|\overline{w}|$)

$\leq |z|^2+2|z||w|+|w|^2$

$\leq (|z|+|w|)^2$ ដោយ $|z|\geq 0,\ |w|\geq 0$ និង $|z+w|\geq 0$ គេបាន $|z+w|^2\leq (|z|+|w|)^2$

$\Longrightarrow |z+w|\leq |z|+|w|$

ដូចនេះ $\boxed{|z+w|\leq |z|+|w|}$

លំហាត់ទី ២២. បង្ហាញថា $2+i$ ជាឫសរបស់សមីការ $z^4-5z^3+3z^2+19z-30=0$ រួចរកឫសផ្សេងទៀតរបស់សមីការនេះ។

ដំណោះស្រាយ

- បើ $2+i$ ជាឫសរបស់សមីការ $z^4-5z^3+3z^2+19z-30=0$ គេបាន

  $(2+i)^4-5(2+i)^3+3(2+i)^2+19(2+i)-30$

  $=(2^4+4\cdot 2^3i+6\cdot 2^2i^2+4\cdot 2i^3+i^4)-5(8+12i+6i^2+i^3)+3(4+4i+i^2)+(38+19i)-30$

  $=(16+32i-24-8i+1)-5(8+12i-6-i)+3(4+4i-1)+8+19i$

  $=-7+24i-10-55i+9+12i+8+19i=0$

  ដូចនេះ $2+i$ ជាឫសរបស់សមីការ $z^4-5z^3+3z^2+19z-30=0$

- រកឫសផ្សេងទៀត

  គេមាន $2+i$ ជាឫសរបស់សមីការ $z^4-5z^3+3z^2+19z-30=0$ (1)

  នាំឱ្យ $2-i$ ក៏ជាឫសរបស់សមីការ (1) ដែរ

  ដោយ $(2+i)+(2-i)=4$ និង $(2+i)(2-i)=5$ នោះ $2-i$ និង $2-i$ ជាឫសរបស់សមីការ $z^2-4z+5=0$

  គេមាន

  $z^4-5z^3+3z^2+19z-30$

  $=(z^4-4z^3+5z^2)+(4z^3-5z^2)-5z^3+3z^2+19z-30$

  $=z^2(z^2-4z+5)-z^3-2z^2+19z-30$

  $=z^2(z^2-4z+5)-(z^3-4z^2+5z)+(-4z^2+5z)-2z^2+19z-30$

$= z^2(z^2-4z+5) - z(z^2-4z+5) - 6z^2 + 24z - 30$

$= z^2(z^2-4z+5) - z(z^2-4z+5) - 6(z^2-4z+5)$

$= (z^2-4z+5)(z^2-z-6)$

នោះគេបាន $z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 19z - 30 = 0 \iff (z^2-4z+5)(z^2-z-6) = 0$

នាំឱ្យ $z^2 - 4z + 5 = 0$ ឬ $z^2 - z - 6 = 0$

$-$ បើ $z^2 - 4z + 5 = 0 \iff z = 2 + i \vee z = 2 - i$

$-$ បើ $z^2 - z - 6 = 0 \iff z = -2 \vee z = 3$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ឫសផ្សេងទៀតគឺ } -2,\ 3,\ 2-i}$

លំហាត់ទី ២៣. បង្ហាញថា $x^4 + 4 = (x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$

$= [x-(1+i)]\,[x-(1-i)]\,[x+(1+i)]\,[x+(1-i)]$

$= \left[x^2-(1+i)^2\right]\left[x^2-(1-i)^2\right]$

$= \left[x^2-(1+2i+i^2)\right]\left[x^2-(1-2i+i^2)\right]$

$= (x^2-2i)(x^2+2i)$

$= x^4 - 4i^2$

$= x^4 + 4$

ដូចនេះ $\boxed{x^4 + 4 = (x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)}$

លំហាត់ទី ២៤. ដោះស្រាយសមីការ $(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0$

តាម $\Delta = (5-i)^2 - 4(2+i)(2-2i) = -2i = (1-i)^2$

គេបាន $x = \dfrac{5-i+1-i}{2(2+i)} = 1 - i$ ឬ $x = \dfrac{5-i-1+i}{2(2+i)} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានឫស } x = 1 - i \vee x = \dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{5}i}$

លំហាត់ទី ២៥. រកគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច $z \neq 0$ ដែល $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $z = x + iy$ គេបាន

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= x + iy + \frac{1}{x+iy} \\ &= x + iy + \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} \\ &= x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ &= \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right) \quad (1) \end{aligned}$$

គេបាន $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $y - \dfrac{y}{x^2+y^2} = 0 \Longrightarrow y = 0 \vee x^2 + y^2 = 1$

− បើ $y = 0$ គេបាន $z = x,\ x \neq 0$ នាំឱ្យ $z + \dfrac{1}{z} = x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$
  នោះ $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $z \in \mathbb{R}$

− បើ $x^2 + y^2 = 1$ តាម (1) គេបាន $z + \dfrac{1}{z} = x + x = 2x \in \mathbb{R}$
  នោះ $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$ លុះត្រាតែ $z = x + iy$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2 + y^2 = 1$

ដូចនេះ $\boxed{z \in \mathbb{R} \vee z = x + iy \text{ ដែល } x^2 + y^2 = 1}$

លំហាត់ទី ២៦. បង្ហាញថា $z = \left(\dfrac{19+7i}{9-i}\right)^{2019} + \left(\dfrac{20+5i}{7+6i}\right)^{2019} + 19012019$ ជាចំនួនពិត។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា z ជាចំនួនពិត

z ជាចំនួនពិតលុះត្រាតែ $z = \bar{z}$

គេមាន $\dfrac{19+7i}{9-i} = \dfrac{(19+7i)(9+i)}{(9-i)(9+i)} = \dfrac{171+19i+63i-7}{9^1+1} = \dfrac{164+82i}{82} = 2+i$

$\dfrac{20+5i}{7+6i} = \dfrac{(20+5i)(7-6i)}{(7+6i)(7-6i)} = \dfrac{140-120i+35i+30}{7^2+6^2} = \dfrac{170-85i}{85} = 2-i$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } z &= \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^{2019} + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^{2019} + 19012019 \\ &= (2+i)^{2019} + (2-i)^{2019} + 19012019 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \quad \bar{z} &= \overline{(2+i)^{2019} + (2-i)^{2019} + 19012019} \\ &= \overline{(2+i)^{2019}} + \overline{(2-i)^{2019}} + 19012019 \\ &= \left(\overline{2+i}\right)^{2019} + \left(\overline{2-i}\right)^{2019} + 19012019 \end{aligned}$$

$$= (2-i)^{2019} + (2+i)^{2019} + 19012019$$
$$= (2+i)^{2019} + (2-i)^{2019} + 19012019 = z$$

ដូចនេះ $\boxed{z \text{ ជាចំនួនពិត}}$

លំហាត់ទី ២៧. គេឲ្យ $\tan A$ និង $\tan B$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + px + q = 0$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ:
$\sin^2(A+B) + p\sin(A+B)\cos(A+B) + q\cos^2(A+B)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\tan A$ និង $\tan B$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + px + q = 0$

នាំឲ្យ $\tan A + \tan B = -p$ និង $\tan A \tan B = q$

តាមរូបមន្ត $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \dfrac{-p}{1-q} = \dfrac{p}{q-1}$

គេមាន $\sin^2(A+B) + p\sin(A+B)\cos(A+B) + q\cos^2(A+B)$

$$= \cos^2(A+B)\left[\tan^2(A+B) + p\tan(A+B) + q\right]$$
$$= \frac{1}{\tan^2(A+B)+1} \times \left[\tan^2(A+B) + p\tan(A+B) + q\right]$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{p}{q-1}\right)^2 + 1} \times \left[\left(\frac{p}{q-1}\right)^2 + p\left(\frac{p}{q-1}\right) + q\right]$$
$$= \frac{(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2} \times \frac{p^2 + p^2(q-1) + q(q-1)^2}{(q-1)^2}$$
$$= \frac{(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2} \times \frac{p^2 + p^2q - p^2 + q(q-1)^2}{(q-1)^2}$$
$$= \frac{(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2} \times \frac{p^2q + q(q-1)^2}{(q-1)^2}$$
$$= \frac{(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2} \times \frac{q\left[p^2+(q-1)^2\right]}{(q-1)^2}$$
$$= q$$

ដូច្នេះ $\boxed{\sin^2(A+B) + p\sin(A+B)\cos(A+B) + q\cos^2(A+B) = q}$

លំហាត់ទី ២៨. គេមាន x, y និង z ជាចំនួនពិតដែល $x = \sqrt{11-2yz}$, $y = \sqrt{12-2xz}$, និង $z = \sqrt{13-2xy}$
គណនាតម្លៃនៃ $x+y+z$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $x = \sqrt{11-2yz}$, $y = \sqrt{12-2xz}$, និង $z = \sqrt{13-2xy} \quad \Rightarrow x, y, z \geq 0$

ម្យ៉ាងទៀត $x^2 + y^2 + z^2 = (11-2yz) + (12-2xz) + (13-2xy) = 36 - 2(xy+yz+zx)$

គេបាន $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) = 36$

$\Leftrightarrow \quad (x+y+z)^2 = 36 \Leftrightarrow x+y+z = \pm 6$

តែដោយ $x, y, z \geq 0 \Rightarrow x + y + z \geq 0$

ហេតុនេះគេបាន $x + y + z = 6$

ដូច្នេះ $\boxed{x + y + z = 6}$

លំហាត់ទី ២៩. គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a + b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ។ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $(a^2 + b^2)^{11} - 30ab$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a + b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Longleftrightarrow ab(a + b) = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

តាង $x = a + b, y = ab$

ដោយ $a, b \in \mathbb{N}, \Rightarrow x, y \in \mathbb{N}$

គេបាន $xy = y^2 - 2x \Longleftrightarrow y^2 - xy - 2x = 0 \qquad (1)$

$\Rightarrow \Delta = x^2 + 8x$

ដោយ $x, y \in \mathbb{N}$ នោះ Δ ត្រូវតែជាការេប្រាកដ

គេដឹងថា $x^2 < x^2 + 8x < (x + 4)^2$

នាំឲ្យ $x^2 + 8x \in \{(x + 1)^2, (x + 2)^2, (x + 3)^2\}$

+ បើ $x^2 + 8x = (x + 1)^2 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{6} \notin \mathbb{N}$

+ បើ $x^2 + 8x = (x + 2)^2 \Longleftrightarrow x = 1$

+ បើ $x^2 + 8x = (x + 3)^2 \Longleftrightarrow x = \frac{9}{2} \notin \mathbb{N}$

ហេតុនេះគេបាន $x = 1$

តាម (1) $\quad y^2 - y - 2 = 0 \Longleftrightarrow y = 2$ ឬ $y = -1$(មិនយក)

នាំឲ្យ គេបាន $x = 1, y = 2 \Longleftrightarrow ab = 1, a + b = 2$

គេមាន $a + b = 2 \Longleftrightarrow (a + b)^2 = 4 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 4 - 2ab \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = 2$

គេបាន $(a^2 + b^2)^{11} - 30ab = 2^{11} - 30 \times 1 = 2048 - 30 = 2018$

ដូច្នេះ $\boxed{(a^2 + b^2)^{11} - 30ab = 2018}$

លំហាត់ទី ៣០. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$\log_2(2x + y) = \log_4(x^2 + xy + 7y^2)$ មានចំនួនពិត K ដែល

$\log_3(3x + y) = \log_9(3x^2 + 4xy + Ky^2)$ ។

ចូររកផលគុណនៃតម្លៃដែលអាចកើតមាននៃ K ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\log_2(2x+y)=\log_4(x^2+xy+7y^2)=\dfrac{1}{2}\log_2(x^2+xy+7y^2)$

$\Longrightarrow 2\log_2(2x+y)=\log_2(x^2+xy+7y^2)\Longleftrightarrow \log_2(2x+y)^2=\log_2(x^2+xy+y^2)$

គេបាន $(2x+y)^2=x^2+xy+y^2$

$$4x^2+4xy+y^2=x^2+xy+7y^2$$

$$3x^2+3xy-6y^2=0$$

$$x^2+xy-2y^2=0\Longleftrightarrow (x-y)(x+2y)=0$$

នាំឱ្យ $x=y\lor x=-2y$

✎ ចំពោះ $x=y$ គេបាន $\log_3(3x+y)=\log_9(3x^2+4xy+Ky^2)\Longleftrightarrow \log_3(3x+x)=\log_9(3x^2+4x^2+Kx^2)$
$\Longleftrightarrow \log_3 4x=\dfrac{1}{2}\log_3(7+K)x^2\Longleftrightarrow (4x)^2=(7+K)x^2\Longleftrightarrow K=9$

✎ ចំពោះ $x=-2y$ គេបាន $\log_3(3x+y)=\log_9(3x^2+4xy+Ky^2)\Longleftrightarrow \log_3(-6y+y)=\dfrac{1}{2}\log_3(12y^2-8y^2+Ky^2)$

$\Longleftrightarrow 2\log_3(-5y)=\log_3(4+K)y^2\Longleftrightarrow 25y^2=(4+K)y^2\Longleftrightarrow K=21$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផលគុណនៃតម្លៃដែលអាចកើតមាននៃ } K \text{ គឺ } 9\times 21=189}$

លំហាត់ទី ៣១. គេឱ្យ x,y និង z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xy=-80-320i$, $yz=60$ និង $zx=-96+24i$ ។ ចូរគណនា $|x+y+z|$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $xy=-80-320i\Longrightarrow y=\dfrac{-80-320i}{x}$

$$zx=-96+24i\Longrightarrow z=\dfrac{-96+24i}{x}$$

$$yz=60\Longrightarrow \dfrac{-80-320i}{x}\times\dfrac{-96+24i}{x}=60$$

$\Longrightarrow x^2=\dfrac{(-80-320i)(-96+24i)}{60}=256+480i$

តាង $x=a+bi\Longrightarrow x^2=a^2-b^2+2abi$

គេបាន $a^2-b^2+2abi=256+480i\Longrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=256 & (1)\\ 2ab=480 & (2)\end{cases}$

តាម (2) គេបាន $2ab=480\Longleftarrow ab=240\Longrightarrow b=\dfrac{240}{a}$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $a^2-\left(\dfrac{240}{a}\right)^2=256\Longrightarrow (a^2)^2-256a^2-240^2=0$

តាម $\Delta'=128^2+240^2=272^2$

គេបាន $a^2=128+272=400$ ឬ $a^2=128-272<0$ (មិនអាច ព្រោះ $a^2\geq 0$)

បើ $a^2=400\Longrightarrow a=\pm 20$

✍ បើ $a = 20 \Longrightarrow b = \dfrac{240}{a} = \dfrac{240}{20} = 12 \Longrightarrow x = 20 + 12i$

✍ បើ $a = -20 \Longrightarrow b = \dfrac{240}{a} = \dfrac{240}{-20} = -12 \Longrightarrow x = -20 - 12i$

- ករណី $x = 20 + 12i$ គេបាន

$$y = \frac{-80 - 320i}{x} = \frac{-80 - 320i}{20 + 12i} = \frac{-80(1 + 4i)}{4(5 + 3i)} = -10 - 10i$$
$$z = \frac{-96 + 24i}{x} = \frac{-96 + 24i}{20 + 12i} = \frac{24(-4 + i)}{4(5 + 3i)} = -3 + 3i$$

គេបាន $x+y+z = (20+12i)+(-10-10i)+(-3+3i) = 7+5i \Longrightarrow |x+y+z| = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74}$

- ករណី $x = -20 - 12i$ គេបាន

$$y = \frac{-80 - 320i}{x} = \frac{-80 - 320i}{-20 - 12i} = 10 + 10i$$
$$z = \frac{-96 + 24i}{x} = \frac{-96 + 24i}{-20 - 12i} = 3 - 3i$$

គេបាន $x+y+z = (-20-12i)+(10+10i)+(3-3i) = -7-5i \Longrightarrow |x+y+z| = \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{74}$

ដូចនេះ $\boxed{|x + y + z| = \sqrt{74}}$

លំហាត់ទី ៣២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន គេមានស្វ៊ែ (S) មួយមានផ្ចិត $C(a, b, c)$ ។ បង្ហាញថាបើស្វ៊ែ (S) ប៉ះនឹងប្លង់ (yz) នោះ កាំនៃស្វ៊ែនោះគឺ $r = |a|$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $D(x_D, y_D, z_D)$ ជាចំណុចប៉ះ នោះ $x_D = 0$

គេបាន $\overrightarrow{CD}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់ទៅនឹងប្លង់ (yz) នោះ $\overrightarrow{CD}$ កូលីនេអ៊ែរនឹងវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{CD} = m\vec{i},\ m \in \mathbb{R}$

គេមានអាប់ស៊ីសនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{CD}$ គឺ $x_D - a = -a$ ហើយ អាប់ស៊ីសនៃវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}$ គឺ 1

ដោយ $\overrightarrow{CD} = m\vec{i} \Longleftrightarrow -a = m$

គេបាន $\overrightarrow{CD} = -a\vec{i}$ នោះ $r = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ ។

ដូចនេះ $\boxed{r = |a|}$

លំហាត់ទី ៣៣. បើ $x > 0, y > 0,\ \log_y x + \log_x y = \dfrac{10}{3}$ និង $xy = 144$ គណនាតម្លៃនៃ $\dfrac{x + y}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\log_y x + \log_x y = \dfrac{10}{3} \Longleftrightarrow \log_y x + \dfrac{1}{\log_y x} = \dfrac{10}{3}$

តាង $t = \log_y x$ គេបាន $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{10}{3}$ ដោះស្រាយសមីការនេះ គេបាន $t = 3 \vee t = \dfrac{1}{3}$

❒ ករណី $t = 3 \iff \log_y x = 3 \iff x = y^3$

គេមាន $xy = 144 \iff (y^3)y = 144 \iff y^4 = 144 \iff y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

គេបាន $x = y^3 = (2\sqrt{3})^3 = 24\sqrt{3}$

នាំឱ្យ $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{24\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{26\sqrt{3}}{2} = 13\sqrt{3}$

❒ ករណី $t = \dfrac{1}{3} \iff \log_y x = \dfrac{1}{3} \iff y = x^3$

គេមាន $xy = 144 \iff x(x^3) = 144 \iff x^4 = 144 \iff x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

គេបាន $y = x^3 = (2\sqrt{3})^3 = 24\sqrt{3}$

នាំឱ្យ $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}+24\sqrt{3}}{2} = \dfrac{26\sqrt{3}}{2} = 13\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{x+y}{2} = 13\sqrt{3}}$

លំហាត់ទី ៣៤. បើ $R_n = \dfrac{1}{2}(a^n + b^n)$ ដែល $a = 3+2\sqrt{2},\ b = 3-2\sqrt{2}$ និង $n = 0,1,2,3,4,\dots$ គេបាន R_{12345} ជាចំនួនគត់។ ចូររកលេខខ្ទង់រាយនៃ R_{12345} ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $R_n = \dfrac{1}{2}(a^n + b^n)$

នាំឱ្យ $(a+b)R_n = \dfrac{1}{2}(a+b)(a^n+b^n) = \dfrac{1}{2}(a^{n+1}+b^{n+1}) + \dfrac{1}{2}ab(a^{n-1}+b^{n-1})$

$= R_{n+1} + abR_{n-1}$

ដោយ $a+b = 6$ និង $ab = 1$ គេបាន $6R_n = R_{n+1} + R_{n-1} \iff R_{n+1} = 6R_n - R_{n-1}$

គេមាន $R_0 = 1$ និង $R_1 = 3$ នោះលេខខ្ទង់រាយនៃ $R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, \dots$ គឺ $7,9,7,7,7,1,3,7,9,\dots$ រៀងគ្នា។

គេសង្កេតឃើញថា R_n និង R_{n+6} មានលេខខ្ទង់រាយដូចគ្នាចំពោះចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n ។

គេបាន $R_3, R_9, \dots, R_{12345}$ មានលេខខ្ទង់រាយ 9 ដូចគ្នា ព្រោះ $12345 = 3 + 6 \cdot 2057$

ដូចនេះ $\boxed{\text{លេខខ្ទង់រាយនៃ } R_{12345} \text{ គឺ } 9}$

លំហាត់ទី ៣៥. បង្ហាញថា $z(1-z)(1+z+z^2)(1+z+z^3)(z+z^5) = z^2-1$ ដែល $z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5} \Rightarrow z^5=(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ នាំឲ្យ $z^6=z$ ។

គេបាន $z(1-z)(1+z+z^2)(1+z+z^3)(z+z^5)$

$=z(1-z^3)(1+z+z^3)(z+1)$

$=z(1+z+z^3-z^3-z^4-z^6)(z+1)$

$=z(1+z-z^4-z)(z+1)$

$=(z-z^5)(z+1)$

$=(z-1)(z+1)$

$=z^2-1$

ដូចនេះ $\boxed{z(1-z)(1+z+z^2)(1+z+z^3)(z+z^5)=z^2-1}$ ។

លំហាត់ទី ៣៦. គេឲ្យ $S=\underbrace{111\ldots1}_{2n\text{ ដងនៃលេខ}1}+\underbrace{444\ldots4}_{n\text{ ដងនៃលេខ}4}+1$ ។ បង្ហាញថា S ជាការេនៃចំនួនគត់។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $S=\underbrace{111\ldots1}_{2n\text{ ដងនៃលេខ}1}+\underbrace{444\ldots4}_{n\text{ ដងនៃលេខ}4}+1$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{9}(999\ldots9)+\frac{4}{9}(999\ldots9)+1\\
&=\frac{1}{9}\left(10^{2n}-1\right)+\frac{4}{9}\left(10^n-1\right)+1\\
&=\frac{1}{9}\left(10^{2n}-1+4\times10^n-4+9\right)\\
&=\frac{1}{9}\left(10^{2n}+4\times10^n+4\right)\\
&=\frac{1}{9}\left(10^n+2\right)^2\\
&=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2\\
&=\left(\frac{10^n-1+3}{3}\right)^2\\
&=\left(\frac{999\ldots9+3}{3}\right)^2\\
&=(333\ldots3+1)^2\\
&=333\ldots34^2 \qquad (n-1\text{ ដងនៃលេខ }3)
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{S \text{ ជាការេនៃចំនួនគត់}}$

លំហាត់ទី ៣៧. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន
$z = (2018 - i2019)^{2020^n} + (2018 + i2019)^{2020^n}$ ជាចំនួនពិត។

ដំណោះស្រាយ

z ជាចំនួនពិតលុះត្រាតែ $z = \bar{z}$ ។ គេមាន $z = (2018 - i2019)^{2020^n} + (2018 + i2019)^{2020^n}$

នាំឲ្យ $$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{(2018 - i2019)^{2020^n} + (2018 + i2019)^{2020^n}} \\ &= \overline{(2018 - i2019)^{2020^n}} + \overline{(2018 + i2019)^{2020^n}} \\ &= (\overline{2018 - i2019})^{2020^n} + (\overline{2018 + i2019})^{2020^n} \\ &= (2018 + i2019)^{2020^n} + (2018 - i2019)^{2020^n} \\ &= z\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{z = (2018 - i2019)^{2020^n} + (2018 + i2019)^{2020^n} \text{ ជាចំនួនពិត}}$

លំហាត់ទី ៣៨. គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{a}, \vec{b}$ និង $\vec{c}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \neq \vec{0}$ ។
បង្ហាញថា $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

គេមាន $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \neq \vec{0}$។

ដោយ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$

ឬ $\vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$ នាំឲ្យ $\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{0}$

នោះគេបានវ៉ិចទ័រ $\vec{b}$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{a} + \vec{c}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរគ្នា នាំឲ្យមានចំនួនស្កាលែ $\lambda \in \mathbb{R}$ ដែល $\vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{c})$ (1) ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ ស្រាយដូចគ្នាគេបាន $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$ (2) ។

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$ ឬ $\vec{c} \times (\vec{a} + \lambda(\vec{a} + \vec{c})) = \vec{0}$

$\vec{c} \times ((1 + \lambda)\vec{a} + \lambda\vec{c}) = \vec{0}$ នាំឲ្យ $(1 + \lambda)\vec{c} \times \vec{a} + \lambda\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$ ឬ $(1 + \lambda)\vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$ ព្រោះ $\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$

ដោយ $\vec{c} \times \vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ។

តាម (1) គេបាន $\vec{b} = -\vec{a} - \vec{c}$ នាំឲ្យ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}}$

លំហាត់ទី ៣៩. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល
$z=\dfrac{(2\sqrt{3}+2i)^8}{(1-i)^6}+\dfrac{(1+i)^6}{(2\sqrt{3}-2i)^8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន
$$\begin{aligned}
z &= \frac{(2\sqrt{3}+2i)^8}{(1-i)^6}+\frac{(1+i)^6}{(2\sqrt{3}-2i)^8}\\
&= \frac{4^8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)^8}{\sqrt{2}^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6}+\frac{\sqrt{2}^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6}{4^8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)^8}\\
&= \frac{2^{16}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^8}{2^3\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^6}+\frac{2^3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^6}{2^{16}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^8}\\
&= \frac{2^{13}\left(\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{6\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{6\pi}{4}\right)}+\frac{\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}}{2^{13}\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{6}\right)\right)}\\
&= \frac{2^{13}\left[\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right]}{\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}+\frac{\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}}{2^{13}\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]}\\
&= 2^{13}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)\right]\\
&\qquad+\frac{1}{2^{13}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]\\
&= 2^{13}\left(\cos\frac{17\pi}{6}+i\sin\frac{17\pi}{6}\right)+\frac{1}{2^{13}}\left(\cos\frac{17\pi}{6}+i\sin\frac{17\pi}{6}\right)\\
&= \left(2^{13}+\frac{1}{2^{13}}\right)\left(\cos\frac{17\pi}{6}+i\sin\frac{17\pi}{6}\right)\\
&= \left(2^{13}+\frac{1}{2^{13}}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{|z|=2^{13}+\frac{1}{2^{13}} \text{ និង } \arg(z)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}}$

លំហាត់ទី ៤០. គណនាផលសងរួម d នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ដោយដឹងថាបើគេថែម 3 លើផលសងរួម នោះផលបូក n តួដំបូងកើនឡើងពីរដង ហើយបើតួទីមួយកើនឡើងបួនដង នោះផលបូក n តួដំបូងកើនឡើងពីរដងដែរ។

