

វិញ្ញាសាប្រឡង
អាហារូបករណ៍ចិន
ឆ្នាំ ២០០២
រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

ප්‍රකාශවිញාස

ប្រឡងជ្រើសរើសអហារូបករណ៍ថ្នាក់ឧត្តមសិក្សា
នៅសិក្សានៅសាលារាជធានីប្រជាមានិតចក្រភពកម្ពុជា ២០០២

សម័យប្រឡង ថ្ងៃទី ១៤ ខែមីនា ឆ្នាំ ២០០២

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា រយៈពេល ៩០នាទី

លំហាត់ ១

ដោះស្រាយសមីការ $3 \times 25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} = x-3$ ។

លំហាត់ ២

ក) គណនា $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ។

ខ) គេដឹងថា $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = 3x + 5$ ។ គណនា $g \circ f(-4)$ ។

លំហាត់ ៣

គេឲ្យ A និង B ជាពីរចំណុចនឹង ហើយ $AB = 2$ ។

រកសំណុំចំណុច M ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម

ក) $MA^2 + MB^2 = 8$

ខ) $MA^2 - MB^2 = -8$ ។

លំហាត់ ៤

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$ ដែល $n \in \mathbb{N}^*$ ។

ក) សិក្សាអថេរភាពនៃ (I_n) រួចទាញរកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+1} ។

ខ) បង្ហាញថា $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)e^2}$ ចំពោះ $\forall n \geq 2$ រួចទាញរក $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ ។

အမွေ

លំហាត់ ១

ដោះស្រាយសមីការ $3 \times 25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} = x-3$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការ

យើងមាន $3 \times 25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} = x-3$

$$3 \times (5^{x-2})^2 + (3x-10)5^{x-2} = x-3$$

យក $u = 5^{x-2}$

យើងបាន $3u^2 + (3x-10)u - (x-3) = 0$

មាន $\Delta = (3x-10)^2 + 4(3)(x-3)$

$$= 9x^2 - 60x + 100 + 12x - 36$$

$$= 9x^2 - 48x + 64 = (3x-8)^2$$

$$\text{នោះ } u = \frac{-(3x-10) + 3x-8}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{រឺ } u = \frac{-(3x-10) - (3x-8)}{6} = \frac{-6x+18}{6} = -x+3$$

$$\text{បើ } u = \frac{1}{3} \text{ យើងបាន } 5^{x-2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x-2 = \log_5 \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2 + \log_5 \frac{1}{3}$$

$$\text{បើ } u = -x+3 \text{ យើងបាន } 5^{x-2} = -x+3 \quad (*)$$

យើងសង្កេតឃើញថា $x=2$ ជាវិសនៃសមីការ

ម្យ៉ាងទៀត $y=5^{x-2}$ ជាអនុគមន៍កើន ហើយ $y=-x+3$ ជាអនុគមន៍

ចុះ នោះ $(*)$ មានចម្លើយតែមួយគត់ គឺ $x=2$

$$\text{ដូចនេះ } x=2, x=2 + \log_5 \frac{1}{3}$$

លំហាត់ ២

ក) គណនា $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ។

ខ) គេដឹងថា $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = 3x + 5$ ។ គណនា $g \circ f(-4)$ ។

ចម្លើយ

ក) គណនា $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

យើងមាន $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k}$

នោះ $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$

$$1 - \frac{1}{3^2} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3}$$

$$1 - \frac{1}{4^2} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4}$$

.....

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$$

គុណអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

យើងបាន $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$

ខ) គណនា $gof(-4)$

យើងមាន $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = 3x + 5$

ដោយ $f^{-1} \circ g^{-1} = (gof)^{-1}$

យើងបាន $(gof)^{-1}(x) = 3x + 5$ រឺ $y = 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{3}$

នោះ $y = \frac{x-5}{3}$

យើងបាន $[(gof)^{-1}]^{-1}(x) = \frac{x-5}{3} \Rightarrow (gof)(x) = \frac{x-5}{3}$

ហេតុនេះ $(gof)(x) = \frac{-4-5}{3} = -3$

លំហាត់ ៣

គេឲ្យ A និង B ជាពីរចំណុចនឹង ហើយ $AB = 2$ ។

រកសំណុំចំណុច M ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម

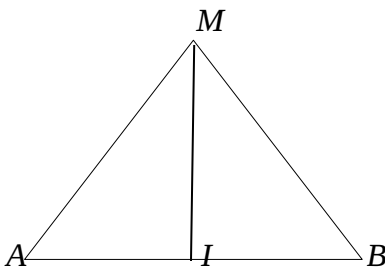
ក) $MA^2 + MB^2 = 8$

ខ) $MA^2 - MB^2 = -8$ ។

ចម្លើយ

រកសំណុំចំណុច M ក្នុងករណី

ក) $MA^2 + MB^2 = 8$



យក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$

នោះ $[MA]$ ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ MAB

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន យើងបាន $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

