រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

លំហាត់ជ្រើសរើស 101

សម្រាប់សិស្សពូកែថ្នាក់ទី ១១

រួមមាន

- ស្វ៊ីតចំនួនពិត
- អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង លោការីត
- អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ
- ចំនួនកុំផ្លិច

$$\sin 2a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$$

$$i^2 = -1$$

β

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$\pm\infty$ $\sqrt{2}$

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

$\perp$

$$e^{i.\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z = a + i.b$$

$$\frac{1}{\cos^2\phi} = 1 + \tan^2\phi$$

$$e = 2.7182$$

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

លំហាត់ទី១

គេឱ្យ a^2 , b^2 , c^2 បង្កើតបានជាកំណើនស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

ចូរបង្ហាញថាបរិមាណ $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ ក៏បង្កើតបានជា កំណើននៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

បើ a^2 , b^2 , c^2 បង្កើតបានជាកំណើនស្វ៊ីតនព្វន្តមួយនោះគេបាន :

$b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$ (1) (មធ្យមនព្វន្ត)

គេមាន $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}=\frac{a+2b+c}{b^2+(a+c)b+ac}$ (2)

យកសមីការ (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន :

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{a+2b+c}{\frac{a^2+c^2}{2}+(a+c)b+ac}$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{2(a+2b+c)}{(a+c)^2+2(a+c)b}=\frac{2(a+2b+c)}{(a+c)(a+c+2b)}$$

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{2}{a+c}$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាបរិមាណ $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ ក៏បង្កើតបានជាកំណើននៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែរ ។

លំហាត់ទី២

បង្ហាញថាបើ **a , b , c** តាងរៀងគ្នាជាតួទី **p , q , r** នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយនោះ

គេបានសមភាព $(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

បើ **a , b , c** តាងរៀងគ្នាជាតួទី **p , q , r** នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) នោះគេបាន

$a=u_p=u_1+(p-1)d$, $b=u_q=u_1+(q-1)d$, $c=u_r=u_1+(r-1)d$

គេមាន $(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$

ឬ $aq-ar+br-bp+cp-cq=0$

ឬ $p(c-b)+q(a-c)+r(b-a)=0$ ដោយ $\begin{cases} c-b=(r-q)d \\ a-c=(p-r)d \\ b-a=(q-p)d \end{cases}$

នោះ $pd(r-q)+qd(p-r)+rd(q-p)=0$

ឬ $d(pr-pq+pq-qr+qr-pr)=0$

$0=0$ ពិត

ដូចនេះ $(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$ ។

លំហាត់ទី៣

គេមានសមីការ $x^3+3mx^2+2(6m-7)x+10m-16=0$

កំណត់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫសបី x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស្ទីតនព្វន្ត

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ m

បើ x_1, x_2, x_3 ជាឫសរបស់សមីការនោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមានទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-3m & (1) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=2(6m-7) & (2) \\ x_1x_2x_3=-10m+16 & (3) \end{cases}$$

បើ x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស្ទីតនព្វន្តនោះ $x_1+x_3=2x_2 \quad (4)$

យកសមីការ (4) ជួសក្នុង (1) គេបាន $3x_2=-3m$ ឬ $x_2=-m$

តាមសមីការ (3) គេបាន $x_1x_3=-\dfrac{10m-16}{x_2}=\dfrac{10m-16}{m}$

តាមសមីការ (2) គេបាន $(x_1+x_3)x_2+x_1x_3=12m-14$

ឬ $-2m(-m)+\dfrac{10m-16}{m}=12m-14$

ឬ $2m^3-12m^2+24m-16=0$

ឬ $2(m-2)^3=0$ នាំឱ្យ $m=2$ ។

ដូចនេះ $m=2$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 1+\sqrt{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u_n + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} \end{cases}$

ក_តាង $v_n = u_n - \sqrt{2}$ ។ បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ_គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក_បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $v_n = u_n - \sqrt{2}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n + \frac{1}{1+\sqrt{2}} - \sqrt{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_n - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ខ_គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $v_0 = u_0 - \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$

ដូចនេះ $v_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ហើយ $v_n = u_n - \sqrt{2}$ នាំឲ្យ $u_n = \sqrt{2} + v_n$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \sqrt{2} + (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 5$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+1} = \frac{2}{5}(u_n + 6)$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; ...$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $u_{n+1} = \frac{2}{5}(u_n + 6)$ នោះ $5u_{n+1} - 2u_n - 12 = 0$

សមីការសំគាល់ $5r - 2r - 12 = 0$ នាំឱ្យ $r = 4$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_n - r = u_n - 4$

គេបាន $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{2}{5}(u_n + 6) - 4 = \frac{2}{5}(u_n - 4) = \frac{2}{5}v_n$

នាំឱ្យ v_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \frac{2}{5}$ និង $v_0 = 1$

គេបាន $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ដោយ $v_n = u_n - 4$

ដូចនេះ $u_n = 4 + \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ :

$u_1 = 5$; $u_2 = 13$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ សមមូល $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$

មានសមីការសំគាល់ $r^2 - 5r + 6 = 0$

ឬ $(r-2)(r-3) = 0$ គេទាញ $r_1 = 2 \vee r_2 = 3$

ទំនាក់ទំនង $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ អាចសរសេរជាពីររបៀបគឺ :

$$\begin{cases} u_{n+2} - 2u_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2u_n) & (i) \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} = 2(u_{n+1} - 3u_n) & (ii) \end{cases}$$

តាងស្វ៊ីតជំនួយពីរ $(a_n)_{n\geq 1}$ និង $(b_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} a_n = u_{n+1} - 2u_n \\ b_n = u_{n+1} - 3u_n \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} a_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} \\ b_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} \end{cases}$$

ដោយយោងតាមសមីការ (i) និង (ii) គេទាញបាន :

$a_{n+1} = 3a_n$ និង $b_{n+1} = 2b_n$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា(a_n) និង (b_n) សុទ្ធតែជាស៊ីតធរណីមាត្រ

ដែលមានផលធៀបរួមរៀងគ្នា $q_1 = 3$ និង $q_2 = 2$ ហើយមានតួទី១

រៀងគ្នា $a_1 = u_2 - 2u_1 = 3$ និង $b_1 = u_2 - 3u_1 = -2$

គេបាន $\begin{cases} a_n = a_1.q_1^{\ n-1} = 3.3^{n-1} = 3^n \\ b_n = b_1.q_2^{\ n-1} = -2.2^{n-1} = -2^n \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} u_{n+1} - 2u_n = 3^n & (1) \\ u_{n+1} - 3u_n = -2^n & (2) \end{cases}$

ធ្វើផលសង (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន $u_n = 3^n + 2^n$

ដូចនេះ $u_n = 2^n + 3^n$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ :

$u_1 = 6$; $u_2 = 27$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$

ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ទំនាក់ទំនង $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ អាចសរសេរជា :

$u_{n+2} - 3u_{n+1} = 3(u_{n+1} - 3u_n)$ (i)

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_{n+1} - 3u_n$ គេបាន $v_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$

តាមទំនាក់ទំនង(i)គេបាន $v_{n+1} = 3v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដែលមានផលធៀបរួម $q = 3$ និងតួ $v_1 = u_2 - 3u_1 = 27 - 18 = 9$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$

គេទាញ $u_{n+1} - 3u_n = 3^{n+1}$ (ii)

តាងស្វ៊ីត $w_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ នោះ $w_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{3^{n+1}}$

