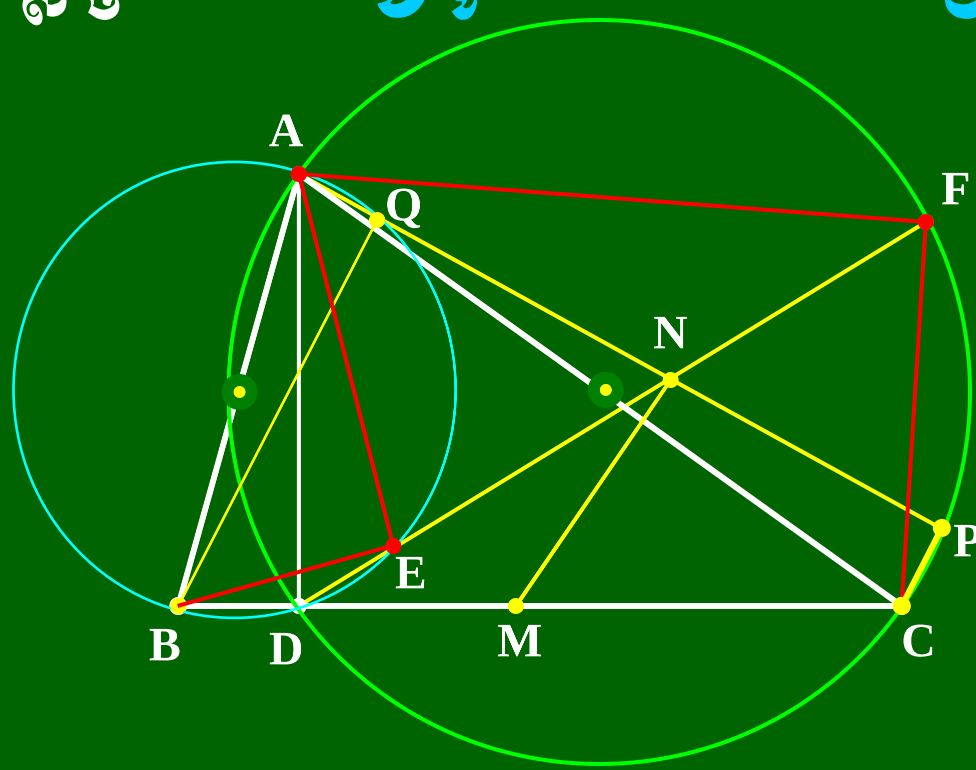
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា

សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង

ធរណីមាត្រអឺគ្លីត

សម្រាប់ **សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា**



គណៈកម្មការនិពន្ធនិងរៀបរៀង

លោក **លឹម ផល្គុន** និង លោក **សែន ពិសិដ្ឋ**

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ

លោក លឹម ឆុន	លោក អ៊ឹង សំណាង
លោក ឌិត្យ ម៉េង	អ្នកស្រី ឌុយ រីណា
លោក ព្រឹម សុនិត្យ	លោក ផល ម៉ុនឆាយ
លោក លោក នន់ សុខណា	

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ	**អ្នករចនាក្រប**
កញ្ញា លី គុណ្ណាកា	លោក លឹម ផល្គុន

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង** ផ្នែក **ធរណីមាត្រអឺគ្លីត** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់សិក្សានៅក្នុងដៃនេះ យើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវចងក្រងឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសា សិក្សាបន្ថែមលើមេរៀនចំនួនកុំផ្លិចដោយខ្លួនឯង ។ នៅក្នុងសៀវភៅនេះរួមមានបីជំពូកគឺ ជំពូកទី១ មេរៀនសង្ខេបភ្ជាប់ជាមួយឧទាហរណ៍គំរូ ជំពូកទី២ លំហាត់ជ្រើសរើសនិងដំណោះស្រាយ និង ជំពូកទី៣ ជាលំហាត់អនុវត្តន៍ ។

សៀវភៅនេះមិនល្អហួសគេ ហួសឯងនោះទេ កំហុសដោយអចេតនាប្រាកដជាមានអាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង រងចាំជានិច្ចនូវមតិរិះគន់ពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្តីរីករាយ ដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពបន្ថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់យើងខ្ញុំសូមជូនពរចំពោះអ្នកសិក្សាទាំងអស់ជួបតែសុភមង្គល សុខភាពល្អ និងទទួលជ័យជំនះក្នុងការសិក្សា និង មុខរបរការងារ គ្រប់ពេលវេលា ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ៣០ មីនា ២០១១

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 246

www.mathtoday.wordpres.com

លឹម ផល្លុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

សិក្សាគណិតវិទ្យាដោយខ្លួនឯង

ធរណីមាត្រអឺគ្លីត

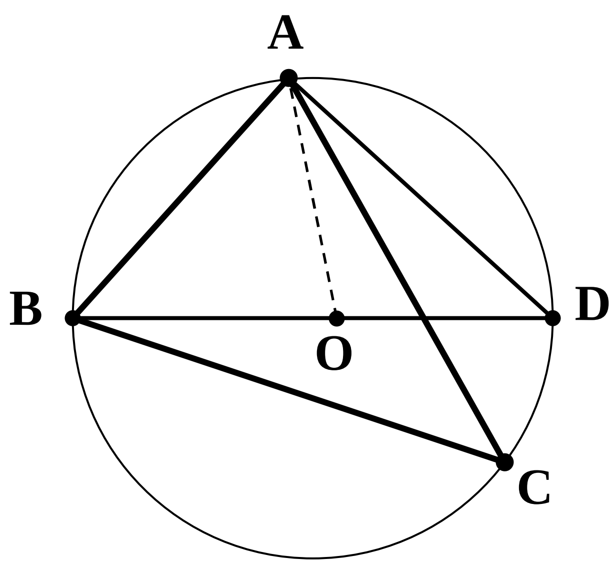
ជំពូកទី១

ទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗ

១~ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស (The law of sines)

ចំពោះត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មានជ្រុង $\mathbf{BC=a}$, $\mathbf{AC=b}$, $\mathbf{AB=c}$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត $\mathbf{O}$ កាំ $\mathbf{R}$ គេបាន $\mathbf{\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



សង់អង្កត់ផ្ចិត $\mathbf{BD=2R}$ នោះគេបាន $\mathbf{\angle BAD=90^o}$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

ក្នុងត្រីកោណកែង $\mathbf{ABD}$ គេមាន $\mathbf{\sin D=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{c}{2R}}$

ដោយ $\mathbf{\angle ADB=\angle ACB}$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ដោយធ្នូររួម $\mathbf{AB}$)

គេបាន $\sin C = \frac{c}{2R}$ ឬ $\frac{c}{\sin C} = 2R$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{a}{\sin A} = 2R$ និង $\frac{b}{\sin B} = 2R$

ដូចនេះ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ។

ទ្រឹស្តីបទនេះពិតជានិច្ចចំពោះមុំ **A , B , C** ជាមុំស្រួច ឬ មុំកែង ឬ មុំទាល ។

២-រូបមន្តចំណោលកែង (Projection Formula)

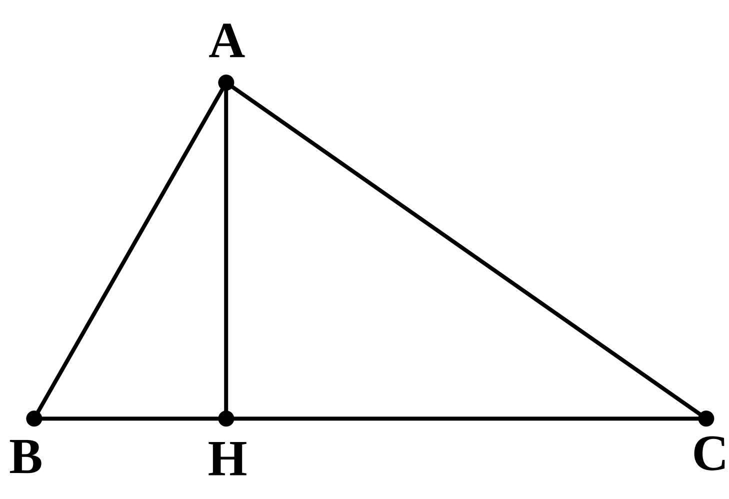
ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ **ABC** គេមាន :

$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$b = c\cos A + a\cos C$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

សម្រាយបញ្ជាក់



សង់កម្ពស់ **AH** នៃត្រីកោណ **ABC** ។

គេមាន $\mathbf{BC = BH + HC}$

ក្នុងត្រីកោណកែង $\mathbf{ABH}$ និង $\mathbf{AHC}$ គេមាន :

$\mathbf{\cos B = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{BH}{c}}$ នោះ $\mathbf{BH = c\cos B}$

$\mathbf{\cos C = \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{HC}{b}}$ នោះ $\mathbf{HC = b\cos C}$

ហេតុនេះ $\mathbf{BC = c\cos B + b\cos C}$ ដោយ $\mathbf{BC = a}$

ដូចនេះ $\mathbf{a = b\cos C + c\cos B}$ ។

ចំពោះរូបមន្តពីរទៀតស្រាយដូចរបៀបខាងលើនេះដែរ ។

៣~ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ គេមាន :

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$

$$\mathbf{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$$

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមរូបមន្តចំណោលកែងគេមាន :

$$\begin{cases} \mathbf{a = b\cos C + c\cos B} \\ \mathbf{b = c\cos A + a\cos C} \\ \mathbf{c = a\cos B + b\cos A} \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} \mathbf{a^2 = ab\cos C + ac\cos B} \\ \mathbf{-b^2 = -bc\cos A - ab\cos C} \\ \mathbf{-c^2 = -ac\cos B - bc\cos A} \end{cases}$$

ធ្វើផលបូកសមីការពីរនេះអង្គ និង អង្គគេបាន :

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A \text{ ឬ } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

ចំពោះរូបមន្តពីរទៀតស្រាយដូចគ្នាខាងលើដែរ ។

៤~ទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន

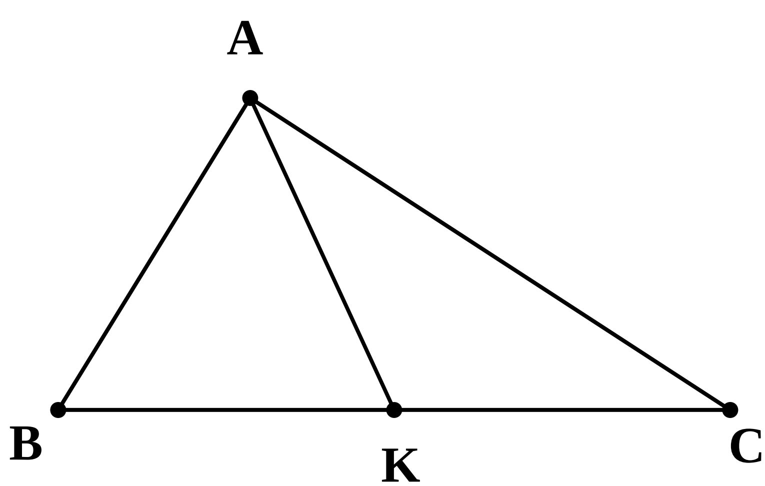
ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង a, b, c និងមេដ្យានត្រូវគ្នា m_a, m_b, m_c គេមាន :

$$m_a{}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$m_b{}^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

$$m_c{}^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

សម្រាយបញ្ជាក់



សង់មេដ្យាន $AK = m_a$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ **ABK**

$$AK^2 = AB^2 + BK^2 - 2AB.BK\cos B$$

ឬ $m_a{}^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2c.\frac{a}{2}\cos B = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac\cos B$ **(1)**