ដំណោះស្រាយ

តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n)

នោះគេបាន $S_n=\dfrac{n}{2}(u_1+u_n)=\dfrac{n}{2}[2u_1+(n-1)d]$ (1)

បើគេថែម 3 លើផលសងរួម នោះផលបូក n តួដំបូងកើនឡើងពីរដង នោះតាម (1) គេបាន

$$\frac{n}{2}[2u_1+(n-1)(d+3)]=2\times\frac{n}{2}[2u_1+(n-1)d]$$

នាំឲ្យ $2u_1+(n-1)(d+3)=4u_1+2(n-1)d$

គេបាន $2u_1=(n-1)(3-d)$ (2) ។

ម្យ៉ាងទៀត បើតួទីមួយកើនឡើងបួនដង នោះផលបូក n តួដំបូងកើនឡើងពីរដង នោះតាម (1) គេបាន

$\frac{n}{2}\left[2(4u_1)+(n-1)d\right]=2\times\frac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]$ គេបាន $4u_1=(n-1)d$ (3) ។

យក (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន $2(n-1)(3-d)=(n-1)d\Rightarrow d=2\,,\,n>1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{d=2}$

លំហាត់ទី ៤១. គេមានត្រីកោណ ABC និង A,B,C ជាមុំក្នុងត្រីកោណនេះ។

ក. បើគេដឹងថា $\sin A+\sin B+\sin C=1$ គណនា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-\cos A\cos B\cos C$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

គេមាន

$$\begin{aligned}1&=\sin A+\sin B+\sin C\\&=\sin A+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\&=\sin A+2\sin\frac{\pi-A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\qquad (\text{ព្រោះ}A+B+C=\pi\Rightarrow B+C=\pi-A)\\&=\sin A+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}\\&=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\&=2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\\&=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)\\&=2\cos\frac{A}{2}\left(2\cos\frac{\frac{B+C+B-C}{2}}{2}\cos\frac{\frac{B+C-B+C}{2}}{2}\right)\\&=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

គេបាន $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4}}$

ខ. បង្ហាញថា $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-\cos A\cos B\cos C$

គេមាន $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=\frac{1+cos2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\frac{1+\cos 2C}{2}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos 2A+2\cos\frac{2B+2C}{2}\cos\frac{2B-2C}{2}\right)$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2A+\cos(B+C)\cos(B-C)\right]$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[2\cos^2A-1+2\cos(\pi-A)\cos(B-C)\right]$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[2\cos^2 A - 2\cos A\cos(B-C)\right]$

$= 1 + \cos A\left[\cos A - \cos(B+C)\right]$

$= 1 + \cos A\left[-\cos(\pi - A) - \cos(B-C)\right]$

$= 1 - \cos A\left[\cos(B+C) + \cos(B-C)\right]$

$= 1 - \cos A\left(2\cos\frac{B+C+B-C}{2}\cos\frac{B+C-B+C}{2}\right)$

$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

ដូចនេះ $\boxed{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \cos A\cos B\cos C}$

លំហាត់ទី ៤២. គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា និងខុសពីសូន្យ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ ។ បង្ហាញថា $|abc| = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$

ចំពោះ $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c}$ គេបាន $a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b-c}{ab}$

$a - b = \frac{b-c}{bc} \qquad (1)$ ស្រាយដូចគ្នាគេបាន

$b - c = \frac{c-a}{ac} \qquad (2)$

$c - a = \frac{a-b}{ab} \qquad (3)$

យក $(1)\times(2)\times(3)$ គេបាន

$(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{b-c}{bc} \times \frac{c-a}{ac} \times \frac{a-b}{ab} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(abc)^2}$

ដោយ a, b, c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា និងខុសពីសូន្យ

គេបាន $1 = \frac{1}{(abc)^2} \Longrightarrow (abc)^2 = 1 \Rightarrow |abc| = 1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{|abc| = 1}$

លំហាត់ទី ៤៣. រកគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

គេមាន $\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}$ តាង $a = 2^x$ និង $b = 3^x$ ។ គេបាន

$\frac{a^3 + b^3}{a^2 b + ab^2} = \frac{7}{6}$ សមមូល $\frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{ab(a+b)} = \frac{7}{6}$

$\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab}=\dfrac{7}{6}$ នាំឲ្យ $6(a^2-ab+b^2)=7ab \Leftrightarrow 6a^2-13ab+6b^2=0$

$(2a-3b)(3a-2b)=0$ នាំឲ្យ $2a=3b$ ឬ $3a=2b$ ។

ករណី $2a=3b \Leftrightarrow 2\times 2^x=3\times 3^x \Leftrightarrow 2^{x+1}=3^{x+1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}=1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$

គេបាន $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ។

ករណី $3a=2b \Leftrightarrow 3\times 2^x=2\times 3^x \Leftrightarrow 2^{x-1}=3^{x-1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1}=1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$

គេបាន $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានចម្លើយ } x=-1, x=1}$

លំហាត់ទី ៤៤. គណនា $S=\dfrac{3}{1!+2!+3!}+\dfrac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\dfrac{2019}{2017!+2018!+2019!}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S=\dfrac{3}{1!+2!+3!}+\dfrac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\dfrac{2019}{2017!+2018!+2019!}$

ចំពោះ $\forall k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\dfrac{k+2}{k!\,[1+(k+1)+(k+1)(k+2)]}$

$$=\frac{k+2}{k!(k+2)^2}=\frac{1}{k!(k+2)}$$

គេបាន $\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\dfrac{1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{(k+2)!}$

នាំឲ្យ $S=\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\right)+\left(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2018!}-\dfrac{1}{2019!}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2019!}$

ដូចនេះ $\boxed{S=\dfrac{3}{1!+2!+3!}+\dfrac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\dfrac{2019}{2017!+2018!+2019!}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2019!}}$

លំហាត់ទី ៤៥. គណនាលីមីត

ក. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$ ខ. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\cos x\right)\cdot\frac{1}{x-\frac{\pi}{3}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត

ក. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$

តាង $t=\dfrac{\pi}{2}-x \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-t$

បើ $x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t\longrightarrow 0$

គេបាន
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=\lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\right]$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cot t-\frac{\pi}{2\sin t}\right]$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\frac{\cos t}{\sin t}-\frac{\pi}{2\sin t}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sin t}\left(\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos t-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sin t}\left(\frac{\pi}{2}(\cos t-1)-t\cos t\right)\right]$$
$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{\sin t}\left(-\frac{\pi}{2}\frac{1-\cos t}{t}-t\cos t\right)\right]$$
$$= 1\times\left(-\frac{\pi}{2}\times 0-1\right)=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2\cos x}\right)=-1}$

ខ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\cos x\right)\cdot\frac{1}{x-\frac{\pi}{3}}$

តាង $t=x-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=t+\frac{\pi}{3}$

បើ $x\longrightarrow\frac{\pi}{3}\Rightarrow t\longrightarrow 0$ ។

គេបាន
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\cos x\right)\cdot\frac{1}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{t\to 0}\left[\frac{t+\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\pi}{3}\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right]\times\frac{1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{3t+\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\left(\cos t\cos\frac{\pi}{3}-\sin t\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]\times\frac{1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{3t+\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\left(\frac{\cos t}{2}-\frac{\sqrt{3}\sin t}{2}\right)\right]\times\frac{1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\cos t+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\sin t\right)\times\frac{1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}(1-\cos t)+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\sin t\right]\times\frac{1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\times\frac{\sin t}{t}\right]$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}\times 0+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\times 1$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\cos x\right)\cdot\frac{1}{x-\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}}$

លំហាត់ទី ៤៦. រកគ្រប់តម្លៃ x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់តម្លៃ x

គេមាន $2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1$ តាង $a=2^x$ និង $b=3^x$ ។ គេបាន

$2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1\Leftrightarrow a+b-a^2+ab-b^2=1\Leftrightarrow a^2+b^2-ab-a-b+1=0$

$2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2=0 \Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)=0$

$(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow a=b=1$

គេបាន $2^x=3^x=1 \Leftrightarrow x=0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានចម្លើយ} \quad x=0}$

លំហាត់ទី ៤៧. គេឲ្យ x, y និង z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=2, x^2+y^2+z^2=3$ និង $xyz=4$ គណនា $\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{zx+y-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{zx+y-1}$

គេមាន $x+y+z=2, x^2+y^2+z^2=3, xyz=4$

ដោយ $xy+z-1=xy+(2-x-y)-1=xy-x-y+1$

$$=x(y-1)-(y-1)=(x-1)(y-1)$$

គេបាន $xy+z-1=(x-1)(y-1)$ នាំឲ្យ $\dfrac{1}{xy+z-1}=\dfrac{1}{(x-1)(y-1)}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន

$\dfrac{1}{yz+x-1}=\dfrac{1}{(y-1)(z-1)}$, $\dfrac{1}{zx+y-1}=\dfrac{1}{(z-1)(x-1)}$

គេបាន
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}\\
&=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}\\
&=\frac{z-1+x-1+y-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}\\
&=\frac{x+y+z-3}{(xy-x-y+1)(z-1)}\\
&=\frac{2-3}{xyz-xy-xz+x-yz+y+z-1}\\
&=\frac{-1}{xyz-(xy+yz+zx)+(x+y+z)-1}\\
&=\frac{-1}{4-(xy+yz+zx)+2-1}\\
&=\frac{-1}{5-(xy+yz+zx)}\\
&=\frac{-1}{5-\frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right]}\\
&=\frac{-1}{5-\frac{1}{2}(4-3)}\\
&=\frac{-1}{5-\frac{1}{2}}\\
&=-\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1}{xy+z-1}+\dfrac{1}{yz+x-1}+\dfrac{1}{zx+y-1}=-\dfrac{2}{9}}$

លំហាត់ទី ៤៨. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ដែល $0 \le \theta \le 2\pi$ ។
បង្ហាញថា $\dfrac{2}{1+z} = 1 - i\tan\dfrac{\theta}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\dfrac{2}{1+z} = 1 - i\tan\dfrac{\theta}{2}$

គេមាន $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ដែល $0 \le \theta \le 2\pi$

នាំឲ្យ $1 + z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} + i2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

គេបាន
$$\frac{2}{1+z} = \frac{2}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = 1 - i\tan\frac{\theta}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{2}{1+z} = 1 - i\tan\dfrac{\theta}{2}}$

លំហាត់ទី ៤៩. ក. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n បង្ហាញថា
$$(\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right) ។$$
ខ. ដោយដឹងថា $\sqrt{3} - i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^9 + 16(1+i)x^3 + a + ib = 0$ ។
ចូររកចំនួនពិត a និង b ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} - i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$

គេមាន
$$(\sqrt{3} - i)^n = \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right]^n$$
$$= 2^n\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n$$
$$= 2^n\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^n$$
$$= 2^n\left[\cos\left(-\frac{n\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} - i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)}$

ខ. រកចំនួនពិត a និង b

គេមាន $\sqrt{3} - i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^9 + 16(1+i)x^3 + a + ib = 0$ នាំឱ្យ

$(\sqrt{3} - i)^9 + 16(1+i)(\sqrt{3} - i)^3 + a + ib = 0$

$\Longrightarrow a + ib = -(\sqrt{3} - i)^9 - 16(1+i)(\sqrt{3} - i)^3 \quad (1)$

តាមសំណួរ ក គេបាន

$$(\sqrt{3}-i)^3 = 2^3\left(\cos\frac{3\pi}{6} - i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8(0-i) = -8i$$

$$(\sqrt{3}-i)^9 = \left[(\sqrt{3}-i)^3\right]^3 = (-8i)^3 = -512i^3 = 512i$$

តាម (1) គេបាន $a+ib = -512i - 16(1+i)(-8i) = -512i + 128i - 128 = -128 - 384i$

$\Longleftrightarrow a = -128$ និង $b = -384$

ដូចនេះ $\boxed{a = -128\ ,\ b = -384}$

លំហាត់ទី ៥០. បើ $a > 1, b > 1$ បង្ហាញថា $2(ab+1) > (a+1)(b+1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $S = 2(ab+1) - (a+1)(b+1)$

$= 2ab + 2 - ab - a - b - 1$

$= ab - a - b + 1$

$= a(b-1) - (b-1)$

$= (a-1)(b-1)$

ដោយ $a > 1, b > 1$ នោះ $a-1 > 0, b-1 > 0$

គេបាន $S > 0 \Longrightarrow 2(ab+1) - (a+1)(b+1) > 0$ ឬ $2(ab+1) > (a+1)(b+1)$

ដូចនេះ $\boxed{2(ab+1) > (a+1)(b+1)}$

លំហាត់ទី ៥១. រកគ្រប់ចំនួនពិត x, y, z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y\ ,\ \frac{4y^2}{1+4y^2} = z\ ,\ \frac{4z^2}{1+4z^2} = x$$

ដំណោះស្រាយ

- បើ $x = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow z = 0$

- បើ $x \neq 0 \Longrightarrow y > 0 \Longrightarrow z > 0 \Longrightarrow x > 0$

  ហេតុនេះ គេបាន $x > 0, y > 0, z > 0$

  គុណសមីការទាំងបីចូលគ្នាគេបាន

  $$\frac{64x^2y^2z^2}{(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)} = xyz$$

  ឬ $(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2) = 64xyz \quad (1)$

  តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន

  $1+4x^2 \geq 4x\ ,\ 1+4y^2 \geq 4y\ ,\ 1+4z^2 \geq 4z$

នាំឱ្យ $(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2) \geq 64xyz$

តាម (1) សមភាពកើតមាននៅពេលដែល

$1+4x^2 = 4x$, $1+4y^2 = 4y$, $1+4z^2 = 4z$

ចំពោះ $1+4x^2 = 4x \Longrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

ដូនគ្នាដែរ គេបាន $y = \dfrac{1}{2}$, $z = \dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{(x,y,z) = (0,0,0) \text{ ឬ } \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$

លំហាត់ទី ៥២. ប្រៀបធៀបចំនួន $\log_3 108$, $\log_4 192$, $\log_5 500$, $\log_6 1080$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $108 = 3^3 \times 4 \Longrightarrow \log_3 108 = 3 + \log_3 4$

$192 = 4^3 \times 3 \Longrightarrow \log_4 192 = 3 + \log_4 3$

$500 = 5^3 \times 4 \Longrightarrow \log_5 500 = 3 + \log_5 4$

$1080 = 6^3 \times 5 \Longrightarrow \log_6 1080 = 3 + \log_6 5$

ហេតុនេះ គេប្រៀបធៀបតែ $\log_3 4$, $\log_4 3$, $\log_5 4$, $\log_6 5$

ចំពោះចំនួនគត់ $n \geq 2$ គេមាន $n^2 > (n-1)(n+1)$

នាំឱ្យ $2 > \log_n(n-1) + \log_n(n+1) > 2\sqrt{\log_n(n-1)\cdot\log_n(n+1)}$

$$1 > \log_n(n-1)\cdot\log_n(n+1) = \frac{\log_n(n-1)}{\log_{n+1} n}$$

$$\log_n(n-1) < \log_{n+1} n$$

គេបាន $\log_4 3 < \log_5 4 < \log_6 5 < 1 < \log_3 4$

នាំឱ្យ $\log_4 192 < \log_5 500 < \log_6 1080 < \log_3 108$

ដូចនេះ $\boxed{\log_4 192 < \log_5 500 < \log_6 1080 < \log_3 108}$

លំហាត់ទី ៥៣. បង្ហាញថា $\dfrac{2}{x^2-1} + \dfrac{4}{x^2-4} + \dfrac{6}{x^2-9} + \cdot + \dfrac{20}{x^2-100}$

$$= 11\left[\frac{1}{(x-1)(x+10)} + \frac{1}{(x-2)(x+9)} + \cdots + \frac{1}{(x-10)(x+1)}\right]$$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$

$\dfrac{4}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}$

....

....

$$\frac{20}{x^2-100}=\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+10}$$

គេបាន $\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\cdots+\frac{20}{x^2-100}$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+10}$$

$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-10}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\frac{11}{(x-1)(x+10)}+\frac{11}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{11}{(x-10)(x+1)}$$

$$=11\left[\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right]$$

លំហាត់ទី ៥៤. គេមាន a,b,c,d ជាឫសនៃសមីការ $x^4-\pi x-\sqrt{2019}=0$ ។ ចូររកសមីការដែលមានឫស $\frac{a+b+c}{d^2}$, $\frac{b+c+d}{a^2}$, $\frac{c+d+a}{b^2}$, $\frac{d+a+b}{c^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន a,b,c,d ជាឫសនៃសមីការ $x^4-\pi x-\sqrt{2019}=0$

គេបាន
$$\begin{cases} a+b+c+d=0 & (1)\\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=0 & (2)\\ abc+abd+acd+bcd=\pi & (3)\\ abcd=-\sqrt{2019} & (4)\end{cases}$$

តាង $u=\frac{a+b+c}{d^2}$, $v=\frac{b+c+d}{a^2}$, $w=\frac{c+d+a}{b^2}$, $t=\frac{d+a+b}{c^2}$

តាម (1) គេបាន

$$u=\frac{-d}{d^2}=-\frac{1}{d}\quad,\quad v=\frac{-a}{a^2}=-\frac{1}{a}\quad,\quad w=\frac{-b}{b^2}=-\frac{1}{b}\quad,\quad t=\frac{-c}{c^2}=-\frac{1}{c}$$

នាំឱ្យ $u+v+w+t=-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=-\frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd}=\frac{\pi}{\sqrt{2019}}$

$$uv+uw+ut+vw+vt+wt=\frac{1}{ad}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$$
$$=\frac{bc+ac+ab+cd+bd+ad}{abcd}=0$$

$$uvw+uvt+uwt+vwt=-\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{bcd}+\frac{1}{abc}\right)$$
$$=\frac{a+b+c+d}{abcd}=0$$

$$uvwt = \frac{1}{abcd} = -\frac{1}{\sqrt{2019}}$$

ដូវនេះសមីការដែលមានឫស u, v, w, t មានរាង

$$x^4 - \frac{\pi}{\sqrt{2019}}x^3 + 0x^2 - 0x - \frac{1}{\sqrt{2019}} = 0 \quad \text{ឬ} \quad \boxed{\sqrt{2019}x^4 - \pi x^3 - 1 = 0}$$

លំហាត់ទី ៥៥. រកសមីការដែលមានដឺក្រេតូចបំផុត ហើយមានមេគុណជាចំនួនគត់ និងមាន $\sqrt{19} + \sqrt{99}$ ជាឫសមួយរបស់វា។

ដំណោះស្រាយ

តាង p, q ជាចំនួនសនិទានដែល $\sqrt{p}, \sqrt{q}$ និង $\sqrt{pq}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

យក $t = \pm\sqrt{p} \pm \sqrt{q} \Longrightarrow t \mp \sqrt{p} = \pm\sqrt{q}$

គេបាន $(t \mp \sqrt{p})^2 = (\pm\sqrt{q})^2 \Longrightarrow t^2 \mp 2\sqrt{p}t + p = q$

$$t^2 + (p - q) = \pm 2\sqrt{p}t$$

$$[t^2 + (p - q)]^2 = (\pm 2\sqrt{p})^2$$

$$t^4 + 2(p - q)t + (p - q)^2 = 4pt^2$$

$t^4 - 2(p + q)t^2 + (p - q)^2 = 0$

តាង $f(x) = x^4 - 2(p + q)x^2 + (p - q)^2$ មានឫស $x = \pm\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$

តាង $g(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេតូចបំផុតដែលមានមេគុណជាចំនួនពិត ហើយមានឫស $t_1 = \sqrt{p} + \sqrt{q}$

ធ្វើប្រមាណវិធីចែករវាង $f(x)$ និង $g(x)$ គេបាន $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ ដែល $q(x)$ ជាផលចែក និង $r(x)$ ជាសំណល់។

គេបាន $r(t_1) = f(t_1) - q(t_1) \cdot g(t_1) = 0$ នោះ $r(x)$ មានឫស t_1 មានន័យថា $r(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេតូចជាង $g(x)$ នាំឱ្យ $r(x) = 0$

គេបាន $f(x) = q(x) \cdot g(x)$

- បើ $g(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី១ គេបាន $g(x) = a(x - t_1),\ a \neq 0$ ជាករណីមិនពិតព្រោះ t_1 ជាចំនួនអសនិទាន។

- បើ $q(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី១ គេបាន $q(x) = a(x - t),\ a \neq 0$ ជា t ឫសនៃ $f(x)$

  គេបានករណីនេះក៏មិនពិតដែរ ព្រោះ t ជាចំនួនអសនិទាន នោះ $g(x)$ មិនអាចជាពហុធាដឺក្រេទី៣ទេ។

- បើ $g(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី២ គេបាន $g(x) = a(x - t_1)(x - t_2),\ a \neq 0$ ដែល t_2 ជាឫសនៃ $f(x)$។

  គេបាន $t_1 + t_2$ និង t_1t_2 ជាចំនួនសនិទាន។

  តែបើ $t_2 = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ ឬ $t_2 = -\sqrt{p} + \sqrt{q}$ ឬ $t_2 = \sqrt{p} - \sqrt{q}$ គេបាន $t_1 + t_2$ ជាចំនួនអសនិទាន។

  បើ $t_2 = -\sqrt{p} - \sqrt{q}$ គេបាន t_1t_2 ជាចំនួនអសនិទាន។ នាំឱ្យ $g(x)$ មិនអាចជាពហុជាដឺក្រេទី២ទេ។

ដូចនេះ គេបាន $g(x) = af(x)$ ចំពោះចំនួនគត់ $a \neq 0$

ក្នុងករណីនេះ គេយក $p = 19, q = 99$

នាំឱ្យ $g(x) = af(x) = a[x^2 - 2(19+99)x^2 + (19-99)^2] = a(x^4 - 236x^2 + 6400)$

ដូចនេះ សមីការដែលមានដឺក្រេតូចបំផុត ហើយមានមេគុណជាចំនួនគត់ និងមានឫស $\sqrt{19}+\sqrt{99}$ គឺ $\boxed{x^4 - 236x^2 + 6400 = 0}$

លំហាត់ទី ៥៦. បើ a, b, c, x ជាចំនួនពិត ដែល $a+b+c \neq 0$ និង

$$\frac{xb+(1-x)c}{a} = \frac{xc+(1-x)a}{b} = \frac{xa+(1-x)b}{c}$$

បង្ហាញថា $a = b = c$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\dfrac{xb+(1-x)c}{a} = \dfrac{xc+(1-x)a}{b} = \dfrac{xa+(1-x)b}{c} = k$

គេបាន $\begin{cases} xb+(1-x)c = ka & (1) \\ xc+(1-x)a = kb & (2) \\ xa+(1-x)b = kc & (3) \end{cases}$

យក $(1)+(2)+(3)$ គេបាន $a+b+c = k(a+b+c)$

ដោយ $a+b+c \neq \Longrightarrow k = 1$

គេបាន $\dfrac{xb+(1-x)c}{a} = \dfrac{xc+(1-x)a}{b} = \dfrac{xa+(1-x)b}{c} = 1$

នាំឱ្យ $\dfrac{a[xb+(1-x)c]}{a^2} = \dfrac{b[xc+(1-x)a]}{b^2} = \dfrac{c[xa+(1-x)b]}{c^2} = 1$

គេបាន $\begin{cases} xab+(1-x)ca = a^2 & (4) \\ xbc+(1-x)ab = b^2 & (5) \\ xca+(1-x)bc = c^2 & (6) \end{cases}$

យក $(4)+(5)+(6)$ គេបាន $ab+bc+ca = a^2+b^2+c^2$

ឬ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b = c$

ដូចនេះ $\boxed{a = b = c}$

លំហាត់ទី ៥៧. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y, z ដែល $x \neq y, y \neq z$ បង្ហាញថា

$$\frac{x(y+z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y(z+x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{z(x+y)}{(z-x)(z-y)} = -1 \quad ។$$

ដំណោះស្រាយ

តាង $S = \dfrac{x(y+z)}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y(z+x)}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z(x+y)}{(z-x)(z-y)}$

គេបាន $S=-\frac{x(y+z)}{(x-y)(z-x)}-\frac{y(z+x)}{(y-z)(x-y)}-\frac{z(x+y)}{(z-x)(y-z)}$

$$=-\left[\frac{x(y+z)}{(x-y)(z-x)}+\frac{y(z+x)}{(y-z)(x-y)}+\frac{z(x+y)}{(z-x)(y-z)}\right]$$

$$=-\frac{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$=-\frac{xy^2-xz^2+yz^2-x^2y+x^2z-y^2z}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$=-\frac{xy(y-x)+z^2(y-x)+z(x^2-y^2)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$=-\frac{(y-x)(xy+z^2-zx-zy)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$$

$$=\frac{xy+z^2-zx-zy}{(y-z)(z-x)}=\frac{x(y-z)-z(y-z)}{(y-z)(z-x)}$$

$$=\frac{(y-z)(x-z)}{(y-z)(z-x)}=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{x(y+z)}{(x-y)(x-z)}+\frac{y(z+x)}{(y-z)(y-x)}+\frac{z(x+y)}{(z-x)(z-y)}=-1}$

លំហាត់ទី ៥៨. តាង a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

តាង $\lambda=\min\{a^3+a^2bc,b^2+ab^2c,c^3+abc^2\}$ ។ បង្ហាញថាសមីការ $x^2+x+4\lambda=0$ មានឫសពីរជាចំនួនពិត។

ដំណោះស្រាយ

យើងនឹងស្រាយតាមសំណើផ្ទុយពីការពិត

ឧបមាថាសមីការ $x^2+x+4\lambda=0$ មិនមានឫសជាចំនួនពិត។

គេបាន $\Delta=1-16\lambda<0\Longrightarrow\lambda>\frac{1}{16}$

នាំឱ្យ $\begin{cases}a^3+a^2bc>\frac{1}{16}\\ b^3+ab^2c>\frac{1}{16}\\ c^3+abc^2>\frac{1}{16}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}a^2(a+bc)>\frac{1}{16} & (1)\\ b^2(b+ac)>\frac{1}{16} & (2)\\ c^2(c+ab)>\frac{1}{16} & (3)\end{cases}$

យក $(1)\times(2)\times(3)$ គេបាន $a^2b^2c^2(a+bc)(b+ac)(c+ab)>\frac{1}{16^3}\quad(4)$