គេបាន $w_{n+1} - w_n = \dfrac{u_{n+1}}{3^{n+1}} - \dfrac{u_n}{3^n}$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{u_{n+1} - 3u_n}{3^{n+1}} \quad (iii)$$

យក (ii) ជួសក្នុង (iii) គេបាន $w_{n+1}-w_n=1$ ថេរ

នាំឱ្យ (w_n) ជាស៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=1$ និង $w_1=\frac{u_1}{3}=2$

តាមរូបមន្ត $w_n=w_1+(n-1)d=2+n-1=n+1$

ដោយ $w_n=\frac{u_n}{3^n}$ នោះគេទាញ $u_n=3^n w_n=3^n(n+1)$

ដូចនេះ $u_n=3^n(n+1)$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ :

$u_1 = 1$; $u_2 = 2$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$

ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; ...$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n :

គេមាន $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$ សមមូល $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 4u_n = 0$

មានសមីការសំគាល់ $r^2 - 2r + 4 = 0$

$\Delta' = 1 - 4 = - = 3i^2$

មានឬស $r_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $r_2 = 1 - i\sqrt{3}$

តាងស្វ៊ីត $Z_n = u_{n+1} - (1 - i\sqrt{3})u_n \quad \forall n \geq 1$

គេបាន $Z_{n+1} = u_{n+2} - (1 - i\sqrt{3})u_{n+1}$

$$Z_{n+1} = 2u_{n+1} - 4u_n - (1 - i\sqrt{3})u_{n+1}$$
$$Z_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})u_{n+1} - 4u_n$$
$$Z_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})[\ u_{n+1} - (1 - i\sqrt{3})u_n]$$

គេទាញ $\dfrac{Z_{n+1}}{Z_n} = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{Z_{k+1}}{Z_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$

$$\frac{Z_2}{Z_1}\cdot\frac{Z_3}{Z_2}....\frac{Z_n}{Z_{n-1}}=2^{n-1}.e^{i\frac{(n-1)\pi}{3}}$$

$$\frac{Z_n}{Z_1}=2^{n-1}.e^{i\frac{(n-1)\pi}{3}}$$

ដោយ $Z_1=u_2-(1-i\sqrt{3})u_1=1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

គេទាញ $Z_n=2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

ដោយ $Z_n=u_{n+1}-(1-i\sqrt{3})u_n \quad \forall n\geq 1$

ឬ $\quad Z_n=(u_{n+1}-u_n)+i\sqrt{3}\,u_n$

គេទាញ $\sqrt{3}u_n=2^n\sin\frac{n\pi}{3}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 3$ និង $u_{n+1} = u_n^3 - 3u_n^2 + 3u_n$

តាង $v_n = u_n - 1$ ។

បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^3$ រួចគណនា v_n និងu_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^3$

មាន $v_n = u_n - 1$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$
$$= u_n^3 - 3u_n^2 + 3u_n - 1$$
$$= (u_n - 1)^3$$

ដូចនេះ $\boxed{v_{n+1} = v_n^3}$

គណនា v_nនិង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $v_{n+1} = v_n^3$

តាង $w_n = \ln v_n$ នាំឲ្យ $w_{n+1} = \ln v_{n+1} = 3\ln v_n = 3w_n$

គេបាន (w_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$ ។

និងតួដំបូង $w_0 = \ln v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln 2$

តាមរូបមន្ត $w_n = w_0 \times q^n = 3^n \ln 2 = \ln(2^{3^n})$ ដោយ $w_n = \ln v_n$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = 2^{3^n} \text{ និង } u_n = 1 + 2^{3^n} \text{ ។}}$

លំហាត់ទី១០

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2(2n-1)}{3n(n+1)} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = u_n + \frac{2}{n}$ ។

បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ?

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $v_n = u_n + \frac{2}{n}$

$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{n+1}$ តែ $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2(2n-1)}{3n(n+1)}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2(2n-1)}{3n(n+1)} + \frac{2}{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{-4n+2+6n}{3n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2(n+1)}{3n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + \frac{2}{n}) = \frac{1}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{3}$ $v_1 = u_1 + 2 = 4$

ខ. គណនា v_n និង u_n

យើងបាន $v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{4}{3^{n-1}}$ ហើយ $u_n = v_n - \frac{2}{n} = \frac{4}{3^{n-1}} - \frac{2}{n}$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = \frac{4}{3^{n-1}} \ ; \ u_n = \frac{4}{3^{n-1}} - \frac{2}{n}}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 4 \;\; ; u_1 = 7 \;\; ; \;\; u_2 = 5$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន

$u_{n+3} = 10u_{n+2} - 31u_{n+1} + 30u_n$

ដែល $n = 0 \; ; 1 \; ; 2 \; ; 3 \; ; \ldots$ ។

ក.ចូរកំនត់គ្រប់គូចំនួនពិត $(r \;\; ; \;\; \alpha \;\; ; \;\; \beta)$ ដើម្បីឱ្យចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$

គេបាន $u_{n+3} + \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} = r\left(u_{n+2} + \alpha\, u_{n+1} + \beta\, u_n\right)$

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំនត់គ្រប់គូចំនួនពិត $(r \;\; ; \;\; \alpha \;\; ; \;\; \beta)$:

គេមាន $u_{n+3} + \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} = r\left(u_{n+2} + \alpha\, u_{n+1} + \beta\, u_n\right) \; (*)$

តាមទំនាក់ទំនង $(*)$ គេអាចសរសេរ :

$u_{n+3} = (r - \alpha)u_{n+2} + (\alpha\, r - \beta)\, u_{n+1} + \beta\, r \;\; (i)$

តាមបំរាប់ $u_{n+3} = 10u_{n+2} - 31u_{n+1} + 30u_n \; (ii)$

ដោយប្រៀបធៀប (i) និង (ii) គេបាន :

$$\begin{cases} r-\alpha=10 \\ \alpha\, r-\beta=-31 \\ \beta r\ \ =30 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} \alpha=r-10 & (1) \\ \alpha r-\beta=-31 & (2) \\ \beta=\dfrac{30}{r} & (3) \end{cases}$$

យកសមីការ $(1)\&(3)$ ជំនួសក្នុង (2) គេបាន :

$$r(r-10)-\frac{30}{r}=-31$$

$$r^3-10r^2+31r-30=0$$

$$(r-2)(r-3)(r-5)=0$$

គេទាញឫស $r=\{\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ \}$ ។

យក $r=\{\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ \}$ ជំនួសក្នុងសមីការ $(1)\&(3)$ គេបាន :

$\alpha=\{\ -8\ ;\ -7\ ;\ -5\ \}$ និង $\beta=\{\ 15\ ;\ 10\ ;\ 6\ \}$ ។

ដូចនេះ $(r\,;\alpha\,;\beta\ )=\{\ (2;-8;15);(3;-7;10);(5;-5;6)\}$

ខ.គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

យក $(r\,;\alpha\,;\beta\ )=\{\ (2;-8;15);(3;-7;10);(5;-5;6)\}$

ជួសក្នុទំនាក់ទំនង $(*)$ គេបាន :

$$\begin{cases} u_{n+3}-8u_{n+2}+15u_{n+1}=2(u_{n+2}-8u_{n+1}+15u_n) & (a) \\ u_{n+3}-7u_{n+2}+10u_{n+1}=3(u_{n+2}-7u_{n+1}+10u_n) & (b) \\ u_{n+3}-5u_{n+2}+6u_{n+1}=5(u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n) & (c) \end{cases}$$