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ **AKC**

$$AK^2 = AC^2 + KC^2 - 2AC.KC\cos C$$

ឬ $m_b{}^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} - 2b.\frac{a}{2}\cos C = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab\cos C$ **(2)**

បូកសមីការ **(1) & (2)** គេបាន :

$$2m_a{}^2 = b^2 + c^2 + \frac{a^2}{2} - a(c\cos B + b\cos C)$$

តែ $c\cos B + b\cos C = a$ (រូបមន្តចំណោលកែង)

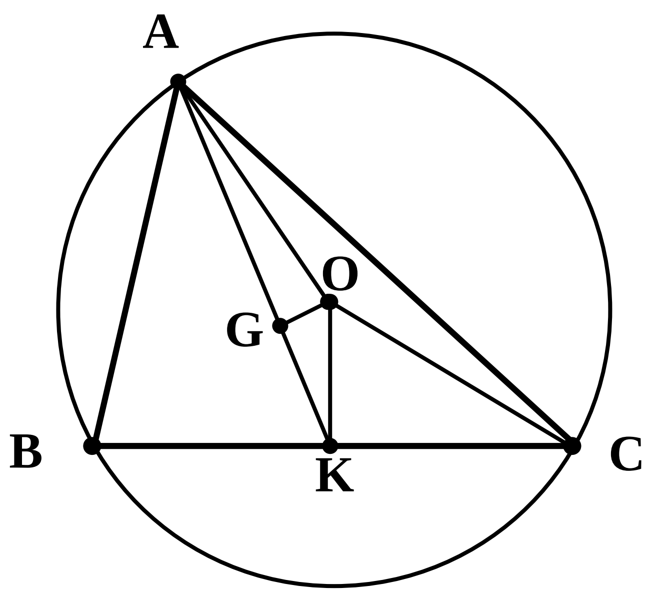
នោះ $m_a{}^2 = b^2 + c^2 + \frac{a^2}{2} - a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$

ដូចនេះ $m_a{}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ ។

៤~ទ្រឹស្តីបទឡិបនិច (Leibniz's theorem)

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ **ABC** ដែលមានជ្រុង a, b, c ហើយ **O** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង **G** ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណនោះគេមាន $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



សង់ដ្យាន $\mathbf{AK}$ និង $\mathbf{BL}$ កាត់គ្នាត្រង់ $\mathbf{G}$ ។

តាង $\angle \mathbf{OGA} = \varphi$ នោះ $\angle \mathbf{OGK} = \pi - \varphi$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{OGA}$:

$$\mathbf{OA^2 = OG^2 + GA^2 - 2OG.GA\cos\alpha}$$

គេទាញ $\mathbf{\cos\alpha = \dfrac{OG^2 + GA^2 - OA^2}{2OG.GA}}$ **(1)**

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{OGK}$:

$$\mathbf{OK^2 = OG^2 + GK^2 - 2OG.GK\cos(\pi - \alpha)}$$

$$\mathbf{OK^2 = OG^2 + GK^2 + 2OG.GK\cos\alpha}$$

គេទាញបាន $\cos\alpha = \dfrac{OK^2 - GK^2 - OG^2}{2OG.GK}$ (2)

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន :

$$\frac{OG^2 + GA^2 - OA^2}{2OG.GA} = \frac{OK^2 - GK^2 - OG^2}{2OG.GK}$$

$$OG^2 + GA^2 - OA^2 = \frac{GA}{GK}(OK^2 - GK^2 - OG^2)$$

ដោយគេមាន $OA = R$, $GA = \dfrac{2}{3}AK = \dfrac{2}{3}m_a$, $GK = \dfrac{1}{3}AK = \dfrac{1}{3}m_a$

ក្នុងត្រីកោណកែង OCK : $OK^2 = R^2 - \dfrac{a^2}{4}$ (ពីតាគ័រ)

គេបាន $OG^2 + \dfrac{4}{9}m_a{}^2 - R^2 = 2(R^2 - \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{1}{9}m_a{}^2 - OG^2)$

ឬ $3OG^2 = 3R^2 - \dfrac{2}{3}m_a{}^2 - \dfrac{a^2}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន $m_a{}^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

ហេតុនេះ $3OG^2 = 3R^2 - \dfrac{2}{3}(\dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}) - \dfrac{a^2}{2}$

$$3OG^2 = 3R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

ដូចនេះ $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ ។

៥-ទ្រឹស្តីបទ Stewart (Stewart's Theorem)

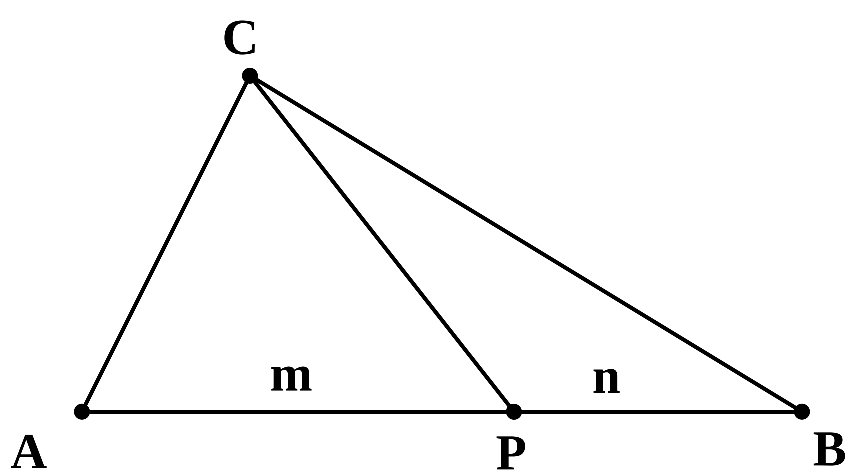
គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។

$\mathbf{P}$ ជាចំណុចមួយនៃ $\mathbf{AB}$ ដែល $\mathbf{PA=m}$, $\mathbf{PB=n}$ និង $\mathbf{m+n=c}$ ។

គេបាន $\mathbf{ma^2+nb^2=(m+n).PC^2+mn^2+nm^2}$ ។

សម្គាល់គេហៅទ្រឹស្តីបទ Stewart ដូចគ្នានឹងទ្រឹស្តីបទ Apollonius (Apollonius' theorem) ។

សម្រាយបញ្ជាក់



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសចំពោះត្រីកោណ $\mathbf{PAC}$ និង $\mathbf{PBC}$ គេមាន :

$\mathbf{AC^2=PC^2+PA^2-2PC.PA\cos\phi}$ ដែល $\mathbf{\phi=\angle APC}$

$\mathbf{BC^2=PC^2+PB^2+2PC.PB.\cos\phi}$

ដោយ $\mathbf{AC=b}$,$\mathbf{BC=a}$,$\mathbf{PA=m}$, $\mathbf{PB=n}$

គេបាន $b^2 = PC^2 + m^2 - 2mPC.\cos\phi$

និង $a^2 = PC^2 + n^2 + 2nPC\cos\phi$

ហេតុនេះ $nb^2 + ma^2 = (m+n)PC^2 + m^2n + mn^2$

ដូចនេះ $ma^2 + nb^2 = (m+n).PC^2 + mn^2 + nm^2$ ។

៦-ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ

ក. ករណីស្គាល់ជ្រុង និង កម្ពស់

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង a, b, c និងកម្ពស់ h_a, h_b, h_c

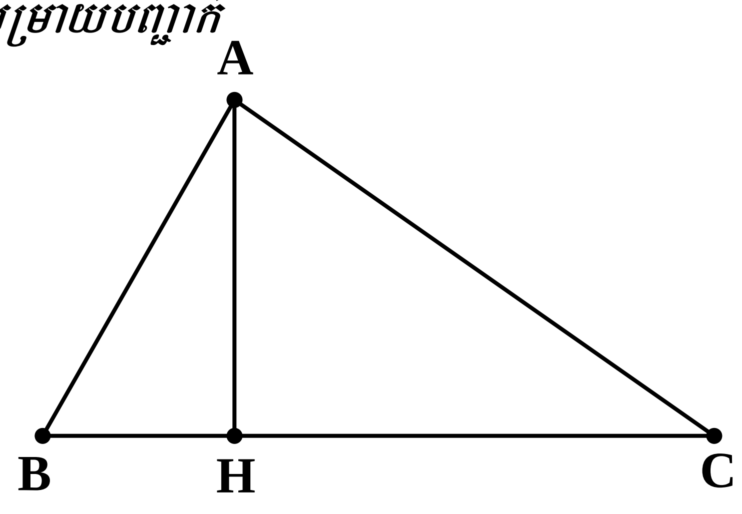
គេបានផ្ទៃក្រឡា $S = \frac{1}{2}a\,h_a = \frac{1}{2}b\,h_b = \frac{1}{2}c\,h_c$ ។

ខ. ករណីស្គាល់ជ្រុងពីរ និង មុំមួយ

ទ្រឹស្តីបទ : ផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC កំណត់ដោយ :

$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



គេមាន $S=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}\ a h_a$

ក្នុងត្រីកោណកែង AHC គេមាន $\sin C=\frac{AH}{AC}=\frac{h_a}{b}$ ឬ $h_a=b\sin C$

ដូចនេះ $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ ។

សម្គាល់ :

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនួសគេមាន $\sin C=\frac{c}{2R}$ ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ

ហេតុនេះ $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab.\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$ ។

ដូចនេះ $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}$ ។

គ.រូបមន្តហេរ៉ុង

ទ្រឹស្តីបទ : ផ្ទៃក្រឡានៃ $\Delta\ ABC$ ដោយស្គាល់ជ្រុងទាំងបី a,b,c

កំណត់ដោយ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមរូបមន្ត $S=\frac{1}{2}bc\sin A\ \ (1)$

គេមាន $\sin^2 A=1-\cos^2 A$

ដោយ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

នោះ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

គេបាន $\sin^2 A = 1 - (\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})^2$

$$= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

តាង $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃ ΔABC

នោះគេបាន $\begin{cases} a+b+c = 2p \\ b+c-a = 2(p-a) \\ a+b-c = 2(p-c) \\ a-b+c = 2(p-b) \end{cases}$

គេបាន $\sin^2 A = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2c^2}$

គេទាញ $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (2)

