រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រ័ផ្នែក គណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជសាស្ត្រ

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

គណិតវិទ្យា

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ៦

- ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រ័បឋមភូមិ
- ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

Vol.01

រក្សាសិទ្ធិគ្រប់យ៉ាង

ជំពូកទី០១

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1-ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម ៖

ក) $(a^3+3ab^2)^2-(3a^2b+b^3)^2=(a-b)^3(a+b)^3$

ខ) $(a^4+6a^2b^2+b^4)^2-16a^2b^2(a^2+b^2)^2=(a-b)^4(a+b)^4$ ។

2-ចូរស្រាយថា $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$

រួចទាញថា $|ax+by|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$ ។

3-គេឲ្យកន្សោម $A=(a+b+c+d)^2$, $B=(a+b-c-d)^2$

$C=(a+c-b-d)^2$ និង $D=(a+d-b-c)^2$ ។

ចូរស្រាយថា $A+B+C+D=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$ ។

4-គេតាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)=abc$

5-គេតាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, $q^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$, $x=(q^2-a^2)(q^2-b^2)$

$y=(q^2-b^2)(q^2-c^2)$ និង $z=(q^2-c^2)(q^2-a^2)$ ។

ចូរស្រាយថា $x+y+z=4p(p-a)(p-b)(p-c)$ ។

6-ចូរដាក់ជាផលគុណកត្តានៃកន្សោម ៖

$A=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ និង $B=x^3+y^3+z^3-3xyz$

7-បើ $a+b+c=0$ នោះចូរស្រាយថា ៖

ក) $a^3+b^3+c^3=3abc$ ខ) $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$

LIM PHALKUN

8–គេឲ្យ $x=\frac{a-b}{a+b}\ ,\ y=\frac{b-c}{b+c}\ ,\ z=\frac{c-a}{c+a}$ ។

ចូរស្រាយថា $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$ ។

9–បើ $ax+by+cz=0$ នោះចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{ab(x-y)^2+bc(y-z)^2+ca(z-x)^2}=\frac{1}{a+b+c}$$ ។

10–ចូរបង្ហាញថា $E=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=2$

11–ចូរបង្ហាញថា $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

12–ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}}{3}$ ។

13–ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$ ។

14–គេឲ្យ $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{d}{t}$ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}+\sqrt{ct}=\sqrt{a+b+c+d}.\sqrt{x+y+z+t}$ ។

15–បើ $ax^3=by^3=cz^3$ និង $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ចូរស្រាយថា ៖

$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ ។

16–គេឲ្យកន្សោម $y=\{2[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-a][(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-b]\}^{\frac{1}{2}}$

ចូរស្រាយថា $y=a+b-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ ។ដែល $a,b>0$ ។

LIM PHALKUN

17-គេឲ្យ $a\ge 0\,,\,b\ge 0\,,\,c\ge 0$ ។ គណនាកន្សោម ៖

$$A=\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$

18-ចូរស្រាយថាចំនួន $x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$

ជាឬសមួយនៃសមីការ $x^3+px+q=0$ ។

19-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt[3]{2}$ មិនអាចសរសេរជារាង $p+\sqrt{q}$ ដែល p និង q ជាចំនួនសនិទាន ហើយ $q>0$ និង q មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

20-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ac}{a+c}=a+b+c$$

ដែល $a+b\neq 0\,,\,b+c\neq 0\,,\,c+a\neq 0$ ។

21-ដោះស្រាយសមីការ $\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

ដែល $a\neq 0,b\neq 0\,,\,c\neq 0$ ។

22-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$$

ដែល $a,b,c\neq 0$ និង $a+b+c\neq 0$ ។

23-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\frac{\sqrt[p]{b+x}}{b}+\frac{\sqrt[p]{b+x}}{x}=\frac{c}{a}\sqrt[p]{x}$$

ដែល $p\in\mathbb{N}\,,\,p\ge 2\,,\,a,b,c\neq 0$ ។

LIM PHALKUN

24–ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$ ដែល a និង b

ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}\geq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ ។

25–ដោះស្រាយសមីការ ៖

$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ ដែល $a>0$, $b>0$ និង $a\neq b$ ។

26–គេឲ្យ $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ និង $y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

ចូរគណនា $A=x^4+y^4+(x+y)^4$?

27–ចូរបង្ហាញថា $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$ ។

28–ចូរសម្រួលកន្សោម ៖

$P=\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

29–គណនា $M=\sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}-\sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$

30–ចូរកំណត់បីចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c ដោយដឹងថា ៖

$\sqrt{7+2(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{7})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ($a<b<c$) ។

31–ចូរកំណត់គូនៃចំនួនសនិទានមួយ (a,b,c) ដោយដឹងថា ៖

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ ។

32–គណនាផលគុណ $P=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})....(1-\frac{1}{2014^2})$ ។

33–គណនា $S=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{625}+\sqrt{623}}$

LIM PHALKUN

34–ក)គ្រប់ $k=1,2,3,...$ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{1}{(2k+1)\sqrt{2k-1}+(2k-1)\sqrt{2k+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)$$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+...+\frac{1}{625\sqrt{623}+623\sqrt{625}}$$

35–ចូរគណនា ៖

$$A=\sqrt{\sqrt{2}\times\sqrt{4+\sqrt{7}}+2\sqrt{\sqrt{2+\frac{\sqrt{7}}{2}}+\sqrt{2-\frac{\sqrt{7}}{2}}}}$$

36–គណនា $E=\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}+\frac{5}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1}}$

37–ចូរស្រាយថា $(x+1)^7-x^7-1=7x(x+1)(x^2+x+1)^2$ ។

អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $A=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^7+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^7$ ។

38–គេឲ្យពីរចំនួន $a=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ និង $b=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

គណនាតម្លៃ $N=19a^7+40b^5$ ។

39–គណនា $A=\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$ ។

40–គណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A=(\sqrt{7-\sqrt{33}}+\sqrt{7+\sqrt{33}}-2)(\sqrt{7-\sqrt{33}}+\sqrt{7+\sqrt{33}}+2)$$

41-គេដឹងថា $\left(\sqrt[3]{2}\right)^x+\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-x}=\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}+\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}$

ចូរគណនាតម្លៃ $A=2^x+2^{-x}$ ។

LIM PHALKUN

42–គេមានពីរចំនួនពិត x និង y ដែល $x^2+8xy+y^2=1000$ ។
ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ $P=2014xy$?

43–ចូររកគូចម្លើយទាំងអស់នៃ (a,b) ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ $ab-b-(a-1)^2=2014$ ។

44–ចូររកគូចម្លើយទាំងអស់នៃ (x,y) ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ $3xy-6x-4y+5=0$ ។

45–រកគូចម្លើយទាំងអស់នៃ (x,y) ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ $x^2-2x-y^2-4y-8=0$, $x\geq 0$, $y\geq 0$ ។

46–ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x^3+3xy^2=66500 \\ 3x^2y+y^3=58500 \end{cases}$

47–ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 7x^3-6x^2y+3xy^2=38 \\ 13x^2-15x^2y+3xy^2-y^3=49 \end{cases}$

48– កំណត់គូនៃចំនួនវិជ្ជមាន a,b,c ដោយដឹងថា $\begin{cases} a^3+b^3+c^3=3abc \\ a^5+b^5+c^5=9375 \end{cases}$

49–ក)ចូរស្រាយថា ៖

$$(a+b+c)^2(a+b-c)^2+4c^2(a+b)^2=(a^2+b^2+c^2+2ab)^2$$ ។

ខ)ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$c^2x^2-(a+b+c)(a+b-c)x-(a+b)^2=0$$ ដែល $c\neq 0$

50–សម្រួល $M=\sqrt[3]{(a-b)\sqrt{\dfrac{(a+b)^7-a^7-b^7}{7ab(a+b)}}}$ ដែល $\begin{cases} a=\sqrt[3]{15+4\sqrt{3}} \\ b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{3}} \end{cases}$

LIM PHALKUN

51–គេមានចំនួនវិជ្ជមាន a,b,c និង t ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$ab+bc+ca=t^2$ ។ចូរស្រាយថា $M=2t^2$ ដោយដឹងថា ៖

$$M=a\sqrt{\frac{(t^2+b^2)(t^2+c^2)}{t^2+a^2}}+b\sqrt{\frac{(t^2+c^2)(t^2+a^2)}{t^2+b^2}}+c\sqrt{\frac{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}{t^2+c^2}}$$

52–គេមាន $x=ab+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ និង $y=a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}$

ចូរស្រាយថា $x^2-y^2=1$ ។

53–គេឲ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតខុសពីសូន្យដែល $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ ។

ចូរស្រាយថា $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$ ។

អនុវត្តន៍ ៖ បើ a,b,c ជាបីចំនួនសនិទានខុសគ្នា និង $a\neq b\neq c$ ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$

ក៏ជាចំនួនសនិទានដែរ។

54–គណនាផលបូក ៖

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}$$

55–ឧបមាថាចំនួនគត់ a និង b បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2+b^2=13$

និង $a^3+b^3=19$ ។ ចូររកតម្លៃ $a+b$?