ដោយ $a+b+c=1\Longrightarrow a+bc=1-b-c+bc=(1-b)(1-c)$

ដូចគ្នាដែរ គេបាន $b+ac=(1-a)(1-c)$, $c+ab=(1-a)(1-b)$

នោះ (4) ក្លាយជា $a^2b^2c^2(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2 > \frac{1}{16^3}$ (5)

ម្យ៉ាងទៀត a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ហើយ $a+b+c=1 \Longrightarrow 0<a,b,c<1$

គេមាន $a(1-a)=a-a^2=\frac{1}{4}-\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$

សមភាពកើតមាននៅពេលដែល $a=\frac{1}{2}$ ។

គេបាន
$$\begin{aligned} a(1-a) &\le \frac{1}{4} \Longrightarrow a^2(1-a)^2 \le \frac{1}{16} \\ b(1-b) &\le \frac{1}{4} \Longrightarrow b^2(1-b)^2 \le \frac{1}{16} \\ c(1-c) &\le \frac{1}{4} \Longrightarrow c^2(1-c)^2 \le \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow a^2b^2c^2(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2 \le \frac{1}{16^3}$ (6)

តាម (5) និង (6)

គេបាន $\begin{cases} a^2b^2c^2(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2 > \frac{1}{16^3} \\ a^2b^2c^2(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2 \le \frac{1}{16^3} \end{cases}$ ផ្ទុយពីការពិត។

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការ } x^2+x+4\lambda=0 \text{ ឫសជាចំនួនពិត}}$

លំហាត់ទី ៥៩. ចំពោះចំនួនពិតខុសពីសូន្យ x,y,z ដែល $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ ។
បង្ហាញថា $\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=3$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Longrightarrow xy+yz+zx=0$

នាំឱ្យ $\frac{yz}{x^2}=\frac{-zx-xy}{x^2}=-\frac{y}{x}-\frac{z}{x}$

ស្រាយដូចគ្នា $\frac{zx}{y^2}=-\frac{x}{y}-\frac{z}{y}$, $\frac{xy}{z^2}=-\frac{x}{z}-\frac{y}{z}$

គេបាន
$$\begin{aligned} \frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2} &= -\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\right) \\ &= -\left[x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right] \\ &= -\left[x\left(-\frac{1}{x}\right)+y\left(-\frac{1}{y}\right)+z\left(-\frac{1}{z}\right)\right] \\ &= 3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=3}$

លំហាត់ទី ៦០. រកចំនួនគត់ a និង b ដែលនាំឱ្យ x^2-x-1 ចែកដាច់ $ax^{17}+bx^{16}+1$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការ $x^2-x-1=0$ មានឫស $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

តាង $p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $q=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ នាំឱ្យ $p+q=1$ និង $pq=-1$

ដោយ x^2-x-1 ចែកដាច់ $ax^{17}+bx^{16}+1$ នាំឱ្យ p និង q ក៏ជាឫសនៃសមីការ $ax^{17}+bx^{16}+1=0$

គេបាន $\begin{cases} ap^{17}+bp^{16}+1=0 \\ aq^{17}+bq^{16}+1=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ap^{17}+bp^{16}=-1 & (1) \\ aq^{17}+bq^{16}=-1 & (2) \end{cases}$

យក $(1)\times q^{16}$ និង $(2)\times p^{16}$ គេបាន

$$\begin{cases} ap^{17}q^{16}+bp^{16}q^{16}=-q^{16} \\ aq^{17}p^{16}+bq^{16}p^{16}=-p^{16} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ap+b=-q^{16} & (3) \\ aq+b=-p^{16} & (4) \end{cases} \quad \text{ព្រោះ } pq=-1$$

យក $(3)-(4)$ គេបាន

$a(p-q)=p^{16}-q^{16}=(p^8+q^8)(p^4+q^4)(p^2+q^2)(p+q)(p-q)$

នាំឱ្យ $a=(p^8+q^8)(p^4+q^4)(p^2+q^2)(p+q)$

ដោយ $p+q=1$ និង $pq=1$ គេបាន

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=1+2=3$

$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2=9-2=7$

$p^8+q^8=(p^4+q^4)^2-2p^4q^4=49-2=47$

នាំឱ្យ $a=47\times 7\times 3\times 1=987$

យក $(3)+(4)$ គេបាន

$2b=-(p^{16}+q^{16})-a(p+q)=-\left[(p^8+q^8)^2-2p^8q^8\right]-a(p+q)=-3194$

នាំឱ្យ $b=-1597$

ដូចនេះ $\boxed{a=987\ ,\ b=-1597}$

លំហាត់ទី ៦១. បើ p,q,r ជាឫសនៃសមីការ $x^3-3px^2+3q^2x-r^3=0$ ។

បង្ហាញថា $p=q=r$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន p,q,r ជាឫសនៃសមីការ $x^3-3px^2+3q^2x-r^3=0$

នាំឱ្យ $\begin{cases} p+q+r=3p & (1) \\ pq+qr+rp=3q^2 & (2) \\ pqr=r^3 & (3) \end{cases}$

- តាម (3) បើ $p = 0 \Longrightarrow r = 0 \Longrightarrow q = 0$ តាម (1)

  គេបាន បើ $p = 0$ នោះ $p = q = r = 0$

- តាម (3) បើ $q = 0 \Longrightarrow r = 0 \Longrightarrow p = 0$ តាម (1)

  គេបាន បើ $q = 0$ នោះ $p = q = r = 0$

- តាម (2) បើ $r = 0 \Longrightarrow q(p - 3q) = 0 \Longrightarrow q = 0 \vee p = 3q$

  - ករណី $q = 0$ តាម (1) គេបាន $p = 0$ នាំឱ្យ $p = q = r = 0$

  - ករណី $p = 3q$ តាម (1) គេបាន $q = 0$ នាំឱ្យ $p = q = r = 0$

    គេបាន បើ $r = 0$ នោះ $p = q = r = 0$

  គេសង្កេតឃើញថា បើមានមួយក្នុងចំណោមចំនួន p, q, r ស្មើសូន្យ នាំឱ្យចំនួនទាំងបីនេះស្មើសូន្យ។

- បើ p, q, r ខុសពីសូន្យ តាម (3) គេបាន $pq = r^2 \quad (4)$

  តាម (2) និង (4) គេបាន $r^2 + r(p + q) = 3q^2 \Longrightarrow r(p + q + r) = 3q^2 \quad (5)$

  តាម (1) និង (5) គេបាន $3pr = 3q^2 \Longleftrightarrow pr = q^2 \quad (6)$

  យក $(4) \div (6)$ គេបាន $\dfrac{pq}{pr} = \dfrac{r^2}{q^2} \Longrightarrow q^3 = r^3 \Longrightarrow q = r \quad (7)$

  តាម (4) និង (7) គេបាន $p = r$

  ក្នុងករណីនេះ គេបាន $p = q = r$

ដូចនេះ $\boxed{p = q = r}$

លំហាត់ទី ៦២. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ $u_n = \left\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \right\rfloor$ ។
បង្ហាញថា $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ ជាចំនួនគត់គូ រួចទាញថា u_n ជាចំនួនគត់សេស។

ដំណោះស្រាយ

- បង្ហាញថា $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ ជាចំនួនគត់គូ

  តាង $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ និង $\beta = 2 - \sqrt{3}$ នាំឱ្យ $\alpha + \beta = 4$ និង $\alpha\beta = 1$

  យើងដោះស្រាយតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

  - បើ $n = 1 : \alpha + \beta = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$ ជាចំនួនគត់គូ

  - ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺ $\alpha^k + \beta^k$ ជាចំនួនគត់គូ

  - យើងនឹងស្រាយថាពិតដល់ $n = k + 1$

    គេមាន $\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} = (\alpha^k + \beta^k)(\alpha + \beta) - \alpha^k\beta - \alpha\beta^k$

$$= (\alpha^k + \beta^k)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1})$$

ដោយ $\alpha^k + \beta^k$ និង $\alpha^{k-1} + \beta^{k-1}$ ជាចំនួនគត់គូ

តាង $\alpha^k + \beta^k = 2p$ និង $\alpha^{k-1} + \beta^{k-1} = 2q$ ដែល $p, q \in \mathbb{N}$ និង $p > q$

គេបាន $\alpha^{k+1}+\beta^{k+1} = (2p)(4)-(1)(2q) = 8p-2q = 2(4p-q) = 2r$ ជាចំនួនគត់គូ ដែល $r = 4p-q \in \mathbb{N}$

នោះ $\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$ ជាចំនួនគត់គូ

ដូចនេះ $\boxed{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \text{ ជាចំនួនគត់គូ}}$

- ទាញថា u_n ជាចំនួនគត់សេស

គេមាន $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ ជាចំនួនគត់គូ

តាង $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2s$ ដែល $s \in \mathbb{N}$

គេបាន $(2+\sqrt{3})^n = 2s - (2-\sqrt{3})^n$

នាំឱ្យ $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor = \left\lfloor 2s - (2-\sqrt{3})^n \right\rfloor = \lfloor 2s \rfloor + \left\lfloor -(2-\sqrt{3})^n \right\rfloor$

ដោយ $0 < 2-\sqrt{3} < 1 \Longrightarrow 0 < (2-\sqrt{3})^n < 1 \Longrightarrow -1 < -(2-\sqrt{3})^n < 0$

$\Longrightarrow \left\lfloor -(2-\sqrt{3})^n \right\rfloor = -1$

គេបាន $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor = \lfloor 2s \rfloor + \left\lfloor -(2-\sqrt{3})^n \right\rfloor = 2s + (-1) = 2s - 1$ ជាចំនួនគត់សេស

ដូចនេះ $\boxed{u_n \text{ ជាចំនួនគត់សេស}}$

លំហាត់ទី ៦៣. គេឱ្យ $a_n = 3n + \sqrt{n^2-1}$ និង $b_n = 2\left(\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2+n}\right)$
ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ បង្ហាញថា
$\sqrt{a_1-b_1} + \sqrt{a_2-b_2} + \cdots + \sqrt{a_{49}-b_{49}} = A + B\sqrt{2}$ ចំពោះចំនួនគត់ A និង B ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a_n = 3n + \sqrt{n^2-1} \Longrightarrow a_n^2 = \left(3n + \sqrt{n^2-1}\right)^2 = 9n^2 + 6n\sqrt{n^2-1} + n^2 - 1$

$$= 10n^2 - 1 + 6n\sqrt{n^2-1}$$

និង $b_n = 2\left(\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2+n}\right)$

$\Longrightarrow b_n^2 = 4\left(n^2 - n + 2\sqrt{n^4-n^2} + n^2 + n\right) = 8(n^2 + n\sqrt{n^2-1})$

គេបាន $a_n^2 - b_n^2 = 10n^2 - 1 + 6n\sqrt{n^2-1} - 8\left(n^2 + n\sqrt{n^2-1}\right)$

$$= 10n^2 - 1 + 6n\sqrt{n^2-1} - 8n^2 - 8n\sqrt{n^2-1}$$

$$= 2n^2 - 1 - 2n\sqrt{n^2-1}$$

$$= \left(n - \sqrt{n^2-1}\right)^2 > 0$$

នាំឱ្យ $a_n^2 - b_n^2 > 0 \Longrightarrow (a_n+b_n)(a_n-b_n) > 0 \Longrightarrow a_n - b_n > 0$ ព្រោះ $a_n + b_n > 0$

គេមាន $a_n - b_n = 3n + \sqrt{n^2-1} - 2\left(\sqrt{n^2-n} + \sqrt{n^2+n}\right)$

$$= 3n + \sqrt{n^2-1} - 2\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)$$

ពិនិត្យ $\left[2\sqrt{n} - \left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)\right]^2$

$$= 4n - 4\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right) + n - 1 + 2\sqrt{n^2-1} + n + 1$$
$$= 6n + 2\sqrt{n^2-1} - 4\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)$$
$$= 2\left[3n + \sqrt{n^2-1} - 2\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)\right]$$

គេបាន $a_n - b_n = 3n + \sqrt{n^2-1} - 2\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(3n + \sqrt{n^2-1} - 2\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{n} - \left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)\right]^2$$

នាំឱ្យ $\sqrt{a_n - b_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\sqrt{n} - \left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\right)\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) - \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]$$

គេបាន $\sum_{k=1}^{49}\sqrt{a_k - b_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{49}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{49}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{49}-0\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{50}-\sqrt{1}\right)$$
$$= \frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$= 4\sqrt{2} - 5 = -5 + 4\sqrt{2} = A + B\sqrt{2}$ ដែល $A = -5$, $B = 4$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{a_1 - b_1} + \sqrt{a_2 - b_2} + \cdots + \sqrt{a_{49} - b_{49}} = A + B\sqrt{2} \text{ ដែល } A = -5\,,\ B = 4}$

លំហាត់ទី ៦៤. គេឱ្យ $a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ បង្ហាញថា $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{20}}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{n^2 + (n+1)^2}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2 + (n-1)^2}{n^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{n^2 + (n+1)^2} + \sqrt{n^2 + (n-1)^2}}{n}$$

នាំឱ្យ $\frac{1}{a_n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + (n+1)^2} + \sqrt{n^2 + (n-1)^2}}$

$$= \frac{n\left[\sqrt{n^2 + (n+1)^2} - \sqrt{n^2 + (n-1)^2}\right]}{n^2 + (n+1)^2 - n^2 - (n-1)^2}$$
$$= \frac{n\left[\sqrt{n^2 + (n+1)^2} - \sqrt{n^2 + (n-1)^2}\right]}{4n}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{n^2 + (n+1)^2} - \sqrt{(n-1)^2 + n^2}\right]$$

គេបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}\left[\sqrt{k^2+(k+1)^2}-\sqrt{(k-1)^2+k^2}\right]$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\left(\sqrt{20^2+21^2}-\sqrt{0^2+1^2}\right)=\frac{1}{4}(29-1)=7$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{20}}=7 \text{ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន}}$

លំហាត់ទី ៦៥. តាង $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$ ។ គេកំណត់ស្វ៊ីត
$U_n=\dfrac{f(1)\times f(3)\times f(5)\times\cdots\times f(2n-1)}{f(2)\times f(4)\times f(6)\times\cdots\times f(2n)}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$។
គណនា $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{U_n}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(n)=(n^2+n+1)^2+1=\left[(n^2+1)+n\right]^2+1$

$=(n^2+1)^2+2n(n^2+1)+n^2+1=(n^2+1)(n^2+2n+2)=(n^2+1)\left[(n+1)^2+1\right]$

នាំឱ្យ $f(2k-1)=\left[(2k-1)^2+1\right]\left[(2k-1+1)^2+1\right]=(4k^2+1)\left[(2k-1)^2+1\right]$

$f(2k)=(4k^2+1)\left[(2k+1)^2+1\right]$

គេបាន $\displaystyle U_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{f(2k-1)}{f(2k)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{(4k^2+1)\left[(2k-1)^2+1\right]}{(4k^2+1)\left[(2k+1)^2+1\right]}$

$\displaystyle=\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^2+1}{(2k+1)^2+1}=\frac{2}{(2n+1)^2+1}=\frac{1}{2n^2+2n+1}$

នាំឱ្យ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{U_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2+2n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{U_n}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

លំហាត់ទី ៦៦. គេឱ្យស្វ៊ីតពីរ (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតធម្មជាតិដែលផ្ទៀងផ្ទាត់
$a_n+\sqrt{2}b_n=(2+\sqrt{2})^n$ ។ គណនា $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតធម្មជាតិដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n+\sqrt{2}b_n=(2+\sqrt{2})^n$ (1)

នាំឱ្យ $a_n-\sqrt{2}b_n=(2-\sqrt{2})^n$ (2)

យក (1) + (2) គេបាន $2a_n=(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n\Longrightarrow a_n=\frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n\right]$

យក (1) − (2) គេបាន $2\sqrt{2}b_n=(2+\sqrt{2})^n-(2-\sqrt{2})^n\Longrightarrow b_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^n-(2-\sqrt{2})^n\right]$

គេបាន $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n\right]}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^n-(2-\sqrt{2})^n\right]}$

$$= \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n}{(2+\sqrt{2})^2-(2-\sqrt{2})^n}$$

$$= \sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(2+\sqrt{2})^n\left[1+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^n\right]}{(2+\sqrt{2})^n\left[1-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^n\right]}$$

$$= \sqrt{2}$$

ព្រោះ $0 < \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} < 1 \Longrightarrow 0 < \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^n < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^n = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}}$

លំហាត់ទី ៦៧. គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ ចំពោះ $n \in \mathbb{N}$ និង (v_n) ជាស្វ៊ីតមួយទៀតដែល $v_n = u_{n+1} - au_n$ ។

កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $v_n = u_{n+1} - au_n$

នាំឱ្យ $v_{n+1} = u_{n+2} - au_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - au_{n+1} = (5-a)u_n - 6u_n$

$$= (5-a)u_{n+1} - a(5-a)u_n + a(5-a)u_n - 6u_n$$

$$= (5-a)(u_{n+1} - au_n) + (5a - a^2 - 6)u_n$$

$$= (5-a)v_n + (-a^2 + 5a - 6)u_n$$

គេបាន (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកាលណា $\begin{cases} 5 - a \neq 0 & (1) \\ -a^2 + 5a - 6 = 0 & (2) \end{cases}$

តាម (1) : $5 - a \neq 0 \Longrightarrow a \neq 5$

តាម (2) : $-a^2 + 5a - 6 = 0 \Longrightarrow a = 2 \lor a = 3$

ដូចនេះ $\boxed{a = 2 \text{ ឬ } a = 3}$

លំហាត់ទី ៦៨. ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង $x,\ x+1$ និង $x+2$ ជាត្រីកោណសមញ្ញដែលមានមុំទាលមួយ។ ចូររករង្វង់នៃតម្លៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

គេដឹងថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមញ្ញដែលមានមុំទាលមួយ តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

គេបាន $x^2 + (x+1)^2 < (x+2)^2 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 3$

តែ x ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC គេបាន $x > 0$ នាំឱ្យ $0 < x < 3$

ម្យ៉ាងទៀត $x, x+1$ និង $x+2$ ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ

នាំឱ្យ $x + x + 1 > x + 2 \Longleftrightarrow x > 1$

ដូចនេះ $\boxed{1 < x < 3}$

លំហាត់ទី ៦៩. ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង $a_n = 19^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^{4n-3}$ ។ រកចំនួនបឋមតូចបំផុតដែលចែកដាច់ a_n ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

- បើ $n = 1$: $a_1 = 19^1 + (-1)^{1-1} \cdot 2^{4-3} = 19 + 2 = 21 = 3 \times 7$
- បើ $n = 2$: $a_2 = 19^2 + (-1)^{2-1} \cdot 2^{8-3} = 361 - 32 = 329 = 7 \times 47$
- ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺ 7 ជាចំនួនបឋមតូចបំផុត ដែលចែកដាច់ a_k

  តាង $a_k = 19^k + (-1)^{k-1} \cdot 2^{4k-3} = 7m,\ m \in \mathbb{Z}$
- ពិនិត្យចំពោះ $n = k + 1$

  គេមាន
  $$\begin{aligned} a_{k+1} &= 19^{k+1} + (-1)^{k+1-1} \cdot 2^{4(k+1)-3} \\ &= 19 \times 19^k - (-1)^{k-1} \times 2^{4k+1} \\ &= 19 \times 19^k - 16(-1)^{k-1} \times 2^{4k-3} \\ &= 19 \times 19^k - 16(7m - 19^k) \quad \text{ព្រោះ } (-1)^{k-1} \times 2^{4k-3} = 7m - 19^k \\ &= 19 \times 19^k - 16 \times 7m + 16 \times 19^k \\ &= 35 \times 19^k - 16 \times 7m \\ &= 7(5 \times 19^k - 16m) \end{aligned}$$

  គេបាន 7 ចែកដាច់ a_{k+1}

  ដូចនេះ $\boxed{n = 7}$

លំហាត់ទី ៧០. ចំពោះចំនួនពិត a គេមានចំណុច $A(a, 0)$ និង $B(-a, 0)$ ។ ចូររកសំណុំចំណុច P នៅក្នុងប្លង់មួយដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\angle APB = 90^\circ$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $P(x, y)$

គេមាន $\angle APB = 90^\circ \Longleftrightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ ដែល $\overrightarrow{PA} \neq \vec{0}$ និង $\overrightarrow{PB} \neq \vec{0}$

គេបាន $\overrightarrow{PA} = (x - a, y)$ ហើយ $\overrightarrow{PA} \neq \vec{0} \Longrightarrow x \neq a \wedge y \neq 0$

$\overrightarrow{PB} = (x+a, y)$ ហើយ $\overrightarrow{PB} \neq \vec{0} \Longrightarrow x \neq -a \wedge y \neq 0$

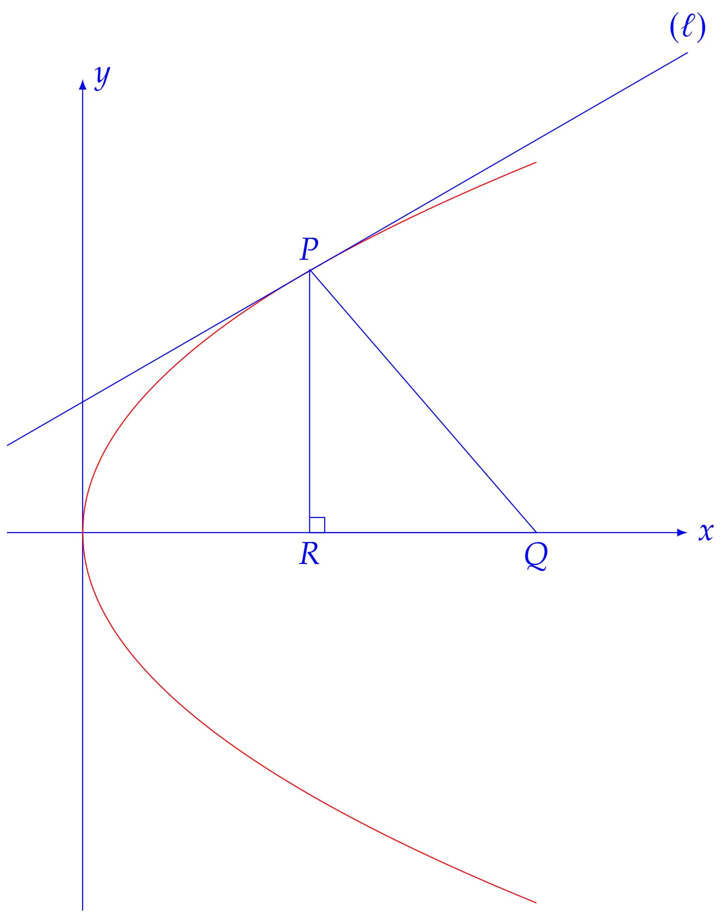
គេមាន $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Longleftrightarrow (x-a)(x+a) + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$

ជាសមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $(0,0)$ និងកាំ $r = |a|$ ឯកតា។

ដូចនេះ $\boxed{P \text{ ជាសំណុំចំណុចនៅលើរង្វង់ដែលមានផ្ចិត } (0,0) \text{ កាំ } |a| \text{ និង មិនស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស}}$

លំហាត់ទី ៧១. ឧបមាថាចំណុច P ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល $y^2 = ax$ ហើយមិនស្ថិតនៅលើគល់ $O(0,0)$ ។ គេគូសបន្ទាត់មួយកែងនឹងប៉ារ៉ាបូលត្រង់ P ។ តាង Q ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់កែងនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ហើយ R ជាចំណុចប្រសព្វរវាងចំណោលកែងត្រង់ P លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រវែងអង្កត់ QR មានតម្លៃថេរ មិនទាក់ទងនឹងទីតាំងរបស់ P ទេ។

ដំណោះស្រាយ



តាង $P(x_0, y_0)$, $Q(x_1, 0)$ គេបាន $R(x_0, 0)$

- រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (ℓ)

  គេមាន $y^2 = ax \Longrightarrow 2yy' = a \Longrightarrow y' = -\dfrac{a}{2y}$

  គេបាន $y'_0 = -\dfrac{a}{2y_0}$

- រកសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច P និង Q តាងដោយ (ℓ')

  ដោយបន្ទាត់ (ℓ') កែងនឹងបន្ទាត់ (ℓ)

  គេបាន មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (ℓ') គឺ $m = \dfrac{2y_0}{a}$ ព្រោះ $m \times y_0' = -1$

  នាំឱ្យសមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាម $P(x_0, y_0)$ ហើយមានមេគុណប្រាប់ទិស $m = \dfrac{2y_0}{a}$

  កំណត់ដោយ $y = \dfrac{2y_0}{a}(x - x_0) + y_0$

- រកកូអរដោនេនៃចំណុច Q

  ដោយ $Q(x_1, 0)$ ជាចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (ℓ')

  គេបាន $0 = \dfrac{2y_0}{a}(x_1 - x_0) + y_0 \Longrightarrow \dfrac{2}{a}(x_1 - x_0) + 1 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{a}{2}$

  នាំឱ្យ $Q\left(x_0 - \dfrac{a}{2}, 0\right)$

- គណនាប្រវែង QR

  ដោយ Q, R ជាចំណុចស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

  គេបាន $QR = |x_Q - x_R| = \left|x_0 - \dfrac{a}{2} - x_0\right| = \dfrac{|a|}{2}$ ជាចំនួនថេរមិនអាស្រ័យនឹងចំណុច P

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្រវែងអង្កត់ } QR \text{ មានតម្លៃថេរ មិនទាក់ទងនឹងទីតាំងរបស់ } P}$

លំហាត់ទី ៧២. បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $x + y + 1 = 0$ កាត់រង្វង់ដែលមានសមីការ $x^2 + y^2 = 4$ ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា។ គេគូសបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុចប្រសព្វទាំងពីរនោះ។ តាង θ ជាមុំដែលបង្កើតឡើងដោយបន្ទាត់ប៉ះទាំងពីរនោះ ហើយគេដឹងថា

$0 \le \theta \le 90^\circ$ ។ រកតម្លៃនៃ $\tan\theta$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $x^2 + y^2 = 4$ ជាសមីការនៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $O(0,0)$ និងកាំ $r = 2$ ឯកតា