យក (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

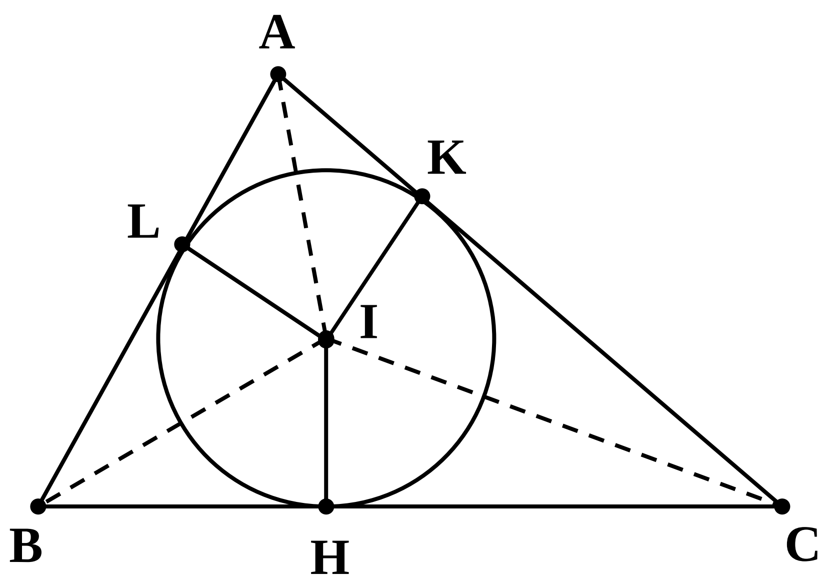
$$S = \frac{1}{2}bc \times \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ដូចនេះ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ។

ឃ. រូបមន្តផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណជាអនុគមន៍នៃកន្លះបរិមាត្រ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង

ទ្រឹស្តីបទ : ផ្ទៃក្រឡានៃ Δ **ABC** ដែលមាន **p** ជាកន្លះបរិមាត្រ និង **r** ជាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណកំណត់ដោយ $S = pr$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



តាង **I** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** ហើយ H, K, L ជាចំនុចប៉ះរវាងរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ជាមួយជ្រុង BC, CA, AB រៀងគ្នា ។

ផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC កំណត់ដោយ :

$$S = S_{IBC} + S_{ICA} + S_{IAB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2}.r$$

តាង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ នោះ $S = pr$ ។

៧.កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ហើយតាង $\mathbf{p=\frac{a+b+c}{2}}$ ។

តាង $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ $\mathbf{\Delta ABC}$

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC** គេបាន :

$$\mathbf{S=pr=\frac{abc}{4R}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

ដូចនេះ $$\mathbf{r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$$

និង $$\mathbf{R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$$ ។

៨.ទំនាក់ទំនងឆ្លុះនៃជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។

ប្រវែងជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ មានទំនាក់ទំនងឆ្លុះជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{r,R,p}$ ដូចខាងក្រោម :

$$\begin{cases} \mathbf{a+b+c=2p} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR} & \mathbf{(2)} \\ \mathbf{abc=4prR} & \mathbf{(3)} \end{cases}$$

បានន័យថា $\mathbf{a,b,c}$ ជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទីបី :

$\mathbf{x^3-2px^2+(p^2+r^2+4rR)x+4prR=0}$ (តាមទ្រឹស្តីបទវៀែត) ។

ចំពោះទំនាក់ទំនង **(2)** និង **(3)** អាចស្រាយបញ្ជាក់ដូចខាងក្រោម :

តាមរូបមន្ត $\mathbf{r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$

គេបាន $\mathbf{r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$$\mathbf{r^2 = \frac{p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc}{p}}$$

ដោយ $\mathbf{a+b+c=2p}$ ហើយ $\mathbf{S=\frac{abc}{4R}=pr}$ នោះ $\mathbf{abc=4prR}$

ហេតុនេះ $\mathbf{r^2 = \frac{p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-4prR}{p}}$

$$\mathbf{r^2 = -p^2+ab+bc+ca-4rR}$$

ដូចនេះ $\mathbf{ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR}$ ។

សម្គាល់ :

គេមាន $\mathbf{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

គេបាន $\mathbf{a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

$$\mathbf{=(2p)^2-2(p^2+r^2+4rR)}$$

$$\mathbf{=2p^2-2r^2-8rR}$$

ដូចនេះ $\mathbf{a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR}$ **(4)**

ហើយ $\mathbf{(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ac)-abc}$

$$\mathbf{=2p(p^2+r^2+4rR)-4prR}$$

$$\mathbf{=2p(p^2+r^2+2rR)}$$

ដូចនេះ $(a+b)(b+c)(a+c)=2p(p^2+r^2+2rR)$ (5)

តាមសមភាព $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$

គេបាន $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(a+c)$

$$=(2p)^3-6p(p^2+r^2+2rR)$$

$$=2p(4p^2-3p^2-3r^2-6rR)$$

$$=2p(p^2-3r^2-6rR)$$

ដូចនេះ $a^3+b^3+c^3=2(p^3-3pr^2-6prR)$ (6)

ឧទាហរណ៍ : ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា :

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$$ ដែល r និង R តាងរៀងគ្នា

ជារង្វាស់កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន :

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-2(a^3+b^3+c^3)}{2abc}$$

ដោយជំនួស : $a+b+c=2p$

ហើយ $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR$

និង $a^3+b^3+c^3=2(p^3-3pr^2-6prR)$

គេបាន :

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{2p(2p^2-2r^2-8rR)-4(p^3-3pr^2-6prR)}{8prR}$$

$$=\frac{2p(2p^2-2r^2-8rR-2p^2+6r^2+12rR)}{8pRr}$$

$$=\frac{4rR+4r^2}{4rR}=1+\frac{r}{R}$$

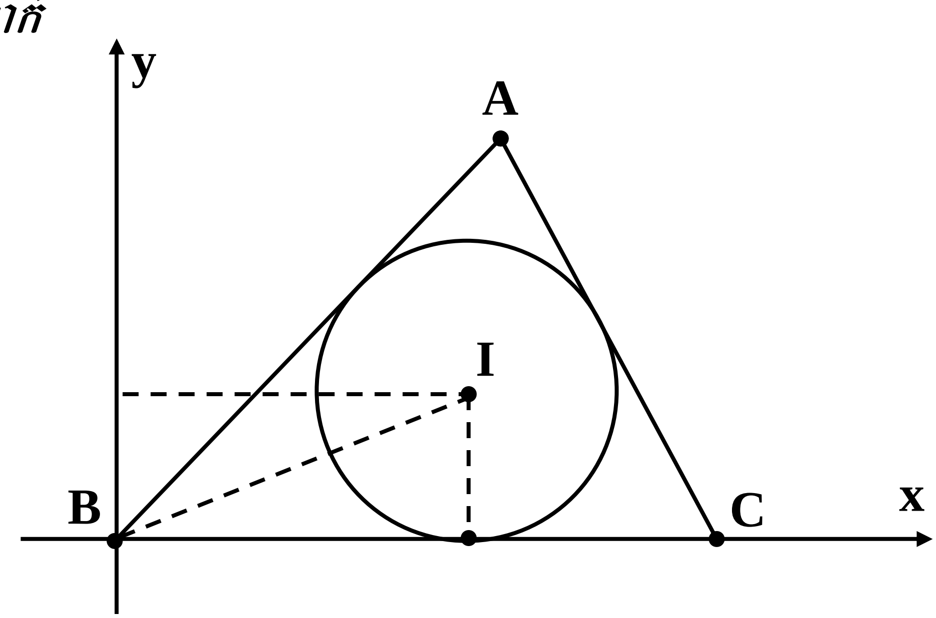
ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$ ។

៩~ទ្រឹស្តីបទអឺលែ

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c ។ តាង I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនុច X នៃប្លង់គេមានទំនាក់ទំនង :

$a.XA^2+b.XB^2+c.XC^2=(a+b+c).XI^2+abc$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ **(Bxy)** គេមាន :

$B(0;0)$; $C(a , 0)$; $A(c\cos B ; c\sin B)$ ។

តាង **r** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

នៃត្រីកោណ **ABC** នោះគេបាន $I(p-b ; r)$ ។

បើ **S** ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC** នោះគេមាន :

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$ (រូបមន្តហេរ៉ុង)

លើកជាការេគេទាញបាន $r^2 = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

តាង $X(x_0 ; y_0)$ ជាចំនុចណាក៏ដោយនៃប្លង់ ។

តាង $M = a.XA^2 + b.XB^2 + c.XC^2$

និង $N = (a+b+c).XI^2 + abc$ គេបាន :

$$\begin{aligned}
M &= aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 \\
&= a[(x_0 - c\cos B)^2 + (y_0 - c\sin B)^2] + b(x_0{}^2 + y_0{}^2) + c[(x_0 - a)^2 + y_0{}^2] \\
&= (a+b+c)(x_0{}^2 + y_0{}^2) - 2acx_0(1+\cos B) - 2acy_0 \sin B + ac^2 + a^2c \\
&= 2p(x_0{}^2 + y_0{}^2) - 2acx_0\left(1 + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) - 4y_0S + a^2c + ac^2 \\
&= 2p(x_0{}^2 + y_0{}^2) - x_0(2p)(2p-2b) - 4y_0S + a^2c + ac^2 \\
&= 2p(x_0{}^2 + y_0{}^2) - 4px_0(p-b) - 4y_0S + a^2c + ac^2
\end{aligned}$$

ហើយ $\mathbf{N=(a+b+c)XI^2+abc}$

$$\mathbf{=2p\left[(x_0-(p-b))^2+(y_0-r)^2\right]+abc}$$

$$\mathbf{=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4x_0p(p-b)-4y_0pr+2p(p-b)^2+}$$

$$\mathbf{+2pr^2+abc}$$

$$\mathbf{=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+2p(p-b)^2+}$$

$$\mathbf{+2p\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}+abc}$$

$$\mathbf{=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+2p(p-b)^2+}$$

$$\mathbf{+2(p-a)(p-b)(p-c)+abc}$$

យក $\mathbf{T=2p(p-b)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)+abc}$

$$\mathbf{=2(p-b)[p^2-pb+p^2-(a+c)p+ac]+abc}$$

$$\mathbf{=2(p-b)[2p^2-(a+b+c)p+ac]+abc}$$

$$\mathbf{=2ac(p-b)+abc=ac(2p-2b+b)=ac(a+c)}$$

$$\mathbf{=a^2c+ac^2}$$

គេទាញ $\mathbf{N=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+a^2c+ac^2}$

ដោយកន្សោម $\mathbf{M=N}$ នាំឱ្យគេទាញបាន

$\mathbf{a.XA^2+b.XB^2+c.XC^2=(a+b+c)XI^2+abc}$ ។

១០-ចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

ទ្រឹស្តីបទ

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយដែល **O** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង **I** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង ។ បើ **R** និង **r** ជារង្វាស់កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណនោះ គេបាន $OI^2 = R^2 - 2Rr$ ឬ $d = OI = \sqrt{R(R-2r)}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែយើងបាន :

$$a.OA^2 + b.OB^2 + c.OC^2 = (a+b+c)OI^2 + abc$$

ដោយ $OA = OB = OC = R$ និង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

គេបាន $2pR^2 = 2p.d^2 + abc$ នាំឱ្យ $d^2 = R^2 - \dfrac{abc}{2p}$ ដែល $d = OI$ ។

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡា $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$ គេទាញ $\dfrac{abc}{2p} = 2rR$