តាងស៊ីតជំនួយ $\begin{cases} x_n = u_{n+2} - 8u_{n+1} + 15u_n \\ y_n = u_{n+2} - 7u_{n+1} + 10u_n \\ z_n = u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

យោងតាមសមីការ (a) ; (b) & (c) គេបាន :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = 3y_n \\ z_{n+1} = 5z_n \end{cases}$$

នាំឱ្យ (x_n) ; (y_n) ; (z_n) សុទ្ធតែជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន

ផលធៀបរួមរៀងគ្នា $q_x = 2$; $q_y = 3$; $q_z = 5$

និងតួ $\begin{cases} x_0 = u_2 - 8u_1 + 15u_0 = 5 - 56 + 60 = 9 \\ y_0 = u_2 - 7u_1 + 10u_0 = 5 - 49 + 40 = -4 \\ z_0 = u_2 - 5u_1 + 6u_0 = 5 - 35 + 24 = -6 \end{cases}$

តាមរូបមន្តគេបាន $\begin{cases} x_n = x_0 \times {q_x}^n = 9 \times 2^n \\ y_n = y_0 \times {q_y}^n = -4 \times 3^n \\ z_n = z_0 \times {q_z}^x = -6 \times 5^n \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} u_{n+2} - 8u_{n+1} + 15u_n = 9 \times 2^n \\ u_{n+2} - 7u_{n+1} + 10u_n = -4 \times 3^n \\ z_n = u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 6 \times 5^n \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $u_n = 3.2^n + 2.3^n - 5^n$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = u_1 = 1$; $u_2 = 2$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន

$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 12u_{n+1} + 8u_n$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ទំនាក់ទំនង $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 12u_{n+1} + 8u_n$ អាចសរសេរ ៖

$$u_{n+3} - 4u_{n+2} + 4u_{n+1} = 2(u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n) \quad (i)$$

តាង $v_n = u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n$

គេបាន $v_{n+1} = u_{n+3} - 4u_{n+2} + 4u_{n+1}$

តាម (i) គេទាញ $v_{n+1} = 2v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

ផលធៀបរួម $q = 2$ និង តួ $v_0 = u_2 - 4u_1 + 4u_0 = 2$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n = 2^{n+1}$

គេទាញ $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 2^{n+1}$

ឬ $(u_{n+2} - 2u_{n+1}) - 2(u_{n+1} - 2u_n) = 2^{n+1}$

ឬ $\dfrac{u_{n+2}-2u_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{u_{n+1}-2u_n}{2^n}=1 \quad (ii)$

តាង $w_n=\dfrac{u_{n+1}-2u_n}{2^n}$ នោះ $w_{n+1}=\dfrac{u_{n+2}-2u_{n+1}}{2^{n+1}}$

តាម (ii) គេទាញ $w_{n+1}-w_n=1$ ថេរ នោះ (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

មានផលសងរួម $d=1$ និងតួ $w_0=\dfrac{u_1-2u_0}{2^0}=1-2=-1$

គេបាន $w_n=w_o+nd=n-1$

គេទាញ $\dfrac{u_{n+1}-2u_n}{2^n}=n-1$

ឬ $\dfrac{u_{n+1}}{2^n}-\dfrac{u_n}{2^{n-1}}=n-1$

គេបាន $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{u_{k+1}}{2^k}-\dfrac{u_k}{2^{k-1}}\right)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k-1)$

$$\frac{u_n}{2^{n-1}}-2u_0=-1+\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$\frac{u_n}{2^{n-1}}-2=\frac{n^2-3n}{2}$$

ដូចនេះ $u_n=(n^2-3n+4).2^{n-2}$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេមានស្វ៊ីត (u_n)កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{4-u_n} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ ។

បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ នាំឲ្យ $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 2}$ ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{4-u_n}$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{\dfrac{2+u_n}{4-u_n} - 1}{\dfrac{2+u_n}{4-u_n} - 2} = \dfrac{2u_n - 2}{3u_n - 6} = \dfrac{2}{3} . \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2} = \dfrac{2}{3} v_n$

ដូចនេះ (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \dfrac{2}{3}$ ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 - 2} = \dfrac{-1-1}{-1-2} = \dfrac{2}{3}$, $q = \dfrac{2}{3}$

ដូចនេះ $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ។ ម្យ៉ាងទៀត $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$

នាំឲ្យ $u_n = \dfrac{2v_n - 1}{v_n - 1} = \dfrac{2(\frac{2}{3})^n - 1}{(\frac{2}{3})^n - 1} = \dfrac{2^{n+1} - 3^n}{2^n - 3^n}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ :

$u_1 = 4$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 8}{u_n + 5}$

ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; ...$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $r = \dfrac{3r+8}{r+5}$

ដោយតាង r_1 និង r_2 ជាឫស ហើយ $r_1 > r_2$ ។

ខ. គេពិនិត្យស្វ៊ីត $v_n = \dfrac{u_n - r_1}{u_n - r_2}$ ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; .....$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោះស្រាយសមីការ $r = \dfrac{3r+8}{r+5}$

បើ $r \neq -5$ នោះសមីការអាចសរសេរ $r^2 + 2r - 8 = 0$

ឬ $(r+1)^2 - 9 = (r-2)(r+4) = 0$

គេទាញ $r_1 = 2$; $r_2 = -4$ ។

ខ. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

គេមាន $v_n = \dfrac{u_n - r_1}{u_n - r_2} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 4}$ ហើយ $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 4}$

ដោយ $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+8}{u_n+5}$ គេបាន ៖

$$v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{3u_n+8}{u_n+5}-2}{\dfrac{3u_n+8}{u_n+5}+4}=\dfrac{u_n-2}{7u_n+28}=\dfrac{1}{7}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=\dfrac{1}{7}$ ។

គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $v_n=v_1\times q^{n-1}$ ដោយ $v_1=\dfrac{u_1-2}{u_1+4}=\dfrac{4-2}{4+4}=\dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ $v_n=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{7^{n-1}}$ ។

គ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+4}$ នាំឱ្យ $u_n=\dfrac{4v_n+2}{1-v_n}$ ដោយ $v_n=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{7^{n-1}}$

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{4\left(1+2.7^{n-1}\right)}{4.7^{n-1}-1}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 1}$ កំនត់ដោយ :

$u_1 = 3$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 8}{2u_n - 3}$

ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; ...$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $r = \dfrac{5r-8}{2r-3}$ (តាង r_0 ជាឬស)

ខ. គេពិនិត្យស្វ៊ីត $v_n = \dfrac{1}{u_n - r_0}$ ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; .....$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តរួចគណនា v_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

គ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោះស្រាយសមីការ

បើ $r \neq \dfrac{3}{2}$ នោះសមីការ $r = \dfrac{5r-8}{2r-3}$ អាចសរសេរ :

$2r^2 - 8r + 8 = 0$ ឬ $2(r-2)^2 = 0$

ដូចនេះ $r_0 = 2$ ជាឬសឌុប ។

ខ.បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត :

គេមាន $v_n = \dfrac{1}{u_n - r_0} = \dfrac{1}{u_n - 2}$ ហើយ $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 2}$

ដោយ $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-8}{2u_n-3}$

គេបាន $v_{n+1}=\dfrac{1}{\dfrac{5u_n-8}{2u_n-3}-2}=\dfrac{2u_n-3}{u_n-2}=2+\dfrac{1}{u_n-2}=2+v_n$

ដោយ $v_{n+1}=v_n+2$ ឬ $v_{n+1}-v_n=2$ ថេរ

ដូចនេះ (v_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត មានផលសងរួម $d=2$ ។

គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

តាមរូបមន្ត $v_n=v_1+(n-1)d$ ដោយ $v_1=\dfrac{1}{u_1-2}=1$

ដូចនេះ $v_n=1+2(n-1)=2n-1$ ។

គ.គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ដោយ $v_n=\dfrac{1}{u_n-2}$ គេទាញ $u_n=\dfrac{1+2v_n}{v_n}=\dfrac{1+2(2n-1)}{2n-1}$

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{4n-1}{2n-1}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ 2u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+1).2^n} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $2u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+1).2^n}$

$$2u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1).2^n}$$

$$2^{n+1}u_{n+1} - 2^n u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$2^{n+1}u_{n+1} - 2^n u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{k=(n-1)}\left(2^{k+1}u_{k+1} - 2^k u_k \right) = \sum_{k=1}^{k=(n-1)}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$2^n u_n - 2u_1 = 1 - \frac{1}{n}$$

គេទាញ $u_n = \dfrac{1}{2^n}(1 - \dfrac{1}{n} + 2u_1) = \dfrac{1}{2^n}(5 - \dfrac{1}{n})$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \dfrac{5n-1}{n.2^n}}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 2$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = u_n{}^2 + 4u_n + 2$

ដែល $n = 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots$ ។

ក. គេតាង $v_n = \ln(u_n + 2)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៏នៃ n

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

គ.គណនា $P_n = \prod_{k=0}^{n}(u_k + 3)$ ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ និង គណនា $_n$:

គេមាន $v_n = \ln(u_n + 2)$ នោះ $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} + 2)$

ដោយ $u_{n+1} = u_n{}^2 + 4u_n + 2$

គេបាន $v_{n+1} = \ln\left(u_n{}^2 + 4u_n + 4\right) = \ln(u_n + 2)^2$

$$v_{n+1} = 2\ln(u_n + 2) = 2v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 2$

និងតួដំបូង $v_0 = \ln 4$ ។ តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n = 2^n \ln 4$ ។

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $v_n = 2^n \ln 4 = \ln\left(4^{2^n}\right)$ និង $v_n = \ln(u_n + 2)$

គេទាញ $u_n + 2 = 4^{2^n}$ នាំឱ្យ $u_n = 4^{2^n} - 2$

ដូចនេះ $u_n = 4^{2^n} - 2$ ។

គ.គណនា $P_n = \prod_{k=0}^{n}(u_k + 3)$ ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $u_k + 3 = 4^{2^k} - 2 + 3 = 4^{2^k} + 1$

តាមសមភាព $a + 1 = \dfrac{a^2 - 1}{a - 1}$

ដោយជំនួស $a = 4^{2^k}$ គេបាន $u_k + 3 = \dfrac{4^{2^{k+1}} - 1}{4^{2^k} - 1}$

គេទាញ $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\dfrac{4^{2^{k+1}} - 1}{4^{2^k} - 1}\right)$

$$= \frac{4^2 - 1}{4 - 1} \times \frac{4^4 - 1}{4^2 - 1} \times \frac{4^8 - 1}{4^4 - 1} \times \dots \times \frac{4^{2^{n+1}} - 1}{4^{2^n} - 1}$$

$$= \frac{4^{2^{n+1}} - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}\left(4^{2^{n+1}} - 1\right)$$

ដូចនេះ $P_n = \dfrac{1}{3}\left(4^{2^{n+1}} - 1\right)$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេមានស៊ីត (u_n)និង (v_n)កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 3 \ ; \ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$

ក.តាង $\forall n \in IN : w_n = u_n - v_n$ ។ បង្ហាញថា(w_n)ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. បង្ហាញថា $C_n = u_n + v_n$ ជាស៊ីតថេរដែលត្រូវកំនត់។

គ. ទាញរក u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (w_n)ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $w_n = u_n - v_n$

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$$

$$w_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}v_n$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - v_n) = \frac{1}{2}w_n$$

ដូចនេះ (w_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$ ។

និងតួ $w_0 = u_0 - v_0 = 2$។

តាមរូបមន្ត $w_n = w_0 \times q^n = 2 \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $C_n = u_n + v_n$ ជាស្វ៊ីតថេរ ៖

យើងបាន $C_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$

$$C_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n = u_n + v_n = C_n$$

ដូចនេះ (C_n) ជាស្វ៊ីតថេរហើយ $C_n = C_0 = u_0 + v_0 = 4$ ។

គ. ទាញរក u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមសម្រាយខាងលើគេទាញបាន $\begin{cases} u_n + v_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} & (1) \\ u_n - v_n = 4 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការពីរនេះគេបាន $2u_n = 4 + \frac{1}{2^{n-1}}$ នាំឲ្យ $u_n = 2 + \frac{1}{2^n}$

ដកសមីការពីរនេះគេបាន $2v_n = -4 + \frac{1}{2^{n-1}}$ នាំឲ្យ $v_n = -2 + \frac{1}{2^n}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 2 + \frac{1}{2^n} \text{ និង } v_n = -2 + \frac{1}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 2$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = 4u_n^{\ 3} - 6u_n^{\ 2} + 3u_n$

ដែល $n = 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots$ ។

ក. គេតាង $v_n = \ln(2u_n - 1)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃn

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

គេមាន $v_n = \ln(2u_n - 1)$ នោះ $v_{n+1} = \ln(2u_{n+1} - 1)$

ដោយ $u_{n+1} = 4u_n^{\ 3} - 6u_n^{\ 2} + 3u_n$

គេបាន $v_{n+1} = \ln\left(8u_n^{\ 3} - 12u_n^{\ 2} + 6u_n - 1\right)$

$$v_{n+1} = \ln(2u_n - 1)^3$$

$$v_{n+1} = 3\ln(2u_n - 1)$$

$$v_{n+1} = 3v_n$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម

ស្មើ $q = 3$ និង តួ $v_0 = \ln(2u_0 - 1) = \ln 3$ ។

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដូចនេះ $v_n = 3^n \ln 3$ ។

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $v_n = \ln(2u_n - 1)$

ដោយ $v_n = 3^n \ln 3 = \ln\left(3^{3^n}\right)$

គេទាញ $2u_n - 1 = 3^{3^n}$ នាំឱ្យ $u_n = \dfrac{1+3^{3^n}}{2}$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{1+3^{3^n}}{2}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យស្ទីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 2$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2}+3}{2u_n+2}$

ដែល $n = 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $u_n > 1$ ជានិច្ចគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. គេតាង $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n-1}{u_n+3}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $u_n > 1$ ជានិច្ចគ្រប់ $n \geq 0$

គេមាន $u_0 = 2 > 1$ ពិត

$$u_1 = \frac{u_0^{\ 2}+3}{2u_0+2} = \frac{7}{6} > 1 \text{ ពិត}$$

ឧបមាថា វាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k > 1$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា វាពិតចំពោះ $n = k+1$ គឺ $u_{k+1} > 1$

គេមាន $u_{k+1} - 1 = \dfrac{u_k^{\ 2}+3}{2u_k+2} - 1 = \dfrac{(u_k-1)^2}{2u_k+2}$

ដោយ $u_k > 1$ នោះ $u_{k+1} - 1 > 0$ នាំឱ្យ $u_{K+1} > 1$

ដូចនេះ $u_n > 1$ ជានិច្ចគ្រប់ $n \geq 0$

ខ.បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃn

មាន $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

គេបាន $v_{n+1} = \ln\left(\dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3}\right)$ ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2} + 3}{2u_n + 2}$