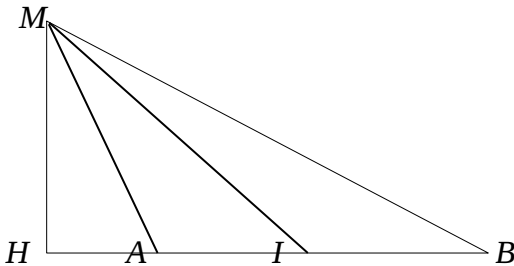
ដោយ $MA^2 + MB^2 = 8$ និង $AB = 2$

យើងបាន $8 = 2MI^2 + \frac{2^2}{2} \Rightarrow MI^2 = 3 \Rightarrow MI = \sqrt{3}$

ដោយ A, B ជាចំណុចនឹង នោះ I ក៏ជាចំណុចនឹងដែរ

ដូចនេះ សំណុំចំណុច M ជាផ្ទៃរងដែលមានផ្ចិត I និង កាំ $r = MI = \sqrt{3}$

ខ) $MA^2 - MB^2 = -8$



យក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ AB

និង H ជាចំណោលកែងនៃ M លើ (AB)

យើងបាន $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH}$

នោះ $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} = -8 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} = -4 \Rightarrow -AB \times IH = -4$

ដោយ $AB = 2 \Rightarrow IH = 2$

យើងបាន $AH = IH - AI = 2 - 1 = 1 = AI$

នេះ បញ្ជាក់ថា A ជាចំណុចកណ្តាល $[HI]$

ដូចនេះ សំណុំចំណុច M ជាបន្ទាត់ដែលកែងនឹង (AB) ត្រង់ H (ដូចរូប)

លំហាត់ ៤

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$ ដែល $n \in \mathbb{N}^*$ ។

ក) សិក្សាអថេរភាពនៃ (I_n) រួចទាញរកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+1} ។

ខ) បង្ហាញថា $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)e^2}$ ចំពោះ $\forall n \geq 2$ រួចទាញរក $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ ។

ចម្លើយ

ក) សិក្សាអថេរភាពនៃ (I_n)

ចំពោះ $0 \leq x \leq 1$ យើងបាន $x^n \geq x^{n+1} \Rightarrow x^n e^{-2x} \geq x^{n+1} e^{-2x}$

$$\text{នោះ: } \int_0^1 x^n e^{-2x} dx \geq \int_0^1 x^{n+1} e^{-2x} dx \Rightarrow I_n \geq I_{n+1}$$

នេះ បញ្ជាក់ថា (I_n) ជាស្រ្តីតចុះ

- ទាញរកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+1}

យើងមាន $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$ ដែល $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{នោះ: } I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-2x} dx$$

$$\text{យក } u = x^{n+1} \Rightarrow du = (n+1)x^n dx$$

$$\text{និង } dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\text{យើងបាន } I_{n+1} = -\frac{1}{2} [x^{n+1} e^{-2x}]_0^1 + \frac{(n+1)}{2} \int_0^1 x^n e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}(n+1)I_n$$

$$\text{ដូចនេះ } I_{n+1} = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}(n+1)I_n$$

$$\text{ខ) បង្ហាញថា } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)e^2} \text{ ចំពោះ } \forall n \geq 2$$

$$\text{យើងមាន } x^n e^{-2x} \geq 0 \text{ ចំពោះ } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 x^n e^{-2x} dx \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{តាម ក } (I_n) \text{ ជាស្វ៊ីតចុះ គឺ } I_{n+1} \leq I_n$$

$$\text{យើងបាន } -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}(n+1)I_n \leq I_n$$

$$\text{នោះ } -1 + e^2(n+1)I_n \leq 2e^2 I_n$$

$$e^2(n+1)I_n - 2e^2 I_n \leq 1$$

$$e^2(n-1)I_n \leq 1 \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{e^2(n-1)} \text{ ចំពោះ } \forall n \geq 2 \quad (2)$$

$$\text{តាម (1) និង (2) យើងបាន } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)e^2} \text{ ចំពោះ } \forall n \geq 2$$

$$\bullet \text{ ទាញរក } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$$

$$\text{ដោយ } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)e^2} \text{ នោះ } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$