56–ឧបមាថាគេមានបីចំនួន a,b,c បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases}a+b+c=m+1\\ ab+bc+ca=m^2-4m+6\end{cases}$$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

LIM PHALKUN

កំណត់ m ដែលធ្វើឲ្យ $a^2+b^2+c^2$ មានតម្លៃធំបំផុត រួចកំណត់គ្រប់គូ (b,c) ចំពោះ $a=1$ និង តម្លៃ m ដែលទើបរកឃើញ ។

57-ឧបមាថាចំនួនពិត a និង b បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

$a+b=2m+2$ និង $ab=5m-1$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក)គណនា $M=(a-b)^2$ ជាអនុគមន៍នៃ m រួចកំណត់លក្ខខណ្ឌនៃដែនតម្លៃ $|2m-3|$ និង m ដើម្បីឲ្យចំណោទមានន័យ ។

ខ)កំណត់បណ្តាគូតម្លៃ c និង d ដើម្បីឲ្យ $(a+b)(c+d)=2(ab+cd)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ចគ្រប់ m ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌសំណួរក) ។

58-ឧបមាថាគេមានបីចំនួន a,b,c បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases} a+b+c=m-1 \\ a^3+b^3+c^3=m^3-57m-331 \end{cases}$$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក)គណនា $P=(a+b)(b+c)(c+a)$ ជាអនុគមន៍នៃ m រួចកំណត់តម្លៃរបស់ m ដែលធ្វើឲ្យ P មានតម្លៃធំបំផុត ។

ខ)បើ $a+c=2b$ ចូរកំណត់គ្រប់គូ (a,b,c) ចំពោះតម្លៃm ទើបរកឃើញ។

59-ឧបមាថាគេមានបីចំនួន a,b,c បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases} a+b+c=3(m^2+1) \\ a^3+b^3+c^3-3abc=m^4-2m^3+11m^2-2m+10 \end{cases}$$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក)គណនា $S=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ ជាអនុគមន៍នៃ m ។ រួចកំណត់តម្លៃរបស់ m ដែលធ្វើឲ្យ S មានតម្លៃតូចបំផុត ។

ខ)បើ $a+c=2b$ ចូរកំណត់គ្រប់គូ (a,b,c) ចំពោះតម្លៃm ទើបរកឃើញ។

LIM PHALKUN

60-គេឲ្យ $P(x)=x^4-x^3+1$ និង $Q(x)=x^2-2$

ឧបមាថាមានបួនចំនួន a,b,c,d ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ ៖

$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ $N=Q(a).Q(b).Q(c).Q(d)$ ។

❖❖❖☺❖❖❖

LIM PHALKUN

ជំពូកទី០២

ដំណោះស្រាយគំរូ

លំហាត់ទី០១

ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម ៖

ក) $(a^3+3ab^2)^2-(3a^2b+b^3)^2=(a-b)^3(a+b)^3$

ខ) $(a^4+6a^2b^2+b^4)^2-16a^2b^2(a^2+b^2)^2=(a-b)^4(a+b)^4$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាព

ក) $(a^3+3ab^2)^2-(3a^2b+b^3)^2=(a-b)^3(a+b)^3$

តាង $E=(a^3+3ab^2)^2-(3a^2b+b^3)^2$

$$E=(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3)(a^3+3ab^2-3a^2b-b^3)$$
$$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$$
$$=(a+b)^3(a-b)^3$$

ដូចនេះ $(a^3+3ab^2)^2-(3a^2b+b^3)^2=(a-b)^3(a+b)^3$ ។

ខ) $(a^4+6a^2b^2+b^4)^2-16a^2b^2(a^2+b^2)^2=(a-b)^4(a+b)^4$

តាង $F=(a^4+6a^2b^2+b^4)^2-16a^2b^2(a^2+b^2)^2$

$$F=(a^4+6a^2b^2+b^4-4a^3b-4ab^3)(a^4+6a^2b^2+b^4+4a^3b+4ab^3)$$
$$=(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)$$
$$=(a-b)^4(a+b)^4$$

ដូចនេះ $(a^4+6a^2b^2+b^4)^2-16a^2b^2(a^2+b^2)^2=(a-b)^4(a+b)^4$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី០២

ចូរស្រាយថា $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$

រួចទាញថា $|ax+by|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$

តាង $A=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$

គេបាន $A=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+b^2x^2-2abxy+a^2y^2$

$=(a^2x^2+b^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2)$

$=x^2(a^2+b^2)+y^2(a^2+b^2)$

$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

ដូចនេះ $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$ ពិត ។

ទាញថា $|ax+by|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$

គេមាន $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$

ដោយ $(bx-ay)^2\ge 0$ នោះ $(ax+by)^2+(bx-ay)^2\ge(ax+by)^2$

គេទាញបាន $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$

សមមូល $|ax+by|\le\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{x^2+y^2}$ ពិត ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី០៣

គេឲ្យកន្សោម $A=(a+b+c+d)^2$, $B=(a+b-c-d)^2$

$C=(a+c-b-d)^2$ និង $D=(a+d-b-c)^2$ ។

ចូរស្រាយថា $A+B+C+D=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $A+B+C+D=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$

គេមាន $A=(a+b+c+d)^2=[(a+b)+(c+d)]^2$

$$=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$$

$$B=(a+b-c-d)^2=[(a+b)-(c+d)]^2$$

$$=(a+b)^2-2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$$

គេបាន $A+B=2[(a+b)^2+(c+d)^2]$

ហើយ $C=(a+c-b-d)^2=[(a-b)+(c-d)]^2$

$$=(a-b)^2+2(a-b)(c-d)+(c-d)^2$$

$$D=(a+d-b-c)^2=[(a-b)-(c-d)]^2$$

$$=(a-b)^2-2(a-b)(c-d)+(c-d)^2$$

គេបាន $C+D=2[(a-b)^2+(c-d)^2]$

$A+B+C+D=2[(a+b)^2+(a-b)^2]+2[(c+d)^2+(c-d)^2]$

ដោយ $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

និង $(c+d)^2+(c-d)^2=2(c^2+d^2)$

ដូចនេះ $A+B+C+D=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$ ពិត ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី០៨

គេតាង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)=abc$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)=abc$$

តាង $A=a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2$

$$=(a+b+c)p^2-2(a^2+b^2+c^2)p+a^3+b^3+c^3$$

និង $B=2(p-a)(p-b)(p-c)$

$$=2p^3-2(a+b+c)p^2+2(ab+bc+ca)p-2abc$$

ដោយ $p=\frac{a+b+c}{2}$ នោះ $a+b+c=2p$

គេបាន $A=2p^3-2(a^2+b^2+c^2)p+a^3+b^3+c^3$

ហើយ $B=2p^3-4p^3+2(ab+bc+ca)p-2abc$

នោះ $A+B=2(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)p+a^3+b^3+c^3-2abc$

$$2(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)p=(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)(a+b+c)$$

$$=3abc-a^3-b^3-c^3$$

គេបាន $A=3abc-a^3-b^3-c^3+a^3+b^3+c^3-2abc=abc$ ពិត

ដូចនេះ

$$a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)=abc$$ ។

LIMPHALKUN

លំហាត់ទី០៨

គេតាង $p=\frac{a+b+c}{2}$, $q^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$, $x=(q^2-a^2)(q^2-b^2)$

$y=(q^2-b^2)(q^2-c^2)$ និង $z=(q^2-c^2)(q^2-a^2)$ ។

ចូរស្រាយថា $x+y+z=4p(p-a)(p-b)(p-c)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x+y+z=4p(p-a)(p-b)(p-c)$

គេមាន $4x=(2q^2-2a^2)(2q^2-2b^2)$ ដោយ $q^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

គេបាន $4x=(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)=c^4-(a^2-b^2)^2$

ដូចគ្នាដែរ $4y=a^4-(b^2-c^2)^2$ និង $4z=b^4-(c^2-a^2)^2$

គេបាន ៖

$$\begin{aligned}4(x+y+z)&=a^4+b^4+c^4-(a^2-b^2)^2-(b^2-c^2)^2-(c^2-a^2)^2\\&=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\\&=4a^2c^2-(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2+2a^2c^2)\\&=4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2\\&=(2ac+a^2-b^2+c^2)(2ac-a^2+b^2-c^2)\\&=[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]\\&=(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)\\&=2p(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)\\&=16p(p-a)(p-b)(p-c)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $x+y+z=4p(p-a)(p-b)(p-c)$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី០៦

ចូរដាក់ជាផលគុណកត្តានៃកន្សោម ៖

$A=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ និង $B=x^3+y^3+z^3-3xyz$

ដំណោះស្រាយ

$$\begin{aligned}A&=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\\&=[(x+y)+z]^3-x^3-y^3-z^3\\&=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3-x^3-y^3-z^3\\&=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2-x^3-y^3\\&=3xy(x+y)+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2\\&=3(x+y)(xy+xz+yz+z^2)\\&=3(x+y)[x(y+z)+z(y+z)]=3(x+y)(y+z)(z+x)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $A=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(x+z)$ ។

ដោយ $A=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(x+z)$

គេទាញ $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(x+z)$

គេបាន $B=(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(x+z)-3xyz$

តាង $s=x+y+z$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{aligned}B&=s^3-3(s-z)(s-x)(s-y)-3xyz\\&=s^3-3s^3+3(x+y+z)s^2-3(xy+yz+xz)s+3xyz-3xyz\\&=s^3-3s^3+3s^3-3(xy+yz+xz)s=s^3-3(xy+yz+xz)s\\&=s(s^2-3xy-3yz-3xz)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $B=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី០៧

បើ $a+b+c=0$ នោះចូរស្រាយថា ៖

ក) $a^3+b^3+c^3=3abc$

ខ) $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$

ដំណោះស្រាយ

ក) $a^3+b^3+c^3=3abc$

គេមាន $a+b+c=0$ នោះ $a=-(b+c)$

លើកអង្គទាំងពីរជាគូបគេបាន $a^3=-(b+c)^3=-b^3-c^3-3bc(b+c)$

គេទាញ $a^3+b^3+c^3=3abc$ ពិត ។

ខ) $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$

គេមាន $a+b+c=0$ នោះ $(a+b+c)^2=0$

ឬ $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$

លើកជាការេ $(a^2+b^2+c^2)^2=4(ab+bc+ca)^2$

ដោយ $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2a^2bc+2abc^2$

$$=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc(a+b+c)$$

$$=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2$$

$$=\frac{1}{2}[(a^2+b^2+c^2)^2-(a^4+b^4+c^4)]$$

គេបាន $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)$

ដូចនេះ $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$ ពិត ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី០៨

គេឲ្យ $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$, $z=\frac{c-a}{c+a}$ ។