នោះ $v_{n+1} = \ln\left(\dfrac{\dfrac{u_n^{\ 2} + 3}{2u_n + 2} - 1}{\dfrac{u_n^{\ 2} + 3}{2u_n + 2} + 3}\right) = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}\right)^2$

$$v_{n+1} = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 3}\right) = 2v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 2$ ។

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $v_0 = \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

ដូចនេះ $v_n = 2^n \ln(0,2)$ ។

គ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}\right)$

ដោយ $v_n = 2^n \ln\left(\dfrac{1}{5}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{5^{2^n}}\right)$

គេទាញ $\dfrac{u_n-1}{u_n+3}=\dfrac{1}{5^{2^n}}$

ឬ $5^{2^n}u_n-5^{2^n}=u_n+3$

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{5^{2^n}+3}{5^{2^n}-1}$ ។

គណនាលីមីត :

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5^{2^n}+3}{5^{2^n}-1}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{3}{5^{2^n}}}{1-\dfrac{1}{5^{2^n}}}=1$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{5^{2^n}}=0$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ ដោយ

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n^{\ 3} - 6U_n^{\ 2} + 2}{2U_n^{\ 3} - 6U_n + 5} \end{cases} , \forall n \in IN^*$$

ក_គេតាង $V_n = \dfrac{U_n - 2}{2U_n - 1}, \forall n \in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$

ខ_គេយក $W_n = \ln V_n \ ,\forall n \in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ។

ជាស៊ីតធរណីមាត្ររួចគណនា W_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ចូរទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ បង្ហាញថា ៖ $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$

យើងមាន $V_n = \dfrac{U_n - 2}{2U_n - 1}, \forall n \in IN^*$

យើងបាន $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 2}{2U_{n+1} - 1}$ ដោយ $U_{n+1} = \dfrac{5U_n^{\ 3} - 6U_n^{\ 2} + 2}{2U_n^{\ 3} - 6U_n + 5}$

$$V_{n+1}=\frac{\dfrac{5U_n^{\ 3}-6U_n^{\ 2}+2}{2U_n^{\ 3}-6U_n+5}-2}{2\,(\dfrac{5U_n^{\ 3}-6U_n+2}{2U_n^{\ 3}-6U_n+5})-1}$$

$$V_{n+1}=\frac{5U_n^{\ 3}-6U_n^{\ 2}+2-4U_n^{\ 3}+12U_n-10}{10U_n^{\ 3}-12U_n^{\ 2}+4-2U_n^{\ 3}+6U_n-5}$$

$$V_{n+1}=\frac{U_n^{\ 3}-6U_n^{\ 2}+12U_n-8}{8U_n^{\ 3}-12U_n^{\ 2}+6U_n-1}=\frac{(U_n-2)^3}{(2U_n-1)^3}=\left(\frac{U_n-2}{2U_n-1}\right)^3$$

ដូចនេះ $V_{n+1}=V_n^{\ 3}$ ។

ខ-បង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $W_n=\ln V_n$ នាំឲ្យ $W_{n+1}=\ln V_{n+1}$

ដោយ $V_{n+1}=V_n^{\ 3}$

យើងបាន $W_{n+1}=\ln V_n^{\ 3}=3\ln V_n=3\,W_n$

ដូចនេះ $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលសុង $q=3$ ។

-គណនា W_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $W_n=W_1\times q^{n-1}$

ដោយ $W_1=\ln V_1=\ln\left(\frac{U_1-2}{2U_1-1}\right)=\ln(\frac{3-2}{6-1})=\ln(\frac{1}{5})$ និង $q=3$

យើងបាន $W_n=\ln(\frac{1}{5})\times(3)^{n-1}=3^{n-1}\ln(\frac{1}{5})$ ។

គ-ទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $W_n = \ln V_n$ ដោយ $W_n = 3^{n-1}\ln(\frac{1}{5})$

យើងបាន $\ln V_n = 3^{n-1}\ln(\frac{1}{5})$ នាំឲ្យ $V_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{3^{n-1}}$

ម្យ៉ាងទៀត $V_n = \frac{U_n - 2}{2U_n - 1}$

នាំឲ្យ $U_n = \frac{2 - V_n}{1 - 2V_n} = \frac{2 - (\frac{1}{5})^{3^{n-1}}}{1 - 2(\frac{1}{5})^{3^{n-1}}} = \frac{2.5^{3^{n-1}} - 1}{5^{3^{n-1}} - 2}$

ដូចនេះ $V_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{3^{n-1}}$ និង $U_n = \frac{2.5^{3^{n-1}} - 1}{5^{3^{n-1}} - 2}$ ។

យើងមាន $U_n = \frac{2.5^{3^{n-1}} - 1}{5^{3^{n-1}} - 2}$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 2$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 3} + 6u_n + 2}{3(u_n^{\ 2} + u_n + 1)}$

ដែល $n = 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ ...$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $u_n > 1$ ជានិច្ចគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. គេតាង $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃn

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $u_n > 1$

គេមាន $u_0 = 2 > 1$ ពិត

$$u_1 = \frac{u_0^{\ 3} + 6u_0 + 2}{3(u_0^{\ 2} + u_0 + 1)} = \frac{22}{21} > 1 \text{ ពិត}$$

ឧបមាថា វាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k > 1$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា វាពិតចំពោះ $n = k + 1$ គឺ $u_{k+1} > 1$

គេមាន $u_{k+1} - 1 = \dfrac{u_k^{\ 3} + 6u_k + 2}{3(u_k^{\ 2} + u_k + 1)} - 1 = \dfrac{(u_k - 1)^3}{3(u_k^{\ 2} + u_k + 1)} > 0$

នាំឱ្យ $u_{k+1} > 1$ ពិត (ព្រោះ $u_k > 1$)

ដូចនេះ $u_n > 1$ ជានិច្ចគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ.បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃn

មាន $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$

គេបាន $v_{n+1} = \ln\left(\dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2}\right)$ ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 6u_n + 2}{3(u_n^2 + u_n + 1)}$

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{\dfrac{u_n^3 + 6u_n + 2}{3(u_n^2 + u_n + 1)} - 1}{\dfrac{u_n^3 + 6u_n + 2}{3(u_n^2 + u_n + 1)} + 2}\right) = \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 2}\right)^3$$

$$v_{n+1} = 3\ \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 2}\right) = 3v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 3$ ។

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $v_0 = \ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$

ដូចនេះ $v_n = 3^n \ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ ។

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

គេមាន $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}\right)$

ដោយ $v_n = 3^n \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4^{3^n}}\right)$

គេបាន $\frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{1}{4^{3^n}}$

នាំឱ្យ $4^{3^n} u_n - 4^{3^n} = u_n + 2$

ដូចនេះ $u_n = \frac{4^{3^n} + 2}{4^{3^n} - 1}$ ហើយ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{5} \\ U_{n+1} = U_n^{\ 2} - 2 \ , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក. ចូរស្រាយថា $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. គេពិនិត្យស្វ៊ីត $(V_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង $V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង V_{n+1} និង V_n ។

គ. ចូរគណនា V_n រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

យើងមាន $U_0 = \sqrt{5} > 2$ ពិត

$U_1 = U_0^{\ 2} - 2 = 5 - 2 = 3 > 2$ ពិត

យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k > 2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k + 1$ គឺ $U_{k+1} > 2$ ពិត ។