ដូចនេះ $d^2 = R^2 - 2rR = R(R-2r)$ ឬ $d = \sqrt{R(R-2r)}$ ។

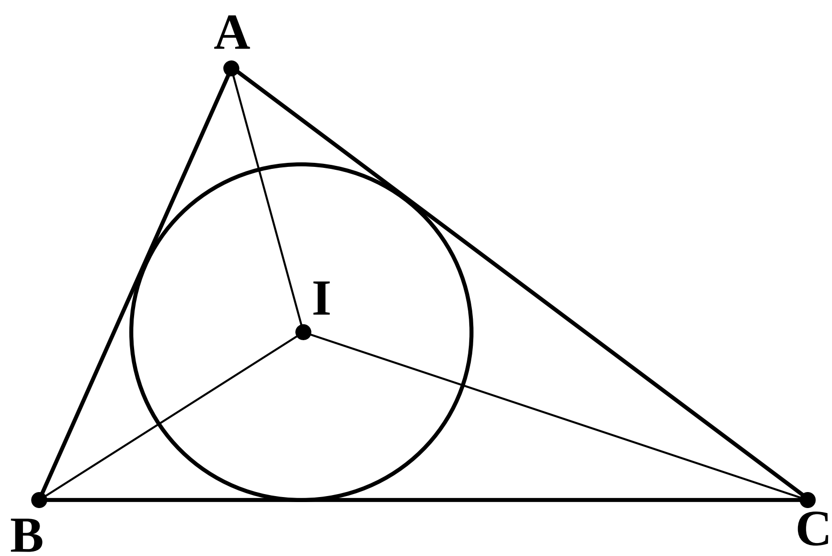
១១.ចម្ងាយពីផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងទៅកំពូលនៃត្រីកោណ

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង a, b, c ។

បើ **I** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនោះគេបាន :

$$IA = \sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}\ ,\ IB = \sqrt{\frac{p-b}{p}.ac}\ ,\ IC = \sqrt{\frac{p-c}{p}.ab}$$

សម្រាយបញ្ជាក់



តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែចំពោះគ្រប់ចំនុច **X** គេមាន :

$$a.XA^2 + b.XB^2 + c.XC^2 = (a+b+c).XI^2 + abc$$

បើ $X \equiv A$ នោះគេបាន :

$$a.AA^2 + b.AB^2 + c.AC^2 = (a+b+c).AI^2 + abc$$

$$bc^2 + cb^2 = (a+b+c).AI^2 + abc$$

គេទាញបាន $AI^2 = \dfrac{bc(b+c-a)}{a+b+c} = \dfrac{bc(2p-2a)}{2p}$

ដូចនេះ $AI = \sqrt{\dfrac{p-a}{p}.bc}$ ។ ចំពោះរូបមន្តពីរទៀតស្រាយដូចគ្នា ។

សម្គាល់ :

គេមាន $IA = \sqrt{\dfrac{p-a}{p}.bc}$, $IB = \sqrt{\dfrac{p-b}{p}.ac}$, $IC = \sqrt{\dfrac{p-c}{p}.ab}$

គេបាន $a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc(\dfrac{p-a}{p} + \dfrac{p-b}{p} + \dfrac{p-c}{p})$

ដោយ $\dfrac{p-a}{p} + \dfrac{p-b}{p} + \dfrac{p-c}{p} = \dfrac{3p-(a+b+c)}{p} = \dfrac{3p-2p}{p} = 1$

ដូចនេះ $a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc$ ។

១២~កន្សោមត្រីកោណមាត្រ $\sin\dfrac{A}{2}, \cos\dfrac{A}{2}, \tan\dfrac{A}{2}$

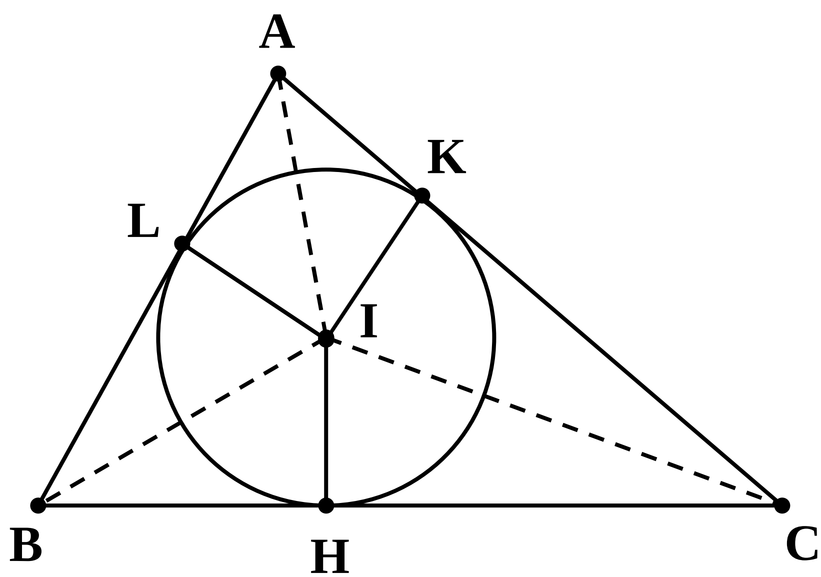
គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង a, b, c និងកន្លះបរិមាត្រ p ។

គេមានទំនាក់ទំនងដូចខាងក្រោម :

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad , \quad \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-c)}}$$

សម្រាយបញ្ជាក់



ក្នុងត្រីកោណកែង **IAL** គេមាន $\sin\frac{A}{2}=\frac{IL}{IA}=\frac{r}{IA}$

ដោយ $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ និង $IA=\sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}{\sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ។ ដូចគ្នាដែរគេមានទំនាក់ទំនង :

$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ និង $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

គេទាញ $\cos\frac{A}{2}=\frac{S}{bc\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}$

ដូចនេះ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$ និង $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$ ។

គេមាន $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបានទំនាក់ទំនង :

$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ និង $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$ ។

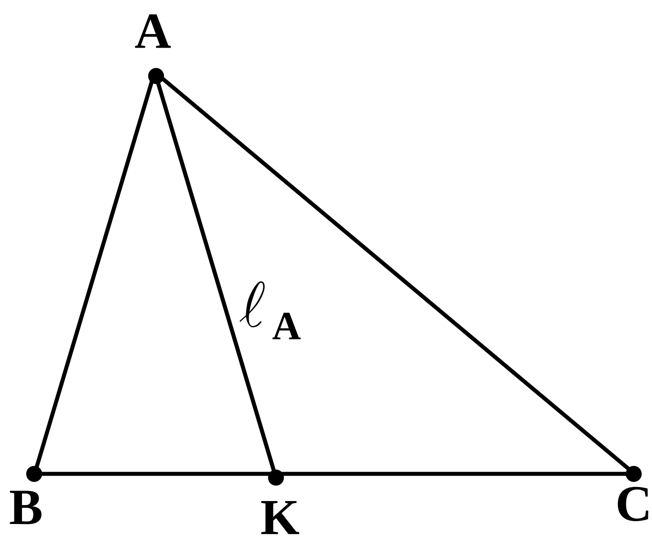
១៣~ទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំមួយរបស់ត្រីកោណ

គេឱ្យត្រីកោណ A,B,C មានជ្រុង a,b,c ។

បើ ℓ_A,ℓ_B,ℓ_C ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A,B,C នោះគេបាន :

$\ell_A=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, $\ell_B=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$, $\ell_C=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC** គឺ :

$$S = S_{ABK} + S_{AKC}$$

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}c\,\ell_A \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b\,\ell_A \sin\frac{A}{2}$$

គេទាញបាន $\ell_A = \dfrac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$ ដោយ $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

ដូចនេះ $\ell_A = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\ell_B = \dfrac{2ac}{a+c}\cos\dfrac{B}{2}, \ell_C = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{C}{2}$ ។

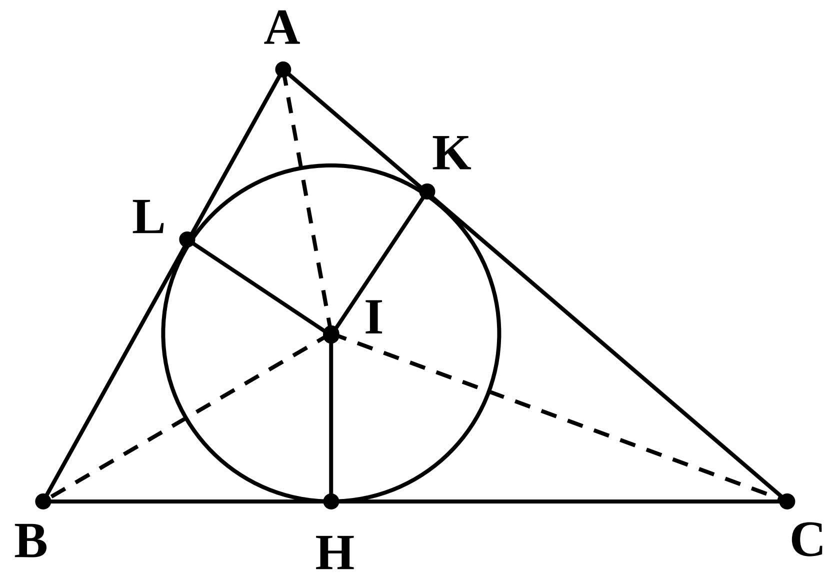
១៤~កន្សោមកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណមួយ

គេឱ្យត្រីកោណ A,B,C មានជ្រុង a,b,c និងកន្លះបរិមាត្រ p ។

បើ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC នោះគេបាន :

$$r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



តាង $AL=AK=x$, $BL=BH=y$,$CH=CK=z$

គេបាន $\begin{cases} x+y=c \\ y+z=a \\ z+x=b \end{cases}$ នាំឱ្យ $2(x+y+z)=a+b+c=2p$

គេទាញ $x+y+z=p$ នោះ $\begin{cases} x=p-(y+z)=p-a \\ y=p-(z+x)=p-b \\ z=p-(x+y)=p-c \end{cases}$

ដូចនេះ $AK = AL = p - a$, $BL = BH = p - b$

និង $CH = CK = p - c$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង ALI គេមាន $\tan\frac{A}{2} = \frac{IL}{AL} = \frac{r}{p-a}$

គេបាន $r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$ ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$r = (p-b)\tan\frac{B}{2}$ និង $r = (p-c)\tan\frac{C}{2}$

ដូចនេះ $r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$ ។

សម្គាល់ :

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC អាចគណនាតាមរូបមន្ត :

$$S = pr = p(p-a)\tan\frac{A}{2} = p(p-b)\tan\frac{B}{2} = p(p-c)\tan\frac{C}{2}$$ ។