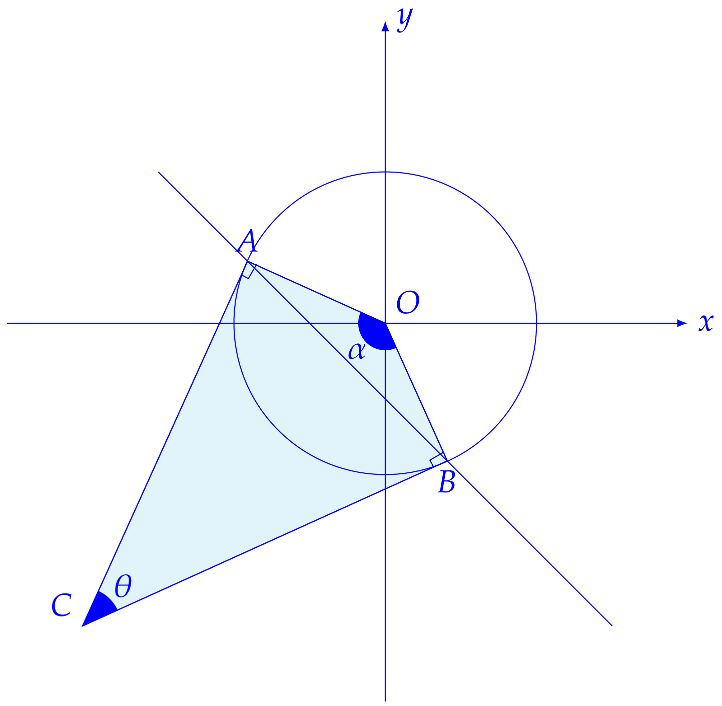
តាង A និង B ជាចំណុចប្រសព្វរវាងរង្វង់ $x^2 + y^2 = 4$ និងបន្ទាត់ $x + y + 1 = 0$

គេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ជាឫសនៃប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x + y + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases}$

តាម (1) : $x + y + 1 = 0 \Longleftrightarrow y = -x - 1$ ជំនួសក្នុង (2)

គេបាន $x^2 + (-x - 1)^2 = 4 \Longleftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 4 \Longleftrightarrow 2x^2 + 2x - 3 = 0$

នាំឱ្យ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{2} \Longrightarrow y = \dfrac{-1 \mp \sqrt{7}}{2}$



គេបាន $A\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)$ និង $B\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)$

តាង α ជាមុំផ្តុំឡើងដោយ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OB}$

គេបាន $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}$

តែ $\overrightarrow{OA} = \left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)$ និង $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}\times\frac{-1+\sqrt{7}}{2} + \frac{-1+\sqrt{7}}{2}\times\frac{-1-\sqrt{7}}{2} = -3$

ហើយ $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = r = 2$

គេបាន $\cos\alpha = \frac{-3}{2\times 2} = -\frac{3}{4}$

គេដឹងថា $OACB$ ជាចតុកោណដែលមាន $\angle OAC = \angle OBC = 90^\circ$

គេបាន $\theta + \alpha = 180^\circ \iff \alpha = 180^\circ - \theta$

ហេតុនេះ $\cos\alpha = -\frac{3}{4} \iff \cos(180^\circ - \theta) = -\frac{3}{4} \iff -\cos\theta = -\frac{3}{4} \iff \cos\theta = \frac{3}{4}$

តាមទំនាក់ទំនង $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \implies \tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1}$

តែ $0 \le \theta \le 90^\circ$ នាំឱ្យ $\tan\theta \ge 0$

គេបាន $\tan\theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1} = \sqrt{\frac{16}{9} - 1} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}}$

លំហាត់ទី ៧៣. តាង a, b និង c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនោះ និង $a+b+c=2p$ ។ ចូរបង្ហាញថា $p^2 \geq 3\sqrt{3}S$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តហេរុង គេបាន $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Longrightarrow S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$

ដោយ $p-a=\dfrac{a+b+c}{2}-a=\dfrac{1}{2}(b+c-a)>0$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $p-b>0, p-c>0$

តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន

$$\begin{aligned}(p-a)(p-b)(p-c) &\leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3\\ &\leq \frac{1}{27}(3p-a-b-c)^3\\ &\leq \frac{1}{27}(3p-2p)^3\\ &\leq \frac{p^3}{27}\end{aligned}$$

នាំឱ្យ $p(p-a)(p-b)(p-c) \leq \dfrac{p^4}{27}$

ឬ $S^2 \leq \dfrac{p^4}{27} \Longrightarrow p^4 \geq 27S^2 \Longrightarrow p^2 \geq 3\sqrt{3}S$ (ពិត)

ដូចនេះ $\boxed{p^2 \geq 3\sqrt{3}S}$

លំហាត់ទី ៧៤. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រសិនបើចំនួនពិត x, y, z និង a បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=a$ និង $x^3+y^3+z^3=a^3$ នាំឱ្យយ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម x, y និង z ស្មើនឹង a ។

ដំណោះស្រាយ

យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម x, y និង z ស្មើនឹង $a \Longleftrightarrow (x-a)(y-a)(z-a)=0$

គេមាន
$$\begin{aligned}(x-a)(y-a)(z-a) &= (xy-ax-ay+a^2)(z-a)\\ &= xyz-axy-axz+a^2x-ayx+a^2y+a^2z-a^3\\ &= xyz-a(xy+yz+zx)+a^2(x+y+z)-a^3\\ &= xyz-a(xy+yz+zx)+a^2\times a-a^3\\ &= xyz-a(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

ដោយ
$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\ &= (x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)]\\ &= a[a^2-3(xy+yz+zx)]\\ &= a^3-3a(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

តែ $x^3+y^3+z^3=a^3$

គេបាន $a^3-3xyz=a^3-3a(xy+yz+zx)$

$\Longleftrightarrow xyz=a(xy+yz+zx) \Longleftrightarrow xyz-a(xy+yz+zx)=0$

នាំឱ្យ $(x-a)(y-a)(z-a)=xyz-a(xy+yz+zx)=0$

គេបាន $x=a \vee y=a \vee z=a$

ដូចនេះ $\boxed{\text{យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម } x,y \text{ និង } z \text{ ស្មើនឹង } a}$

លំហាត់ទី ៧៥. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រសិនបើចំនួនពិត x,y,z និង a បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=3a$ និង $xy+yz+zx=3a^2$ នាំឱ្យ $x=y=z=a$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេដឹងថា $x=y=z=a \Longleftrightarrow (x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=0$

គេមាន
$$\begin{aligned}(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2&=x^2-2ax+a^2+y^2-2ay+a^2+z^2-2az+a^2\\&=(x^2+y^2+z^2)-2a(x+y+z)+3a^2\\&=[(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)]-2a\times 3a+3a^2\\&=[(3a)^2-2(3a^2)]-6a^2+3a^2\\&=9a^2-6a^2-3a^2=0\end{aligned}$$

នាំឱ្យ $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=0 \Longleftrightarrow x=y=z=a$

ដូចនេះ $\boxed{x=y=z=a}$

លំហាត់ទី ៧៦. ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n បើ $a_n>0$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sum_{j=1}^{n} a_j^3=\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n=n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយតាមវិចារអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា

- បើ $n=1$ គេបាន $a_1^3=a_1^2 \Longrightarrow a_1^2(a_1-1)=0 \Longrightarrow a_1=1$ ព្រោះ $a_1>0$

- ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ គឺ $a_k=k$

- ពិនិត្យចំពោះ $n=k+1$

  គេមាន $\sum_{j=1}^{k+1} a_j^3=\left(\sum_{j=1}^{k+1} a_j\right)^2$

$$\left(\sum_{j=1}^{k} a_j^3\right) + a_{k+1}^3 = \left[\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right) + a_{k+1}\right]^2$$

$$\left(\sum_{j=1}^{k} a_j^3\right) + a_{k+1}^3 = \left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)^2 + 2\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)a_{k+1} + a_{k+1}^2$$

$$a_{k+1}^3 = 2a_{k+1}\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right) + a_{k+1}^2$$

$$a_{k+1}^3 = 2a_{k+1} \times \frac{k(k+1)}{2} + a_{k+1}^2$$

$$a_{k+1}^2 = k(k+1) + a_{k+1}$$

$$a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k(k+1) = 0$$

$$(a_{k+1} + k)(a_{k+1} - k - 1) = 0$$

គេបាន $a_{k+1} = -k$ (មិនយក) ឬ $a_{k+1} = k + 1$

នាំឱ្យ $a_{k+1} = k + 1$ (ពិត)

ដូចនេះ $\boxed{a_n = n}$

លំហាត់ទី ៧៧. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត

ក. $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}}$

ខ. $$\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{n}{1-x^n}\right)$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}) - n}{1-x^n}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(1-1) + (x-1) + (x^2-1) + (x^3-1) + \cdots + (x^{n-1}-1)}{1-x^n}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1) + (x-1)(x+1) + (x-1)(x^2+x+1) + \cdots + (x-1)(x^{n-2}+\cdots+1)}{1-x^n}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)[1 + (x+1) + (x^2+x+1) + \cdots + (x^{n-2}+\cdots+1)]}{-(x-1)(x^{n-1}+\cdots+1)}$$

$$= \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{-n} = -\frac{1}{n}\times\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = -\frac{n-1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n}\right) = -\frac{n-1}{2}}$

លំហាត់ទី ៧៨. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

ក. $5^x \times 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50$

ខ. $\log_3\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = \log_2\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

ក. $5^x \times 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50 \Longrightarrow x \neq -1$

គេបាន $5^x \times 2^{\frac{2x-1}{x+1}} = 50 = 5^2\times 2 \Longrightarrow 5^{x-2} = 2^{1-\frac{2x-1}{x+1}} = 2^{\frac{-x+2}{x+1}}$

$\Longrightarrow \ln 5^{x-2} = \ln 2^{\frac{-x+2}{x+1}} \Longrightarrow (x-2)\ln 5 = \dfrac{-x+2}{x+1}\ln 2$

$\Longrightarrow (x-2)\ln 5 + \dfrac{x-2}{x+1}\ln 2 = 0 \Longrightarrow (x-2)\left(\ln 5 + \dfrac{\ln 2}{x+1}\right) = 0$

គេបាន $x-2=0$ ឬ $\ln 5 + \dfrac{\ln 2}{x+1} = 0$

- បើ $x-2=0 \Longleftrightarrow x=2$
- បើ $\ln 5 + \dfrac{\ln 2}{x+1} = 0 \Longrightarrow (x+1)\ln 5 + \ln 2 = 0$

  $\Longrightarrow x+1 = -\dfrac{\ln 2}{\ln 5} \Longrightarrow x = -\dfrac{\ln 2+\ln 5}{\ln 5} = -\dfrac{\ln 10}{\ln 5} = -\log_5 10$

  ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានឫស } x=2 \ \vee\ x = -\log_5 10}$

ខ. $\log_3\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = \log_2\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \quad (1)$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} > x \Longrightarrow \sqrt{1+x^2}-x>0$

គេមាន $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = 1+x^2-x^2 = 1$

$\Longrightarrow \sqrt{1+x^2}-x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$

តាង $t = \sqrt{1+x^2}+x \Longrightarrow \sqrt{1+x^2}-x = \dfrac{1}{t}$, $t>0$

តាម (1) គេបាន $\log_3 t = \log_2\dfrac{1}{t} = -\log_2 t \Longleftrightarrow \log_3 t + \log_2 t = 0$

$\Longleftrightarrow \dfrac{\ln t}{\ln 3} + \dfrac{\ln t}{\ln 2} = 0 \Longleftrightarrow \ln t\left(\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 2}\right) = 0$

$\Longleftrightarrow \ln t = 0 \Longleftrightarrow t = 1$

ចំពោះ $t=1$ គេបាន $\sqrt{1+x^2}+x = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{1+x^2} = 1-x$

ដោយ $\sqrt{1+x^2} \geq 1 \Longrightarrow 1-x \geq 1 \Longrightarrow x \leq 0$

ចំពោះ $x \leq 0$ គេបាន $\sqrt{1+x^2} = 1-x \Longrightarrow 1+x^2 = (1-x)^2 = 1-2x+x^2$

$\Longrightarrow x = 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានឫស } x = 0}$

លំហាត់ទី ៧៩. ដោះស្រាយវិសមីការ $x^2+(x+1)^2 \leq \dfrac{15}{x+(x+1)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $x^2+(x+1)^2 \leq \dfrac{15}{x+(x+1)} \quad (\star)$

ដោយ $x^2+(x+1)^2 > 0$ តាម $(\star)$ គេបាន $x+(x+1) > 0 \Longrightarrow x > -\dfrac{1}{2} \quad (1)$

គេបាន $x^2+(x+1)^2 \leq \dfrac{15}{x+(x+1)} \Longleftrightarrow 2x^2+2x+1 \leq \dfrac{15}{2x+1}$

ដោយ $2x+1 > 0$ គេបាន $(2x+1)(2x^2+2x+1) \leq 15 \Longrightarrow 2x^2(2x+1)+(2x+1)^2 \leq 15$

$\Longrightarrow 4x^3+2x^2+4x^2+4x+1-15 \leq 0$

$\Longrightarrow 4x^3+6x^2+4x-14 \leq 0$

$\Longrightarrow (x-1)(4x^2+10x+14) \leq 0 \quad (2)$

តាង $f(x) = 4x^2+10x+14$ បើ $f(x) = 0 \Longleftrightarrow 4x^2+10x+14 = 0$

តាម $\Delta' = 25-56 < 0 \Longrightarrow f(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

តាម (2) គេបាន $x-1 \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq 1 \ \ (3)$

តាម (1) និង (3) គេបាន $-\dfrac{1}{2} < x \leq 1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{វិសមីការមានចម្លើយ } -\dfrac{1}{2} < x \leq 1}$

លំហាត់ទី ៨០. បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x) = (x+2)e^{-x}$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតចំពោះ $x > 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x) = (x+2)e^{-x} \Longrightarrow f'(x) = e^{-x}(1-x-2) = -(x+1)e^{-x}$

នាំឱ្យ $f''(x) = -e^{-x}(1-x-1) = xe^{-x} > 0$ គ្រប់ $x > 0$

គេបាន $f'(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតចំពោះ $x > 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ដេរីវេ } f'(x) \text{ នៃអនុគមន៍ } f(x) = (x+2)e^{-x} \text{ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតចំពោះ } x > 0}$

លំហាត់ទី ៨១. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃអេលីប $9x^2+16y^2 = 52$ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ $9x-8y = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង (x_0, y_0) ជាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ

គេមានអេលីប $9x^2 + 16y^2 = 52$ ធ្វើដេរីវេធៀប x លើអង្គទាំងពីរ

គេបាន $18x + 32yy' = 0 \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត បន្ទាត់ប៉ះនៃអេលីបស្របនឹងបន្ទាត់ $9x - 8y = 1 \iff y = \frac{9}{8}x - \frac{1}{8}$

នោះគេបានមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y'_0 = \frac{9}{8} \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$18x_0 + 32y_0y'_0 = 0 \iff 18x_0 + 32y_0 \times \frac{9}{8} = 0$

$\iff 18x_0 + 36y_0 = 0 \iff x_0 = -2y_0 \quad (3)$

ដោយ (x_0, y_0) ជាចំណុចនៅលើអេលីប គេបាន $9x_0^2 + 16y_0^2 = 52$

តែ $x_0 = -2y_0$ នាំឱ្យ $9(-2y_0)^2 + 16y_0^2 = 52 \iff 52y_0^2 = 52 \iff y_0 = \pm 1$

- បើ $y_0 = 1$ គេបាន $x_0 = -2$ នោះសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = \frac{9}{8}(x+2) + 1 = \frac{9}{8}x + \frac{13}{4}$

  ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ } y = \frac{9}{8}x + \frac{13}{4}}$

- បើ $y_0 = -1$ គេបាន $x_0 = 2$ នោះសមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = \frac{9}{8}(x-2) - 1 = \frac{9}{8}x - \frac{13}{4}$

  ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ } y = \frac{9}{8}x - \frac{13}{4}}$

លំហាត់ទី ៨២. គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_0 = 0, v_0 = 1$ និង $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$។ X_n និង A ជាពីរម៉ាទ្រីសដែល $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ និង $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$។

ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $X_n = A^n X_0$ ។

ខ. P, P' និង B ជាម៉ាទ្រីសដែល $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ ។

១. គណនា PP' និងបង្ហាញថា $P'BP = A$ រួចគណនា A^n ។

២. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $X_n = A^n X_0$

គេមាន $u_0 = 0, v_0 = 1 \Longrightarrow X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ និង $u_1 = \frac{1}{2}, v_1 = \frac{2}{3}$

យើងនឹងស្រាយតាមវិចារអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា

- បើ $n = 1$ គេបាន $X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ហើយ $AX_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

  គេបាន $X_1 = AX_0$ ពិត

- ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺ $X_k = A^k X_0$

- ចំពោះ $n = k+1$ គេមាន $X_{k+1} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_k + v_k}{2} \\ \frac{u_k + 2v_k}{3} \end{pmatrix}$

  ហើយ $A^{k+1}X_0 = AA^kX_0 = AX_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_k + v_k}{2} \\ \frac{u_k + 2v_k}{3} \end{pmatrix}$

  គេបាន $X_{k+1} = A^{k+1}X_0$ ពិតដល់ $n = k+1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំពោះគ្រប់ } n \in \mathbb{N} \text{ គេបាន } X_n = A^n X_0}$

២. គេមាន $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ ។

១. • គណនា PP'

គេបាន $PP' = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

• បង្ហាញថា $P'BP = A$

គេបាន $P'BP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} + \frac{1}{10} & \frac{6}{10} - \frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{15} & \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A \quad \text{ពិត}$$

- គណនា A^n

គេមាន $A = P'BP$ ដែល $PP' = I$ នាំឱ្យ $A^n = P'B^nP$

$$\text{គេបាន } A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\times 6^n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3\times 6^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5\times 6^n} & \frac{3}{5} - \frac{3}{5\times 6^n} \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5\times 6^n} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5\times 6^n} \end{pmatrix}$$

២. កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n)

គេមាន $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n X_0$

$$\text{គេបាន} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5\times 6^n} & \frac{3}{5} - \frac{3}{5\times 6^n} \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5\times 6^n} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5\times 6^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5\times 6^n} \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5\times 6^n} \end{pmatrix}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5\times 6^n} \text{ និង } v_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5\times 6^n}}$

លំហាត់ទី ៨៣. ដោះស្រាយសមីការ $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 2 \qquad (1)$

សមីការ (1) មានន័យកាលណា

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2k\pi < x < (2k+1)\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

តាម (1) គេបាន $\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = 2 \Longleftrightarrow \dfrac{\ln \cos x}{\ln \sin x} + \dfrac{\ln \sin x}{\ln \cos x} = 2$

តាង $t = \dfrac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$ គេបាន $t + \dfrac{1}{t} = 2 \Longleftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Longleftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow t = 1$

គេបាន $\dfrac{\ln \sin x}{\ln \cos x} = 1 \Longleftrightarrow \ln \sin x = \ln \cos x \Longleftrightarrow \ln \sin x - \ln \cos x = 0$

$\Longleftrightarrow \ln \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0 \Longleftrightarrow \tan x = 1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានឫស } x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}}$

លំហាត់ទី ៨៤. គេឱ្យ A ជាម៉ាទ្រីសការេដែល $A^2 = I$ ហើយ I ជាម៉ាទ្រីសឯកតា។

សម្រួលកន្សោម $(A-I)^3 + (A+I)^3 - 7A$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(A-I)^3 + (A+I)^3 - 7A = (A^3 - 3A^2I + 3AI^2 - I^3) + (A^3 + 3A^2I + 3AI^2 + I^3) - 7A$

$$\begin{aligned} &= (AA^2 - 3A^2 + 3A - I) + (AA^2 + 3A^2 + 3A + I) - 7A \\ &= (AI - 3I + 3A - I) + (AI + 3I + 3A + I) - 7A \\ &= (A + 3A - 4I) + (A + 3A + 4I) - 7A \\ &= 4A - 4I + 4A + 4I - 7A \\ &= A \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{(A-I)^3 + (A+I)^3 - 7A = A}$

លំហាត់ទី ៨៥. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\cos\theta \end{vmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\cos\theta \end{vmatrix}$

ដោយយក $R_2 \to R_2 - R_1$ និង $R_3 \to R_3 - R_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} = \sin\theta\cos\theta$$

កន្សោម $\sin\theta\cos\theta$ មានតម្លៃអតិបរមាកាលណា $\sin\theta > 0$ និង $\cos\theta > 0$

ឬ $\sin\theta < 0$ និង $\cos\theta < 0$

- បើ $\sin\theta > 0$ និង $\cos\theta > 0$

  តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន $\sin\theta\cos\theta \le \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{2} \iff \sin\theta\cos\theta \le \dfrac{1}{2}$

- បើ $\sin\theta < 0$ និង $\cos\theta < 0 \implies -\sin\theta > 0$ និង $-\cos\theta > 0$

  គេបាន $\sin\theta\cos\theta = (-\sin\theta)(-\cos\theta) \le \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{2} \iff \sin\theta\cos\theta \le \dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃអតិបរមានៃ } \Delta \text{ គឺ } \frac{1}{2}}$

លំហាត់ទី ៨៦. គណនា $L = \displaystyle\sum_{s=1}^{10}\sum_{r=0}^{s-1}(2^s - 2^r)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $L = \displaystyle\sum_{s=1}^{10}\sum_{r=0}^{s-1}(2^s - 2^r)$

$$= \sum_{s=1}^{10}\left[(2^s - 1) + (2^s - 2) + (2^s - 2^2) + \cdots + (2^s - 2^{s-1})\right]$$

$$= \sum_{s=1}^{10}\left[(2^s + s^2 + \cdots + 2^s) - (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{s-1})\right]$$

$$= \sum_{s=1}^{10}\left[s \cdot 2^s - \frac{2^s - 1}{2 - 1}\right]$$

$$= \sum_{s=1}^{10}\left[s \cdot 2^s - 2^s + 1\right]$$

$$= \sum_{s=1}^{10}\left[(s-1)2^s + 1\right]$$

$$= (2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + 9 \times 2^{10}) + 10$$

តាង $H = 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + 9 \times 2^{10} \quad (1)$

គេបាន $2H = 2^3 + 2 \times 2^4 + \cdots + 9 \times 2^{11} \quad (2)$

យក $(1) - (2)$ គេបាន

$$H - 2H = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{10} - 9 \times 2^{11}$$
$$-H = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{10} - 1 - 2 - 9 \times 2^{11})$$
$$= (2^{11} - 1) - 3 - 9 \times 2^{11}$$
$$= -8 \times 2^{11} - 4$$
$$= -16388 \Longleftrightarrow H = 16388$$

គេបាន $L = H + 10 = 16388 + 10 = 16398$

ដូចនេះ $\boxed{L = \sum_{s=1}^{10} \sum_{r=0}^{s-1} (2^s - 2^r) = 16398}$

លំហាត់ទី ៨៧. គេមានសំណុំ $S = \{a \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 100\}$ និងសមីការ $\lfloor \tan^2 x \rfloor - \tan x - a = 0$ មានឫសជាចំនួនពិត។ កំណត់ចំនួនធាតុនៃ S ។ ($\lfloor x \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់ធំបំផុត $\le x$)

ដំណោះស្រាយ

គេមានសមីការ $\lfloor \tan^2 x \rfloor - \tan x - a = 0 \quad (1)$

ដោយ a និង $\lfloor \tan^2 x \rfloor$ ជាចំនួនគត់ នោះសមីការ (1) ផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែ $\tan x$ ជាចំនួនគត់។

នោះសមីការ (1) ក្លាយជា $\tan^2 x - \tan x - a = 0 \quad (2)$

តាម (2) គេបានឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-a) = 4a + 1$

នោះឫសនៃសមីការ (2) គឺ $\tan x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$

តែសមីការ (2) មានឫសជាចំនួនគត់ នាំឱ្យ $\sqrt{4a+1}$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់សេស

នាំឱ្យ $4a + 1 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 \Longleftrightarrow a = k(k-1) \quad (3)$

ដោយ $a \in \mathbb{N}$ និង $1 \le a \le 100$ នោះតាម (3) គេបាន $a \in \{2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90\}$

នាំឱ្យ $S = \{a \in \mathbb{N}, 1 \le a \le 100\} = \{2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90\} \Longrightarrow |S| = 9$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួនធាតុនៃ } S \text{ គឺ } |S| = 9}$

លំហាត់ទី ៨៨. គេមាន $x = \sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$ និង $y = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{8\pi}{7}$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $x^2 + y^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $x = \sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$

នាំឱ្យ $x^2 = \left(\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}\right)^2$
$$= \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + 2\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}$$

$$+ 2\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}$$

និង $y = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}$

នាំឱ្យ $y^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\right)^2$

$$= \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{4\pi}{7} + \cos^2\frac{8\pi}{7} + 2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$$

$$+ 2\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$$

គេបាន $x^2 + y^2 = \left(\sin^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7}\right) + \left(\sin^2\frac{4\pi}{7} + \cos^2\frac{4\pi}{7}\right) + \left(\sin^2\frac{8\pi}{7} + \cos^2\frac{8\pi}{7}\right)$

$$+ 2\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

$$+ 2\left(\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}\right)$$

$$+ 2\left(\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}\right)$$

$$= 3 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7} - \frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{8\pi}{7} - \frac{4\pi}{7}\right)$$

$$= 3 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) \quad (1)$$

សម្គាល់

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

គណនា $L = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} \quad (2)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង $\sin\frac{\pi}{7}$

គេបាន $L \times \sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7} - \frac{2\pi}{7}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7} - \frac{4\pi}{7}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7} - \frac{6\pi}{7}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{7\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7}\right]$$

សម្គាល់

$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$

$\sin(-A) = -\sin A$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$$

គេបាន $L = -\frac{1}{2}$ ហេតុនេះតាម (1) គេបាន $x^2 + y^2 = 3 + 2L = 3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$

ដូចនេះ $\boxed{x^2 + y^2 = 2}$

លំហាត់ទី ៨៩. គេឱ្យ $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ និង $g(x) = \int_0^{\cos x}(1+\sin t^2)dt$ ។

គណនា $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+[g(x)]^3}} \times g'(x)$

តែ $g(x) = \int_0^{\cos x}(1+\sin t^2)dt$

$\Longrightarrow g'(x) = \left[1+\sin(\cos^2 x)\right] \times (\cos x)' = -\left[1+\sin(\cos^2 x)\right] \times \sin x$