យើងមាន $U_k > 2$ នាំឱ្យ $U_k^{\ 2} > 4$ ឬ $U_k^{\ 2} - 2 > 2$

ដោយ $U_{k+1} = U_k^{\ 2} - 2$ នោះគេទាញបាន $U_{k+1} > 2$ ពិត ។

ដូចនេះ $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង V_{n+1} និង V_n

យើងមាន $V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} + \sqrt{U_{n+1}^2 - 4}$

តែ$U_{n+1}=U_n^{\ 2}-2$ គេបាន $V_{n+1}=U_n^{\ 2}-2+\sqrt{(U_n^{\ 2}-2)^2-4}$

$$V_{n+1}=U_n^{\ 2}-2+\sqrt{U_n^{\ 4}-4U_n^{\ 2}+4-4}=U_n^{\ 2}-2+\sqrt{U_n^{\ 2}(U_n^{\ 2}-4)}$$

$$=U_n^2-2+U_n\sqrt{U_n^{\ 2}-4}=\frac{2U_n^{\ 2}-4+2U_n\sqrt{U_n^{\ 2}-4}}{2}=\frac{(U_n+\sqrt{U_n^{\ 2}-4})^2}{2}$$

ដូចនេះគេបាន $\boxed{V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n^{\ 2}}$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

គ. គណនា v_n រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n^{\ 2}$ នាំឱ្យ $\log_{\frac{1}{2}}V_{n+1}=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}V_n^{\ 2})$

$\log_{\frac{1}{2}}V_{n+1}=1+2\log_{\frac{1}{2}}V_n$ តាង $W_n=\log_{\frac{1}{2}}V_n$ នាំឱ្យ $W_{n+1}=\log_{\frac{1}{2}}V_{n+1}$

គេបាន $W_{n+1}=1+2W_n$ ឬ $(1+W_{n+1})=2(1+W_n)$

នាំឱ្យ $(1+W_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ និងតួទីមួយ $1+W_0$

តែ $V_0=U_0+\sqrt{U_0^{\ 2}-4}=\sqrt{5}+\sqrt{5-4}=\sqrt{5}+1$

ព្រោះ $V_n=U_n+\sqrt{U_n^{\ 2}-4}$

គេបាន $1+W_0=1+\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{5}+1)=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ ។

តាមរូបមន្ត $1+W_n=(1+W_0).q^n=2^n\log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{2^n}$

ដោយ $W_n=\log_{\frac{1}{2}}V_n$ នោះ $1+W_n=1+\log_{\frac{1}{2}}V_n=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{V_n}{2})$

គេទាញ $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{V_n}{2})=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{2^n}$

នាំឱ្យ $V_n=2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\,2} - 4}$

នាំឱ្យ $(V_n - U_n)^2 = U_n^{\,2} - 4$

ឬ $V_n^{\,2} - 2V_nU_n + U_n^{\,2} = U_n^{\,2} - 4$

គេទាញ $U_n = \dfrac{V_n^{\,2} + 4}{2V_n} = \dfrac{1}{2}V_n + \dfrac{2}{V_n}$

នាំឱ្យ $U_n = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}} = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{U_n = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ ដោយ

$U_{n+1} = \dfrac{7U_n^3 - 9U_n^2 + 3U_n}{6U_n^3 - 6U_n^2 + 1}$ និង $U_1 = 2$ ។

ក_ គេតាង $V_n = \dfrac{U_n - 1}{2U_n - 1}, \forall n \in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^3$

ខ_ គេយក $W_n = \ln V_n \ ,\forall n \in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា W_n

ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ ចូរទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ បង្ហាញថា ៖ $V_{n+1} = V_n^3$

យើងមាន $V_n = \dfrac{U_n - 1}{2U_n - 1}, \forall n \in IN^*$

យើងបាន $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 1}{2U_{n+1} - 1}$

ដោយ $U_{n+1} = \dfrac{7U_n^3 - 9U_n^2 + 3U_n}{6U_n^3 - 6U_n^2 + 1}$

$$V_{n+1}=\frac{\frac{7U_n^3-9U_n^2+3U_n}{6U_n^3-6U_n^2+1}-1}{2\left(\frac{7U_n^3-9U_n^2+3U_n}{6U_n^3-6U_n^2+1}\right)-1}$$

$$V_{n+1}=\frac{7U_n^3-9U_n^2+3U_n-6U_n^3+6U_n^2-1}{14U_n^3-18U_n^2+6U_n-6U_n^3+6U_n^2-1}$$

$$V_{n+1}=\frac{U_n^3-3U_n^2+3U_n-1}{8U_n^3-12U_n^2+6U_n-1}=\frac{(U_n-1)^3}{(2U_n-1)^3}=\left(\frac{U_n-1}{2U_n-1}\right)^3$$

ដូចនេះ $V_{n+1}=V_n^3$ ។

ខ-បង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $W_n=\ln V_n$ នាំឱ្យ $W_{n+1}=\ln V_{n+1}$ ដោយ $V_{n+1}=V_n^3$

យើងបាន $W_{n+1}=\ln V_n^3=3\ln V_n=3W_n$

ដូចនេះ $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q=3$ ។

-គណនា W_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $W_n=W_1\times q^{n-1}$

ដោយ $W_1=\ln V_1=\ln\left(\frac{U_1-1}{2U_1-1}\right)=\ln(\frac{2-1}{4-1})=\ln(\frac{1}{3})$

និង $q=3$

យើងបាន $W_n=\ln(\frac{1}{3})\times(3)^n=3^n\ln(\frac{1}{3})$ ។

ដូចនេះ $W_n=3^n\ln(\frac{1}{3})$ ។

គ_ទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $W_n = \ln V_n$ ដោយ $W_n = 3^n \ln(\frac{1}{3})$

យើងបាន $\ln V_n = 3^n \ln(\frac{1}{3})$ នាំឱ្យ $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n}$

ម្យ៉ាងទៀត $V_n = \dfrac{U_n - 1}{2U_n - 1}$

នាំឱ្យ $U_n = \dfrac{1 - V_n}{1 - 2V_n} = \dfrac{1 - (\frac{1}{3})^{3^n}}{1 - 2(\frac{1}{3})^{3^n}} = \dfrac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}$

ដូចនេះ $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n}$ និង $U_n = \dfrac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}$ ។

_គណនាលីមីត ៖ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

យើងមាន $U_n = \dfrac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{3^{3^n}}}{1 - \frac{2}{3^{3^n}}} = 1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \quad ; \quad v_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{13u_n - 3v_n}{5} \\ v_{n+1} = \dfrac{12v_n - 2u_n}{5} \end{cases}$$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ ។

ក. គេតាង $\mathrm{x_n = u_n - v_n}$ និង $y_n = 2u_n + 3v_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$

បង្ហាញថា (x_n) និង (y_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

គណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. ចូរគណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា (x_n) និង (y_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $x_n = u_n - v_n$ នាំឱ្យ $x_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{13u_n - 3v_n}{5}$ និង $v_{n+1} = \dfrac{12v_n - 2u_n}{5}$