១៥_កន្សោមកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំមួយនៃត្រីកោណ

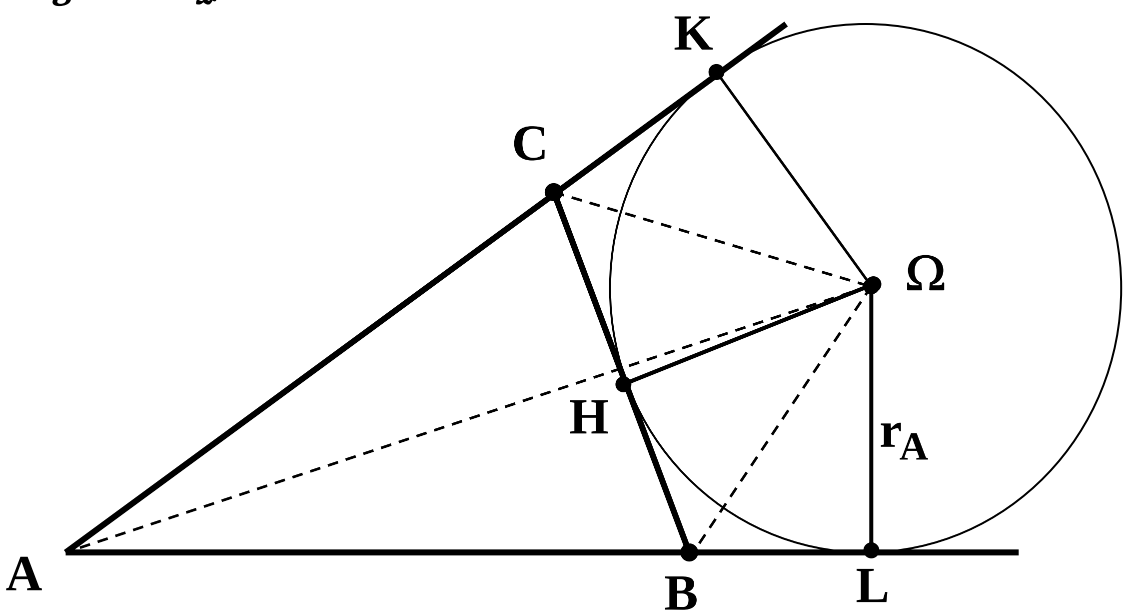
ទ្រឹស្តីបទ :

គេឱ្យត្រីកោណ A, B, C មានជ្រុង a, b, c និងកន្លះបរិមាត្រ p ។

បើ r_A ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A នៃត្រីកោណ ABC នោះគេបាន :

$$r_A = p\tan\frac{A}{2} = \frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}} = \frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



គេមាន $AK = AC + CK = AC + CH$ និង $AL = AB + BL = AB + BH$

គេបាន :

$$AK + AL = AC + AB + (CH + BH) = AC + AB + BC = 2p$$

ដោយ $AK = AL$ នោះគេបាន $2AK = 2AL = 2p$ ឬ $AK = AL = p$

ហើយ $CK = CH = AK - AC = p - b$ និង $BH = BL = p - c$

ដូចនេះ $AK = AL = p \ , CK = CH = p - b \, , BH = BL = p - c$

ក្នុងត្រីកោណកែង $AL\Omega$ គេមាន $\tan\frac{A}{2} = \frac{\Omega L}{AL} = \frac{r_A}{p}$

គេបាន $r_A = p\tan\frac{A}{2}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $B=\pi-\angle LBH$

នាំឱ្យ $\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\angle LBH}{2}=\frac{\pi}{2}-\angle\Omega BH$

គេបាន $\tan\frac{B}{2}=\cot\angle\Omega BH=\frac{BH}{\Omega H}=\frac{p-c}{r_A}$ គេទាញ $r_A=\frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}}$ (2)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $r_A=\frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}$ (3)

តាមទំនាក់ទំនង $(1),(2)$ និង (3) គេបាន :

$r_A=p\tan\frac{A}{2}=\frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}}=\frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}$ ។

គេមានទំនាក់ទំនងស្រដៀងគ្នានេះដែរចំពោះកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ B និង ក្នុងមុំ C

$r_B=p\tan\frac{B}{2}=\frac{p-c}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{p-a}{\tan\frac{C}{2}}$, $r_C=p\tan\frac{C}{2}=\frac{p-b}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{p-a}{\tan\frac{C}{2}}$

សម្គាល់ :

គេមាន $rr_Ar_Br_C=(p-a)\tan\frac{A}{2}.\frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}}.p\tan\frac{B}{2}.\frac{p-b}{\tan\frac{A}{2}}$

$$rr_Ar_{BC}=p(p-a)(p-b)(p-c)=S^2$$

ដូចនេះគេបាន $S=\sqrt{r\,r_A\,r_B\,r_C}$ ។

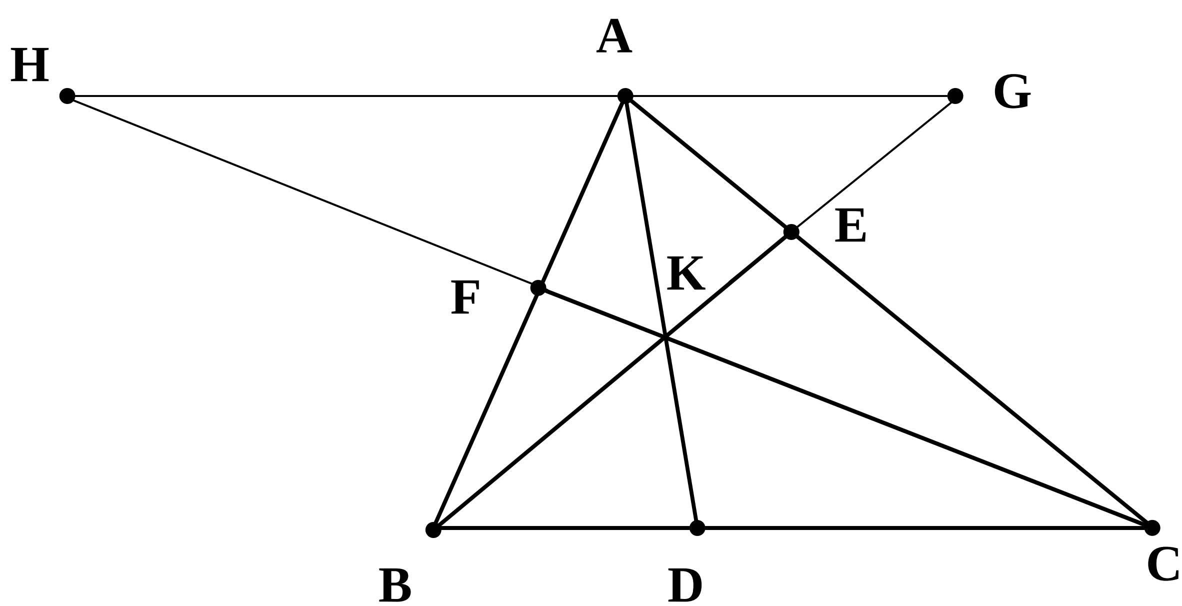
១៦-ទ្រឹស្តីបទសេវ៉ា (Ceva’s theorem)

ទ្រឹស្តីបទ :

ក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយ បន្ទាត់បី **AD , BE** និង **CF** ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច **K** មួយលុះត្រាតែ $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

☞ ឧបមាថាបន្ទាត់បី **AD , BE** និង **CF** ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច**K** មួយ



យក **(Δ)** ជាបន្ទាត់កាត់តាម **A** ហើយស្របនឹង **(BC)** ។

តាង **G** និង **H** ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ **(BE)** និង **(CF)** ជាមួយបន្ទាត់ **(Δ)** រៀងគ្នា ។

ដោយ ΔAHF ដូច ΔBCF នោះគេបាន $\frac{AF}{FB}=\frac{AH}{BC}$ (1)

ΔAEG ដូច ΔBCE នោះគេបាន $\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AG}$ (2)

ΔAGK ដូច ΔBDK នោះគេបាន $\frac{AG}{BD}=\frac{AK}{DK}$ (3)

ΔAHK ដូច ΔCDK នោះគេបាន $\frac{AH}{DC}=\frac{AK}{DK}$ (4)

តាម $(3)\&(4)$ គេបាន $\frac{AC}{BD}=\frac{AH}{DC}$ ឬ $\frac{BD}{DC}=\frac{AG}{AH}$ (5)

គុណទំនាក់ទំនង $(1),(2)\&(5)$ អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=\frac{AH}{BC}.\frac{BC}{AG}.\frac{AG}{AH}=1$$ ពិត ។

☞ ឧបមាថា $\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1$ ពិត ។

យើងនឹងស្រាយថាបន្ទាត់ AD , BE និង CF ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច K មួយ ។

សន្មតថា k ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ BE និង CF ហើយយក D' ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ AK និង BC ។ នោះតាមសម្រាយខាងលើគេបាន :

$\frac{AF}{FB}.\frac{BD'}{D'C}.\frac{CE}{EA}=1$ តែតាមការឧបមា $\frac{AF}{FB}.\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}=1$

នោះគេបាន $\frac{BD'}{D'C}=\frac{BD}{DC}$ ឬ $\frac{BD'}{D'C}+1=\frac{BD}{DC}+1$

ឬ $\frac{BD'+D'C}{D'C}=\frac{BD+DC}{DC}$ ឬ $\frac{BC}{D'C}=\frac{BC}{DC}$ នោះ $D'C=DC$ មានន័យថាចំណុច D' និង D ត្រួតស៊ីគ្នា ។

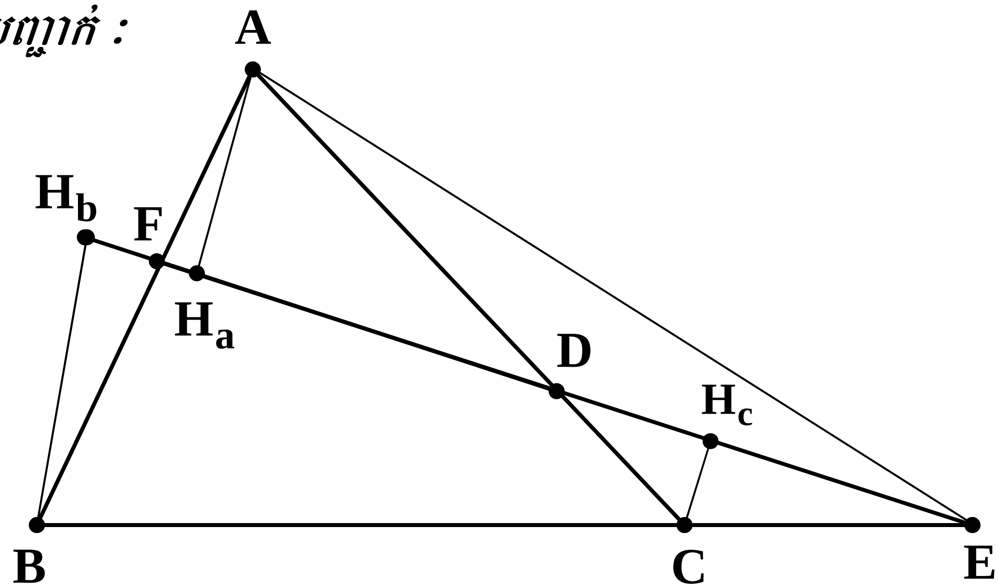
១៧-ទ្រឹស្តីមីនីឡូស (Menelaus theorem)

ទ្រឹស្តីបទ :

យកបីចំនុច F,D និង E ស្ថិតរៀងគ្នាលើជ្រុង AB , BC និង AC

នៃត្រីកោណ ABC នោះចំណុចបីនេះរត់ត្រង់គ្នាបើ $\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=1$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :



តាង H_a,H_b,H_c ជាចំណោលកែងនៃ A,B,C លើ (EF) រៀងគ្នា ។

នោះគេបាន $\Delta\perp AH_aF$ ដូច $\Delta\perp BH_bF$ នោះ $\frac{AF}{BF}=\frac{AH_a}{BH_b}$ (1)

$\Delta\perp BH_bD$ ដូច $\Delta\perp CH_cD$ នោះ $\frac{BD}{CD}=\frac{BH_b}{CH_c}$ (2)

$\Delta\perp AH_aE$ ដូច $\Delta\perp CH_cE$ នោះ $\frac{CE}{AE}=\frac{CH_c}{AH_a}$ (3)

គុណសមីការ (1),(2) & (3) គេបាន $\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=1$ ។

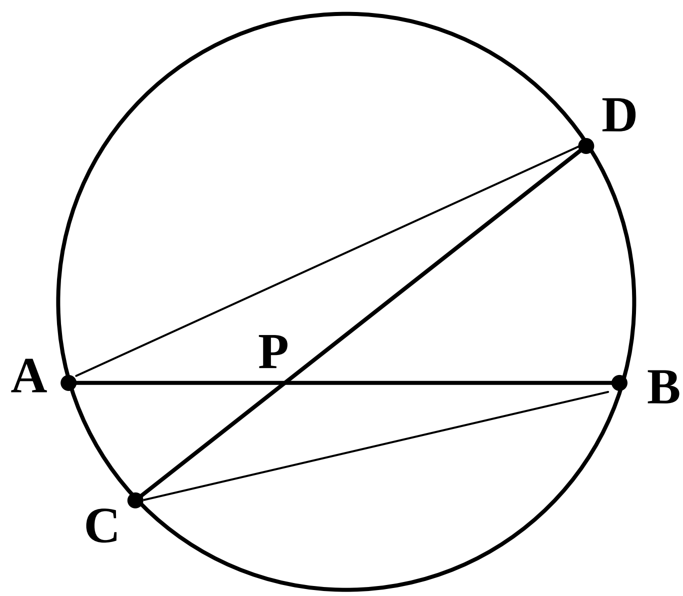
១៨.ស្វ័យគុណនៃចំនុចមួយធៀបនឹងរង្វង់មួយ

ទ្រឹស្តីបទ :

បើបន្ទាត់ពីរគូសចេញពីចំនុច $\mathbf{P}$ មួយកាត់រង្វង់ត្រង់ $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ និង $\mathbf{C},\mathbf{D}$ រៀងគ្នា នោះគេបាន $\mathbf{PA \times PB = PC \times PD}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ :

☞ ករណីចំនុច $\mathbf{P}$ នៅក្នុងរង្វង់



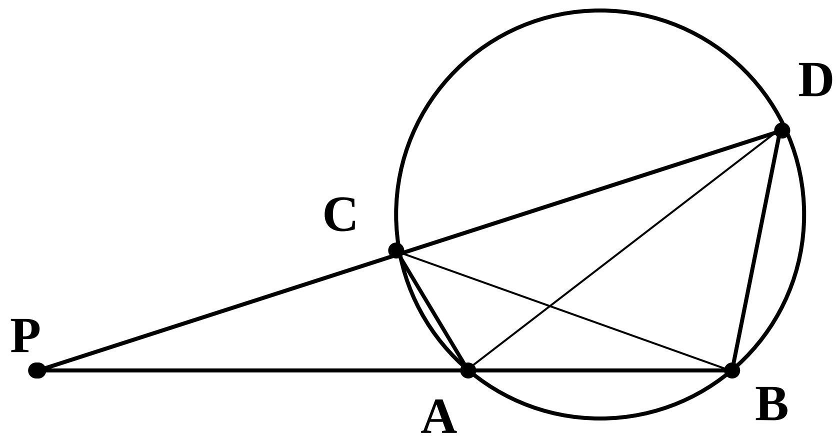
គេមាន $\angle\mathbf{PAD} = \angle\mathbf{PCB}$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ដោយធ្នូរួម $\mathbf{DB}$)

$\angle\mathbf{APD} = \angle\mathbf{CPB}$ (មុំទល់កំពូល)

គេបាន $\Delta\mathbf{PAD}$ និង $\Delta\mathbf{PCB}$ ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\dfrac{\mathbf{PA}}{\mathbf{PC}} = \dfrac{\mathbf{PD}}{\mathbf{PB}}$ នោះ $\mathbf{PA \times PB = PC \times PD}$ ។

☞ ករណីចំនុច **P** នៅក្រៅរង្វង់



គេមាន $\angle ADC = \angle ABC$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ធ្នូររួម **AC**)

$\angle APD = \angle BPC$ (មុំរួម)

គេបាន ΔPAD និង ΔPCB ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ នោះ $PA \times PB = PC \times PD$ ។

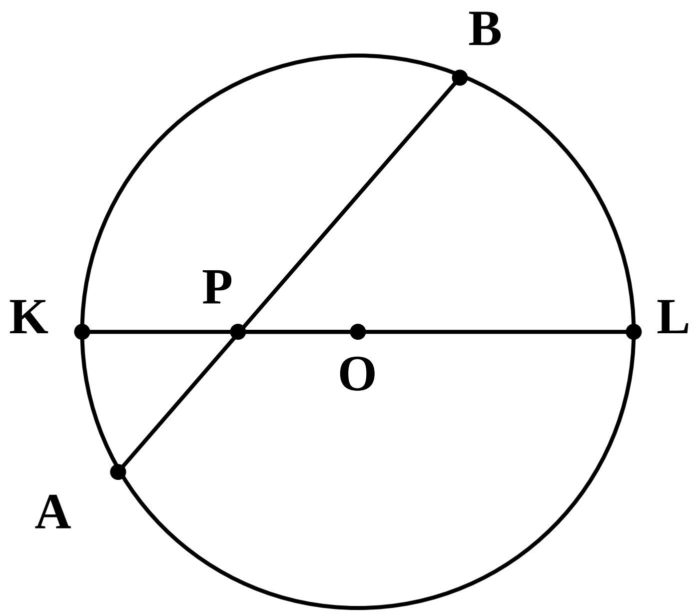
សម្គាល់ :

តាង **R** ជាកាំរង្វង់ ហើយ **d** ជាចម្ងាយពីផ្ចិតនៃរង្វង់ទៅចំនុច **P** ។

-បើ **P** នៅក្នុងរង្វង់នោះ $PA \times PB = PC \times PD = R^2 - d^2$

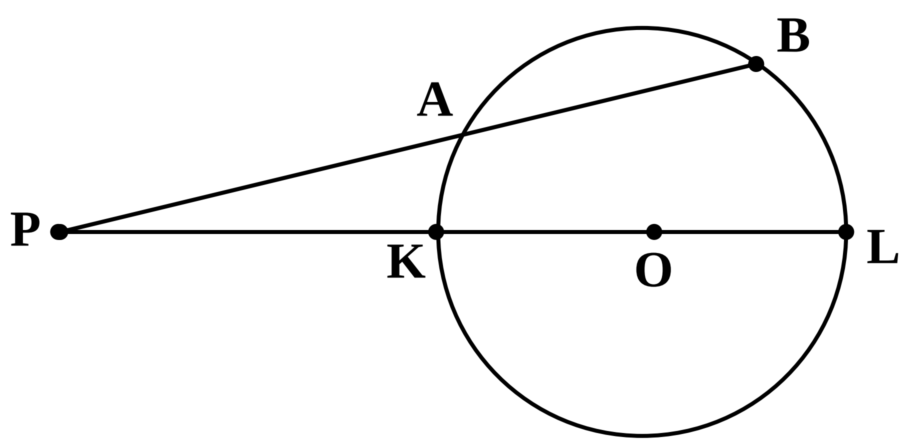
-បើ **P** នៅក្រៅរង្វង់នោះ $PA \times PB = PC \times PD = d^2 - R^2$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



ករណី **P** នៅក្នុងរង្វង់ ហើយយក **KL** ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់កាត់តាម **P**

គេបាន $\mathbf{PA.PB = PK.PL = (R-d)(R+d) = R^2 - d^2}$ ។



ករណី **P** នៅក្រៅរង្វង់ ហើយយក **KL** ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់កាត់តាម **P**

គេបាន $\mathbf{PA.PB = PK.PL = (d-R)(d+R) = d^2 - R^2}$ ។

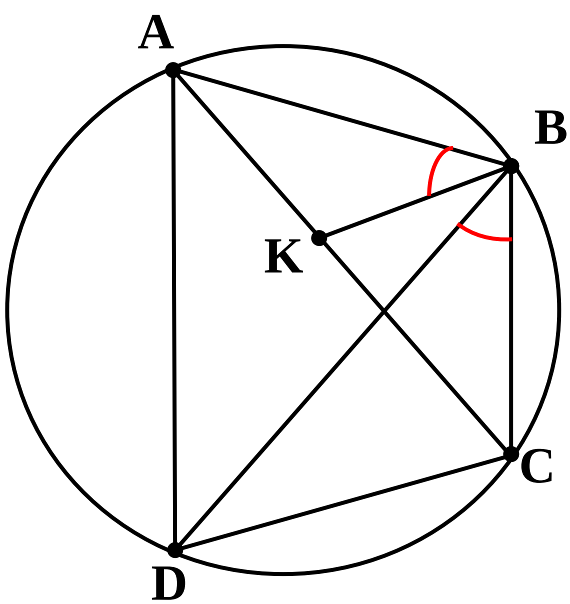
១៩-ទ្រឹស្តីបទតូលេមី (Ptolemy's theorem)

ទ្រឹស្តីបទ :

បើ **ABCD** ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់នោះគេបាន :

$\mathbf{AC.BD = AB.CD + BC.AD}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



យក **K** ជាចំនុចមួយនៃ **AC** ដែល $\angle ABK = \angle CBD$

គេមានមុំចារឹកក្នុង $\angle BAC = \angle BDC$ និង $\angle ADB = \angle ACB$

គេបាន $\angle ABD = \angle ABK + \angle KBD = \angle DBC + \angle KBD = \angle KBC$

នោះ ΔABK ដូចត្រីកោណ ΔDBC ហើយ ΔABD ដូចត្រីកោណ ΔKBC

គេបានផលធៀបដំណូច $\frac{AK}{AB} = \frac{CD}{BD}$ និង $\frac{CK}{BC} = \frac{DA}{BD}$

គេទាញ $AK.BD = AB.CD$ និង $CK.BD = BC.AD$

ហេតុនេះ $AK.BD + CK.BD = AB.CD + BC.AD$

$$BD(AK + CK) = AB.CD + BC.AD$$

ដោយ $AK + CK = AC$

ដូចនេះ $AC.BD = AB.CD + BC.AD$ ។

២០. វិសមភាពតូលេមី (Ptolemy's inequality)

ទ្រឹស្តីបទ :

គេឱ្យចតុកោណ $ABCD$ នោះគេបាន :

$$AB.CD + BC.AD \geq AC.BD$$

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យក z_A , z_B , z_C , z_D ជាអាហ្វិកនៃចំនុច A , B , C , D រៀងគ្នា ។