គេបាន $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+[g(x)]^3}} \times \left[1+\sin(\cos^2 x)\right] \times \sin x$

នាំឱ្យ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1+\left[g(\pi/2)\right]^3}} \times \left[1+\sin\left(\cos^2\frac{\pi}{2}\right)\right] \times \sin\frac{\pi}{2}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+\left[g(\pi/2)\right]^3}} \times (1+\sin 0) \times 1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1+\left[g(\pi/2)\right]^3}}$$

ដោយ $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\cos\frac{\pi}{2}}(1+\sin t^2)dt = \int_0^0 (1+\sin t^2)dt = 0$

គេបាន $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1+\left[g(\pi/2)\right]^3}} = -\frac{1}{\sqrt{1+0}} = -1$

ដូចនេះ $\boxed{f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1}$

លំហាត់ទី ៩០. គេឱ្យ $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^2 + y - 3}{x+1}$ និង $y(1) = 1$ ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $y(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)^2 + y - 3}{x+1}$

តាង $X = x+1,\ Y = y-3 \Longrightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$

គេបាន $\frac{dY}{dX} = \frac{X^2 + Y}{X} = X + \frac{Y}{X}$

ឬ $Y' = X + \dfrac{Y}{X} \Longleftrightarrow Y' - \dfrac{Y}{X} = X \quad (1)$

គេបានកត្តាអាំងតេក្រាល $e^{\int \frac{-1}{X}dX} = e^{-\ln X} = \dfrac{1}{X}$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង $\dfrac{1}{X}$ គេបាន

$\dfrac{1}{X}Y' - \dfrac{1}{X^2}Y = 1 \Longrightarrow \dfrac{XY' - Y}{X^2} = 1$ ឬ $\left(\dfrac{Y}{X}\right)' = 1$

$\Longrightarrow \dfrac{Y}{X} = \displaystyle\int 1dX = X + c \Longrightarrow Y = X(X+c), \quad c \in \mathbb{R}$

ដោយ $X = x + 1$ និង $Y = y - 3$ គេបាន

$Y = X(X+c) \Longleftrightarrow y - 3 = (x+1)(x+1+c) \Longleftrightarrow y = (x+1)(x+1+c) + 3$

ដោយ $y(1) = 1$ គេបាន $1 = (2)(2+c) + 3 \Longleftrightarrow c = -3$

គេបាន $y(x) = (x+1)(x-2) + 3 = x^2 - x - 2 + 3 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃអតិបរមានៃ } y(x) \text{ គឺ } \dfrac{3}{4}}$

លំហាត់ទី ៩១. រកវ៉ង់នៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x + 2\sin x + 3}{\sin^2 x + \sin x + 1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } f(x) &= \frac{2\sin^2 x + 2\sin x + 3}{\sin^2 x + \sin x + 1} \\ &= \frac{2(\sin^2 x + \sin x + 1) + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1} \\ &= 2 + \frac{1}{\sin^2 x + \sin x + 1} \\ &= 2 + \frac{1}{\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

ដោយ $-1 \leq \sin x \leq 1 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq \sin x + \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{3}{2} \Longrightarrow 0 \leq \left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{9}{4}$

$\Longrightarrow \dfrac{3}{4} \leq \left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \leq 3 \Longrightarrow \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \dfrac{4}{3}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{3} + 2 \leq 2 + \dfrac{1}{\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \dfrac{4}{3} + 2 \Longrightarrow \dfrac{7}{3} \leq f(x) \leq \dfrac{10}{3}$

ដូនចេះ $\boxed{\dfrac{7}{3} \leq f(x) \leq \dfrac{10}{3}}$

លំហាត់ទី ៩២. គណនា $\displaystyle\int_{1/8}^{\sin^2 x} \left(\sin^{-1}\sqrt{t}\right) dt + \int_{1/8}^{\cos^2 x} \left(\cos^{-1}\sqrt{t}\right) dt$

ដែល $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x)=\int_{1/8}^{\sin^2 x}\left(\sin^{-1}\sqrt{t}\right)dt+\int_{1/8}^{\cos^2 x}\left(\cos^{-1}\sqrt{t}\right)dt \qquad (1)$

នាំឱ្យ $f'(x)=(\sin^2 x)'\times\sin^{-1}\sqrt{\sin^2 x}+(\cos^2 x)'\cos^{-1}\sqrt{\cos^2 x}$

$$=2\sin x\cos x\times\sin^{-1}|\sin x|-2\sin x\cos x\times\cos^{-1}|\cos x|$$

$$=\sin 2x\times\sin^{-1}(\sin x)-\sin 2x\times\cos^{-1}(\cos x)$$

$$=\sin 2x\left[\sin^{-1}(\sin x)+\cos^{-1}(\cos x)\right]$$

$$=\sin 2x\times(x-x)=(\sin 2x)\times 0=0$$

សម្គាល់

$$\left[\int_a^{g(x)}f(x)dx\right]'=[g(x)]'\times f[g(x)]$$

$\sin^{-1}(\sin x)=x$

$\cos^{-1}(\cos x)=x$

$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

ដោយ $f'(x)=0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ថេរ។

យក $x=\dfrac{\pi}{4}$ គេបាន $\sin x=\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

តាម (1) គេបាន $f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\int_{1/8}^{1/2}\left(\sin^{-1}\sqrt{t}\right)dt+\int_{1/8}^{1/2}\left(\cos^{-1}\sqrt{t}\right)dt$

$$=\int_{1/8}^{1/2}\left(\sin^{-1}\sqrt{t}+\cos^{-1}\sqrt{t}\right)dt$$

$$=\int_{1/8}^{1/2}\frac{\pi}{2}dt=\frac{\pi}{2}\Big[t\Big]_{1/8}^{1/2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=\frac{3\pi}{16}$$

ដូចនេះ $\boxed{\int_{1/8}^{\sin^2 x}\left(\sin^{-1}\sqrt{t}\right)dt+\int_{1/8}^{\cos^2 x}\left(\cos^{-1}\sqrt{t}\right)dt=\frac{3\pi}{16}}$

លំហាត់ទី ៩៣. គេឱ្យ z និង z_0 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z-i|\le 2$ និង $z_0=5+3i$ ។

គណនាតម្លៃអតិបរមានៃ $|iz+z_0|$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $|iz+z_0|=|iz-i^2+z_0-1|=|i(z-i)+(4+3i)|\le|i(z-i)|+|4+3i|$

តែ $|i(z-i)|=|i||z-i|=|z-i|\le 2$ និង $|4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

គេបាន $|iz+z_0|\le 2+5\Longleftrightarrow|iz+z_0|\le 7$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃអតិបរមានៃ } |iz+z_0| \text{ គឺ } 7}$

លំហាត់ទី ៩៤. គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $g(1)=1$ និង $\int_0^x 2xg^2(t)dt = \left(\int_0^x 2g(x-t)dt\right)^2$ ។ កំណត់អនុគមន៍ g ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\int_0^x 2xg^2(t)dt = \left(\int_0^x 2g(x-t)dt\right)^2 = \left(\int_0^x 2g(t)dt\right)^2$

$$2x\int_0^x g^2(t)dt = 4\left(\int_0^x g(t)dt\right)^2$$

$$x\int_0^x g^2(t)dt = 2\left(\int_0^x g(t)dt\right)^2 \quad (1)$$

សម្គាល់

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

ដេរីវេធៀប x លើអង្គទាំងពីរនៃ (1) គេបាន

$$\int_0^x g^2(t)dt + xg^2(x) = 4g(x)\int_0^x g(t)dt$$

$$\int_0^x g^2(t)dt = 4g(x)\int_0^x g(t)dt - xg^2(x)$$

$$x\int_0^x g^2(t)dt = 4xg(x)\int_0^x g(t)dt - x^2g^2(x) \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន $2\left(\int_0^x g(t)dt\right)^2 = 4xg(x)\int_0^x g(t)dt - x^2g^2(x) \quad (3)$

តាង $u = \int_0^x g(t)dt$ និង $v = xg(x)$ តាម (3)

គេបាន $2u^2 = 4vu - v^2 \iff 2u^2 - 4vu + v^2 = 0$

តាម $\Delta' = (2v)^2 - 2v^2 = 2v^2 \implies u = \frac{2v \pm \sqrt{2}v}{2} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}v$

គេបាន $\int_0^x g(t)dt = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}xg(x)$ ដេរីវេធៀប x លើអង្គទាំងពីរ

គេបាន $g(x) = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}[g(x)+xg'(x)] = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}g(x) + \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}xg'(x)$

$$\implies \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}xg'(x) = \left(1 - \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right)g(x) = \frac{\mp\sqrt{2}}{2}g(x)$$

$$\implies (2\pm\sqrt{2})xg'(x) = \mp\sqrt{2}g(x)$$

$$\implies \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\mp\sqrt{2}}{(2\pm\sqrt{2})x} = \frac{\sqrt{2}}{(-\sqrt{2}\mp 2)x} = \frac{1}{(-1\mp\sqrt{2})x} = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{(1-2)x} = \frac{1\mp\sqrt{2}}{x}$$

អាំងតេក្រាលធៀប x លើអង្គទាំងពីរ

គេបាន $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{1\mp\sqrt{2}}{x}dx \implies \ln|g(x)| = (1\mp\sqrt{2})\ln|x| + c$

$\implies \ln|g(x)| = \ln\left|e^c\cdot x^{1\mp\sqrt{2}}\right| \implies g(x) = \pm e^c\cdot x^{1\mp\sqrt{2}} = k\cdot x^{1\mp\sqrt{2}}$ ដែល $k = \pm e^c$

នាំឱ្យ $g(x) = k \cdot x^{1\mp\sqrt{2}}$ តែ $g(1) = 1 \Longrightarrow 1 = k \cdot 1^{1\mp\sqrt{2}} \Longrightarrow k = 1$

ដូចនេះ $\boxed{g(x) = x^{1\mp\sqrt{2}} \text{ ដែល } x \in (0, +\infty)}$

លំហាត់ទី ៩៥. គេមាន a, b, c ជាឫសនៃសមីការ $px^3 + qx^2 + r = 0$ ។

ចូរគណនាដេទែមីណង់ $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{vmatrix}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន a, b, c ជាឫសនៃសមីការ $px^3 + qx^2 + r = 0$

តាមទ្រឹស្តីវ្យែត គេបាន $\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{q}{p} \\ ab + bc + ca = 0 \\ abc = -\dfrac{r}{p} \end{cases}$

គេបាន $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{bc}{abc} & \frac{ca}{abc} & \frac{ab}{abc} \\ \frac{ca}{abc} & \frac{ab}{abc} & \frac{bc}{abc} \\ \frac{ab}{abc} & \frac{bc}{abc} & \frac{ac}{abc} \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{(abc)^3} \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ ca & ab & bc \\ ab & bc & ca \end{vmatrix}$ តាមសារុស គេបាន

$= \dfrac{1}{(abc)^3} \left[(abc)^2 + (abc)^2 + (abc)^2 - (ab)^3 - (bc)^3 - (ca)^3\right]$

$= \dfrac{1}{(abc)^3} \left[3(abc)^2 - (ab)^3 - (bc)^3 - (ca)^3\right]$

$= \dfrac{3}{abc} - \dfrac{1}{(abc)^3}[(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3]$

$= \dfrac{3}{abc} - \dfrac{1}{(abc)^3}[(ab + bc + ca)((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 - ab - bc - ca)$
$\quad + 3(ab)(bc)(ca)]$

$= \dfrac{3}{abc} - \dfrac{1}{(abc)^3}[0 + 3(abc)^2]$ ព្រោះ $ab + bc + ca = 0$

$= \dfrac{3}{abc} - \dfrac{3}{abc} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\Delta = 0}$

លំហាត់ទី ៩៦. គេឱ្យ $\tan A = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 1}$ និង $\tan B = \dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$ ដែល $0 < A, B < \dfrac{\pi}{2}$ ។ គណនា $A + B$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\tan A = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 1}$ និង $\tan B = \dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$

តាង $a = x^2 - x \Longrightarrow \tan A = \dfrac{a}{a+1}, \quad \tan B = \dfrac{1}{2a+1}$

ហើយ $0 < A, B < \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < A + B < \pi$

តាម $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

គេបាន $\tan(A+B) = \dfrac{\dfrac{a}{a+1} + \dfrac{1}{2a+1}}{1 - \dfrac{a}{a+1} \times \dfrac{1}{2a+1}} = \dfrac{a(2a+1) + (a+1)}{(a+1)(2a+1) - a} = \dfrac{2a^2 + 2a + 1}{2a^2 + 2a + 1} = 1$

នាំឱ្យ $A + B = \dfrac{\pi}{4}$ ព្រោះ $0 < A + B < \pi$

ដូចនេះ $\boxed{A + B = \dfrac{\pi}{4}}$

លំហាត់ទី ៩៧. គេឱ្យបន្ទាត់ $L_1 : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ និងបន្ទាត់ $L_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ ។ រកវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{p}$ ដែលអរតូកូណាល់នឹងបន្ទាត់ទាំងពីរនេះ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន បន្ទាត់ $L_1 : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u_1} = (3, 1, 2)$

និងបន្ទាត់ $L_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u_2} = (1, 2, 3)$

គេដឹងថា វ៉ិចទ័រដែលអរតូកូណាល់នឹង L_1 ផងនិង L_2 ផងជាវ៉ិចទ័រដែលអរតូកូណាល់នឹង $\overrightarrow{u_1}$ ផងនិង $\overrightarrow{u_2}$ ផង ។ តាមនិយមន័យ គេបាន វ៉ិចទ័រដែលអរតូកូណាល់នឹង $\overrightarrow{u_1}$ ផងនិង $\overrightarrow{u_2}$ គឺវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}$

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (3-4)\vec{i} - (9-2)\vec{j} + (6-1)\vec{k}$$

$$= -\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

គេបាន $|\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 49 + 25} = 5\sqrt{3} \neq 1$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}$ មិនមែនជាវ៉ិចទ័រឯកតា។

គេបាន វ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{p} = \dfrac{\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}|} = \dfrac{-\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}}{5\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{5\sqrt{3}}\vec{i} - \dfrac{7}{5\sqrt{3}}\vec{j} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{15}\vec{i} - \frac{7\sqrt{3}}{15}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{p} = -\frac{\sqrt{3}}{15}\vec{i} - \frac{7\sqrt{3}}{15}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}}$

លំហាត់ទី ៩៨. គេឱ្យ α និង β ជាឬសនៃសមីការ $x^2 - 6x - 2 = 0$ ដែល $\alpha > \beta$ ។ តាង $t_n = \alpha^n - \beta^n$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $\dfrac{t_{22} - 2t_{20}}{2t_{21}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន α ជាឬសនៃសមីការ $x^2 - 6x - 2 = 0$

នាំឱ្យ $\alpha^2 - 6\alpha - 2 = 0$ គុណអង្គទាំងពីរនឹង α^{20}

គេបាន $\alpha^{22} - 6\alpha^{21} - 2\alpha^{20} = 0 \quad (1)$

ដូចគ្នាដែរ $\beta^{22} - 6\beta^{21} - 2\beta^{20} = 0 \quad (2)$

យក (1) – (2) គេបាន $(\alpha^{22} - \beta^{22}) - 6(\alpha^{21} - \beta^{21}) - 2(\alpha^{20} - \beta^{20}) = 0$

$\Longleftrightarrow t_{22} - 6t_{21} - 2t_{20} = 0 \Longleftrightarrow t_{22} - 2t_{20} = 6t_{21} \Longleftrightarrow \dfrac{t_{22} - 2t_{20}}{2t_{21}} = 3$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{t_{22} - 2t_{20}}{2t_{21}} = 3}$

លំហាត់ទី ៩៩. គេ ឱ្យ f ជា អនុគមន៍ មាន ដេរីវេ លើ $(0, +\infty)$ ហើយ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(1) = 1$ និង $\displaystyle\lim_{t\to x} \frac{t^2 f(x) - x^2 f(t)}{t - x} = 1$ ចំពោះ $x > 0$ ។ កំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\displaystyle\lim_{t\to x} \frac{t^2 f(x) - x^2 f(t)}{t - x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

តាមទ្រឹស្តីបទឡូពីតាល់

គេបាន $\displaystyle\lim_{t\to x} \frac{t^2 f(x) - x^2 f(t)}{t - x} = \lim_{t\to x} \frac{2t f(x) - x^2 f'(t)}{1} = 2x f(x) - x^2 f'(x)$

តែ $\displaystyle\lim_{t\to x} \frac{t^2 f(x) - x^2 f(t)}{t - x} = 1 \Longrightarrow 2x f(x) - x^2 f'(x) = 1$

$\Longrightarrow x^2 f'(x) - 2x f(x) = -1 \Longrightarrow \dfrac{x^2 f'(x) - 2x f(x)}{x^4} = -\dfrac{1}{x^4}$

$\Longrightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^4} \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{x^2} = \displaystyle\int \left(-\frac{1}{x^4}\right) dx = \frac{1}{3x^3} + c$

គេបាន $f(x) = x^2\left(\dfrac{1}{3x^3} + c\right) = \dfrac{1}{3x} + cx^2$

តែ $f(1) = 1 \Longleftrightarrow 1 = \dfrac{1}{3} + c \Longleftrightarrow c = \dfrac{2}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{2}{3}x^2}$

លំហាត់ទី ១០០. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}}\frac{x\sin x^2}{\sin x^2+\sin(\ln 6-x^2)}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $I=\displaystyle\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}}\frac{x\sin x^2}{\sin x^2+\sin(\ln 6-x^2)}dx$

តាង $t=x^2\Longrightarrow dt=2xdx$

បើ $x=\sqrt{\ln 2}\Longrightarrow t=\ln 2$ និង $x=\sqrt{\ln 3}\Longrightarrow t=\ln 3$

គេបាន $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\sin t}{\sin t+\sin(\ln 6-t)}dt$

$\Longleftrightarrow 2I=frac12\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\sin t}{\sin t+\sin(\ln 6-t)}dt \qquad (1)$

តាមលក្ខណៈ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

តាង $f(t)=\dfrac{\sin t}{\sin t+\sin(\ln 6-t)}$

$\Longrightarrow f(\ln 3+\ln 2-t)=f(\ln 6-t)=\dfrac{\sin(\ln 6-t)}{\sin(\ln 6-t)+\sin t}$

គេបាន $2I=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(t)dt=\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(\ln 6-t)dt=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\sin(\ln 6-t)}{\sin(\ln 6-t)+\sin t}dt \qquad (2)$

យក $(1)+(2)$ គេបាន $4I=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\sin t}{\sin t+\sin(\ln 6-t)}dt+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\sin(\ln 6-t)}{\sin(\ln 6-t)+\sin t}dt$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\sin t+\sin(\ln 6-t)}{\sin t+\sin(\ln 6-t)}dt$$

$$=\int_{\ln 2}^{\ln 3}1dt=\Big[t\Big]_{\ln 2}^{\ln 3}=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

គេបាន $4I=\ln\dfrac{3}{2}\Longleftrightarrow I=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{I=\displaystyle\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}}\frac{x\sin x^2}{\sin x^2+\sin(\ln 6-x^2)}dx=\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}}$

លំហាត់ទី ១០១. គេឱ្យ A ជាម៉ាទ្រីសការេ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $A^2=I$ ។ រកម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ A ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $A^2=I\Longleftrightarrow A^{-1}A^2=A^{-1}I\Longleftrightarrow A^{-1}I=A^{-1}\Longleftrightarrow A^{-1}=A$

ដូចនេះ $\boxed{A^{-1}=A}$

លំហាត់ទី ១០២. គេមានម៉ាទ្រីស $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$ ។

រកវ៉ង់នៃ $|A|$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $A = \begin{vmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1 - \sin^2\theta + \sin^2\theta + 1 + \sin^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 2 + 2\sin^2\theta = 2(1 + \sin^2\theta)$$

ដោយ $0 \le \sin^2\theta \le 1 \Longrightarrow 1 \le 1 + \sin^2\theta \le 2 \Longrightarrow 2 \le 2(1+\sin^2\theta) \le 4$

$\Longleftrightarrow 2 \le |A| \le 4$

ដូចនេះ $\boxed{2 \le |A| \le 4}$

លំហាត់ទី ១០៣. គេឱ្យ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រឯកតា និងមិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា។ បើ $\vec{u} = \vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}$ និង $\vec{v} = \vec{a}\times\vec{b}$

បង្ហាញថា $|\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{u}\cdot\vec{b}|$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\vec{v} = \vec{a}\times\vec{b} \Longrightarrow |\vec{v}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \quad (1)$

ដែល θ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ និង $0 < \theta < \pi$ ។

ដោយ$\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា គេបាន $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

តាម (1) គេបាន $|\vec{v}| = \sin\theta \qquad (2)$

គេមាន $\vec{u} = \vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b} = \vec{a} - \left(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\right)\vec{b} = \vec{a} - (1\cdot 1\cdot\cos\theta)\vec{b} = \vec{a} - \vec{b}\cos\theta$

$\Longrightarrow |\vec{u}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}\cos\theta|^2 = (\vec{a} - \vec{b}\cos\theta)(\vec{a} - \vec{b}\cos\theta)$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b}\cos\theta + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})\cos\theta + |\vec{b}|^2\cos^2\theta$$

$$= 1 - 2(\cos\theta)\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$$

នាំឱ្យ $|\vec{u}| = \sin\theta \qquad (3)$

តាម (2) និង (3) គេបាន $|\vec{v}| = |\vec{u}| \quad (4)$

ម្យ៉ាងទៀត $\vec{u}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})|\vec{b}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longrightarrow |\vec{u}\cdot\vec{b}| = 0 \quad (5)$

តាម (4) និង (5) គេបាន $|\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{u}\cdot\vec{b}|$

ដូចនេះ $\boxed{|\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{u}\cdot\vec{b}|}$

លំហាត់ទី ១០៤. គណនាផលបូក $\dfrac{1}{1!(n-1)!}+\dfrac{1}{3!(n-3)!}+\dfrac{1}{5!(n-5)!}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)!1!}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $S=\dfrac{1}{1!(n-1)!}+\dfrac{1}{3!(n-3)!}+\dfrac{1}{5!(n-5)!}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)!1!}$

គេបាន $n!\times S=\dfrac{n!}{1!(n-1)!}+\dfrac{n!}{3!(n-3)!}+\dfrac{n!}{5!(n-5)!}+\cdots+\dfrac{n!}{(n-1)!1!}$

$=C(n,1)+C(n,3)+C(n,5)+\cdots+C(n,n)$

តាង $P=C(n,0)+C(n,2)+C(n,4)+\cdots$

និង $L=C(n,1)+C(n,3)+C(n,5)+\cdots$

គេបាន $P+L=C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+C(n,3)+\cdots=(1+1)^n=2^n \quad (1)$

ហើយ $P-L=C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-C(n,3)+\cdots=(1-1)^n=0 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $P=L=2^{n-1}$

នាំឱ្យ គេបាន $n!\times S=2^{n-1}\iff S=\dfrac{2^{n-1}}{n!}$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1}{1!(n-1)!}+\dfrac{1}{3!(n-3)!}+\dfrac{1}{5!(n-5)!}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)!1!}=\dfrac{2^{n-1}}{n!}}$

លំហាត់ទី ១០៥. គេមាន $\sin^3 x\sin 3x=\sum_{m=0}^{n}C_m\cos(mx)$ ដែល $C_0,C_1,\cdots,C_n$ ជាចំនួនពិត និង $C_n\neq 0$ ។ រកតម្លៃនៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\Longrightarrow \sin^3 x=\dfrac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$

គេបាន $\sin^3 x\sin 3x=\dfrac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\sin 3x=\dfrac{1}{4}\left(3\sin x\sin 3x-\sin^2 3x\right)$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}(\cos 2x-\cos 4x)-\frac{1-\cos 6x}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{8}(3\cos 2x-3\cos 4x-1+\cos 6x)$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 4x+\frac{1}{8}\cos 6x$$

$$=-\frac{1}{8}\cos 0+0\cdot\cos x+\frac{3}{8}\cos 2x+0\cdot\cos 3x-\frac{3}{8}\cos 4x+0\cdot\cos 5x+\frac{1}{8}\cos 6x$$

$$=\sum_{m=0}^{6}C_m\cos(mx)$$

ដែល $C_0=-\dfrac{1}{8},C_1=0,C_2=\dfrac{3}{8},C_3=0,C_4=-\dfrac{3}{8},C_5=0,C_6=\dfrac{1}{8}$

ដូចនេះ $\boxed{n=6}$

លំហាត់ទី ១០៦. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\sin\frac{7\pi}{14}\sin\frac{9\pi}{14}\sin\frac{13\pi}{14}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $P = \sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\sin\frac{7\pi}{14}\sin\frac{9\pi}{14}\sin\frac{13\pi}{14}$

$$= \sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{14}\right)\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{14}\right)\sin\left(\pi-\frac{\pi}{14}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\times 1\times\sin\frac{5\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\right)^2$$

សម្គាល់

$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{14}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{14}\right)\right]^2$$

$$= \left(\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 = \left(\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\times\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}\times\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{3\pi}{7}}\right)^2 = \left(\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}}\right)^2$$

សម្គាល់

គេមាន $\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\Longleftrightarrow \cos a = \frac{\sin 2a}{2\sin a}$

$$= \frac{1}{64}\left[\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{7}\right)}\right]^2 = \frac{1}{64}\left(\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\sin\frac{7\pi}{14}\sin\frac{9\pi}{14}\sin\frac{13\pi}{14} = \frac{1}{64}}$

លំហាត់ទី ១០៧. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម $L = \sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $L = \sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{18}\right)$$

$$= \cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$$

$$= \frac{\sin\frac{2\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}\times\frac{\sin\frac{4\pi}{9}}{2\sin\frac{2\pi}{9}}\times\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{2\sin\frac{4\pi}{9}} = \frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}}$$

$$= \frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{\sin\frac{\pi}{9}}{8\sin\frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{L = \sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18} = \frac{1}{8}}$

លំហាត់ទី ១០៨. គេឱ្យ $A > 0, B > 0$ និង $A + B = \frac{\pi}{3}$ ។

រកតម្លៃអតិបរមានៃកន្សោម $y = \tan A\tan B$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $A + B = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \tan(A+B) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

ម្យ៉ាងទៀត $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} = \frac{\tan A + \frac{y}{\tan A}}{1-y}$