ចូរស្រាយថា $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$

គេមាន $1+x=1+\frac{a-b}{a+b}=\frac{2a}{a+b}$ និង $1-x=1-\frac{a-b}{a+b}=\frac{2b}{a+b}$

នោះ $\frac{1+x}{1-x}=\frac{2a}{a+b}\times\frac{a+b}{2b}=\frac{a}{b}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{1+y}{1-y}=\frac{b}{c}$ និង $\frac{1+z}{1-x}=\frac{c}{a}$ ។

គេបាន $\frac{1+x}{1-x}.\frac{1+y}{1-y}.\frac{1+z}{1-z}=\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}=1$

ដូចនេះ $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$ ពិត ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី០៩

បើ $ax+by+cz=0$ នោះចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{ab(x-y)^2+bc(y-z)^2+ca(z-x)^2}=\frac{1}{a+b+c}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

យក $N=ax^2+by^2+cz^2$ និង $D=ab(x-y)^2+bc(y-z)^2+ca(z-x)^2$

គេបាន ៖

$$\begin{aligned} D &= abx^2+aby^2+bcy^2+bcz^2+caz^2+cax^2-2abxy-2bcyz-2cazx \\ &= a(cz^2+by^2)+b(ax^2+cz^2)+c(ax^2+by^2)-2abxy-2acxz-2bcyz \\ &= a(N-ax^2)+b(N-by^2)+c(N-cz^2)-2abxy-2acxz-2bcyz \\ &= (a+b+c)N-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz) \\ &= (a+b+c)N-(ax+by+cz)^2 \\ &= (a+b+c).N \quad \text{ព្រោះ } ax+by+cz=0 \end{aligned}$$

គេទាញបាន $\frac{N}{D}=\frac{1}{a+b+c}$

ដូចនេះ $$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{ab(x-y)^2+bc(y-z)^2+ca(z-x)^2}=\frac{1}{a+b+c}$$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី១០

ចូរបង្ហាញថា $E=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=2$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $2+\sqrt{3}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}+1^2}{2}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$

និង $2-\sqrt{3}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}+1^2}{2}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$

គេបាន $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)^2}{2(3+\sqrt{3})}$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)^2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

ហើយ $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)^2}{2(3-\sqrt{3})}$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)^2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

ដោយ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{2}$ នោះ $E=(\sqrt{2})^2=2$ ពិត ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី១១

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $t=\sqrt[3]{2}$ នោះ $t^3=2$

ដើម្បីស្រាយថា $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ ពិតគេត្រូវស្រាយថា

$\sqrt[3]{t-1}=\frac{1-t+t^2}{\sqrt[3]{9}}$ ពិត ឬ $9(t-1)=(1-t+t^2)^3$ ពិត

មាន $(1-t+t^2)^2=1+t^2+t^4-2t+2t^2-2t^3$

$=t(t^3-2)-2(t^3-2)+3(t^2-1)$ ដោយ $t^3=2$

គេបាន $(1-t+t^2)^2=3(1-t^2)=3(1+t)(1-t)$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $1-t+t^2$ គេបាន ៖

$(1-t+t^2)^3=3(1+t)(1-t+t^2)(1-t)$

$=3(1+t^3)(1-t)$

$=3(1+2)(1-t)=9(1-t)$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី១២

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}}{3}$

តាង $y=\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}}{3}$ ដែល $y>0$

តាមសមភាព $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$ គេបាន

$$y^2=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{400}+\sqrt[3]{625}+2\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{500}-2\sqrt[3]{50}}{9}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{50}+5\sqrt[3]{5}+4\sqrt[3]{5}-10\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{50}}{9}$$

$$=\frac{9\sqrt[3]{5}-9\sqrt[3]{4}}{9}=\frac{9(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4})}{9}=\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}$$

គេទាញ $y=\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}$ ព្រោះ $y>0$ ។

ដូចនេះ $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}}{3}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី១៣

ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $t=\sqrt[4]{5}$ នោះ $t^4=5$

គេមាន $\left(\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}\right)^4=\frac{(t+1)^4}{(t-1)^4}=\frac{t^4+4t^3+6t^2+4t+1}{t^4-4t^3+6t^2-4t+1}$

$$=\frac{5+4t^3+6t^2+4t+1}{5-4t^3+6t^2-4t+1}$$

$$=\frac{6+4t^3+6t^2+4t}{6-4t^3+6t^2-4t}$$

$$=\frac{3+2t+t^2(3+2t)}{3-2t+t^2(3-2t)}=\frac{(3+2t)(3+t^2)}{(3-2t)(3+t^2)}$$

$$=\frac{3+2t}{3-2t}=\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}$$

គេទាញ $\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}=\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{1}{4}}$ ពិត

ដូចនេះ $\left(\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យ $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{d}{t}$ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}+\sqrt{ct}=\sqrt{a+b+c+d}.\sqrt{x+y+z+t}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}+\sqrt{ct}=\sqrt{a+b+c+d}.\sqrt{x+y+z+t}$

តាង $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{d}{t}=k \Leftrightarrow \begin{cases} a=kx \\ b=ky \\ c=kz \\ d=kt \end{cases}$ នោះគេបាន ៖

$\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}+\sqrt{dt}=(x+y+z+t)\sqrt{k}$ (1)

ហើយ $a+b+c+d=(x+y+z+t)k \Leftrightarrow k=\frac{a+b+c+d}{x+y+z+t}$ (2)

យក (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}+\sqrt{dt}=(x+y+z+t)\sqrt{\frac{a+b+c+d}{x+y+z+t}}$$

$$=\sqrt{x+y+z+t}.\sqrt{a+b+c+d}$$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}+\sqrt{ct}=\sqrt{a+b+c+d}.\sqrt{x+y+z+t}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី១៨

បើ $ax^3 = by^3 = cz^3$ និង $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ចូរស្រាយថា ៖

$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

តាង $t=\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}$

ដោយ $ax^3 = by^3 = cz^3$ និង $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

នោះ $t=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{ax^3}{y}+\frac{ax^3}{z}}=x\sqrt[3]{a(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}=x\sqrt[3]{a}$ ឬ $\frac{t}{x}=\sqrt[3]{a}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{t}{y}=\sqrt[3]{b}$ និង $\frac{t}{z}=\sqrt[3]{c}$

គេបាន $\frac{t}{x}+\frac{t}{y}+\frac{t}{z}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ ឬ $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})t=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

ដោយ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ នោះ $t=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ ពិត។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យកន្សោម $y=\{2[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-a][(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-b]\}^{\frac{1}{2}}$ ដែល $a,b>0$ ។

ចូរស្រាយថា $y=a+b-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $y=a+b-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$

$$y=\{2[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-a][(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-b]\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2\left[(a^2+b^2)-(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+ab\right]}$$

$$=\sqrt{2(a^2+b^2)-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+2ab}$$

$$=\sqrt{(a^2+2ab+b^2)-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+(a^2+b^2)}$$

$$=\sqrt{(a+b)^2-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+(\sqrt{a^2+b^2})^2}$$

$$=\sqrt{(a+b-\sqrt{a^2+b^2})^2}=|a+b-\sqrt{a^2+b^2}|$$

ដោយ $a+b>\sqrt{a^2+b^2}$ គ្រប់ $a>0$, $b>0$ ។

ដូចនេះ $y=a+b-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យ $a \ge 0 , b \ge 0 , c \ge 0$ ។ គណនាកន្សោម ៖

$$A = \sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}} + \sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាកន្សោម ៖

$$A = \sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}} + \sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$

គេមាន $a+b+c+2\sqrt{ac+bc} = \sqrt{(a+b)}^2 + 2\sqrt{(a+b)c} + \sqrt{c}^2$

$$= (\sqrt{a+b} + \sqrt{c})^2$$

ហើយ $a+b+c-2\sqrt{ac+bc} = \sqrt{(a+b)}^2 - 2\sqrt{(a+b)c} + \sqrt{c}^2$

$$= (\sqrt{a+b} - \sqrt{c})^2$$

គេបាន $A = \sqrt{(\sqrt{a+b}+\sqrt{c})^2} + \sqrt{(\sqrt{a+b}-\sqrt{c})^2}$

$$= |\sqrt{a+b}+\sqrt{c}| + |\sqrt{a+b}-\sqrt{c}|$$

$$= \sqrt{a+b}+\sqrt{c} + |\sqrt{a+b}-\sqrt{c}|$$

-បើ $\sqrt{a+b}-\sqrt{c} > 0 \Leftrightarrow a+b > c$ គេបាន៖

$A = \sqrt{a+b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b}-\sqrt{c} = 2\sqrt{a+b}$ ។

-បើ $\sqrt{a+b}-\sqrt{c} < 0 \Leftrightarrow a+b < c$ គេបាន៖

$A = \sqrt{a+b}+\sqrt{c}-\sqrt{a+b}+\sqrt{c} = 2\sqrt{c}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី១៨

ចូរស្រាយថាចំនួន $x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$

ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^3+px+q=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $a=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,,\ b=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$

គេបាន $x=a+b$ នោះ $x^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

ដោយ $a^3+b^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=-q$

ហើយ $ab=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)^2}=\frac{p}{3}$

គេបាន $x^3=-q-px$ ឬ $x^3+px+q=0$ ។

សម្រាយនេះបញ្ជាក់ថា $x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$

ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^3+px+q=0$ ។

លំហាត់ទី១៩

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt[3]{2}$ មិនអាចសរសេរជារាង $p+\sqrt{q}$ ដែល p និង q ជាចំនួនសនិទាន ហើយ $q>0$ និង q មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

ឧបមាថា $\sqrt[3]{2}=p+\sqrt{q}$ នោះ $2=(p+\sqrt{q})^3$

$$2=p^3+3p^2\sqrt{q}+3pq+q\sqrt{q}$$

$$2=(p^3+3pq)+(3p^2+q)\sqrt{q}$$

ដោយ q មិនមែនជាការេប្រាកដនោះសមភាពនេះពិតលុះត្រាតែ $3p^2+q=0$

ដោយ $q>0$ នោះ $3p^2+q>0$ ។

សម្រាយនេះមានន័យថា $\sqrt[3]{2}$ មិនអាចសរសេរជារាង $p+\sqrt{q}$ ដែល p និង q ជាចំនួនសនិទាន ហើយ $q>0$ និង q មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី២០