គេមានសមភាព

$$(z_B - z_A)(z_D - z_C) + (z_C - z_B)(z_D - z_A) = (z_C - z_A)(z_D - z_B)$$

តាមវិសមភាពត្រីកោណគេបាន :

$$| z_c - z_A)(z_D - z_B) | \leq | (z_B - z_A)(z_D - z_C) | + | (z_C - z_B)(z_D - z_A) |$$

ដូចនេះ $AC.BD \leq AB.CD + BC.AD$ ។

២១.ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

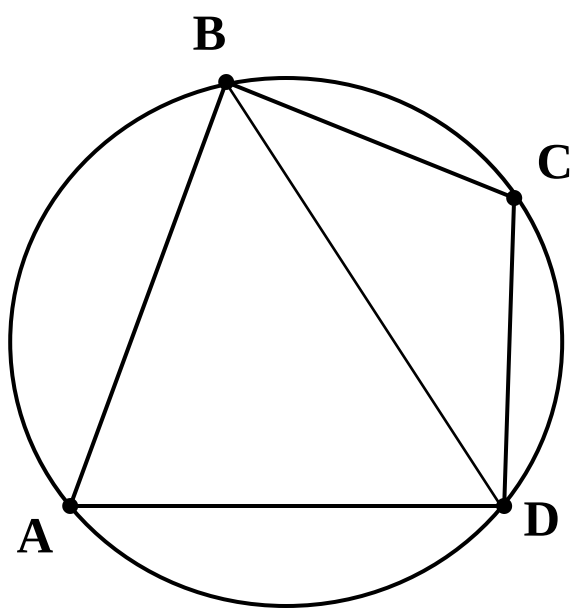
រូបមន្ត Brahmagupta :(Brahmagupta's formula)

គេឱ្យចតុកោណ **ABCD** មានជ្រុង **a , b , c , d** និងកន្លះបរិមាត្រ **p**

ចារឹកក្នុងរង្វង់នោះផ្ទៃក្រឡាវាកំណត់ដោយ :

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



ដោយ $A+C=180^o$ នោះគេបាន $\sin C=\sin A$ និង $\cos C=-\cos A$

គេមាន $S=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C$

$$S=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A \quad \text{នោះ } \sin A=\frac{2S}{ad+bc} \quad (1)$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ **ABD** និង **BCD**

គេបាន $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$

គេទាញបាន $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \quad (2)$

ហើយគេមាន $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad (3)$

តាម $(1),(2)\,\&\,(3)$ គេបាន :

$$\frac{4S^2}{(ad+bc)^2} + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4(ad+bc)^2} = 1$$

គេទាញ $S^2 = \dfrac{4(ad+bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{16} = \dfrac{\alpha\beta}{16}$

ដែល $\alpha = 2(ad+bc) + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)$

$$= (a+d)^2 - (b-c)^2$$

$$= (a+d+b-c)(a+d-b+c)$$

និង $\beta = 2(ad+bc) - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)$

$$= (b+c)^2 - (a-d)^2$$

$$= (b+c+a-d)(b+c-a+d)$$

ដោយ $a+b+c+d = 2p$

នោះ $\alpha = 4(p-b)(p-c)$ និង $\beta = 4(p-a)(p-d)$

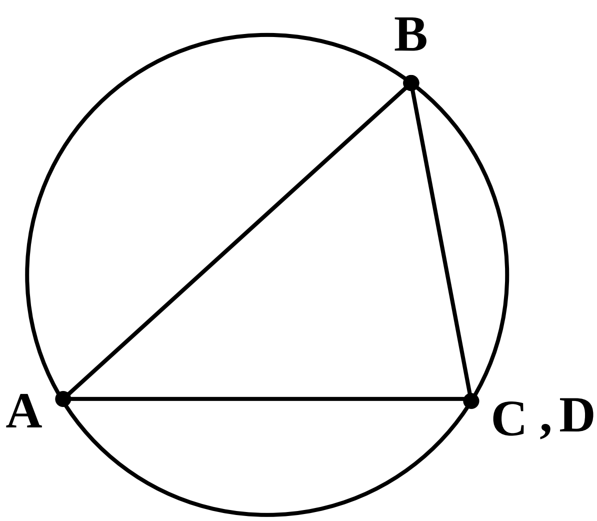
ហេតុនេះ $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$

ដូចនេះ $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។

សម្គាល់ :

បើចំនុច $\mathbf{D \equiv C}$ នោះ $\mathbf{d = 0}$

គេបាន $\mathbf{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ រូបមន្តហេរ៉ុង ។



២២-រូបមន្តផ្ទៃក្រឡាចតុកោណប៉ោង

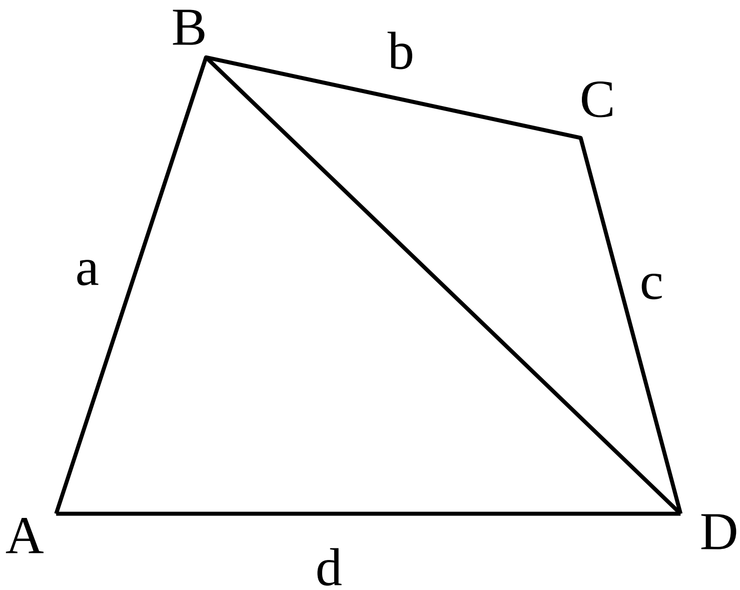
រូបមន្ត Bretschneider (Bretschneider's formula)

គេឱ្យចតុកោណប៉ោង **ABCD** មានជ្រុង $\mathbf{a, b, c, d}$ និងកន្លះបរិមាត្រ $\mathbf{p}$

នោះផ្ទៃក្រឡារបស់វាកំណត់ដោយ :

$$\mathbf{S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}}$$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



គេមាន $\mathbf{S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bd\sin C}$

ឬ $\mathbf{ad\sin A + bd\sin C = 2S \quad (1)}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ **ABD** និង **BCD** គេបាន **:**

$$\mathbf{a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C}$$

គេទាញ $\mathbf{ad\cos A - bc\cos C = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2} \quad (2)}$

តាម **(1) & (2)** គេបាន

$$\mathbf{(ad\sin A + bc\sin C)^2 + (ad\cos A - bc\cos C)^2 = 4S^2 + {} + \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}\right)^2}$$

គេទាញបាន ៖

$$4S^2 = (ad+bc)^2 - \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4} - 4abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$

$$S^2 = \frac{\alpha\beta}{16} - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$

ដែល $\alpha = 2(ad+bc)+(a^2+d^2-b^2-c^2)$

$$= (a+d)^2-(b-c)^2$$

$$= (a+d+b-c)(a+d-b+c)$$

និង $\beta = 2(ad+bc)-(a^2+d^2-b^2-c^2)$

$$= (b+c)^2-(a-d)^2$$

$$= (b+c+a-d)(b+c-a+d)$$

ដោយ $a+b+c+d=2p$

នោះ $\alpha = 4(p-b)(p-c)$ និង $\beta = 4(p-a)(p-d)$

ហេតុនេះ $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$

ដូចនេះ $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$ ។

សម្គាល់ ៖

បើ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់នោះ $\cos\frac{A+C}{2} = \cos 90^o = 0$

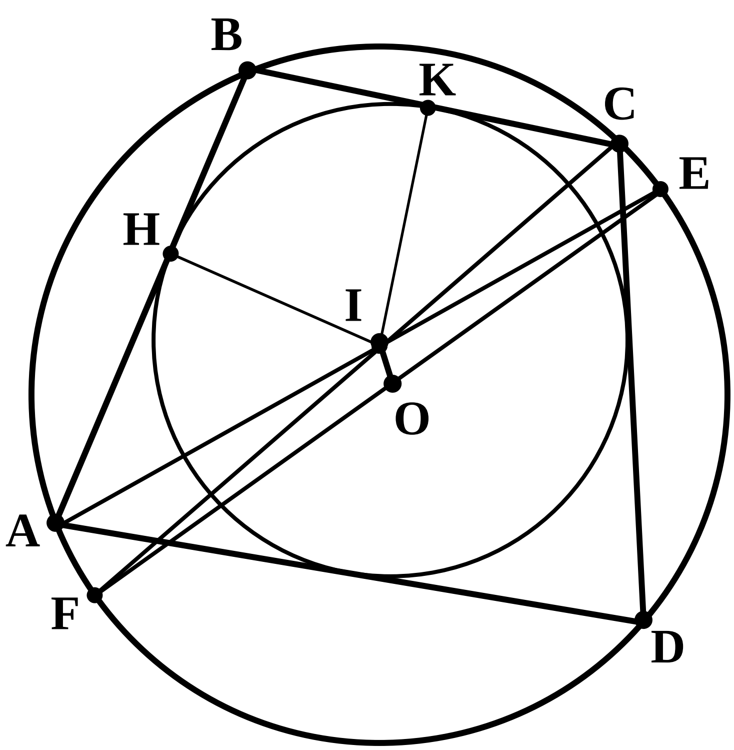
នោះ $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។

២៣_ចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃចតុកោណប៉ោង

បើចតុកោណប៉ោង **ABCD** ចារឹកក្នុងរង្វង់ $\mathbf{C(O,R)}$ និងចារឹកក្រៅរង្វង់ $\mathbf{C'(I,r)}$ នោះគេបាន :

$\mathbf{d = OI = \sqrt{r^2 + R^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}}}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់



តាង **H** និង **K** ជាចំណុចប៉ះរវាងរង្វង់ **(C')** ជាមួយជ្រុង **[AB]** និង **[BC]** ហើយ **E** និង **F** ជាចំណុចប្រសព្វរវាង **(AI)** និង **(CI)** ជាមួយរង្វង់ **(C)** រៀងគ្នា ។

គេមាន $\angle DOF = 2\angle DCF = \angle DCB$

និង $\angle DOE = 2\angle DAE = \angle DAB$

គេបាន $\angle DOF + \angle DOE = \angle DCB + \angle DAB = 180^{o}$

នាំឱ្យ [EF] ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ (C) ។

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យានក្នុងត្រីកោណ EIF គេបាន :

$$OI^2 = \frac{IE^2 + IF^2}{2} - \frac{EF^2}{4} = \frac{1}{2}(IE^2 + IF^2) - R^2 \quad (1)$$