គេបាន $x_{n+1} = \dfrac{13u_n - 3v_n}{5} - \dfrac{12v_n - 2u_n}{5}$

$$x_{n+1} = 3(u_n - v_n) = 3\,x_n$$

ដូចនេះ (x_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=3$

និងតួ $x_0=u_0-v_0=4+1=5$ ដូចនេះ $x_n=5\times 3^n$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $y_n=2u_n+3v_n$ នាំឱ្យ $y_{n+1}=2u_{n+1}+3v_{n+1}$

$$y_{n+1}=2\left(\frac{13u_n-3v_n}{5}\right)+3\left(\frac{12v_n-2u_n}{5}\right)$$

$$y_{n+1}=\frac{26u_n-6v_n+36v_n-6u_n}{5}$$

$$y_{n+1}=4u_n+6v_n=2y_n$$

ដូចនេះ (y_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=2$

និងតួ $y_0=2u_0+3v_0=4-3=1$ ដូចនេះ $y_n=2^n$ ។

ខ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើគេទាញ $\begin{cases} u_n-v_n=5\times 3^n \\ 2u_n+3v_n=2^n \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបាន :

$$u_n=\frac{5\times 3^{n+1}+2^n}{5} \quad ; \quad v_n=\frac{2^n-10\times 3^n}{5}$$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2-2U_n+5U_n^2}{1+8U_n-2U_n^2} \ , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក. គេតាង $\forall n \in IN : V_n = \dfrac{2U_n - 1}{U_n + 1}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = {V_n}^2$

ខ. គណនា V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក .បង្ហាញថា $V_{n+1} = {V_n}^2$

យើងមាន $\forall n \in IN : V_n = \dfrac{2U_n - 1}{U_n + 1}$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = \dfrac{2U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 1}$

ដោយ $U_{n+1} = \dfrac{2-2U_n+5U_n^2}{1+8U_n-2U_n^2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

គេបាន

$$V_{n+1} = \frac{2\left(\dfrac{2-2U_n+5U_n^2}{1+8U_n-2U_n^2}\right)-1}{\dfrac{2-2U_n+5U_n^2}{1+8U_n-2U_n^2}+1} = \frac{4-4U_n+10U_n^2-1-8U_n+2U_n^2}{2-2U_n+5U_n^2+1+8U_n-2U_n^2}$$

$$V_{n+1} = \frac{12U_n^2-12U_n+3}{3U_n^2+6U_n+3} = \frac{3(4U_n^2-4U_n+1)}{3(U_n^2+2U_n+1)} = \left(\frac{2U_n-1}{U_n+1}\right)^2 = V_n^2$$

ដូចនេះ $V_{n+1} = {V_n}^2$ ។

ខ. គណនា V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដោយគេមាន $V_{n+1} = V_n^{\ 2}$ គេទាញ $\ln V_{n+1} = 2\ln V_n$ នាំឱ្យ $(\ln V_n)$

ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$

និងតួដំបូង $\ln V_0 = \ln(\frac{2U_0 - 1}{U_0 + 1}) = \ln(\frac{1}{2})$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន $\ln V_n = 2^n . \ln(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2})^{2^n}$

នាំឱ្យ $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = (0.5)^{2^n}$

ហើយដោយ $V_n = \frac{2U_n - 1}{U_n + 1}$ នាំឱ្យ $U_n = \frac{1 + V_n}{2 - V_n} = \frac{1 + (0.5)^{2^n}}{2 - (0.5)^{2^n}}$

ដូចនេះ $\boxed{V_n = (0.5)^{2^n} \ , \ U_n = \frac{1 + (0.5)^{2^n}}{2 - (0.5)^{2^n}}}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឱ្យស្ទីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \;\; ; \;\; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{8}{3}u_n + \dfrac{2}{3}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{7}{3}v_n \end{cases}$$

ដែល $n = 0 \; ; 1 \; ; 2 \; ; 3 \; ; \ldots$ ។

ក. ចូរកំនត់គ្រប់គូ $(r\,;\,\theta)$ ដើម្បីឱ្យ $u_{n+1} + \theta v_{n+1} = r\,(u_n + \theta v_n)$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់គ្រប់គូ $(r\,;\,\theta)$:

គេមាន $u_{n+1} + \theta v_{n+1} = r\,(u_n + \theta v_n)$ (*)

ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{8}{3}u_n + \dfrac{2}{3}v_n$ និង $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{7}{3}v_n$

គេបានសមីការ :

$$\frac{8}{3}u_n+\frac{2}{3}v_n+\theta\left(\frac{1}{3}u_n+\frac{7}{3}v_n\right)=r\ (u_n+\theta v_n)$$

$$\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\theta\right)u_n+\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\theta\right)v_n=r\,u_n+r\,\theta\ v_n$$

សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ $n\ge 0$ លុះត្រាតែ :

$$\begin{cases}\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\theta=r & (1)\\ \frac{2}{3}+\frac{7}{3}\theta=r\,\theta & (2)\end{cases}$$

យកសមីការ (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន :

$\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\theta=\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\theta\right)\theta$ ឬ $2+7\theta=8\theta+\theta^2$

ឬ $\theta^2+\theta-2=0$ គេទាញ $\theta_1=\ 1\ \vee\ \theta_2=-2$

ចំពោះ $\theta=1$ នោះ $r=3$

ចំពោះ $\theta=-2$ នោះ $r=2$

ដូចនេះ $(r\ ;\ \theta)=\{\ (3\ ;\ 1)\ ;\ (2\ ;\ -2)\ \}$

ខ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ដោយយក $(r\ ;\ \theta)=\{\ (3\ ;\ 1)\ ;\ (2\ ;\ -2)\ \}$ ជួសក្នុង $(*)$

គេបាន $\begin{cases}u_{n+1}+v_{n+1}=3(u_n+v_n) & (i)\\ u_{n+1}-2v_{n+1}=2(u_n-2v_n) & (ii)\end{cases}$

តាងស្វ៊ីត $\begin{cases}x_n=u_n+v_n\\ y_n=u_n-2v_n\end{cases}$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $\begin{cases} x_{n+1} = 3\ x_n \\ y_{n+1} = 2\ y_n \end{cases}$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានផលធៀបរួមរៀងគ្នា $q_1 = 3$ និង $q_2 = 2$ និងតួដំបូង

$x_0 = u_0 + v_0 = 4$ និង $y_0 = u_0 - 2v_0 = 1$

តាមរូបមន្តគេបាន $x_n = 4\times 3^n$ និង $y_n = 2^n$

គេទាញបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} u_n + v_n = 4\times 3^n \\ u_n - 2v_n = 2^n \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបាន :

$u_n = \dfrac{8\times 3^n + 2^n}{3}$ និង $v_n = \dfrac{4\times 3^n - 2^n}{3}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \;\; ; \;\; v_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^{\ 2} + 2v_n^{\ 2} \\ v_{n+1} = 2u_n v_n + v_n^{\ 2} \end{cases}$$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $u_n > v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន :

$$u_{n+1} + r\,v_{n+1} = (u_n + r\,v_n)^2$$

គ. ចូរគណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $u_n > v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$

យើងមាន $u_0 = 4 > v_0 = 2$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k > v_k$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k + 1$

គឺ $u_{k+1} > v_{k+1}$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} - v_{k+1} = \left(u_k^{\ 2} + 2v_k^{\ 2}\right) - \left(2u_k v_k + v_k^{\ 2}\right)$

$$u_{k+1} - v_{k+1} = (u_k - v_k)^2 > 0 \quad \text{ព្រោះ } u_k > v_k$$

គេទាញ $u_{k+1} > v_{k+1}$ ពិត

ដូចនេះ $u_n > v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត r :

គេមាន $u_{n+1} + r\,v_{n+1} = (u_n + r\,v_n)^2$ (*)