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ac}{a+c}=a+b+c$$

ដែល $a+b\neq 0$, $b+c\neq 0$, $c+a\neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ac}{a+c}=a+b+c$$

សមមូល $(\frac{x-ab}{a+b}-c)+(\frac{x-bc}{b+c}-a)+(\frac{x-ac}{a+c}-b)=0$

សមមូល $\frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-ab-ac-bc}{b+c}+\frac{x-ab-ac-bc}{a+c}=0$

សមមូល $(x-ab-bc-ca)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})=0$

សមមូល $x-ab-bc-ca=0$

ដូចនេះ $x=ab+bc+ca$ ជាឫសនៃសមីការ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី២១

ដោះស្រាយសមីការ $\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

ដែល $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

សមមូល $\left(\frac{x-a}{bc}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-b}{ac}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0$

សមមូល $\frac{x-a-b-c}{bc}+\frac{x-b-c-a}{ac}+\frac{x-c-a-b}{ab}=0$

សមមូល $(x-a-b-c)(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab})=0$

គេទាញឫស $x=a+b+c$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី២២

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$$

ដែល $a,b,c\neq 0$ និង $a+b+c\neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$$

សមីការសមមូល

$$(\frac{a+b-x}{c}+1)+(\frac{a+c-x}{b}+1)+(\frac{b+c-x}{a}+1)-4(1-\frac{x}{a+b+c})=0$$

$$\frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{b}+\frac{a+b+c-x}{a}-4\frac{a+b+c-x}{a+b+c}=0$$

$$(a+b+c-x)(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{4}{a+b+c})=0$$

គេទាញឫស $x=a+b+c$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី២៣

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$\frac{\sqrt[p]{b+x}}{b}+\frac{\sqrt[p]{b+x}}{x}=\frac{c}{a}\sqrt[p]{x}$ ដែល $p\in\mathbb{N}\,,\,p\geq 2\,,\,a,b,c\neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\frac{\sqrt[p]{b+x}}{b}+\frac{\sqrt[p]{b+x}}{x}=\frac{c}{a}\sqrt[p]{x}$$

សមមូល $(\sqrt[p]{b+x})(\frac{1}{b}+\frac{1}{x})=\frac{c}{a}\sqrt[p]{x}$

សមមូល $\frac{(b+x)^{1+\frac{1}{p}}}{bx}=\frac{c}{a}x^{\frac{1}{p}}$

សមមូល $\frac{(b+x)^{1+\frac{1}{p}}}{x^{1+\frac{1}{p}}}=\frac{bc}{a}$

សមមូល $\left(\frac{b+x}{x}\right)^{\frac{1+p}{p}}=\frac{bc}{a}$ គេទាញ $\frac{b}{x}+1=\left(\frac{bc}{a}\right)^{\frac{p}{1+p}}$

ដូចនេះ $x=\frac{b}{\left(\frac{bc}{a}\right)^{\frac{p}{1+p}}-1}$ ជាឫសនៃសមីការ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី២៨

ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$

ដែល a និង b ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}\geq 0\ ,\ a\neq 0\ ,b\neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$

លក្ខខណ្ឌ $x\geq 0$

គេមាន $(A+B)^3=A^3+B^3+3A.B(A+B)$

យក $A=\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}\ ,\ B=\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}$ ដែល $A+B=\sqrt[3]{b}$

គេបាន $\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=a+\sqrt{x}+a-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{a^2-x}\sqrt[3]{b}$

$$b=2a+3\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{a^2-x}$$

គេទាញ $\sqrt[3]{a^2-x}=\frac{b-2a}{3\sqrt[3]{b}}$ ឬ $a^2-x=\frac{(b-2a)^3}{27b}$

ដូចនេះ $x=a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}$ ព្រោះ $a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}\geq 0\ ,\ a\neq 0\ ,b\neq 0$ ។

LIMPHALKUN

លំហាត់ទី២៨

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{x-a}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ដែល $a>0\,,\,b>0$ និង $a\neq b$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{x-a}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ សមីការមានន័យបើ $x\geq a\,,\,x\geq b$

សមីការសមមូល $\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{x-b})=\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{x-a})$

$$\sqrt{ab}+\sqrt{b(x-b)}=\sqrt{ab}+\sqrt{a(x-a)}$$

$$\sqrt{b(x-b)}=\sqrt{a(x-a)}$$

$$b(x-b)=a(x-a)$$

$$(b-a)x=b^2-a^2$$

ដោយ $a\neq b$ នោះគេទាញឫស $x=\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=a+b$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យ $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ និង $y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

ចូរគណនា $A=x^4+y^4+(x+y)^4$?

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A=x^4+y^4+(x+y)^4$

គេមាន $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{\sqrt{7^2}-\sqrt{3^2}}=\dfrac{7+2\sqrt{21}+3}{7-3}=\dfrac{10+2\sqrt{21}}{4}$

$=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$

ហើយ $x=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{\sqrt{7^2}-\sqrt{3^2}}=\dfrac{7-2\sqrt{21}+3}{7-3}=\dfrac{10-2\sqrt{21}}{4}$

$=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$

គេបាន $x+y=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}+\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}=5$ និង $xy=\dfrac{5^2-\sqrt{21}^2}{4}=1$

គេបាន $A=x^4+y^4+(x+y)^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+5^4$

$=\left[(x+y)^2-2xy\right]^2-2(xy)^2+625$

$=(25-2)^2-2+625=1152$

ដូចនេះ $A=x^4+y^4+(x+y)^4=1152$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី២៧

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$

តាង $x=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{(\sqrt{15}+\sqrt{25})+(\sqrt{21}+\sqrt{35})}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

$$x=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{7}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$$

គេទាញ $\dfrac{1}{x}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$$\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$$

គេបាន $x=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{\sqrt{7^2}-\sqrt{3^2}}=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី២៨

ចូរសម្រួលកន្សោម ៖

$$P=\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

ដំណោះស្រាយ

សម្រួលកន្សោម ៖

$$P=\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k គេមាន ៖

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

គេបាន $P=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+...+(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}})$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$ ។

ដូចនេះ $P=\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=\frac{9}{10}$ ។

LIMPHALKUN

លំហាត់ទី២៩

គណនា $M=\sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}-\sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $a=\sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$, $b=\sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}$

គេបាន $a^2+b^2=2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}+2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}=4$

ហើយ $ab=\sqrt{2^2-\sqrt{(-2+2\sqrt{5})^2}}=\sqrt{4+2-2\sqrt{5}}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1^2}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$

គេបាន $M=a-b=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2-2ab}$

$=\sqrt{4-2(\sqrt{5}-1)}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$

ដូចនេះ $M=\sqrt{2+\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}-\sqrt{2-\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}=\sqrt{5}-1$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៣០

ចូរកំណត់បីចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c ដោយដឹងថា ៖

$\sqrt{7+2(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{7})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ ($a<b<c$) ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់បីចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c ដោយដឹងថា ៖

$\sqrt{7+2(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{7})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$7+2(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{7})=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$

$9+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{15}=a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}$

ដោយ $a<b<c$ នោះ $ab<ac<bc$

ហេតុនេះ $\begin{cases} a+b+c=9 \\ ab=3 \\ ac=5 \\ bc=15 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $a=1$, $b=3, c=5$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៣១

ចូរកំណត់គូនៃចំនួនសនិទានមួយ (a,b,c) ដោយដឹងថា ៖

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គូនៃចំនួនសនិទានមួយ (a,b,c)

តាង $x=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$ និង $y=\sqrt[3]{2}$

គេមាន $y^3=(\sqrt[3]{2})^3=2$ ហើយ $x=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{y-1}$

គេមាន $(y-1)(y^2+y+1)=y^3-1=2-1=1$

គេទាញ $y-1=\dfrac{1}{y^2+y+1}$ នោះ $x=\sqrt[3]{y-1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2+y+1}}$ (1)

គេមាន $y^2+y+1=\dfrac{3y^2+3y+3}{3}=\dfrac{(y+1)^3-y^3+2}{3}=\dfrac{(y+1)^3}{3}$ (2)

យក (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន $x=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{y+1}$ (3)

$(y+1)(y^2-y+1)=y^3+1=2+1=3$ នោះ $y+1=\dfrac{3}{y^2-y+1}$ (4)

យក (4) ជួសក្នុង (3) គេបាន $x=\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}(y^2-y+1)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$

ឬ $x=\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}-\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$ ដោយ $x=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

ដូចនេះ $a=\dfrac{4}{9}, b=-\dfrac{2}{9}, c=\dfrac{1}{9}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៣២

គណនាផលគុណ $P=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})....(1-\frac{1}{2014^2})$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})....(1-\frac{1}{2014^2})$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k\geq 2$ គេមាន $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}.\frac{k+1}{k}$

គេបាន $P=(\frac{1}{2}.\frac{3}{2})(\frac{2}{3}.\frac{4}{3})(\frac{3}{4}.\frac{5}{4})....(\frac{2013}{2014}.\frac{2015}{2014})$

$$=(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}...\frac{2013}{2014})(\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\frac{5}{4}...\frac{2015}{2014})$$

$$=\frac{1}{2014}\times\frac{2015}{2}=\frac{2015}{4028}$$

ដូចនេះ $P=\frac{2015}{4028}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៣៣

គណនាផលបូក

$$S=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{625}+\sqrt{623}}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក

$$S=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{625}+\sqrt{623}}$$

ចំពោះគ្រប់ $k=1,2,3,....$ គេមាន ៖

$$\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{\sqrt{(2k+1)^2}-\sqrt{(2k-1)^2}}=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2}$$