$\Longleftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\tan A + \frac{y}{\tan A}}{1-y} = \frac{\tan^2 A + y}{(1-y)\tan A}$

គេបាន $\tan^2 A + y = \sqrt{3}(1-y)\tan A$

$\Longrightarrow \tan^2 A - \sqrt{3}(1-y)\tan A + y = 0 \qquad (1)$

តាម $\Delta = 3(1-y)^2 - 4y = 3 - 6y + 3y^2 - 4y = 3y^2 - 10y + 3$

ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ $\tan A$ សមីការ (1) មានឫសជាចំនួនពិត នាំឱ្យ $\Delta \geq 0$ ។

គេបាន $3y^2 - 10y + 3 \geq 0 \Longleftrightarrow (y-3)\left(3y-1\right) \geq 0 \Longleftrightarrow y \leq \frac{1}{3} \ \vee \ y \geq 3$

តែ $A > 0, B > 0$ និង $A + B = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow 0 < A, B < \frac{\pi}{3} \Longrightarrow 0 < y = \tan A\tan B < 3$

គេបាន $y = \tan A\tan B \leq \frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃអតិបរមានៃកន្សោម } y = \tan A\tan B \text{ គឺ } \frac{1}{3}}$

លំហាត់ទី ១០៩. ដោះស្រាយសមីការ $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$ លើចន្លោះ $(-\pi, \pi)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\cos^7 x + \sin^4 x = 1 \Longleftrightarrow \cos^7 x = 1 - \sin^4 x$

នាំឱ្យ $\cos^7 x = (1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x) = \cos^2 x(1 + \sin^2 x)$

គេបាន $\cos^7 x - \cos^2 x(1 + \sin^2 x) = 0 \Longleftrightarrow \cos^2 x(\cos^5 x - 1 - \sin^2 x) = 0$

- បើ $\cos^2 x = 0 \Longleftrightarrow \cos x = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} \ \vee\ x = \dfrac{\pi}{2}$
- បើ $\cos^5 x - 1 - \sin^2 x = 0 \Longleftrightarrow \cos^5 x - \sin^2 x = 1 \quad (1)$

  គេដឹងថាតម្លៃអតិបរមានៃ $\sin x$ និង $\cos x$ គឺស្មើនឹង 1 នោះសមីការ (1) មានឫស កាលណា $\cos x = 1$ និង $\sin x = 0$

  គេបាន $x = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានឫស } x = -\dfrac{\pi}{2} \ \vee\ x = 0 \ \vee\ x = \dfrac{\pi}{2}}$

លំហាត់ទី ១១០. គេឱ្យ $A = \sin^2 x + \cos^4 x$ ។ ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃចំនួនពិត x រកវ៉ង់នៃ A ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $A = \sin^2 x + \cos^4 x = \sin^2 x + (1 - \sin^2 x)^2 = \sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x$

$$= \sin^4 x - \sin^2 x + 1 = \left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \le \sin x \le 1 \Longleftrightarrow 0 \le \sin^2 x \le 1$

$$-\frac{1}{2} \le \sin^2 x - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 0 \le \left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} \le \left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \le 1 \Longleftrightarrow \frac{3}{4} \le A \le 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{3}{4} \le A \le 1}$

លំហាត់ទី ១១១. ដោះស្រាយសមីការ $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$

$$(\sin x + \sin 3x) - 3\sin 2x = (\cos x + \cos 3x) - 3\cos 2x$$

សម្គាល់

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$2\sin 2x\cos x - 3\sin 2x = 2\cos 2x\cos x - 3\cos 2x$$

$$\sin 2x(2\cos x - 3) = \cos 2x(2\cos x - 3)$$

$\Longrightarrow \sin 2x = \cos 2x$ ព្រោះ $2\cos x - 3 = 2\left(\cos x - \frac{3}{2}\right) \neq 0$

គេបាន $\sin 2x = \cos 2x \Longrightarrow \tan 2x = 1 \Longrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការមានឫស } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}}$

លំហាត់ទី ១១២. រកតម្លៃអតិបរមានៃ $\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cdots \cos x_n$ បើគេដឹងថា $0 \leq x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \leq \frac{\pi}{2}$ និង $\cot x_1 \cot x_2 \cot x_3 \cdots \cot x_n = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\cot x_1 \cot x_2 \cot x_3 \cdots \cot x_n = 1$

$\Longrightarrow \frac{\cos x_1}{\sin x_1} \times \frac{\cos x_2}{\sin x_2} \times \frac{\cos x_3}{\sin x_3} \times \cdots \times \frac{\cos x_n}{\sin x_n} = 1$

$\Longrightarrow \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 = \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 \cdots \sin x_n$

តាង $y = \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cdots \cos x_n$

គេបាន $y^2 = \cos^2 x_1 \cos^2 x_2 \cos^2 x_3 \cdots \cos^2 x_n$

$$= (\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cdots \cos x_n)(\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cdots \cos x_n)$$

$$= (\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cdots \cos x_n)(\sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 \cdots \sin x_n)$$

$$= (\sin x_1 \cos x_1)(\sin x_2 \cos x_2)(\sin x_3 \cos x_3)\cdots(\sin x_n \cos x_n)$$

$$= \frac{\sin 2x_1}{2} \times \frac{\sin 2x_2}{2} \times \frac{\sin 2x_3}{2} \times \cdots \times \frac{\sin 2x_n}{2}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sin 2x_1 \sin 2x_2 \sin 2x_3 \cdots \sin 2x_n$$

តែ $0 \leq x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 \leq 2x_1, 2x_2, 2x_3, \ldots, 2x_n \leq \pi$

$\Longrightarrow 0 \leq \sin 2x_1, \sin 2x_2, \sin 2x_3, \ldots, \sin 2x_n \leq 1$

គេបាន $y^2 \leq \frac{1}{2^n} \Longrightarrow y \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃអតិបរមានៃ } \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cdots \cos x_n \text{ គឺ } \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}}$

លំហាត់ទី ១១៣. ប្រៀបធៀប $t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta}, t_2 = (\tan\theta)^{\cot\theta}, t_3 = (\cot\theta)^{\tan\theta}$ និង $t_4 = (\cot\theta)^{\cot\theta}$ ចំពោះ $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ នាំឱ្យ $0 < \tan\theta < 1 < \cot\theta$ គេបាន $t_1 < t_2$ និង $t_3 < t_4$

ម្យ៉ាងទៀត $0 < \tan\theta < 1, \cot\theta > 1 \Longrightarrow 0 < (\tan\theta)^{\cot\theta} < 1$ និង $(\cot\theta)^{\tan\theta} > 1$

គេបាន $t_2 < t_3$

ដូចនេះ $\boxed{t_1 < t_2 < t_3 < t_4}$

លំហាត់ទី ១១៤. គណនា $S = \sum_{k=1}^{13} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}\right)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S = \sum_{k=1}^{13} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}\right)}$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} \sum_{k=1}^{13} \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}\right) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{6}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}\right)}$$

សម្គាល់

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} \sum_{k=1}^{13} \left[\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(k-1)\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cot\frac{\pi}{4} - \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{13\pi}{6}\right)\right] = 2\left(\cot\frac{\pi}{4} - \cot\frac{29\pi}{12}\right)$$

$$= 2\left[1 - \cot\left(2\pi + \frac{5\pi}{12}\right)\right] = 2 - 2\cot\frac{5\pi}{12}$$

$$= 2 - 2\cot\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = 2 - 2 \times \frac{\cot\frac{\pi}{6} - \cot\frac{\pi}{4}}{\cot\frac{\pi}{6} + \cot\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2 - 2 \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 \times \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{4}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{2} = 2(\sqrt{3} - 1)$$

ដូចនេះ $\boxed{S = 2(\sqrt{3} - 1)}$

លំហាត់ទី ១១៥. គណនា $\left(1 + \cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + \cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1 + \cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1 + \cos\frac{7\pi}{8}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)$

$$= \left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left[1+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)\right]\left[1+\cos\left(\pi\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$= \left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \left(1-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{3\pi}{8} = \left[\sin\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\right]^2$$

$$= \left(\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)\frac{1}{8}}$

លំហាត់ទី ១១៦. សម្រួលកន្សោម

$3\left[\sin^4\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^4(3\pi+\alpha)\right]-2\left[\sin^6\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin^6(5\pi-\alpha)\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្រួលកន្សោម

$$3\left[\sin^4\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^4(3\pi+\alpha)\right]-2\left[\sin^6\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin^6(5\pi-\alpha)\right]$$

$$= 3\left\{\left[\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]^4+[\sin(2\pi+\pi+\alpha)]^4\right\}$$
$$-2\left\{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]^6+[\sin(4\pi+\pi+\alpha)]^6\right\}$$

$$= 3\left\{\left[-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]^4+[\sin(\pi+\alpha)]^4\right\}$$
$$-2\left\{[\cos(\alpha)]^6+[\sin(\pi+\alpha)]^6\right\}$$

$$= 3\left[(-\cos\alpha)^4+(-\sin\alpha)^4\right]-2\left[\cos^6\alpha+(-\sin\alpha)^6\right]$$

$$= 3(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)-2(\cos^6\alpha+\sin^6\alpha)$$

$$= 3(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)-2[(\cos^2\alpha)^3+(\sin^2\alpha)^3]$$

$$= 3(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)-2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)$$

$$= 3(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)-2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha)$$

$$= 3(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)-2(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$$

$$= \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$$

$$= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{3\left[\sin^4\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^4(3\pi+\alpha)\right]-2\left[\sin^6\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin^6(5\pi-\alpha)\right]=1}$

លំហាត់ទី ១១៧. រកតម្លៃនៃ θ ដែល $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 4\theta \end{vmatrix} = 0 \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាង $\Delta = \begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 4\theta \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 4\theta \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 4\sin 4\theta + 0 + 0 + \sin^2\theta + \cos^2\theta - 0$$

$$= 2 + 4\sin 4\theta$$

គេបាន $\Delta = 0 \Longleftrightarrow 2 + 4\sin 4\theta = 0$

$\Longleftrightarrow \sin 4\theta = -\frac{1}{2} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

នាំឱ្យ $4\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \Longleftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{24}$

ឬ $4\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \Longleftrightarrow \theta = \frac{11\pi}{24}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta = \frac{7\pi}{24} \text{ ឬ } \theta = \frac{11\pi}{24}}$

លំហាត់ទី ១១៨. បង្ហាញថា

ក. $(\sin 12^\circ)(\sin 48^\circ)(\sin 54^\circ) = \frac{1}{8}$

ខ. $16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{16\pi}{15} = 1$

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $(\sin 12^\circ)(\sin 48^\circ)(\sin 54^\circ) = \dfrac{1}{8}$

គេមាន $(\sin 12^\circ)(\sin 48^\circ)(\sin 54^\circ) = (\sin 12^\circ \sin 48^\circ)\sin 54^\circ$

$$= \frac{1}{2}[\cos(48^\circ - 12^\circ) - \cos(48^\circ + 12^\circ)]\cos(90^\circ - 54^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 36^\circ - \cos 60^\circ]\cos 36^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 36^\circ - \frac{1}{2}\right]\cos 36^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 36^\circ - \frac{1}{4}\cos 36^\circ \qquad (1)$$

គេមាន $2 \times 36^\circ = 72^\circ = 180^\circ - 108^\circ = 180 - 3 \times 36^\circ$

តាង $\alpha = 36^\circ$ គេបាន $\cos 2\alpha = \cos(180^\circ - 3\alpha) = -\cos 3\alpha$

គេបាន $2\cos^2\alpha - 1 = -(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$

$$4\cos^3\alpha + 2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha - 1 = 0$$

$$4\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - \cos\alpha - 1 = 0$$

$$4\cos^2\alpha(\cos\alpha + 1) - 2\cos\alpha(\cos\alpha + 1) - (\cos\alpha + 1) = 0$$

$$(\cos\alpha + 1)(4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1) = 0$$

តែ $\cos\alpha = \cos 36^\circ \neq -1 \Longrightarrow \cos\alpha + 1 \neq 0$

គេបាន $4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0$

តាម $\Delta' = 1 + 4 = 5 \Longrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

តែ $\cos\alpha = \cos 36^\circ > 0 \Longrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

ហេតុនេះ $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ តាម (1) គេបាន

$$(\sin 12^\circ)(\sin 48^\circ)(\sin 54^\circ) = \frac{1}{2}\cos^2 36^\circ - \frac{1}{4}\cos 36^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{16} - \frac{\sqrt{5}+1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \qquad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{(\sin 12^\circ)(\sin 48^\circ)(\sin 54^\circ) = \dfrac{1}{8}}$

ខ. បង្ហាញថា $16\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}\cos\dfrac{16\pi}{15} = 1$

តាង $L = 16\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}\cos\dfrac{16\pi}{15}$

តាម $\sin 2a = 2\sin a\cos a \Longrightarrow \cos a = \dfrac{\sin 2a}{a}$

គេបាន $L = 16 \times \dfrac{\sin\frac{4\pi}{15}}{2\sin\frac{2\pi}{15}} \times \dfrac{\sin\frac{8\pi}{15}}{2\sin\frac{4\pi}{15}} \times \dfrac{\sin\frac{16\pi}{15}}{2\sin\frac{8\pi}{15}} \times \dfrac{\sin\frac{32\pi}{15}}{2\sin\frac{16\pi}{15}}$

$$= 16 \times \frac{\sin\frac{32\pi}{15}}{16\sin\frac{2\pi}{15}} = \frac{\sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{15}\right)}{\sin\frac{2\pi}{15}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{15}}{\sin\frac{2\pi}{15}} = 1 \qquad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{16\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{16\pi}{15} = 1}$

លំហាត់ទី ១១៩. រកគ្រប់តម្លៃនៃ $x \in (-\pi, \pi)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $8^{1+|\cos x|+|\cos^2 x|+|\cos^3 x|+\cdots} = 4^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $8^{1+|\cos x|+|\cos^2 x|+|\cos^3 x|+\cdots} = 4^3$

$$2^{3(1+|\cos x|+|\cos^2 x|+|\cos^3 x|+\cdots)} = 2^6$$

$$3(1+|\cos x|+|\cos^2 x|+|\cos^3 x|+\cdots) = 6$$

$$1+|\cos x|+|\cos^2 x|+|\cos^3 x|+\cdots = 2$$

$$\frac{1}{1-|\cos x|} = 2 \qquad (\text{ ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ })$$

$$1-|\cos x| = \frac{1}{2} \iff |\cos x| = \frac{1}{2} \iff \cos x = \pm\frac{1}{2}$$

ចំពោះ $x \in (-\pi, \pi)$ គេបាន $x = \frac{\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = -\frac{2\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x = \frac{\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = -\frac{2\pi}{3}}$

លំហាត់ទី ១២០. បង្ហាញថា $\tan x + 2\tan 2x + 4\tan 4x + 8\cot 8x = \cot x$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេដឹងថា $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \Longrightarrow \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x} = \cot 2x \Longrightarrow \cot x - \tan x = 2\cot 2x$

គេបាន $\tan x + 2\tan x + 4\tan 4x + 8\cot 8x$

$$= \tan x + 2\tan 2x + 4\tan 4x + 4\times 2\cot(2\cdot 4x)$$

$$= \tan x + 2\tan 2x + 4\tan 4x + 4(\cot 4x - \tan 4x)$$

$$= \tan x + 2\tan 2x + 4\tan 4x + 4\cot 4x - 4\tan 4x$$

$$= \tan x + 2\tan 2x + 4\cot 4x$$

$$= \tan x + 2\tan 2x + 2\times 2\cot(2\cdot 2x)$$

$$= \tan x + 2\tan 2x + 2(\cot 2x - \tan 2x)$$

$$= \tan x + 2\tan 2x + 2\cot 2x - 2\tan 2x$$

$$= \tan x + 2\cot 2x$$

$$= \tan x + (\cot x - \tan x) = \cot x$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\tan x + 2\tan 2x + 4\tan 4x + 8\cot 8x = \cot x}$

លំហាត់ទី ១២១. រកតម្លៃនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានតូចបំផុត x (គិតជាដឺក្រេ) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\tan(x + 100^\circ) = \tan(x + 50^\circ)\tan x\tan(x - 50^\circ)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\tan(x + 100^\circ) = \tan(x + 50^\circ)\tan x\tan(x - 50^\circ)$

$$\frac{\tan(x + 100^\circ)}{\tan x} = \tan(x + 50^\circ)\tan(x - 50^\circ)$$

$$\frac{\sin(x + 100^\circ)\cos x}{\cos(x + 100^\circ)\sin x} = \frac{\sin(x + 50^\circ)\sin(x - 50^\circ)}{\cos(x + 50^\circ)\cos(x - 50^\circ)}$$

$$\frac{\sin(2x + 100^\circ) + \sin 100^\circ}{\sin(2x + 100^\circ) - \sin 100^\circ} = \frac{\cos 100^\circ - \cos 2x}{\cos 100^\circ + \cos 2x}$$

$$\frac{\sin(2x + 100^\circ) - \sin 100^\circ + 2\sin 100^\circ}{\sin(2x + 100^\circ) - \sin 100^\circ} = \frac{\cos 100^\circ + \cos 2x - 2\cos 2x}{\cos 100^\circ + \cos 2x}$$

$$1 + \frac{2\sin 100^\circ}{\sin(2x + 100^\circ) - \sin 100^\circ} = 1 + \frac{-2\cos 2x}{\cos 100^\circ + \cos 2x}$$

$$\frac{2\sin 100^\circ}{\sin(2x + 100^\circ) - \sin 100^\circ} = \frac{-2\cos 2x}{\cos 100^\circ + \cos 2x}$$

$$\frac{\sin(2x + 100^\circ) - \sin 100^\circ}{2\sin 100^\circ} = \frac{\cos 100^\circ + \cos 2x}{-2\cos 2x}$$

$$\frac{\sin(2x + 100^\circ)}{\sin 100^\circ} - 1 = \frac{-\cos 100^\circ}{\cos 2x} - 1$$

$$\frac{\sin(2x + 100^\circ)}{\sin 100^\circ} = \frac{-\cos 100^\circ}{\cos 2x}$$

$$\sin(2x + 100^\circ)\cos 2x = -2\sin 100^\circ\cos 100^\circ$$

$$\frac{1}{2}[\sin(2x + 100^\circ + 2x) + \sin(2x + 100^\circ - 2x)] = -\sin 100^\circ\cos 100^\circ$$

$$\sin(4x + 100^\circ) + \sin 100^\circ = -2\sin 100^\circ\cos 100^\circ = -\sin 200^\circ$$

$$\sin(4x + 10^\circ + 90^\circ) + \sin(90^\circ + 10^\circ) = -\sin(180^\circ + 20^\circ)$$

$$\cos(4x + 10^\circ) + \cos 10^\circ = -(-\sin 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

$$\cos(4x + 10^\circ) = \sin 20^\circ - \cos 10^\circ = \sin 20^\circ - \sin 80^\circ$$

$$\cos(4x+10^\circ)=2\sin\frac{20^\circ-80^\circ}{2}\cos\frac{20^\circ+80^\circ}{2}=2\sin(-30^\circ)\cos 50^\circ$$

$$\cos(4x+10^\circ)=-2\sin 30^\circ\cos 50^\circ=-2\cdot\frac{1}{2}\cos 50^\circ=-\cos 50^\circ$$
$$=\cos(180^\circ-50^\circ)=\cos 130^\circ$$

គេបាន $\cos(4x+10^\circ)=\cos 130^\circ \Longrightarrow 4x+10^\circ=130^\circ \Longrightarrow x=30^\circ$

ដូចនេះ $\boxed{x=30^\circ}$

លំហាត់ទី ១២២. ស្វ៊ីត (a_n) បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ $n=1,2,3,\dots$ ។

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)=2^n+1-\frac{1}{n+1} \text{ ។}$$

ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $\sum_{k=1}^{n}a_k$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)=2^n+1-\frac{1}{n+1}$ $\quad(1)$

តាង $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)$

$$\Longrightarrow S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)\right]+\frac{1}{n+1}\left(a_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=S_n+\frac{1}{n+1}\left(a_{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

នាំឱ្យ $a_{n+1}=(n+1)(S_{n+1}-S_n)-\frac{1}{n+2}$

តាម (1) គេបាន $S_n=2^n+1-\frac{1}{n+1}\Longrightarrow S_{n+1}=2^{n+1}+1-\frac{1}{n+2}$

នាំឱ្យ $S_{n+1}-S_n=2^{n+1}+1-\frac{1}{n+2}-2^n-1+\frac{1}{n+1}=2^n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

គេបាន $a_{n+1}=(n+1)\left(2^n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{n+2}$

$$=(n+1)2^n+n-\frac{n+1}{n+2}-\frac{1}{n+2}=(n+1)2^n$$

នាំឱ្យ $a_{n+1}=(n+1)2^n$ ដែល $n=1,2,3\dots$

គេបាន $a_n=n2^{n-1}$ ដែល $n=2,3,4,\dots$ ។

ចំពោះ $n=1$ តាម (1) គេបាន $a_1+\frac{1}{2}=2+1-\frac{1}{2}\Longleftrightarrow a_1=2$

ដូចនេះ $\boxed{a_1=2 \text{ និង } a_n=n2^{n-1}\ , n\geq 2}$

ខ. គណនា $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$

តាង $L_n=\sum\limits_{k=1}^{n}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$$=2+2\times 2+3\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+n\times 2^{n-1}\quad (2)$$

$$\Longrightarrow 2L_n=2\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)2^{n-1}+n\times 2^n\quad (3)$$

យក (2) − (3) គេបាន

$$L_n-2L_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\times 2^n$$

$$-L_n=\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-n\times 2^n=2(2^{n-1}-1)-n\times 2^n=2^n-2-n\times 2^n$$

សម្គាល់

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$$S_n=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1},\quad q\neq 1$$

គេបាន $L_n=-2^n+2+n\times 2^n=(n-1)2^n+2$

ដូចនេះ $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=(n-1)2^n+2}$

លំហាត់ទី ១២៣. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 3}\left[\log_a\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\right)\right]\quad , a>0, a\neq 1$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\right)^2=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\right]^2$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\right)^2=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)^2=\frac{1}{9}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\frac{1}{9}}$

ខ. $$\lim_{x\to3}\left[\log_a\left(\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\right)\right]=\lim_{x\to3}\left[\log_a\left(\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to3}\left[\log_a\left(\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x+6)-9}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to3}\left[\log_a\left(\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to3}\left[\log_a\left(\sqrt{x+6}+3\right)\right]=\log_a 6$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to3}\left[\log_a\left(\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}\right)\right]=\log_a 6}$

គ. $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}(1+\cos x+\cos^2 x)}{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cos\frac{x}{2}\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{2\cos\frac{x}{2}\cos x}\right)$$
$$=1\times\frac{1+1+1}{2}=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}=\frac{3}{2}}$

លំហាត់ទី ១២៤. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to1}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^r-1}{x-1}$

ខ. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)+2\left(\sum_{k=1}^{n-1}k\right)+3\left(\sum_{k=1}^{n-2}k\right)+\cdots+n\right]$

គ. $\lim_{n\to+\infty}\prod_{r=3}^{n}\left(\frac{r^3-1}{r^3+1}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim\limits_{x\to1}\sum\limits_{r=1}^{n}\dfrac{x^r-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\sum\limits_{r=1}^{n}\dfrac{(x-1)(x^{r-1}+x^{r-1}+\cdots+1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1}\sum_{r=1}^{n}\left(x^{r-1}+x^{r-2}+\cdots+x+1\right)$$

$$=\sum_{r=1}^{n}r=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\sum\limits_{r=1}^{n}\dfrac{x^r-1}{x-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}}$

ខ. តាង $S_n=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}k\right)+2\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}k\right)+3\left(\sum\limits_{k=1}^{n-2}k\right)+\cdots+n$

និង $a_{r+1}=(r+1)\sum\limits_{k=1}^{n-r}k=(r+1)[1+2+3+\cdots+(n-r)]$

$$=(r+1)\times\frac{(n-r)[(n-r)+1]}{2}=\frac{1}{2}(r+1)(n-r)(n-r+1)$$

$$=\frac{1}{2}(r+1)[(n-r)^2+(n-r)]=\frac{1}{2}(r+1)(n^2-2nr+r^2+n-r)$$

$$=\frac{1}{2}(r+1)[r^2-(2n+1)r+n^2+n]$$

$$=\frac{1}{2}[r^3-(2n+1)r^2+(n^2+n)r+r^2-(2n+1)r+n^2+n]$$

$$=\frac{1}{2}[r^3-2nr^2+(n^2-n-1)r+n^2+n]$$

គេបាន $S_n=\sum\limits_{r=0}^{n-1}a_{r+1}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{r=0}^{n-1}[r^3-2nr^2+(n^2-n-1)r+n^2+n]$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{r=0}^{n-1}r^3-2n\sum_{r=0}^{n-1}r^2+(n^2-n-1)\sum_{r=0}^{n-1}r+\sum_{r=0}^{n-1}(n^2+n)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2-2n\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+(n^2-n-1)\times\frac{n(n-1)}{2}\right.$$

$$\left.+(n^2+n)\times(n-1)\right\}$$

$$=\frac{n-1}{24}\left[3n^2(n-1)-4n^2(2n-1)+6n(n^2-n-1)+12(n^2+n)\right]$$

$$=\frac{n-1}{24}\left(3n^3-3n^2-8n^3+4n^2+6n^3-6n^2-6n+12n^2+12n\right)$$

$$= \frac{n-1}{24} \times (n^3 + 7n^2 + 6n)$$

$$= \frac{1}{24} n(n-1)(n^2 + 7n + 6)$$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(n^2+7n+6)}{24n^4} = \frac{1}{24}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) + 3\left(\sum_{k=1}^{n-2} k\right) + \cdots + n\right] = \frac{1}{24}}$

គ. គេមាន $\frac{r^3-1}{r^3+1} = \frac{(r-1)(r^2+r+1)}{(r+1)(r^2-r+1)} = \frac{r-1}{r+1} \times \frac{r^2+r+1}{r^2-r+1}$

$$= \frac{r-1}{r+1} \times \frac{r^2+r+1}{(r-1)^2+(r-1)+1}$$

គេបាន $\prod\limits_{r=3}^{n} \left(\frac{r^3-1}{r^3+1}\right) = \prod\limits_{r=3}^{n} \left[\frac{r-1}{r+1} \times \frac{r^2+r+1}{(r-1)^2+(r-1)+1}\right]$

$$= \prod_{r=3}^{n} \left(\frac{r-1}{r+1}\right) \times \prod_{r=3}^{n} \frac{r^2+r+1}{(r-1)^2+(r-1)+1}$$