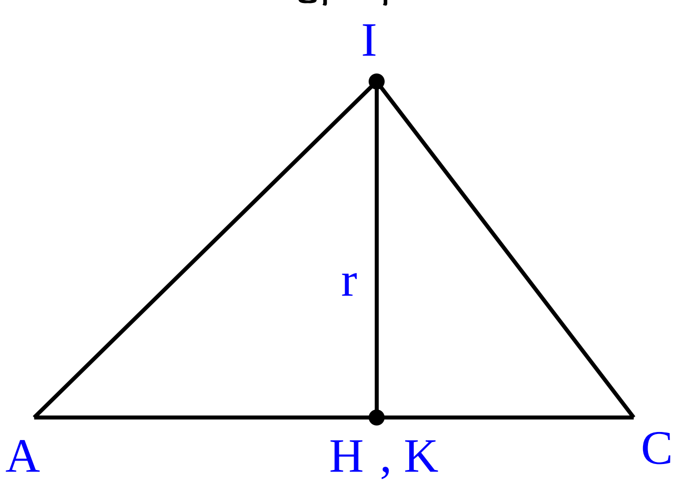
គេមាន $\angle IAB = \dfrac{\angle BAD}{2}$ និង $\angle ICB = \dfrac{\angle DCB}{2}$

គេបាន $\angle IAB + \angle ICB = \dfrac{\angle BAD + \angle DCB}{2} = \dfrac{180^{o}}{2} = 90^{o}$

សង់ $IH = IK = r$ ។

ពីរត្រីកោណកែង IAH និង IKC ផ្គុំគ្នាបង្កើតបានជាត្រីកោណកែង

ដែលមានIA និង IC ជាជ្រុងមុំកែង និង $AH + KC$ ជាអ៊ីប៉ូតេនូស ។



តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែងគេបាន $\frac{1}{r^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IC^2}$ **(2)**

តាមទ្រឹស្តីបទស្វ័យគុណចំណុច **I** ធៀបនឹងរង្វង់ **(C)**

គេបាន $IA.IE=IC.IF=R^2-OI^2$

នាំឱ្យ $IA=\frac{R^2-OI^2}{IE}$ **(3)** និង $IC=\frac{R^2-OI^2}{IF}$ **(4)**

យកទំនាក់ទំនង (3) និង (4) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន **:**

$\frac{1}{r^2}=\frac{IE^2+IF^2}{(R^2-OI^2)^2}$ នាំឱ្យ $IE^2+IF^2=\frac{(R^2-OI^2)^2}{r^2}$ **(5)**

យកទំនាក់ទំនង (5) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន **:**

$$OI^2=\frac{(R^2-OI^2)^2}{2r^2}-R^2$$

ឬ $(R^2-OI^2)^2-2OI^2.r^2-2R^2r^2=0$

តាង $d=OI$ គេបាន $(R^2-d^2)^2-2d^2r^2-2R^2r^2=0$

ឬ $d^4-2(r^2+R^2)d^2+R^4-2R^2r^2=0$ តាង $t=d^2$

គេបាន $t^2-2(r^2+R^2)t+R^4-2R^2r^2=0$

ឌីសគ្រីមីណង់បង្រួម

$$\Delta'=(r^2+R^2)^2-(R^4-2R^2r^2)=r^2(r^2+4R^2)$$

គេទាញឫស $t_1=r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}$

ឬ $t_2 = r^2 + R^2 + r\sqrt{r^2 + 4R^2}$

ដោយ $d < R$ នោះ $t = d^2 < R^2$ ។

ហេតុនេះ $t = d^2 = r^2 + R^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}$

នាំឱ្យ $OI = d = \sqrt{r^2 + R^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}}$ ពិត ។

សម្គាល់ :

តាមសមភាព $(R^2 - d^2)^2 - 2d^2r^2 - 2R^2r^2 = 0$

គេអាចសរសេរ :

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2) = r^2[(R+d)^2 + (R-d)^2]$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $(R^2 - d^2)^2 r^2 = (R+d)^2(R-d)^2 r^2$

គេបានទំនាក់ទំនង

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}$$ ។

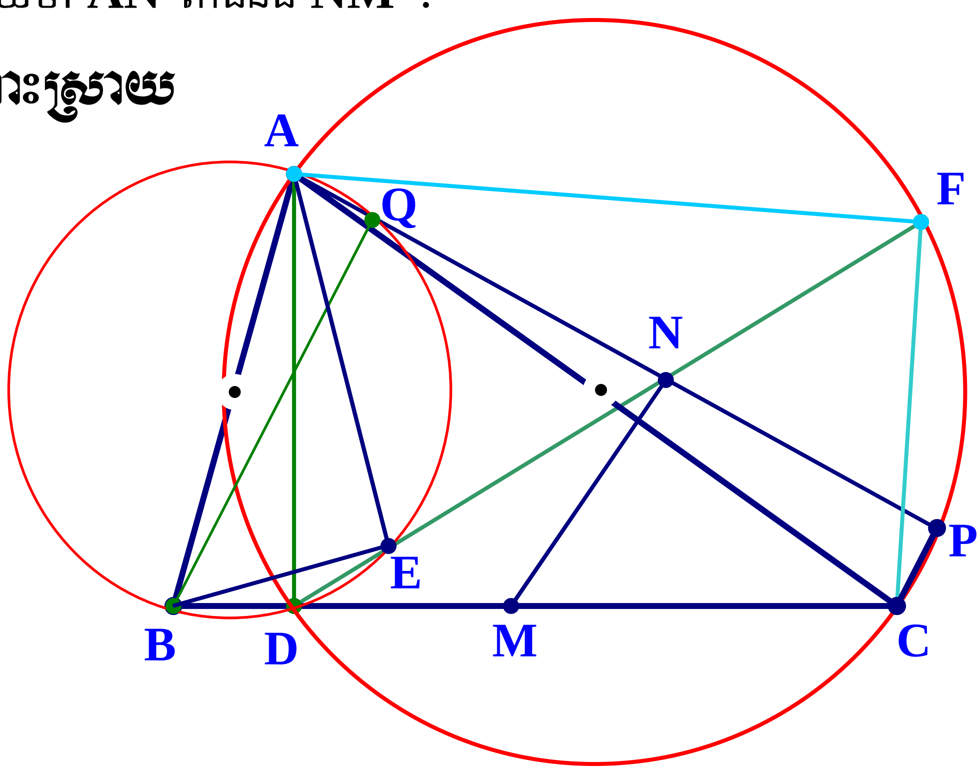
ជំពូកទី២

365 លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឱ្យ **ABC** ជាត្រីកោណមួយហើយ **D** ជាជើងនៃកម្ពស់គូសពីកំពូល **A** ។
យក **E** និង **F** ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់កាត់តាម**D** ដោយដឹងថា **AE** កែងនឹង **BE**
ហើយ **AF** កែងនឹង **CF** ដែល **E** និង **F** ខុសពី **D** ។
យក **M** និង **N** ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ **BC** និង **EF** រៀងគ្នា ។
ចូរស្រាយថា **AN** កែងនឹង **NM** ?

ដំណោះស្រាយ



តាង (w_1) និង (w_2) ជារង្វង់មានអង្កត់ផ្ចិតរៀងគ្នា AB និង AC ។

គេបាន $E \in (w_1)$ ព្រោះ $AE \perp BE$ ហើយ $F \in (w_2)$ ព្រោះ $AF \perp CF$

តាង P និង Q ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AN) ជាមួយ(w_1) និង (w_2) រៀងគ្នា ។

ចំនុច N នៅក្រៅរង្វង់ (w_1) នោះគេបាន $NE.NF = NQ.NA$ (1)

ព្រោះ N ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ EF ។

ចំពោះរង្វង់ (w_2) គេមាន $NF.NE = NP.NA$ (2)

តាម $(1) \& (2)$ គេទាញបាន $NQ.NA = NP.NA$ ឬ $NQ = NP$

ដោយ $MB = MC$ នោះគេបាន $MN // PC$ ហើយដោយ $AP \perp PC$

ដូចនេះ $AN \perp NM$ ។

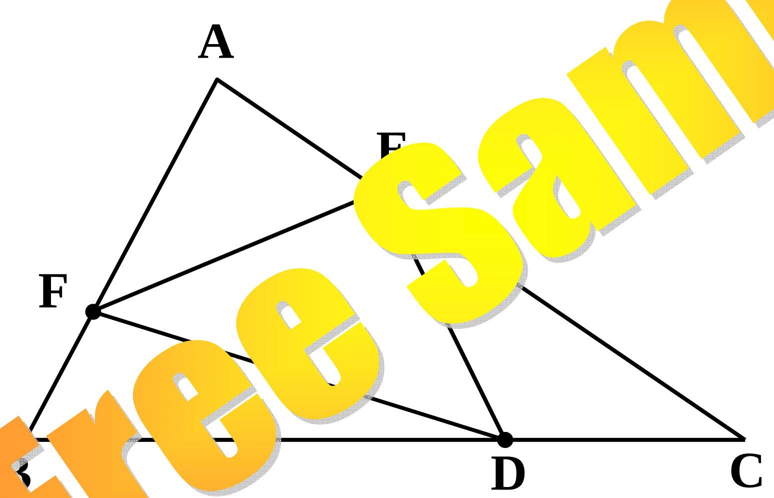
លំហាត់ទី២

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c និងមានផ្ទៃក្រឡា S ។

ឧបមាថាDEF ជាត្រីកោណចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :$DE+EF+FD \geq \frac{8S^2}{abc}$

ដំណោះស្រាយ



តាង $BD = x$, $CE = y$, $AF = z$ នោះ $\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < b \\ 0 < z < c \end{cases}$

គេបាន $DC = a - x$, $AE = b - y$, $BF = c - z$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ BDF គេបាន :

$$DF^2 = x^2 + (c-z)^2 - 2x(c-z)\cos B$$

ដោយ $\cos B = \cos(\pi - (A+C)) = -\cos(A+C)$

នោះ $DF^2 = x^2 + (c-z)^2 + 2x(c-z)\cos(A+C)$

$$= [x\cos A + (c-z)\cos C]^2 + [x\sin A - (c-z)\sin C]^2$$

គេទាញបាន $DF \ge |\, x\cos A + (c-z)\cos C \,|$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $DE = |\, y\cos B + (a-x)\cos A \,|$

និង $EF = |\, z\cos C + (b-y)\cos B \,|$ ។

ដោយប្រើវិសមភាពត្រីកោណគេបាន :

$$DE + EF + FD \ge |\, a\cos A + b\cos B + c\cos C \,| \quad (1)$$

តាង $T = a\cos A + b\cos B + c\cos C$

$$= R\sin 2A + R\sin 2B + R\sin 2C$$

$$= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$= 4R\sin A\sin B\sin C$$

$$= 4R.\frac{abc}{8R^3} = \frac{abc}{2R^2} = \frac{abc}{2(\frac{abc}{4S})^2} = \frac{8S^2}{abc}$$

ដូចនេះ $DE + EF + FD \ge \dfrac{8S^2}{abc}$ ។

ឯកសារយោង

១-គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ភាគ២របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

(បោះពុម្ពលើទី១ ឆ្នាំ ២០០៨)

២-Challenges in Geometry

(Christopher J.Bradley)

៣- Inequalities A Mathematical Olympiad Approach

(Radmila Bulajich Manfrino Jose Antonio Gomez Ortega Rogelio Valdez Delgado)

៤-Geometric inequalities (By O.BOTEEM, R.Z.DJOPDJIVIC)

៥-INFINITY (Hojoo Lee, Tom Lovering, and Cosmin Pohoaţ)