គេបាន $S=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+...+\frac{\sqrt{625}-\sqrt{623}}{2}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+...+\sqrt{625}-\sqrt{623}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{625}-1}{2}=\frac{25-1}{2}=12$$

ដូចនេះ $S=12$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៣៨

ក)គ្រប់ $k=1,2,3,...$ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{1}{(2k+1)\sqrt{2k-1}+(2k-1)\sqrt{2k+1}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}})$$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+...+\frac{1}{625\sqrt{623}+623\sqrt{625}}$$

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា ៖

$$\frac{1}{(2k+1)\sqrt{2k-1}+(2k-1)\sqrt{2k+1}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}})$$

គេមាន

$$\frac{1}{(2k+1)\sqrt{2k-1}+(2k-1)\sqrt{2k+1}}=\frac{1}{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})}$$

$$=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2\sqrt{(2k+1)(2k-1)}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)$$

ដូចនេះ

$$\frac{1}{(2k+1)\sqrt{2k-1}+(2k-1)\sqrt{2k+1}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}})$$ ពិត

LIMPHALKUN

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}+\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}+...+\frac{1}{625\sqrt{623}+623\sqrt{625}}$$

គេមាន $\frac{1}{(2k+1)\sqrt{2k-1}+(2k-1)\sqrt{2k+1}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k+1}})$

ចំពោះ $k=1:\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{3}})$

ចំពោះ $k=2:\frac{1}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}})$

$k=3:\frac{1}{7\sqrt{5}+5\sqrt{7}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}})$

ចំពោះ $k=312:\frac{1}{625\sqrt{623}+623\sqrt{625}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{623}}-\frac{1}{\sqrt{625}})$

ដោយបូកសមភាពទាំងនេះអង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$S=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{625}})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{25})=\frac{12}{25}$$ ។

ដូចនេះ $S=\frac{12}{25}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៣៨

ចូរគណនា $A=\sqrt{\sqrt{2}\times\sqrt{4+\sqrt{7}}+2\sqrt{\sqrt{2+\frac{\sqrt{7}}{2}}+\sqrt{2-\frac{\sqrt{7}}{2}}}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា

$$A=\sqrt{\sqrt{2}\times\sqrt{4+\sqrt{7}}+2\sqrt{\sqrt{2+\frac{\sqrt{7}}{2}}+\sqrt{2-\frac{\sqrt{7}}{2}}}}$$

គេមាន $\sqrt{2}\times\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2}=\sqrt{7}+1$

$$\sqrt{2+\frac{\sqrt{7}}{2}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{2}}=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{7}}{4}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}+1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}+1}{2}$$

$$\sqrt{2-\frac{\sqrt{7}}{2}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}}=\sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{4}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

គេបាន $A=\sqrt{\sqrt{7}+1+2\sqrt{\frac{\sqrt{7}+1}{2}+\frac{\sqrt{7}-1}{2}}}$

$$=\sqrt{\sqrt{7}+1+2\sqrt{\sqrt{7}}}=\sqrt{\sqrt{7}+1+2\sqrt[4]{7}}$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{7}^2}=\sqrt{(1+\sqrt[4]{7})^2}=1+\sqrt[4]{7}$$

ដូចនេះ $A=1+\sqrt[4]{7}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៣៦

គណនា $E=\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}+\frac{5}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $E=\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}+\frac{5}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1}}$

តាមរូបមន្ត ៖

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ នោះ $\frac{1}{a^2+ab+b^2}=\frac{a-b}{a^3-b^3}$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ នោះ $\frac{1}{a^2-ab+b^2}=\frac{a+b}{a^3+b^3}$

គេទាញ $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1}=\sqrt[3]{2}-1$

$\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}=\frac{3(\sqrt[3]{2}+1)}{2+1}=\sqrt[3]{2}+1$

$\frac{5}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}+1}=\frac{5(\sqrt[3]{4}+1)}{4+1}=\sqrt[3]{4}+1$

យើងបាន $E=\sqrt{\sqrt[3]{2}-1+\sqrt[3]{2}+1+\sqrt[3]{4}+1}$

$=\sqrt{\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1}=\sqrt{(\sqrt[3]{2}+1)^2}=\sqrt[3]{2}+1$

ដូចនេះ $E=\sqrt[3]{2}+1$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៣៧

ចូរស្រាយថា $(x+1)^7-x^7-1=7x(x+1)(x^2+x+1)^2$ ។

អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $A=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^7+\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^7}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(x+1)^7-x^7-1=7x(x+1)(x^2+x+1)^2$

$$(x+1)^7=(x+1)[(x+1)^3]^2=(x+1)(x^3+3x^2+3x+1)^2$$
$$=(x+1)[(x^3+3x^2)^2+2(x^3+3x^2)(3x+1)+(3x+1)^2]$$
$$=(x+1)(x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1)$$

$$x^7+1=(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$$

តាង $y=(x+1)^7-x^7-1=(x+1)^7-(x^7+1)$

$$=(x+1)(7x^5+14x^4+21x^3+14x^2+7x)$$
$$=7x(x+1)(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)$$
$$=7x(x+1)(x^2+x+1)^2$$

ដូចនេះ $(x+1)^7-x^7-1=7x(x+1)(x^2+x+1)^2$ ។

ម្យ៉ាងដោយជំនួស $x=\frac{a}{b}$ ក្នុងសមភាពខាងលើគេបាន ៖

$$(\frac{a}{b}+1)^7-(\frac{a}{b})^7-1=7\frac{a}{b}(\frac{a}{b}+1)(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1)^2$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង b^7 គេបាន ៖

$$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$$

គេទាញបាន $a^7+b^7=(a+b)^7-7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$

LIM PHALKUN

យក $a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ និង $b=\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$

នោះ $a+b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{-\sqrt{5}+1}{2}=1$ និង $ab=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times\frac{-\sqrt{5}+1}{2}=1$

ហើយ $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=1+1=2$

គេបាន $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^7+\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^7=1^7-7(-1)(1)(2)^2=15$

ហេតុនេះ $A=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^7+\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^7}=\sqrt{1+15}=\sqrt{16}=4$

ដូចនេះ $A=4$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៣៨

គេឲ្យ $a=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ និង $b=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

ចូរគណនាតម្លៃ $N=19a^7+97b^5$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $N=19a^7+97b^5$

គេមាន $a=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ និង $b=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

គេបាន $a+b=\frac{1+\sqrt{13}}{2}+\frac{1-\sqrt{13}}{2}=1$ និង $ab=\frac{1-13}{4}=-3$

នោះ a និង b ជាឫសសមីការ $x^2-x-3=0$ (ទ្រឹស្តីបទវ្យែត)

គេបាន $a^2-a-3=0$ និង $b^2-b-3=0$ ដែល $a>0\,,b<0$ ។

គេមាន $a^2=a+3$ នោះ $a^3=a^2+3a=a+3+3a=4a+3$

ហើយ $a^5=a^2.a^3=(a+3)(4a+3)=4a^2+15a+9=19a+21$

គេទាញ $a^7=a^2.a^5=(a+3)(19a+21)=19a^2+78a+63$

$$a^7=19(a+3)+78a+63=97a+120$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $b^5=19b+21$ (ព្រោះលំនាំដូច $a^5=19a+21$)

គេបាន $N=19a^7+97b^5=19(97a+120)+97(19b+21)$

$$=1843(a+b)+4317=1843+4317=6160$$

ដូចនេះ $N=6160$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៣៩

គណនា $A=\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ និង $v=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$

គេបាន $A=u+v$ នាំឲ្យ $A^3=(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$

ដោយ $u^3+v^3=45-29\sqrt{2}+45+29\sqrt{2}=90$

និង $uv=\sqrt[3]{45^2-(29\sqrt{2})^2}=\sqrt[3]{343}=7$

គេបានសមីការ $A^3=90+21A$ សមមូល $A^3-21A-90=0$

សមមូល $A^3-6A^2+6A^2-36A+15A-90=0$

សមមូល $A^2(A-6)+6A(A-6)+15(A-6)=0$

សមមូល $(A-6)(A^2+6A+15)=0$

ដោយ $A^2+6A+15=(A+3)^2+6>0$

នោះសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $A-6=0\Leftrightarrow A=6$ ។

ដូចនេះ $A=\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}=6$ ។

LIMPHALKUN

លំហាត់ទី៤០

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A=(\sqrt{7-\sqrt{33}}+\sqrt{7+\sqrt{33}}-2)(\sqrt{7-\sqrt{33}}+\sqrt{7+\sqrt{33}}+2)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ

$$A=(\sqrt{7-\sqrt{33}}+\sqrt{7+\sqrt{33}}-2)(\sqrt{7-\sqrt{33}}+\sqrt{7+\sqrt{33}}+2)$$

តាង $a=\sqrt{7-\sqrt{33}}$ និង $b=\sqrt{7+\sqrt{33}}$ នោះ $ab=\sqrt{49-33}=4$

គេបាន $A=(a+b-\sqrt{ab})(a+b+\sqrt{ab})$

$=(a+b)^2-(\sqrt{ab})^2=a^2+ab+b^2$

ដោយ $a^2+b^2=7-\sqrt{33}+7+\sqrt{33}=14$ និង $ab=4$

នោះ $A=14+4=18$ ។

ដូចនេះ $A=(\sqrt{7-\sqrt{33}}+\sqrt{7+\sqrt{33}}-2)(\sqrt{7-\sqrt{33}}+\sqrt{7+\sqrt{33}}+2)=18$

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៤១

គេដឹងថា $\left(\sqrt[3]{2}\right)^x+\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-x}=\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}+\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}$

ចូរគណនាតម្លៃ $A=2^x+2^{-x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $A=2^x+2^{-x}$

តាមរូបមន្ត $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

គេបាន $A=2^x+2^{-x}=\left(\sqrt[3]{2^x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^3$

$$=\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^x+\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-x}\right]\left[\left(\sqrt[3]{4}\right)^x+\left(\sqrt[3]{4}\right)^{-x}-1\right]$$