ដោយ $\prod\limits_{r=3}^{n} \left(\frac{r-1}{r+1}\right) = \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{5}{7} \times \cdots \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1}$

$$= \frac{2\times 3}{n(n+1)} = \frac{6}{n(n+1)} = \frac{6}{n^2+n}$$

និង $\prod\limits_{r=3}^{n} \frac{r^2+r+1}{(r-1)^2+(r-1)+1} = \frac{3^2+3+1}{2^2+2+1} \times \frac{4^2+4+1}{3^2+3+1} \times \cdots \times \frac{n^2+n+1}{(n-1)^2+(n-1)+1}$

$$= \frac{n^2+n+1}{2^2+2+1} = \frac{n^2+n+1}{7}$$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{r=3}^{n} \left(\frac{r^3-1}{r^3+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{6}{n^2+n} \times \frac{n^2+n+1}{7}\right) = \frac{6}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{r=3}^{n} \left(\frac{r^3-1}{r^3+1}\right) = \frac{6}{7}}$

លំហាត់ទី ១២៥. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n} \lfloor k^2 x \rfloor\right)$ ដែល $\lfloor x \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់ធំបំផុត $\le x$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $k^2x - 1 < \lfloor k^2x \rfloor \le k^2x \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(k^2x-1\right) < \sum_{k=1}^{n}\lfloor k^2x \rfloor \le \sum_{k=1}^{n}(k^2x) \qquad (1)$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n}\left(k^2x-1\right) = x\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}1 = x \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n$

និង $\sum_{k=1}^{n}(k^2x) = x\sum_{k=1}^{n}k^2 = x \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

តាម (1) គេបាន $x \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n < \sum_{k=1}^{n}\lfloor k^2x \rfloor \le x \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n^3}\left[x \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n\right] < \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\lfloor k^2x \rfloor \le \frac{1}{n^3}\left[x \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$\Longrightarrow x \times \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\lfloor k^2x \rfloor \le x \times \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{x(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{1}{n^2}\right] < \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\lfloor k^2x \rfloor\right) \le \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{x(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{3} < \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\lfloor k^2x \rfloor\right) \le \frac{x}{3} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\lfloor k^2x \rfloor\right) = \frac{x}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\lfloor k^2x \rfloor\right) = \frac{x}{3}}$

លំហាត់ទី ១២៦. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទំនាក់ទំនង $\sin 2a = 2\sin a\cos a \Longrightarrow \cos a = \frac{\sin 2a}{\sin a}$

យក $a = \frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \frac{x}{2^3}, \ldots, \frac{x}{2^n}$

គេបាន $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

$$= \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}} \times \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}} \times \frac{\sin\frac{x}{2^2}}{2\sin\frac{x}{2^3}} \times \frac{\sin\frac{x}{2^{n-2}}}{2\sin\frac{x}{2^{n-1}}} \times \frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \times \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{n^n}}\right)$

$$= \frac{\sin x}{x}\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right] = \frac{\sin x}{x}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin x}{x}}$

លំហាត់ទី ១២៧. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{10^2}+\frac{133}{10^3}+\cdots+\frac{5^n+2^n}{10^n}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{10^2}+\frac{133}{10^3}+\cdots+\frac{5^n+2^n}{10^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{5^k+2^k}{10^k}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}{1-\frac{1}{5}}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\right] = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{10^2}+\frac{133}{10^3}+\cdots+\frac{5^n+2^n}{10^n}\right) = \frac{5}{4}}$

លំហាត់ទី ១២៨. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\tan\theta+\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right)$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$

$$= \frac{\cos^2 x}{2\sin x\cos x}-\frac{\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2}\cot x-\frac{1}{2}\tan x$$

$\Longrightarrow \tan x = \cot x - 2\cot 2x$ យក $x = \theta, \frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2^2}, \dots, \frac{\theta}{2^n}$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\tan\theta + \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[(\cot\theta - 2\cot 2\theta) + \left(\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} - \cot\theta\right) + \left(\frac{1}{2^2}\cot\frac{\theta}{2^2} - \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \left(\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} - 2\cot 2\theta\right]$$

$$= -2\cot\theta + \frac{1}{\theta}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{\theta}{2^n}}{\tan\frac{\theta}{2^n}}\right) = -2\cot\theta + \frac{1}{\theta}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\tan\theta + \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{\theta} - 2\cot\theta}$

លំហាត់ទី ១២៩. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\lfloor -\pi^2\rfloor x^2) - x^2\tan(\lfloor -\pi^2\rfloor)}{\sin^2 x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\lfloor -\pi^2\rfloor = \lfloor -9.8696\dots\rfloor = -10$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\lfloor -\pi^2\rfloor x^2) - x^2\tan(\lfloor -\pi^2\rfloor)}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(-10x^2) - x^2\tan(-10)}{\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\tan(10x^2) + x^2\tan 10}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-\tan(10x^2)}{x^2} + \frac{x^2\tan(10)}{x^2}\right] \times \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[-10\times\frac{\tan(10x^2)}{10x^2} + \tan(10)\right]\times 1$$

$$= -10 + \tan(10)$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\lfloor -\pi^2\rfloor x^2) - x^2\tan(\lfloor -\pi^2\rfloor)}{\sin^2 x} = \tan(10) - 10}$

លំហាត់ទី ១៣០. គណនាលីមីត $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\left[\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)\right]}{\sqrt{3}h(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\left[\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)\right]}{\sqrt{3}h(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left[\sqrt{3}\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\cos h+\sin h\cos\dfrac{\pi}{6}\right)-\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\cos h-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin h\right)\right]}{\sqrt{3}h(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left[\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\cos h+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin h\right)-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos h-\dfrac{1}{2}\sin h\right)\right]}{\sqrt{3}h(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos h+\dfrac{3}{2}\sin h-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos h+\dfrac{1}{2}\sin h\right)}{\sqrt{3}h(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4\sin h}{\sqrt{3}h(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\times\frac{4}{\sqrt{3}(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}\right)=\frac{4}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\left[\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)\right]}{\sqrt{3}h(\sqrt{3}\cos h-\sin h)}=\dfrac{4}{3}}$

លំហាត់ទី ១៣១. គេឱ្យ $f(x)=x-\lfloor x\rfloor$ ។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[f(x)]^{2n}-1}{[f(x)]^{2n}+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $0\le x-\lfloor x\rfloor<1\Longleftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ 0\le f(x)<1$ នាំឱ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x)]^{2n}=0$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[f(x)]^{2n}-1}{[f(x)]^{2n}+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[f(x)]^{2n}-1}{[f(x)]^{2n}+1}=-1}$

លំហាត់ទី ១៣២. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{729^x-243^x-81^x+9^x+3^x-1}{x^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{729^x-243^x-81^x+9^x+3^x-1}{x^3}$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{x\to 0}\frac{3^{6x}-3^{5x}-3^{4x}+3^{2x}+3^x-1}{x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{3^{5x}(3^x-1)-3^{2x}(3^{2x}-1)+(3^x-1)}{x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{3^{5x}(3^x-1)-3^{2x}(3^x-1)(3^x+1)+(3^x-1)}{x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(3^x-1)(3^{5x}-3^{3x}-3^{2x}+1)}{x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(3^x-1)[3^{3x}(3^{2x}-1)-(3^{2x}-1)]}{x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(3^x-1)(3^{2x}-1)(3^{3x}-1)}{x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3^x-1}{x}\times\frac{3^{2x}-1}{2x}\times\frac{3^{3x}-1}{3x}\times 2\times 3\right]\\
&=6\ln 3\times\ln 3\times\ln 3=6\ln^3 3
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{729^x-243^x-81^x+9^x+3^x-1}{x^3}=6\ln^3 3}$

លំហាត់ទី ១៣៣. គេឱ្យ α និង β ជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2+bx+c=0$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\alpha}(1+ax^2+bx+c)^{\frac{1}{x-\alpha}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន α និង β ជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទី២ $ax^2+bx+c=0$

$\Longrightarrow ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\alpha}(1+ax^2+bx+c)^{\frac{1}{x-\alpha}}=\lim\limits_{x\to\alpha}\left[1+(ax^2+bx+c)\right]^{\frac{1}{x-\alpha}}$

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{x\to\alpha}\left\{\left[1+(ax^2+bx+c)\right]^{\frac{1}{ax^2+bx+c}}\right\}^{\frac{ax^2+bx+c}{x-\alpha}}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{ax^2+bx+c}{x-\alpha}}=e^{\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{a(x-\alpha)(x-\beta)}{x-\alpha}}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to\alpha}a(x-\beta)}=e^{a(\alpha-\beta)}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\alpha}(1+ax^2+bx+c)^{\frac{1}{x-\alpha}}=e^{a(\alpha-\beta)}}$

លំហាត់ទី ១៣៤. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$, $a\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

គ. $\lim_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$, $a\neq 0$

ឃ. $\lim_{x\to 0}(\cos x+a\sin bx)^{\frac{a}{x}}$

ង. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

ច. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^4+x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\frac{1-\cos(x+1)}{(x+1)^2}}$

ឆ. $\lim_{n\to +\infty}\left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left[1+\left(\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)\right]^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\left\{\left[1+\frac{1}{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right\}^{\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\times\frac{1}{x-a}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\times\frac{1}{x-a}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{(x-a)\sin a}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\times\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin a}\right)}=e^{\frac{\cos a}{\sin a}}=e^{\cot a}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=e^{\cot a}}$

ខ. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x+2\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1-\tan x}{2\tan x}}\right)^{\frac{1-\tan x}{2\tan x}}\right]^{\frac{2\tan x}{1-\tan x}\times\frac{1}{\sin x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\tan x}{1-\tan x}\times\frac{1}{\sin x}\right)}$$

$$= e^{\lim_{x \to 0}\left(\frac{2\sin x}{\cos x - \sin x} \times \frac{1}{\sin x}\right)}$$

$$= e^{\lim_{x \to 0}\left(\frac{2}{\cos x - \sin x}\right)} = e^2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^2}$

គ. $\lim_{x \to a}\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}} = \lim_{x \to a}\left(1 + 1 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}} = \lim_{x \to a}\left(1 + \frac{a-x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}}$

$$= \lim_{x \to a}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{a}{a-x}}\right)^{\frac{a}{a-x}}\right]^{\frac{a-x}{a}\times\tan\frac{\pi x}{2a}}$$

$$= e^{\lim_{x \to a}\left(\frac{a-x}{a} \times \tan\frac{\pi x}{2a}\right)} \qquad (1)$$

- គណនា $\lim_{x \to a}\left(\frac{a-x}{a} \times \tan\frac{\pi x}{2a}\right)$

  តាង $t = a - x$ នោះបើ $x \longrightarrow a \Longrightarrow t \longrightarrow 0$

  គេបាន $\lim_{x \to a}\left(\frac{a-x}{a} \times \tan\frac{\pi x}{2a}\right) = \lim_{t \to 0}\left[\frac{t}{a} \times \tan\left(\frac{\pi}{2a}(a-t)\right)\right]$

$$= \lim_{t \to 0}\left[\frac{t}{a} \times \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2a}\right)\right]$$

$$= \lim_{t \to 0}\left(\frac{t}{a} \times \cot\frac{\pi t}{2a}\right) = \lim_{t \to 0}\left(\frac{t}{a} \times \frac{\cos\frac{\pi t}{2a}}{\sin\frac{\pi t}{2a}}\right)$$

$$= \lim_{t \to 0}\left(\frac{\frac{\pi t}{2a}}{\sin\frac{\pi t}{2a}} \times \frac{\cos\frac{\pi t}{2a}}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន $\lim_{x \to a}\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}} = e^{\frac{2}{\pi}}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to a}\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}} = e^{\frac{2}{\pi}}}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{a}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x + a\sin bx - 1)]^{\frac{a}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+(\cos x + b\sin bx - 1))^{\frac{1}{\cos x + a\sin bx - 1}}\right]^{\frac{a}{x}\times(\cos x + a\sin bx - 1)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^2\sin bx - a(1-\cos x)}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(a^2b\times\frac{\sin bx}{bx} - a\times\frac{1-\cos x}{x}\right)} = e^{a^2b}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + a\sin bx)^{\frac{a}{x}} = e^{a^2b}}$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\sin x - x}}\right)^{\frac{x}{\sin x - x}}\right]^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\times\frac{\sin x - x}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x-\sin x}\times\frac{\sin x - x}{x}\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{-x}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \frac{1}{e}}$

ច. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^4+x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\frac{1-\cos(x+1)}{(x+1)^2}} = \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^4+x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\frac{2\sin^2\left(\frac{x+1}{2}\right)}{(x+1)^2}}$

$$= \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^4+x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\left(\frac{\sin\frac{x+1}{2}}{\frac{x+1}{2}}\right)^2\times\frac{2}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^4+x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\frac{1-\cos(x+1)}{(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}}$

ឆ. $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to +\infty}\left(1+\cos\frac{x}{n}-1\right)^n$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\cos\frac{x}{n}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{x}{n}-1}}\right]^{\frac{\cos\frac{x}{n}-1}{n}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\cos\frac{x}{n}-1\right)} = e^{-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\times x} = e^0 = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = 1}$

លំហាត់ទី ១៣៥. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-9x+20}{x-\lfloor x\rfloor}$ ដែល $\lfloor x\rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់ធំបំផុត $\leq x$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-9x+20}{x-\lfloor x\rfloor} = \lim\limits_{x\to5}\frac{(x-4)(x-5)}{x-\lfloor x\rfloor}$

លីមីតខាងឆ្វេង $\lim\limits_{x\to5^-}\frac{(x-4)(x-5)}{x-\lfloor x\rfloor} = \lim\limits_{h\to0}\frac{(5-h-4)(5-h-5)}{(5-h)-\lfloor 5-h\rfloor} \quad (h>0)$

$= \lim\limits_{h\to0}\frac{(1-h)(-h)}{5-h-4} = \lim\limits_{h\to0}\frac{h(h-1)}{1-h} = 0$

លីមីតខាងស្តាំ $\lim\limits_{x\to5^+}\frac{(x-4)(x-5)}{x-\lfloor x\rfloor} = \lim\limits_{h\to0}\frac{(5+h-4)(5+h-5)}{(5+h)-\lfloor 5+h\rfloor} \quad (h>0)$

$= \lim\limits_{h\to0}\frac{(1-h)(h)}{5+h-5} = \lim\limits_{h\to0}\frac{h(1-h)}{h} = \lim\limits_{h\to0}(1-h) = 1$

ដោយ លីមីតខាងឆ្វេង $\neq$ លីមីតខាងស្តាំ

គេបាន អនុគមន៍ $\frac{x^2-9x+20}{x-\lfloor x\rfloor}$ គ្មានលីមីតត្រង់ 5 ទេ។

លំហាត់ទី ១៣៦. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\{x\}+\{2x\}+\{3x\}+\cdots+\{nx\}}{n^2}$

ដែល $\{k\} = k-\lfloor k\rfloor$ ផ្នែកទសភាគនៃ k ។

ដំណោះស្រាយ

គេដឹងថា $0\leq\{rx\}<1$ ចំពោះ $r=1,2,3,\dots,n$

គេបាន $0\leq\sum\limits_{r=1}^{n}\{rx\}<\sum\limits_{r=1}^{n}1 \Longrightarrow 0\leq\sum\limits_{r=1}^{n}\{rx\}<n \Longrightarrow 0\leq\frac{\sum\limits_{r=1}^{n}\{rx\}}{n^2}<\frac{1}{n}$

$$\Longrightarrow 0\leq\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{r=1}^{n}\{rx\}}{n^2}<\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow 0\leq\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{r=1}^{n}\{rx\}}{n^2}<0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{r=1}^{n}\{rx\}}{n^2}=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\{x\}+\{2x\}+\{3x\}+\cdots+\{nx\}}{n^2}=0}$

លំហាត់ទី ១៣៧. បើ $5^{1+x}+5^{1-x}, \frac{a}{2}$ និង 25^x+25^{-x} ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វីតនព្វន្ត បង្ហាញថា $a\ge 12$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $5^{1+x}+5^{1-x}, \frac{a}{2}, 25^x+25^{-x}$ ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $2\times\frac{a}{2}=\left(5^{1+x}+5^{1-x}\right)+\left(25^x+25^{-x}\right)$

$$a=5\cdot 5^x+5\cdot 5^{-x}+5^{2x}+5^{-2x}$$

តាង $t=5^x\implies t>0$

គេបាន $a=5t+\frac{5}{t}+t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+5\left(t+\frac{1}{t}\right)$

$$=\left[\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2\right]+5\left[\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+2\right]$$

$$=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+5\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+12\ge 12$$

ដូចនេះ $\boxed{a\ge 12}$

លំហាត់ទី ១៣៨. ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមានខុសពីមួយ x,y,z បើ

$$1, \log_y x, \log_z y, -15\log_x z$$

ជាតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ បង្ហាញថា $x=z^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $1, \log_y x, \log_z y, -15\log_x z$ ជាតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ

គេបាន $\log_y x=1+d\implies x=y^{1+d}$

$$\log_z y=1+2d\implies y=z^{1+2d}$$

$$-15\log_x z=1+3d\implies z=x^{-(1+3d)/15}$$

គេបាន $x=y^{1+d}=(z^{1+2d})^{1+d}=z^{(1+d)(1+2d)}=\left(x^{-(1+3d)/15}\right)^{(1+d)(1+2d)}$

$$=x^{-(1+d)(1+2d)(1+3d)/15}$$

នាំឱ្យ $1=\frac{(1+d)(1+2d)(1+3d)}{15}$

$$(1+d)(1+2d)(1+3d)=-15$$

$$6d^3+11d^2+6d+16=0$$

$(d+2)(6d^2-d+8)=0$ ដោយ $6d^2-d+8>0\ \forall d\in\mathbb{R}$

គេបាន $d + 2 = 0 \Longleftrightarrow d = -2$ នាំឱ្យ $z = x^{5/15} = x^{1/3} \Longleftrightarrow x = z^3$

ដូចនេះ $\boxed{x = z^3}$

លំហាត់ទី ១៣៩. គេមានបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត និង $abc = 4$ ។ រកតម្លៃអប្បបរមានៃ b ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ គេបាន $a = b - d$ និង $c = b + d$

គេមាន $4 = abc = (b - d)b(b + d) = b(b^2 - d^2) = b^3 - bd^2$

$\Longrightarrow b^3 = 4 + bd^2 \geq 4$ ព្រោះ $b > 0, d^2 \geq 0$

គេបាន $b^3 \geq 4 \Longrightarrow b \geq \sqrt[3]{4}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃអប្បបរមានៃ } b \text{ គឺ } \sqrt[3]{4}}$

លំហាត់ទី ១៤០. គណនាផលបូក $\dfrac{1^4}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^4}{3 \cdot 5} + \dfrac{3^4}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{n^4}{(2n-1)(2n+1)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $$a_k = \frac{k^4}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4} \times \frac{4k^4}{4k^2-1} = \frac{1}{4} \times \frac{4k^4 - k^2 + k^2}{4k^2-1}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{k^2(4k^2-1) + k^2}{4k^2-1} = \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4} \times \frac{k^2}{4k^2-1}$$

$$= \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16} \times \frac{4k^2 - 1 + 1}{4k^2-1} = \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{4k^2-1}$$

$$= \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

គេបាន $$\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \frac{3^4}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{32}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}n + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{16} + \frac{n}{16} + \frac{n}{16(2n+1)}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1^4}{1\cdot 3} + \frac{2^4}{3\cdot 5} + \frac{3^4}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n^2(n+1)^2}{16} + \frac{n}{16} + \frac{n}{16(2n+1)}}$

លំហាត់ទី ១៤១. រកតម្លៃអតិបរមានៃផលបូកស៊េរី $20 + 19\frac{1}{3} + 18\frac{2}{3} + 18 + \cdots$ ។ (សម្គាល់ $19\frac{1}{3}$ ជាចំនួនចម្រុះ)

ដំណោះស្រាយ

ផលបូកស៊េរី $20 + 19\frac{1}{3} + 18\frac{2}{3} + 18 + \cdots$ មានតម្លៃអតិបរមានកាលណាតួនីមួយនៃស៊េរីនេះជាចំនួនវិជ្ជមាន

តាង a_{k+1} ជាតួទី $k+1$ នៃស៊េរី គេបាន $a_{k+1} = 20 - k + \frac{k}{3} = 20 - \frac{2}{3}k$

រក k ដើម្បីឱ្យ $a_{k+1} > 0$

គេបាន $20 - \frac{2k}{3} > 0 \Longleftrightarrow k < 30$ តែ k ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន នាំឱ្យ $k = 29$

គេបានតម្លៃអតិបរមានៃផលបូកនៃស៊េរីគឺ

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{30} = \sum_{k=0}^{29} a_{k+1} = \sum_{k=0}^{29}\left(20 - \frac{2}{3}k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{29} 20 - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{29} k = 20\times 30 - \frac{2}{3}\times\frac{29\times 30}{2} = 310$$

លំហាត់ទី ១៤២. ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង r ចូរគណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\log a, \log(ar), \log(ar^2), \ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $S_n = \log a + \log(ar) + \log(ar^2) + \cdots + \log(ar^{n-1})$

$$= \log a + (\log a + \log r) + (\log a + \log r^2) + \cdots + (\log a + \log r^{n-1})$$

$$= n\log a + \log r + 2\log r + 3\log r + \cdots + (n-1)\log r$$

$$= n\log a + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]\log r$$

$$= n\log a + \frac{n(n-1)}{2}\log r = \frac{1}{2}n\log a^2 + \frac{1}{2}n\log r^{n-1} = \frac{1}{2}n\log ar^{n-1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{1}{2}n\log ar^{n-1}}$

លំហាត់ទី ១៤៣. តាង S_n ជាផលបូក n តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះជាចំនួនវិជ្ជមាន និងផលសងរួម d ដែល $d = S_n - kS_{n-1} + S_{n-2}$ ។ ចូររកតម្លៃនៃចំនួនពិត k ។

ដំណោះស្រាយ

តាង a_n ជាតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ

គេមាន $a_n = S_n - S_{n-1}$ ហើយ $a_{n-1} = S_{n-1} - S_{n-2}$

នាំឱ្យ $a_n - a_{n-1} = (S_n - S_{n-1}) - (S_{n-1} - S_{n-2}) = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$

តែផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $d = a_n - a_{n-1}$ គេបាន $d = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$

គេឱ្យ $d = S_n - kS_{n-1} + S_{n-2}$ នាំឱ្យ $S_n - kS_{n-1} + S_{n-2} = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$

ដូចនេះ $\boxed{k = 2}$

លំហាត់ទី ១៤៤. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងជាតម្លៃនៃតួទី x, y, z រៀងគ្នា នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ។ ចូរគណនា $(y-z)\log a + (z-x)\log b + (x-y)\log c$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង p ជាតម្លៃនៃតួទី 1 និងផលធៀបរួម q

គេបាន $a = pq^{x-1}, \quad b = pq^{y-1}, \quad c = pq^{z-1}$

នាំឱ្យ $(y-z)\log a + (z-x)\log b + (x-y)\log c$

$$= \log a^{y-z} + \log b^{z-x} + \log c^{x-y}$$
$$= \log\left(a^{y-z} \cdot b^{z-x} \cdot c^{x-y}\right)$$
$$= \log\left[\left(pq^{x-1}\right)^{y-z} \cdot \left(pq^{y-1}\right)^{z-x} \cdot \left(pq^{z-1}\right)^{x-y}\right]$$
$$= \log\left[p^{y-z}q^{(x-1)(y-z)}p^{z-x}q^{(y-1)(z-x)}p^{x-y}q^{(z-1)(x-y)}\right]$$
$$= \log\left[p^{y-z+z-x+x-y} \cdot q^{(x-1)(y-z)+(y-1)(z-x)+(z-1)(x-y)}\right]$$
$$= \log\left(p^0 \cdot q^{xy-zx-y+z+yz-xy-z+x+zx-yz-x+y}\right)$$
$$= \log\left(q^0\right) = \log 1 = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{(y-z)\log a + (z-x)\log b + (x-y)\log c = 0}$

លំហាត់ទី ១៤៥. គេឱ្យតួទី $p+q$ នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយគឺ a ដែល និងតួទី $p-q$ គឺ b ដែល $a > 0, b > 0,\ p, q$ ជាចំនួនគត់ និង $p > q$ ។ គណនាតម្លៃនៃតួទី p នៃស្វ៊ីតនេះ។

ដំណោះស្រាយ

តាង x ជាតួទីមួយ និង y ជាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះ

គេបាន $a = t_{p+q} = xy^{p+q-1} \quad (1)$ និង $\quad b = t_{p-q} = xy^{p-q-1} \quad (2)$

យក (1) ចែក (2) គេបាន $\frac{a}{b} = \frac{xy^{p+q-1}}{xy^{p-q-1}} = y^{2q} \Longrightarrow y = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2q}}$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $a = x\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}} \Longrightarrow x = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}}$

នោះតួទី p នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះគឺ

$$t_p = xy^{p-1} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p+q-1}{2q}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p-1}{2q}} = a^{1-\frac{p+q-1}{2q}+\frac{p-1}{2q}} \times b^{\frac{p+q-1}{2q}-\frac{p-1}{2q}}$$

$$= a^{\frac{2q-p-q+1+p-1}{2q}} \times b^{\frac{p+q-1-p+1}{2q}} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួទី } p \text{ គឺ } t_p = \sqrt{ab}}$

លំហាត់ទី ១៤៦. គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយដែលមានតួទី n តាងដោយ a_n និង $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$។ បើ $\sum_{k=1}^{100} a_{2k} = \alpha$ និង $\sum_{k=1}^{100} a_{2k-1} = \beta$ រកផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះ។

ដំណោះស្រាយ

$$\text{គេមាន } \alpha = \sum_{k=1}^{100} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{200} = a_1 r + a_1 r^3 + a_1 r^5 + \cdots + a_1 r^{199}$$

$$= a_1 r(1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{198}) \quad (1)$$

$$\text{ហើយ } \beta = \sum_{k=1}^{100} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{199} = a_1 + a_1 r^2 + a_1 r^4 + \cdots + a_1 r^{198}$$

$$= a_1(1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{198}) \quad (2)$$

យក (1) ចែក (2) គេបាន $\frac{\alpha}{\beta} = r$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះគឺ } r = \frac{\alpha}{\beta}}$