តាង $t=\left(\sqrt[3]{2}\right)^x+\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-x}=\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}+\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}$

គេបាន $t^2=\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^x+\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-x}\right]^2=\left(\sqrt[3]{4}\right)^x+\left(\sqrt[3]{4}\right)^{-x}+2$

គេទាញ $\left(\sqrt[3]{4}\right)^x+\left(\sqrt[3]{4}\right)^{-x}=t^2-2$

ហើយ $A=t(t^2-2-1)=t^3-3t \quad (1)$

តាង $u=\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}$ និង $v=\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}$

គេបាន $t=u+v$ នាំឲ្យ $t^3=(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$

ដោយ $u^3+v^3=4-\sqrt{15}+4+\sqrt{15}=8$

និង $uv=\sqrt[3]{4^2-(\sqrt{15})^2}=1$

គេបានសមីការ $t^3=8+3t$ សមមូល $t^3-3t=8 \quad (2)$

តាម(1) និង (2) បាន $A=8$ ។

LIMPHALKUN

លំហាត់ទី៤២

គេមានពីរចំនួនពិត x និង y ដែល $x^2+8xy+y^2=1000$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃអំបំផុតនៃ $P=2014xy$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃអំបំផុតនៃ $P=2014xy$

គេមាន $x^2+8xy+y^2=1000$

សមមូល $10xy+(x-y)^2=1000$

សមមូល $xy=100-\dfrac{(x-y)^2}{10}$

ដោយ $(x-y)^2\geq 0$ នោះ $xy=100-\dfrac{(x-y)^2}{10}\leq 100$

គេទាញ $P=2014xy\leq 201400$ (សមភាពកើតឡើងពេល $x=y$)

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃ $P=2014xy$ គឺ $P_{max}=201400$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៤៣

ចូររកគូចម្លើយទាំងអស់នៃ (a,b) ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ $ab-b-(a-1)^2=2014$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកគូចម្លើយទាំងអស់នៃ (a,b) ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ៖

គេមាន $ab-b-(a-1)^2=2014$

សមមូល $b(a-1)-(a-1)^2=2014$

សមមូល $(a-1)(b-a+1)=2014$

ដោយ $2014=2\times19\times53$ ហើយ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

នោះគេទាញ $\begin{cases} a-1=1 \\ b-a+1=2014 \end{cases}$ មានគូចម្លើយ $a=2$, $b=2015$

ឬ $\begin{cases} a-1=2 \\ b-a+1=19\times53 \end{cases}$ មានគូចម្លើយ $a=3$, $b=1009$

ឬ $\begin{cases} a-1=19 \\ b-a+1=2\times53 \end{cases}$ មានគូចម្លើយ $a=20$, $b=125$

ឬ $\begin{cases} a-1=2\times19 \\ b-a+1=53 \end{cases}$ មានគូចម្លើយ $a=39$, $b=91$

ឬ $\begin{cases} a-1=53 \\ b-a+1=2\times19 \end{cases}$ មានគូចម្លើយ $a=54$, $b=91$

ឬ $\begin{cases} a-1=2\times53 \\ b-a+1=19 \end{cases}$ មានគូចម្លើយ $a=107$, $b=125$

LIM PHALKUN

ឬ $\begin{cases} a-1=19\times 53 \\ b-a+1=2 \end{cases}$ មានគូចម្លើយ $a=1008\ ,b=1009$

ឬ $\begin{cases} a-1=2\times 19\times 53 \\ b-a+1=1 \end{cases}$ មានគូចម្លើយ $a=2015\ ,b=2015$

ដូចនេះគូចម្លើយគត់វិជ្ជមានរបស់សមីការគឺ ៖ $a=2\ ,\ b=2015$,
$a=3\ ,b=1009$, $a=20\ ,b=125$, $a=39\ ,b=91$, $a=54\ ,b=91$,
$a=107\ ,b=125$, $a=1008\ ,b=1009$ និង $a=2015\ ,b=2015$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៤៤

ចូររកគូចម្លើយទាំងអស់នៃ (x,y)ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ $3xy-6x-4y+5=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គូចម្លើយទាំងអស់នៃ (x,y)ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

គេមាន $3xy-6x-4y+5=0$

សមមូល $3x(y-2)-4(y-2)-3=0$

សមមូល $(y-2)(3x-4)=3$

ដោយ(x,y)ជាគូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះគេទាញបាន ៖

$\begin{cases} y-2=1 \\ 3x-4=3 \end{cases}$ (1) ឬ $\begin{cases} y-2=3 \\ 3x-4=1 \end{cases}$ (2)

ប្រពន្ធ័សមីការ (1) និង (2) សុទ្ធតែគ្មានគូចម្លើជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដូចនេះគ្មានគូ(x,y)ជាគូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ$3xy-6x-4y+5=0$ នេះទេ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៤៥

រកគូចម្លើយទាំងអស់នៃ (x,y)ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយបំពេញលក្ខខណ្ឌឲ្យសមីការ $x^2-2x-y^2-4y-8=0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គូចម្លើយទាំងអស់នៃ (x,y)ដែលជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

គេមាន $x^2-2x-y^2-4y-8=0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$

សមមូល $(x^2-2x+1)-(y^2+4y+4)-5=0$

សមមូល $(x-1)^2-(y+2)^2=5$

សមមូល $(x+y+1)(x-y-3)=5$

គេទាញ $\begin{cases} x+y+1=5 \\ x-y-3=1 \end{cases}$ (ព្រោះ $x+y+1>x-y-3$គ្រប់ $x\ge 0$, $y\ge 0$)

សមមូល $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=4 \end{cases}$ មានគូចម្លើយ $x=4$, $y=0$ ។

ដូចនេះ $x=4$, $y=0$ ជាគូចម្លើយតែមួយគត់ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៤៦

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x^3+3xy^2=66500 \\ 3x^2y+y^3=58500 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} x^3+3xy^2=66500 \ (1) \\ 3x^2y+y^3=58500 \ (2) \end{cases}$$

បូកសមីការ(1)និង(2)គេបាន $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=125000$

សមមូល $(x+y)^3=(50)^3$ ឬ $x+y=50 \ (3)$

ដកសមីការ(1)និង(2)គេបាន $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=8000$

សមមូល $(x-y)^3=(20)^3$ ឬ $x-y=20 \ (4)$

បូកសមីការ (3)និង(4)គេបាន $2x=70$ សមមូល $x=35$

ដកសមីការ (3)និង(4)គេបាន $2y=30$ សមមូល $y=15$

ដូចនេះ $x=35\,,\ y=15$ ។

LIMPHALKUN

លំហាត់ទី៤៧

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 7x^3 - 6x^2y + 3xy^2 = 38 \\ 13x^2 - 15x^2y + 3xy^2 - y^3 = 49 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

គេមាន $\begin{cases} 7x^3 - 6x^2y + 3xy^2 = 38 \\ 13x^2 - 15x^2y + 3xy^2 - y^3 = 49 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} 14x^3 - 12x^2y + 6xy^2 = 76 & (1) \\ 13x^3 - 15x^2y + 3xy^2 - y^3 = 49 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការ(1)និង(2)គេបាន $27x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - y^3 = 125$

សមមូល $(3x - y)^3 = (5)^3$ ឬ $3x - y = 5$ (3)

ដកសមីការ(1)និង(2)គេបាន $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 27$

សមមូល $(x + y)^3 = 3^3$ ឬ $x + y = 3$ (4)

បូកសមីការ (3)និង(4)គេបាន $4x = 8$ សមមូល $x = 2$

ដកសមីការ (3)និង(4)គេបាន $2y = 2$ សមមូល $y = 1$

ដូចនេះ $x = 2$, $y = 1$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៤៨

កំណត់គូនៃចំនួនវិជ្ជមាន a,b,c ដោយដឹងថា $\begin{cases} a^3+b^3+c^3=3abc \\ a^5+b^5+c^5=9375 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គូនៃចំនួនវិជ្ជមាន a,b,c

$$\begin{cases} a^3+b^3+c^3=3abc \quad (1) \\ a^5+b^5+c^5=9375 \quad (2) \end{cases}$$

សមីការ (1) សមមូល $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

សមមូល $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

សមមូល $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ ព្រោះ $a+b+c>0, a,b,c>0$

សមមូល $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$

សមមូល $\begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases}$ សមមូល $a=b=c \quad (3)$

យក (3)ជួសក្នុង (2) គេបាន $c^5+c^5+c^5=9375$

សមមូល $c^5=\frac{9375}{3}=3125=5^5$ នោះ $c=5$ ។

ដូចនេះ $a=b=c=5$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៤៩

ក)ចូរស្រាយថា ៖

$$(a+b+c)^2(a+b-c)^2+4c^2(a+b)^2=(a^2+b^2+c^2+2ab)^2$$ ។

ខ)ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$c^2x^2-(a+b+c)(a+b-c)x-(a+b)^2=0$$ ដែល $c\neq 0$

ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយថា ៖

$$(a+b+c)^2(a+b-c)^2+4c^2(a+b)^2=(a^2+b^2+c^2+2ab)^2$$ ។

តាង $y=(a+b+c)^2(a+b-c)^2+4c^2(a+b)^2$ ហើយ $z=a+b$

គេបាន $y=(z+c)^2(z-c)^2+4c^2z^2$

$$=(z^2-c^2)^2+4c^2z^2$$

$$=z^4-2z^2c^2+c^4+4c^2z^2$$

$$=z^4+2z^2c^2+c^4$$

$$=(z^2+c^2)^2=(a^2+b^2+c^2+2ab)^2$$

ព្រោះ $z^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ដូចនេះ $(a+b+c)^2(a+b-c)^2+4c^2(a+b)^2=(a^2+b^2+c^2+2ab)^2$

ខ)ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$c^2x^2-(a+b+c)(a+b-c)x-(a+b)^2=0$$ ដែល $c\neq 0$

គេមាន $\Delta=(a+b+c)^2(a+b-c)^2+4c^2(a+b)^2=(a^2+b^2+c^2+2ab)^2$

គេទាញឬស $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{(a+b)^2}{c^2}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៥០

សម្រួល $M=\sqrt[3]{(a-b)\sqrt{\dfrac{(a+b)^7-a^7-b^7}{7ab(a+b)}}}$

ដែល $a=\sqrt[3]{15+4\sqrt{3}}$; $b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{3}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្រួល $M=\sqrt[3]{(a-b)\sqrt{\dfrac{(a+b)^7-a^7-b^7}{7ab(a+b)}}}$

គេមាន $(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$

(មើលលំហាត់៣៧) ។

គេបាន $M=\sqrt[3]{(a-b)\sqrt{\dfrac{7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2}{7ab(a+b)}}}$

$=\sqrt[3]{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

$=\sqrt[3]{a^3-b^3}$ ព្រោះ $a^2+ab+b^2>0$

ដោយ $a=\sqrt[3]{15+4\sqrt{3}}$; $b=\sqrt[3]{5-2\sqrt{3}}$

នោះ $a^3-b^3=15+4\sqrt{3}-5+2\sqrt{3}=10+6\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^3$

ដូចនេះ $M=\sqrt[3]{a^3-b^3}=1+\sqrt{3}$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៨១

គេមានចំនួនវិជ្ជមាន a,b,c និង t ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $ab+bc+ca=t^2$ ។

ចូរស្រាយថា $M=2t^2$ ដោយដឹងថា ៖

$$M=a\sqrt{\frac{(t^2+b^2)(t^2+c^2)}{t^2+a^2}}+b\sqrt{\frac{(t^2+c^2)(t^2+a^2)}{t^2+b^2}}+c\sqrt{\frac{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}{t^2+c^2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $M=2t^2$

គេមាន $ab+bc+ca=t^2$ សមមូល $b(a+b)+c(a+b)=t^2+b^2$

សមមូល $t^2+b^2=(a+b)(b+c)$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $t^2+c^2=(c+a)(c+b)$, $t^2+a^2=(a+b)(a+c)$ ។

គេបាន $\frac{(t^2+b^2)(t^2+c^2)}{t^2+a^2}=\frac{(a+b)(a+c)(b+c)^2}{(a+b)(a+c)}=(b+c)^2$

$$\frac{(t^2+c^2)(t^2+a^2)}{t^2+b^2}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)^2}{(a+b)(b+c)}=(c+a)^2$$

$$\frac{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}{t^2+c^2}=\frac{(a+b)^2(a+c)(b+c)}{(a+c)(b+c)}=(a+b)^2$$

ហេតុនេះ $M=a\sqrt{(b+c)^2}+b\sqrt{(c+a)^2}+c\sqrt{(a+b)^2}$

$$=ab+ac+bc+ab+ac+bc$$

$$=2(ab+bc+ca)=2t^2$$

ដូចនេះ $M=2t^2$ ពិត ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៨២

គេមាន $x = ab + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ និង $y = a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}$

ចូរស្រាយថា $x^2 - y^2 = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x^2 - y^2 = 1$

គេមាន $x^2 = \left[ab + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\right]^2$

$= a^2b^2 + 2ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + (1+a^2)(1+b^2)$

ហើយ $y^2 = \left[a\sqrt{1+b^2} + b\sqrt{1+a^2}\right]^2$

$= a^2(1+b^2) + 2ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + b^2(1+a^2)$

គេបាន $x^2 - y^2 = a^2b^2 + (1+a^2)(1+b^2) - a^2(1+b^2) - b^2(1+a^2)$

$= a^2b^2 + 1 + a^2 + b^2 + a^2b^2 - a^2 - a^2b^2 - b^2 - a^2b^2$

$= 1$

ដូចនេះ $x^2 - y^2 = 1$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតខុសពីសូន្យដែល $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ ។

ចូរស្រាយថា $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$ ។

អនុវត្តន៍ ៖ បើ a,b,c ជាបីចំនួនសនិទានខុសគ្នា និង $a\neq b\neq c$ ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ ក៏ជាចំនួនសនិទានដែរ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$

គេមាន $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$

$$=x^2+y^2+z^2+2xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

ដោយគេមាន $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ (តាមសម្មតិកម្ម)

ដូចនេះ $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$ ពិត ។

ស្រាយថា $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ ជាចំនួនសនិទាន

យក $x=\frac{1}{a-b}, y=\frac{1}{b-c}, z=\frac{1}{c-a}$ ដែល $a\neq b\neq c$

នោះ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a-b+b-c+c-a=0$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$

LIM PHALKUN

គេបាន $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2}$

$$=\left|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right|$$

ដោយ a,b,c ជាចំនួនសនិទាននោះ $\left|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right|$ ជាចំនួនសនិទាន ។

ដូចនេះ បើ a,b,c ជាបីចំនួនសនិទានខុសគ្នា និង $a\neq b\neq c$ នោះ

$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ ក៏ជាចំនួនសនិទានដែរ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៤៨

គណនាផលបូក ៖

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ជាដំបូងយើងនឹងស្រាយថាគ្រប់ចំនួនពិត x,y,z មិនសូន្យ

ដែល $x+y+z=0$ នោះគេបាន $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2$

គេមាន $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}$

ដោយ $\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}=\frac{2}{xyz}(x+y+z)=0$ ព្រោះ $x+y+z=0$

ហេតុនេះ $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$ ពិត

ដោយយក $x=1\,,\,y=k\,,\,z=-(k+1)\,;\ \forall k=1,2,3,...$ គេបាន ៖

$1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)^2$ ដោយ $1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}>0$

គ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ នោះ $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

ហេតុនេះ $S=(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(1+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014})$

ដូចនេះ $S=2014-\frac{1}{2014}=\frac{2013\times 2015}{2014}$ ។

LIMPHALKUN

លំហាត់ទី៥៥

ឧបមាថាចំនួនគត់ a និង b បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2+b^2=13$ និង $a^3+b^3=19$ ។ ចូររកតម្លៃ $a+b$?

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ $a+b$

ពិនិត្យ $(a+b)(a^2+b^2)=a^3+ab^2+a^2b+b^3=(a^3+b^3)+ab(a+b)$

ដោយគេមាន $a^2+b^2=13$ និង $a^3+b^3=19$ (សម្មតិកម្ម)

គេបាន $13(a+b)=19+ab(a+b)$

ដោយ $(a+b)^2=(a^2+b^2)+2ab=13+2ab$ នោះ $ab=\dfrac{(a+b)^2-13}{2}$

ហេតុនេះ $13(a+b)=19+\dfrac{(a+b)^2-13}{2}(a+b)$

សមមូល $26(a+b)=38+(a+b)^3-13(a+b)$

សមមូល $(a+b)^3-39(a+b)+38=0$

តាង $s=a+b$ ដែល s ជាចំនួនគត់នោះគេបាន $s^3-39s+38=0$

សមមូល $(s^3-1)-39(s-1)=0$

សមមូល $(s-1)(s^2+s+1)-39(s-1)=0$

សមមូល $(s-1)(s^2+s-38)=0$

គេទាញ $s=1$ ឬ $s^2+s-38=0$

ដោយ $s^2+s-38=(s+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{153}{4}=0$ គ្មានឫសជាចំនួនគត់។

ដូចនេះ $s=a+b=1$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៩៦

ឧបមាថាគេមានបីចំនួន a,b,c បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases} a+b+c=m+1 \\ ab+bc+ca=m^2-4m+6 \end{cases}$$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

កំណត់ m ដែលធ្វើឲ្យ $a^2+b^2+c^2$ មានតម្លៃធំបំផុត រួចកំណត់គ្រប់គូ (b,c) ចំពោះ $a=1$ និង តម្លៃ m ដែលទើបរកឃើញ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ m ដែលធ្វើឲ្យ $a^2+b^2+c^2$ មានតម្លៃធំបំផុត ៖

គេមាន $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

ដោយគេមាន $a+b+c=m+1 \,\&\, ab+bc+ca=m^2-4m+6$

គេបាន $a^2+b^2+c^2=(m+1)^2-2(m^2-4m+6)$

$$=m^2+2m+1-2m^2+8m-12$$

$$=-m^2+10m-11=14-(m^2-10m+25)$$

$$=14-(m-5)^2$$

ដោយ $(m-5)^2\geq 0$ នោះដើម្បីឲ្យ $a^2+b^2+c^2=14-(m-5)^2$ មានតម្លៃធំបំផុតគេត្រូវឲ្យ $(m-5)^2=0 \Leftrightarrow m=5$ ។

ដូចនេះតម្លៃ m ដែលត្រូវរកគឺ $m=5$ ។

កំណត់គូ (b,c) ចំពោះ $a=1$ និង តម្លៃ m ដែលទើបរកឃើញ ៖

ចំពោះ $a=1$ និង $m=5$ នោះ $b+c=5$ និង $bc=6$

គេទាញ $b=2\,,c=3$ ឬ $b=3\,,c=2$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៨៧

ឧបមាថាចំនួនពិត a និង b បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

$a+b=2m+2$ និង $ab=5m-1$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក)គណនា $M=(a-b)^2$ ជាអនុគមន៍នៃ m រួចកំណត់លក្ខខណ្ឌនៃដែន

តម្លៃ $|2m-3|$ និង m ដើម្បីឲ្យចំណោទមានន័យ ។

ខ)កំណត់បណ្តាគូតម្លៃ c និង d ដើម្បីឲ្យ $(a+b)(c+d)=2(ab+cd)$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ចគ្រប់ m ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌសំណួរក) ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនា $M=(a-b)^2$ ជាអនុគមន៍នៃ m ៖

គេមាន $M=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=(a^2+2ab+b^2)-4ab$