លំហាត់ទី ១៤៧. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

$$a_2 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$$

$$a_3 = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$$

$$a_4 = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$$

....

$$a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

$$= n - \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = n - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = n - 1 + \frac{1}{2^n}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = n - 1 + \frac{1}{2^n}}$

លំហាត់ទី ១៤៨. គណនាផលបូកនៃស៊េរី $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots$ ដែល $|x| < 1$។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a_k = \frac{x^{2^{k-1}}}{1 - x^{2^k}} = \frac{1 + x^{2^{k-1}} - 1}{\left(1 - x^{2^{k-1}}\right)\left(1 + x^{2^{k-1}}\right)} = \frac{1}{1 - x^{2^{k-1}}} - \frac{1}{1 - x^{2^k}}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - x^{2^{k-1}}} - \frac{1}{1 - x^{2^k}}\right)$

$$= \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}\right) + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^{2^2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

នាំឱ្យ $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots$

$$= \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}\right) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

ព្រោះ $|x| < 1 \Longleftrightarrow -1 < x < 1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x^{2^n} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots = \frac{x}{1-x}}$

លំហាត់ទី ១៤៩. គណនាផលបូក
$\frac{3}{1\cdot 2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{2\cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{3\cdot 4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{n+2}{n(n+1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\frac{k+2}{k(k+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{2(k+1)-k}{k(k+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k=\left(\frac{2}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$$=\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\frac{1}{k+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

គេបាន $\frac{3}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2\cdot3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{3\cdot4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\frac{n+2}{n(n+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+2}{k(k+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\frac{1}{k+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]$$

$$=\left[1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{3}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2\cdot3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{3\cdot4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\frac{n+2}{n(n+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

លំហាត់ទី ១៥០. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម

$a^{\log b-\log c}+b^{\log c-\log a}+c^{\log a-\log b}$។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន

$$a^{\log b-\log c}+b^{\log c-\log a}+c^{\log a-\log b}\geq 3\sqrt[3]{a^{\log b-\log c}\cdot b^{\log c-\log a}\cdot c^{\log a-\log b}}\qquad(1)$$

តាង $x=a^{\log b-\log c}\cdot b^{\log c-\log a}\cdot c^{\log a-\log b}$

$\Longrightarrow \log x=\log\left(a^{\log b-\log c}\cdot b^{\log c-\log a}\cdot c^{\log a-\log b}\right)$

$$=\log a^{\log b-\log c}+\log b^{\log c-\log a}+\log c^{\log a-\log b}$$

$=(\log b-\log c)\log a+(\log c-\log a)\log b+(\log a-\log b)\log c$

$=\log a\log b-\log a\log c+\log b\log c-\log a\log b+\log a\log c-\log b\log c=0$

នាំឱ្យ $\log x=1\Longleftrightarrow x=1$

តាម (1) គេបាន $a^{\log b-\log c}+b^{\log c-\log a}+c^{\log a-\log b}\geq 3$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃតូចបំផុតនៃ } a^{\log b-\log c}+b^{\log c-\log a}+c^{\log a-\log b} \text{ គឺ } 3}$

លំហាត់ទី ១៥១. គណនាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកមិនដាច់នឹង 3 ឬ 5 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង S_{199} ជាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិពី 1 ដល់ 199

S_3 ជាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកដាច់នឹង 3

S_5 ជាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកដាច់នឹង 5

S_{15} ជាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកដាច់នឹង 15

S ជាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកមិនដាច់នឹង 3 ឬ 5

គេបាន $S = S_{199} - S_3 - S_5 + S_{15}$

ដោយ $S_{199} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 199 = \dfrac{199 \times 200}{2} = 19900$

$$S_3 = 3 + 6 + 9 + \cdots + 198 = \frac{66}{2} \times (3 + 198) = 6633$$

$$S_5 = 5 + 10 + 15 + \cdots + 195 = \frac{39}{2} \times (5 + 195) = 3900$$

$$S_{15} = 15 + 30 + 45 + \cdots + 195 = \frac{13}{2} \times (15 + 195) = 1365$$

នាំឱ្យ $S = S_{199} - S_3 - S_5 - S_{15} = 19900 - 6633 - 3900 + 1365 = 10732$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង } 200 \text{ ដែលចែកមិនដាច់នឹង } 3 \text{ ឬ } 5 \text{ ស្មើនឹង } 10732}$

លំហាត់ទី ១៥២. គណនា $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i(i+1)}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + i\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}(2n + 1 + 3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$

លំហាត់ទី ១៥៣. គណនាផលបូកនៃស៊េរី $\dfrac{9}{5^2\cdot 2\cdot 1}+\dfrac{13}{5^3\cdot 3\cdot 2}+\dfrac{17}{5^4\cdot 4\cdot 3}+\cdots$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $a_k=\dfrac{4k+1}{5^k\cdot k(k-1)}\ ,\quad k\geq 2$

$$=\frac{5k-(k-1)}{5^k\cdot k(k-1)}=\frac{1}{5^{k-1}\cdot(k-1)}-\frac{1}{5^k\cdot k}$$

គេបាន $S_n=\dfrac{9}{5^2\cdot 2\cdot 1}+\dfrac{13}{5^3\cdot 3\cdot 2}+\dfrac{17}{5^4\cdot 4\cdot 3}+\cdots+\dfrac{4n+1}{5^n\cdot n(n-1)}=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}a_k$

$$=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{5^{k-1}\cdot(k-1)}-\frac{1}{5^k\cdot k}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2\cdot 2}\right)+\left(\frac{1}{5^2\cdot 2}-\frac{1}{5^3\cdot 3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5^{n-1}\cdot(n-1)}-\frac{1}{5^n\cdot n}\right)$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{5^n\cdot n}$$

នាំឱ្យ $\dfrac{9}{5^2\cdot 2\cdot 1}+\dfrac{13}{5^3\cdot 3\cdot 2}+\dfrac{17}{5^4\cdot 4\cdot 3}+\cdots=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5^n\cdot n}\right)=\dfrac{1}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផលបូកនៃស៊េរី}\ \dfrac{9}{5^2\cdot 2\cdot 1}+\dfrac{13}{5^3\cdot 3\cdot 2}+\dfrac{17}{5^4\cdot 4\cdot 3}+\cdots=\dfrac{1}{5}}$

លំហាត់ទី ១៥៤. ចំពោះចំនួនគត់សេស $n\geq 1$ គណនាផលបូក $n^3-(n-1)^3+(n-2)^3-(n-3)^3+\cdots+(-1)^{n-1}1^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន n ជាចំនួនគត់សេស នាំឱ្យ $n-1$ ជាចំនួនគត់គូ គេបាន $(-1)^{n-1}=1$

គេបាន $n^3-(n-1)^3+(n-2)^3-(n-3)^3+\cdots+(-1)^{n-1}1^3$

$$=n^3-(n-1)^3+(n-2)^3-(n-3)^3+\cdots+1^3$$

$$=n^3+(n-1)^3+(n-2)^3+\cdots+1^3-3\left[(n-1)^3+(n-3)^3+(n-5)^3+\cdots+4^3+2^3\right]$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-2\times 2^3\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^3+\left(\frac{n-3}{2}\right)^3+\cdots+3^3+2^3+1^3\right]$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-16\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\right]^2$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 4\left[\frac{(n-1)(n+1)}{4}\right]^2$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2-(n-1)^2\right] = \frac{(2n-1)(n+1)^2}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{n^3-(n-1)^3+(n-2)^3-(n-3)^3+\cdots+(-1)^{n-1}1^3 = \frac{(2n-1)(n+1)^2}{4}}$

លំហាត់ទី ១៥៥. គេឱ្យ p, q, r ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $27pqr \geq (p+q+r)^3$ និង $3p+4q+5r=12$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $p^3+q^4+r^5$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $27pqr \geq (p+q+r)^3 \qquad (1)$

តែតាមវិសមភាពកូស៊ី $p+q+r \geq 3\sqrt[3]{pqr} \Longleftrightarrow 27pqr \leq (p+q+r)^3 \qquad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $27pqr = (p+q+r)^3$

នោះតាមវិសមភាពកូស៊ី សមភាពកើតមានកាលណា $p=q=r$

តែដោយ $3p+4q+5r=12 \Longleftrightarrow p=q=r=1$

គេបាន $p^3+q^4+r^5 = 1+1+1=3$

ដូចនេះ $\boxed{p^3+q^4+r^5=3}$

លំហាត់ទី ១៥៦. គណនាផលបូក

$$S_n = \frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\cdots+\frac{n}{1+n^2+n^4} \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a_k = \frac{k}{1+k^2+k^4} = \frac{k}{(1+k^2)^2-k^2} = \frac{k}{(1-k+k^2)(1+k+k^2)}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-k+k^2}-\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(k-1)+(k-1)^2}-\frac{1}{1+k+k^2}\right] , \quad k\geq 2$$

គេបាន $S_n = \frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\cdots+\frac{n}{1+n^2+n^4}$

$$= \frac{1}{1+1^2+1^4}+\sum_{k=2}^{n} a_k$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{1+(k-1)+(k-1)^2} - \frac{1}{1+k+k^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1+1+1^2} - \frac{1}{1+2+2^2}\right) + \left(\frac{1}{1+2+2^2} - \frac{1}{1+3+3^2}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \left(\frac{1}{1+(n-1)+(n-1)^2} - \frac{1}{1+n+n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1+n+n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+n+n^2)} = \frac{1+n+n^2-1}{2(1+n+n^2)} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}}$

លំហាត់ទី ១៥៧. បើ $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = a$ និង $\sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} = b$ ដែល $|x| < 1, |y| < 1$ ។

គណនា $\sum_{n=1}^{+\infty}(xy)^{n-1}$ ជាអនុគមន៍នៃ a, b ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

$\Longrightarrow 1 - x = \frac{1}{a} \Longrightarrow x = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$

ហើយ $b = \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots = \frac{1}{1-y}$

$\Longrightarrow 1 - y = \frac{1}{b} \Longrightarrow y = 1 - \frac{1}{b} = \frac{b-1}{b}$

គេបាន $\sum_{n=1}^{+\infty}(xy)^{n-1} = 1 + (xy) + (xy)^2 + (xy)^3 + \cdots = \frac{1}{1-xy}$

$$= \frac{1}{1 - \frac{a-1}{a}\times\frac{b-1}{b}} = \frac{ab}{ab-(a-1)(b-1)}$$

$$= \frac{ab}{ab-ab+a+b-1} = \frac{ab}{a+b-1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(xy)^{n-1} = \frac{ab}{a+b-1}}$

លំហាត់ទី ១៥៨. បើ $\lambda = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^4}$ ។ គណនា $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(2i-1)^4}$ ជាអនុគមន៍នៃ λ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\lambda = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots$

គេបាន $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(2i-1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots\right)$$

$$= \lambda - \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) = \lambda - \frac{1}{16}\lambda = \frac{15}{16}\lambda$$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(2i-1)^4} = \frac{15}{16}\lambda}$

លំហាត់ទី ១៥៩. រកតម្លៃអប្បរមានៃកន្សោម $8^{\sin\frac{x}{8}} + 8^{\cos\frac{x}{8}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន

$8^{\sin\frac{x}{8}} + 8^{\cos\frac{x}{8}} \geq 2\sqrt{8^{\sin\frac{x}{8}} \times 8^{\cos\frac{x}{8}}}$

តែ $8^{\sin\frac{x}{8}} \times 8^{\cos\frac{x}{8}} = 8^{\sin\frac{x}{8}+\cos\frac{x}{8}} = 8^{\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{8}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2^{3\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{8}-\frac{\pi}{2}\right)}$

តម្លៃធំបំផុតនៃ $2^{3\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{8}-\frac{\pi}{2}\right)}$ គឺ $2^{3\sqrt{2}}$

គេបាន $8^{\sin\frac{x}{8}} + 8^{\cos\frac{x}{8}} \geq 2 \times 2^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$ ឬ $8^{\sin\frac{x}{8}} + 8^{\cos\frac{x}{8}} \geq 2^{\frac{3\sqrt{2}+2}{2}}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃអប្បរមាគឺ } 2^{\frac{3\sqrt{2}+2}{2}}}$

លំហាត់ទី ១៦០. រកមេគុណនៃ x^{49} នៃផលគុណ $(x-1)(x-3)\cdots(x-99)$ ។

ដំណោះស្រាយ

មេគុណនៃ x នៃផលគុណ $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$ គឺ $-1-3=-4$

មេគុណនៃ x^2 នៃផលគុណ $(x-1)(x-3)(x-5) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ គឺ $-1-3-5=-9$

មេគុណនៃ x^3 នៃផលគុណ $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) = x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105$

គឺ $-1-3-5-7=-16$

មេគុណនៃ x^{49} គឺ $-(1+3+5+\cdots+99) = -50^2 = -2500$

លំហាត់ទី ១៦១. គណនាផលបូក
$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\cdots+\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3}{1+3+5+\cdots+17}\text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាង $a_k=\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3}{1+3+5+\cdots+(2k-1)}=\dfrac{\left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2}{k^2}=\dfrac{(k+1)^2}{4}$

គេបាន $\dfrac{1^3}{1}+\dfrac{1^3+2^3}{1+3}+\dfrac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\cdots+\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3}{1+3+5+\cdots+17}$

$$=\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}\left[\frac{(k+1)^2}{4}\right]=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{4}(2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2)$$

$$=\frac{1}{4}\left[(1^2+2^2+3^2+\cdots 10^2)-1\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{10\times11\times21}{6}-1\right]=\frac{1}{4}(385-1)=96$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1^3}{1}+\dfrac{1^3+2^3}{1+3}+\dfrac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\cdots+\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3}{1+3+5+\cdots+17}=96}$

លំហាត់ទី ១៦២. គណនាផលបូកនៃស៊េរី $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{(\sqrt{2})^k}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{(\sqrt{2})^2}+\frac{5}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

$$\sqrt{2}S_n=\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{(\sqrt{2})^2}+\frac{5}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}\right]$$

$$=1+\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{(\sqrt{2})^2}+\frac{7}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2n-3}{(\sqrt{2})^{n-2}}+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$$

$$=1+\frac{2+1}{\sqrt{2}}+\frac{2+3}{(\sqrt{2})^2}+\frac{2+5}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2+2n-5}{(\sqrt{2})^{n-2}}+\frac{2+2n-3}{(\sqrt{2})^{n-1}}$$

$$=1+\left[\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{2}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2}{(\sqrt{2})^{n-1}}\right]+$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{(\sqrt{2})^2}+\frac{5}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}\right]-\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$$

$$= 1 + 2 \times \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} + S_n - \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$$

$$(\sqrt{2}-1)S_n = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\right) - \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{2}{(\sqrt{2}-1)^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\right) - \frac{2n-1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}}$$

$$= \sqrt{2} + 1 + 2(\sqrt{2}+1)^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\right) - \frac{2n-1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}}$$

គេបាន $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} = \lim_{n\to+\infty} S_n$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{2} + 1 + 2(\sqrt{2}+1)^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\right) - \frac{2n-1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}}\right]$$

$$= \sqrt{2} + 1 + 2(\sqrt{2}+1)^2 = 7 + 5\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} = 7 + 5\sqrt{2}}$

លំហាត់ទី ១៦៣. គេមាន $S_n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{C(n,r)}$ និង $P_n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \frac{r}{C(n,r)}$ ដែល $C(n,r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ។ គណនា $\dfrac{P_n}{S_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $S_n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{C(n,r)} = \frac{1}{C(n,0)} + \frac{1}{C(n,1)} + \frac{1}{C(n,2)} + \cdots + \frac{1}{C(n,n)}$

$$P_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{r}{C(n,r)}$$

$$= \frac{0}{C(n,0)} + \frac{1}{C(n,1)} + \frac{2}{C(n,2)} + \cdots + \frac{n-1}{C(n,n-1)} + \frac{n}{C(n,n)} \quad .....(1)$$

$$P_n = \frac{n}{C(n,n)} + \frac{n-1}{C(n,n-1)} + \cdots + \frac{2}{C(n,2)} + \frac{1}{C(n,1)} + \frac{0}{C(n,0)}$$

$$= \frac{n}{C(n,0)} + \frac{n-1}{C(n,1)} + \frac{n-2}{C(n,2)} + \cdots + \frac{1}{C(n,n-1)} + \frac{0}{C(n,n)} \quad .....(2)$$

យក $(1) + (2)$ គេបាន

$$\Longrightarrow 2P_n = n\left[\frac{1}{C(n,0)}+\frac{1}{C(n,1)}+\frac{1}{C(n,2)}+\cdots+\frac{1}{C(n,n)}\right] = nS_n \Longrightarrow \frac{P_n}{S_n}=\frac{n}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{P_n}{S_n}=\frac{n}{2}}$

លំហាត់ទី ១៦៤. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_0=3, x_1=4$ និង $x_{n+1}=x_{n-1}^2-nx_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដំណោះស្រាយ

យើងនឹងស្រាយថា $x_n=n+3$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n=0,1,2,3,\dots,n$

- បើ $n=0,1$ គេបាន $x_0=3, x_1=4$ ពិត
- ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ គឺ $x_k=k+3$
- ចំពោះ $n=k+1$

  គេមាន $x_{k+1}=x_{k-1}^2-kx_k=(k+2)^2-k(k+3)=k^2+4k+4-k^2-3k=(k+1)+3$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{x_n=n+3 \text{ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ } n\geq 0}$

លំហាត់ទី ១៦៥. គេឱ្យ $x_1,x_2,\dots,x_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

(i) $-1\leq x_i\leq 2$, ចំពោះ $i=1,2,\dots,n$

(ii) $x_1+x_2+\cdots+x_n=19$

(iii) $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=99$

រកតម្លៃតូចបំផុត និងធំបំផុតនៃ $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $x_1,x_2,\dots,x_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ នោះតាម (i) គេបាន $x_i=-1$ ឬ $x_i=0$ ឬ $x_i=1$ ឬ $x_i=2$ ចំពោះ $i=1,2,\dots,n$

តាង a,b,c ជាចំនួនតួនៃស្វ៊ីតដែលមានតម្លៃស្មើ $-1,1,2$ រៀងគ្នា នោះ a,b,c ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន

តាម (ii) និង (iii) គេបាន $\begin{cases}-a+b+2c=19\\ a+b+4c=99\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}a=40-c\\ b=59-3c\end{cases}$

តែដោយ $b\geq 0\Longleftrightarrow 59-3c\geq 0\Longleftrightarrow 0\leq c\leq 19$

គេបាន $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=-a+b+8c=-(40-c)+(59-3c)+8c=19+6c$

ដោយ $0\leq c\leq 19\Longleftrightarrow 19\leq 19+6c\leq 133\Longleftrightarrow 19\leq x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3\leq 133$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃតូចបំផុតគឺ } 19 \text{ និងធំបំផុតគឺ } 133}$

លំហាត់ទី ១៦៦. ចំពោះស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ តាង ΔA ជាស្វ៊ីតនៃ $\{a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots\}$ ។ បើគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $\Delta(\Delta A)$ ស្មើនឹង 1 និង $a_{19} = a_{92} = 0$ ចូររក a_1 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង d ជាតម្លៃនៃតួទីមួយនៃស្វ៊ីត ΔA

គេបាន $\Delta A = \{d, d+1, d+2, d+3, \dots\}$ ព្រោះ $\Delta(\Delta A) = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$

នាំឱ្យ ΔA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមានតួទី n គឺ $d + n - 1$

គេបាន $A = \{a_1, a_1 + d, a_1 + d + (d+1), a_1 + d + (d+1) + (d+2), \dots\}$

គេបានទំនាក់ទំនង n នៃ A គឺ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(d + k - 1) = a_1 + (d-1)(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1)$

ដោយ $\begin{cases} a_{19} = 0 \\ a_{92} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + 18(d-1) + 171 = 0 \\ a_1 + 91(d-1) + 4186 = 0 \end{cases} \iff a_1 = 819$

ដូចនេះ $\boxed{a_1 = 819}$

លំហាត់ទី ១៦៧. គេមាន $(a_n)_{n\geq 1}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត ដែល $a_1 = 2$ និង $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។ កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការសម្គាល់ $x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \Longrightarrow 2x^2 = x^2 + 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

គេបាន $a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2} = \frac{a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \qquad \dots(1)$

ហើយ $a_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} + \sqrt{2} = \frac{a_n^2 + 2\sqrt{2}a_n + 2}{2a_n} = \frac{(a_n + \sqrt{2})^2}{2a_n} \qquad \dots(2)$

យក (1) ចែក (2) គេបាន $\frac{a_{n+1} - \sqrt{2}}{a_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{(a_n + \sqrt{2})^2} = \left(\frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}\right)^2$

តាង $b_n = \frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$ គេបាន $b_{n+1} = b_n^2$

$$\Longrightarrow b_n = (b_{n-1})^2 = (b_{n-2})^{2^2} = (b_{n-3})^{2^3} = \cdots = (b_1)^{2^{n-1}}$$

គេបាន $\frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{2}}{a_1 + \sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2}\right)^{2^{n-1}} = (\sqrt{2} - 1)^{2^n}$

$$\Longrightarrow a_n - \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^{2^n}(a_n + \sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 1)^{2^n}a_n + \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)^{2^n}$$

$$\Longrightarrow a_n\left[(\sqrt{2} - 1)^{2^n} - 1\right] = -\sqrt{2} - \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)^{2^n} = -\sqrt{2}\left[1 + (\sqrt{2} - 1)^{2^n}\right]$$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{-\sqrt{2}\left[1+(\sqrt{2}-1)^{2^n}\right]}{(\sqrt{2}-1)^{2^n}-1} = \frac{\sqrt{2}\left[1+(\sqrt{2}-1)^{2^n}\right]}{1-(\sqrt{2}-1)^{2^n}}$$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \dfrac{\sqrt{2}\left[1+(\sqrt{2}-1)^{2^n}\right]}{1-(\sqrt{2}-1)^{2^n}}}$

លំហាត់ទី ១៦៨. ABC ជាត្រីកោណមួយដែលមាន

$$\sin(2A+B) = \sin(C-A) = -\sin(B+2C) = \frac{1}{2}$$

បើ A, B និង C ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ចូររកតម្លៃនៃមុំ A, B និង C ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន A, B, C ជាមុំក្នុងត្រីកោណ $ABC \Longleftrightarrow A+B+C = 180^\circ$

តែដោយ A, B និង C ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $\Longleftrightarrow A+C = 2B$

គេបាន $A+B+C = 180^\circ \Longleftrightarrow 2B+B = 180^\circ \Longleftrightarrow B = 60^\circ$

គេមាន $\sin(2A+B) = \sin(C-A) = -\sin(B+2C) = \dfrac{1}{2}$

ចំពោះ $B = 60^\circ$ គេបាន $\sin(2A+60^\circ) = \sin(C-A) = -\sin(60^\circ+2C) = \dfrac{1}{2}$ ....(1)

តាម (1) គេបាន $\sin(2A+60^\circ) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2A+60^\circ = 30^\circ$ or 150°

តែដោយ $0 < A < 180^\circ$ គេបាន $A = 45^\circ$

តាម (1) គេបាន $-\sin(60^\circ+2C) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \sin(60^\circ+2C) = -\dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow 60^\circ+2C = 210^\circ$ or $330^\circ \Longrightarrow C = 75^\circ$ or 135°

តាម (1) គេមាន $\sin(C-A) = \dfrac{1}{2}$

- ចំពោះ $A = 45^\circ$ និង $C = 75^\circ$ គេបាន $\sin(C-A) = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ ពិត
- ចំពោះ $A = 45^\circ$ និង $C = 135^\circ$ គេបាន $\sin(C-A) = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \sin 90^\circ = \dfrac{1}{2}$ មិនពិត

ដូចនេះ $\boxed{A = 45^\circ, B = 60^\circ, C = 75^\circ}$

លំហាត់ទី ១៦៩. បង្ហាញថា $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos\frac{2k\pi}{n} = -\frac{n}{2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos\frac{2k\pi}{n}$

$$= (n-1)\cos\frac{2\pi}{n} + (n-2)\cos\frac{4\pi}{n} + (n-3)\cos\frac{6\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} \quad ...(1)$$

គេដឹងថា $\cos\theta = \cos(2\pi - \theta$ នោះតាម (1) គេបាន

$$S = (n-1)\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{n}\right) + (n-2)\cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(2\pi - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$
$$= (n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + \cdots + 3\cos\frac{6\pi}{n} + 2\cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n}$$
$$= \cos\frac{2\pi}{n} + 2\cos\frac{4\pi}{n} + 3\cos\frac{6\pi}{n} + \cdots + (n-1)\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} \qquad ...(2)$$

យក (1) + (2) គេបាន

$$2S = n\cos\frac{2\pi}{n} + n\cos\frac{4\pi}{n} + n\cos\frac{6\pi}{n} + \cdots + n\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$$
$$= n\left[\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] \qquad ...(3)$$

តាង $P = \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$ ...(4)

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (4) នឹង $\sin\frac{\pi}{n}$ គេបាន

$$\sin\frac{\pi}{n}\times P = \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{6\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

តាមរូបមន្ត $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

គេបាន $\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{3\pi}{n} + \sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right)$

$$\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{4\pi}{n} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{5\pi}{n} + \sin\left(-\frac{3\pi}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{n} - \sin\frac{3\pi}{n}\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{6\pi}{n} = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{7\pi}{n} + \sin\left(-\frac{5\pi}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{n} - \sin\frac{5\pi}{n}\right)$$

....

....

$$\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2n-1)\pi}{n} - \sin\frac{(2n-3)\pi}{n}\right)$$

នាំឱ្យ $\sin\frac{\pi}{n}\times P = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2n-1)\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{n}\right) - \sin\frac{\pi}{n}\right] = \frac{1}{2}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right) - \sin\frac{\pi}{n}\right] = -\sin\frac{\pi}{n}$$

គេបាន $P = -\frac{1}{2}$ នោះ តាម (3) គេបាន $2S = n\times P = -n \Longleftrightarrow S = -\frac{n}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos\frac{2k\pi}{n} = -\frac{n}{2}}$