$=(a+b)^2-4ab=4(m+1)^2-4(5m-1)$

$=4m^2+8m+4-20m+4$

$=4m^2-12m+8$

ដូចនេះ $M=(a-b)^2=4m^2-12m+8$ ។

កំណត់លក្ខខណ្ឌនៃដែនតម្លៃ $|2m-3|$ និង m ៖

ដើម្បីឲ្យចំណោទមានន័យលុះត្រាតែ $M\geq 0$ ព្រោះ $M=(a-b)^2\geq 0$

សមមូល $4m^2-12m+8\geq 0$

សមមូល $(2m-3)^2-1\geq 0$

សមមូល $(2m-3)^2\geq 1$

សមមូល $|2m-3|\geq 1$

ដូចនេះដែនតម្លៃនៃ $|2m-3|$ គឺ $|2m-3|\geq 1$ ។

LIM PHALKUN

ម្យ៉ាងទៀតដើម្បីឲ្យ $|2m-3|\geq 1$ លុះត្រាតែ $2m-3\geq 1$ ឬ $2m-3\leq -1$

សមមូល $m\geq 2$ ឬ $m\leq 1$ ។

ដូចនេះដែនតម្លៃនៃ m គឺ $m\geq 2$ ឬ $m\leq 1$ ។

ខ)កំណត់បណ្តាគូតម្លៃ c និង d ៖

គេមាន $(a+b)(c+d)=2(ab+cd)$

ដោយ $a+b=2m+2$ និង $ab=5m-1$

គេបាន $(2m+2)(c+d)=2(5m-1+cd)$

សមមូល $m(c+d)+c+d=5m-1+cd$

សមមូល $(c+d-cd+1)=m\,[5-(c+d)]$

សមីការចុងក្រោយនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ចគ្រប់ m លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases} c+d-cd+1=0 \\ 5-(c+d)=0 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} cd=6=2\times 3 \\ c+d=5=2+3 \end{cases}$$

គេទាញ $c=2\,,d=3$ ឬ $c=3, d=2$ ។

ដូចនេះគូតម្លៃ c និង d គឺ $c=2\,,d=3$ ឬ $c=3, d=2$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៤៨

ឧបមាថាគេមានបីចំនួន a,b,c បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases} a+b+c=m-1 \\ a^3+b^3+c^3=m^3-57m-331 \end{cases}$$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក)គណនា $P=(a+b)(b+c)(c+a)$ ជាអនុគមន៍នៃ m រួចកំណត់តម្លៃរបស់ m ដែលធ្វើឲ្យ P មានតម្លៃធំបំផុត ។

ខ)បើ $a+c=2b$ ចូរកំណត់គ្រប់គូ (a,b,c) ចំពោះតម្លៃmទើបរកឃើញ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនា $P=(a+b)(b+c)(c+a)$ ជាអនុគមន៍នៃ m

គេមានសមភាព $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

គេទាញ $(a+b)(b+c)(c+a)=\frac{1}{3}\left[(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)\right]$

ដោយគេមាន $a+b+c=m-1\,;\,a^3+b^3+c^3=m^3-57m-331$

គេបាន $P=\frac{1}{3}\left[(m-1)^3-(m^3-57m-331)\right]$

$=\frac{1}{3}\left(m^3-3m^2+3m-1-m^3+57m+331\right)$

$=-m^2+20m+110$

ដូចនេះ $P=-m^2+20m+110$ ។

កំណត់តម្លៃm ដែលធ្វើឲ្យ P មានតម្លៃធំបំផុត ៖

ដោយ $P=-m^2+20m+110=210-(m-10)^2$

ដូចនេះP មានតម្លៃធំបំផុតលុះត្រាតែ $m=10$ ។

LIM PHALKUN

ខ) កំណត់គ្រប់គូ (a,b,c)

ចំពោះ $m=10$ គេបាន $a+b+c=10-1=9$

ហើយ $P=(a+b)(b+c)(c+a)=210$ និង $a+c=2b$ (សម្មតិកម្ម)

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} a+b+c=9 & (1) \\ (a+b)(b+c)(c+a)=210 & (2) \\ a+c=2b & (3) \end{cases}$

យកសមីការ (3)ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $3b=9$ នោះ $b=3$

តាម (3) គេបាន $a+c=2\times3=6$

តាម(2)គេបាន $(a+3)(3+c)(6)=210$

សមមូល $ac+3(a+c)+9=35$ ដោយ $a+c=6$

គេទាញ $ac=35-9-18=8$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} a+c=6=2+4 \\ ac=8=2\times4 \end{cases}$

គេទាញបាន $a=2, c=4$ ឬ $a=4, c=2$ ។

ដូចនេះ $a=2, b=3, c=4$ ឬ $a=4, b=3, c=2$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៤៩

ឧបមាថាគេមានបីចំនួន a,b,c បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases} a+b+c=3(m^2+1) \\ a^3+b^3+c^3-3abc=m^4-2m^3+11m^2-2m+10 \end{cases}$$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក)គណនា $S=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ ជាអនុគមន៍នៃ m ។

រួចកំណត់តម្លៃរបស់ m ដែលធ្វើឲ្យ S មានតម្លៃតូចបំផុត ។

ខ)បើ $a+c=2b$ ចូរកំណត់គ្រប់គូ (a,b,c) ចំពោះតម្លៃmទើបរកឃើញ។

ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាS ជាអនុគមន៍នៃ m ៖

គេបាន $S=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$$

$$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $a+b+c$ គេបាន ៖

$$(a+b+c)S=2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$(a+b+c)S=2(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

គេទាញ $S=\dfrac{2(a^3+b^3+c^3-3abc)}{(a+b+c)}$

ដោយ $\begin{cases} a+b+c=3(m^2+1) \\ a^3+b^3+c^3-3abc=m^4-2m^3+11m^2-2m+10 \end{cases}$

LIM PHALKUN

គេបាន $S=\frac{2}{3}\times\frac{m^4-2m^3+11m^2-2m+10}{m^2+1}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{m^2(m^2-2m+10)+(m^2-2m+10)}{m^2+1}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{(m^2-2m+10)(m^2+1)}{m^2+1}=\frac{2}{3}(m^2-2m+10)$

ដូចនេះ $S=\frac{2}{3}(m^2-2m+10)$ ។

កំណត់តម្លៃរបស់ m ដែលធ្វើឲ្យ S មានតម្លៃតូចបំផុត ៖

គេមាន $S=\frac{2}{3}(m^2-2m+10)=\frac{2}{3}\left[(m-1)^2+9\right]$

ដោយ $(m-1)^2\geq 0$ នោះដើម្បីឲ្យ S មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ $(m-1)^2=0\Leftrightarrow m=1$ ។

ដូចនេះតម្លៃរបស់ m ដែលធ្វើឲ្យ S មានតម្លៃតូចបំផុតគឺ $m=1$ ។

ខ) កំណត់គ្រប់គូ (a,b,c) ចំពោះតម្លៃ m ទើបរកឃើញ៖

គេមាន $a+c=2b$ (1)

ចំពោះ $m=1$ គេបាន $\begin{cases} a+b+c=6 & (2) \\ a^3+b^3+c^3-3abc=18 & (3) \end{cases}$

យក (1) ជំនួសក្នុង(2) គេបាន $3b=6$ នោះ $b=2$

យក $b=2$ ជួសក្នុង (2) និង (3) គេបាន $\begin{cases} a+c=4 & (2) \\ a^3+c^3-6ac=10 & (3) \end{cases}$

សមីការ (3)អាចសរសេរ $(a+c)(a^2-ac+c^2)-6ac=10$

សមមូល $(a+c)[(a+c)^2-3ac]-6ac=10$ ដោយ $a+c=4$

គេបាន $4(16-3ac)-6ac=10$ នោះ $ac=3$ (4)

LIM PHALKUN

តាម (2) និង (4) គេបានប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} a+c=4 \\ a.c=3 \end{cases}$

នោះ a និង c ជាឫសនៃសមីការ $X^2-4X+3=0$

សមមូល $(X-1)(X-3)=0$ សមមូល $X=1 , X=3$

គេទាញបានគូចម្លើយ $a=1 , c=3$ ឬ $a=3 , c=1$

ដូចនេះ $(a=1,b=2,c=3)$ ឬ $(a=3,b=2,c=1)$ ។

LIM PHALKUN

លំហាត់ទី៦០

គេឲ្យ $P(x)=x^4-x^3+1$ និង $Q(x)=x^2-2$

ឧបមាថាមានបួនចំនួន a,b,c,d ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ ៖

$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ $N=Q(a).Q(b).Q(c).Q(d)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $N=Q(a).Q(b).Q(c).Q(d)$

គេមាន $Q(x)=x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=(-\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}-x)$

គេបាន $Q(a)=(-\sqrt{2}-a)(\sqrt{2}-a)$

$Q(b)=(-\sqrt{2}-b)(\sqrt{2}-b)$

$Q(c)=(-\sqrt{2}-c)(\sqrt{2}-c)$

$Q(d)=(-\sqrt{2}-d)(\sqrt{2}-d)$

ដោយ $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

គេបាន $P(-\sqrt{2})=(-\sqrt{2}-a)(-\sqrt{2}-b)(-\sqrt{2}-c)(-\sqrt{2}-d)$

និង $P(\sqrt{2})=(\sqrt{2}-a)(\sqrt{2}-b)(\sqrt{2}-c)(\sqrt{2}-d)$

ហេតុនេះ $P(-\sqrt{2})P(\sqrt{2})=Q(a)Q(b)Q(c)Q(d)=N$

ដោយ $P(-\sqrt{2})=(-\sqrt{2})^4-(-\sqrt{2})^3+1=5+2\sqrt{2}$

និង $P(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^4-(\sqrt{2})^3+1=5-2\sqrt{2}$

គេបាន $P(-\sqrt{2})P(\sqrt{2})=(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})=25-8=17$

ដូចនេះ $N=Q(a).Q(b).Q(c).Q(d)=17$ ។

LIM PHALKUN