ដោយ $u_{n+1} = u_n^{\,2} + 2v_n^{\,2}$ និង $v_{n+1} = 2u_nv_n + v_n^{\,2}$

គេបាន $(u_n^{\,2} + 2v_n^{\,2}) + r(2u_nv_n + v_n^{\,2}) = (u_n + r\,v_n)^2$

$$u_n^{\,2} + 2r\,u_nv_n + (2+r)v_n^{\,2} = u_n^{\,2} + 2ru_nv_n + r^2v_n^{\,2}$$

គេទាញ $2 + r = r^2$ ឬ $r^2 - r - 2 = 0$

ដូចនេះ $r_1 = -1$ ឬ $r_2 = 2$ ។

គ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

យកតម្លៃ $r = -1$; $r = 2$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន :

$$\begin{cases} u_{n+1} - v_{n+1} = (u_n - v_n)^2 \\ u_{n+1} + 2v_{n+1} = (u_n + 2v_n)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(u_{n+1} - v_{n+1}) = 2\ln(u_n - v_n) & (i) \\ \ln(u_{n+1} + 2v_{n+1}) = 2\ln(u_n + 2v_n) & (ii) \end{cases}$$

តាង $x_n = \ln(u_n - v_n)$ និង $v_n = \ln(u_n + 2v_n)$

តាម (i) & (ii) គេបាន $x_{n+1} = 2x_n$ និង $y_{n+1} = 2y_n$

នាំឱ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុងរៀងគ្នា $q_1 = 2$

និង $q_2 = 2$ និងតួ $x_0 = \ln 2$ និង $y_0 = \ln 8$

គេបាន $x_n = 2^n \ln 2$ និង $y_n = 2^n \ln 8$

ដោយ $x_n = \ln(u_n - v_n)$ និង $v_n = \ln(u_n + 2v_n)$

គេទាញ $\begin{cases} \ln(u_n - v_n) = 2^n \ln 2 \\ \ln(u_n + 2v_n) = 2^n \ln 8 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} u_n - v_n = 2^{2^n} \\ u_n + 2v_n = 8^{2^n} \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបាន :

$$u_n = \frac{2^{2^n+1} + 8^{2^n}}{3} \quad \text{និង} \quad v_n \frac{8^{2^n} - 2^{2^n}}{3}$$

លំហាត់ទី២៩

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\ge 0}$ និង $(v_n)_{n\ge 0}$ កំនត់ដោយ :

$\begin{cases} u_0 = 4 \\ v_0 = 2 \end{cases}$ និង $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^3 - 6u_n v_n^2 - 6v_n^3 \\ v_{n+1} = 3u_n^2 v_n + 9u_n v_n^2 + 7v_n^3 \end{cases}$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ ចូរស្រាយថា $u_n + v_n > 0$ និង $u_n + 2v_n > 0$

ខ. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន :

$$u_{n+1} + r\,v_{n+1} = (u_n + r\,v_n)^3$$

គ. ចូរគណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ ស្រាយថា $u_n + v_n > 0$

គេមាន $u_0 + v_0 = 4 + 2 = 6 > 0$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k + v_k > 0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k + 1$ គឺ $u_{k+1} + v_{k+1} > 0$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} + v_{k+1} = u_n^3 + 3u_n^2 v_n + 3u_n v_n^2 + v_n^3$

$$u_{k+1} + v_{k+1} > (u_k + v_k)^3 > 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $u_n + v_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ ស្រាយថា $u_n + 2v_n > 0$:

គេមាន $u_0 + 2v_0 = 4+4 = 8 > 0$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $u_k + 2v_k > 0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n=k+1$ គឺ $u_{k+1} + 2v_{k+1} > 0$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} + 2v_{k+1} = u_n{}^3 + 6u_n{}^2 v_n + 12u_n v_n{}^2 + 8v_n{}^3$

$$u_{k+1} + 2v_{k+1} > \left(u_k + 2v_k\right)^3 > 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $u_n + 2v_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន :

$$u_{n+1} + r\,v_{n+1} = \left(u_n + r\,v_n\right)^3 \quad (*)$$

ដោយ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n{}^3 - 6u_n v_n{}^2 - 6v_n{}^3 \\ v_{n+1} = 3u_n{}^2 v_n + 9u_n v_n{}^2 + 7v_n{}^3 \end{cases}$ គេបាន :

$$u_{n+1} + r\,v_{n+1} = u_n{}^3 + 3ru_n{}^2 v_n + (9r-6)u_n v_n{}^2 + (7r-6)v_n{}^3 (i)$$

ហើយ $\left(u_n + r\,v_n\right)^3 = u_n{}^3 + 3ru_n{}^2 v_n + 3r^2 u_n v_n{}^2 + r^3 v_n{}^3 \; (ii)$

ដោយប្រៀបធៀបទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន :

$$\begin{cases} 3r^2 = 9r - 6 \\ r^3 = 7r - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 - 3r + 2 = 0 \\ r^3 - 7r + 6 = 0 \end{cases}$$

ដូចនេះ $r_1 = 1$; $r_2 = 2$ ។

គ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

យកតម្លៃ $r_1 = 1$; $r_2 = 2$ ជួសក្នុង $(*)$ គេបាន :

$$\begin{cases} u_{n+1}+v_{n+1} &= (u_n+v_n)^3 \\ u_{n+1}+2v_{n+1} &= \left(u_n+2v_n\right)^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln\left(u_{n+1}+v_{n+1}\right) &= 3\ \ln\left(u_n+v_n\right) \\ \ln\left(u_{n+1}+2v_{n+1}\right) &= 3\ln\left(u_n+2v_n\right) \end{cases}$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(u_n+v_n)\}$ និង $\{\ln(u_n+2v_n)\}$

សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q=3$ ដូចគ្នា ។

គេបាន $\begin{cases} \ln\left(u_n+v_n\right)=3^n\ln\left(u_0+v_0\right)=3^n\ln 6 \\ \ln\left(u_n+2v_n\right)=3^n\ln\left(u_0+2v_0\right)=3^n\ln 8\Big) \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} u_n+v_n=6^{3^n} \\ u_n+2v_n=8^{3^n} \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបាន :

$u_n=2\times 6^{3^n}-8^{3^n}$ និង $v_n=8^{3^n}-6^{3^n}$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = \sqrt{5}+1 \\ u_{n+1} = u_n{}^2 - 2u_n \end{cases}$

ដែល $n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,.....$ ។

ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា :

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n} + 1$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n} + 1$$

- ចំពោះ $n = 0$

គេបាន $u_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \sqrt{5}+1$ ពិត ។

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ :

$$u_k = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^k} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^k} + 1$$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ គឺ :

$$u_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^{k+1}} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^{k+1}} + 1 \quad \text{ពិត}$$

គេមាន $u_{k+1} = u_k^{\ 2} - 2u_k = (u_k - 1)^2 - 1$

ដោយ $u_k = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^k} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^k} + 1$

គេបាន :

$$u_{k+1} = \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^k} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^k}\right]^2 - 1$$

$$u_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^{k+1}} + 2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^{k+1}} - 1$$

$$u_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^{k+1}} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^{k+1}} + 1 \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $u_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n} + 1$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 4a_n + 1 + \sqrt{4a_n + 1} \quad ; \forall n \in IN \end{cases}$$

ចូរគណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $a_{n+1} = 4a_n + 1 + \sqrt{4a_n + 1}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 4 គេបាន :

$$4a_{n+1} = 4(4a_n + 1) + 4\sqrt{4a_n + 1}$$

$$4a_{n+1} + 1 = 4(4a_n + 1) + 4\sqrt{4a_n + 1} + 1$$

$$4a_{n+1} + 1 = \left(2\sqrt{4a_n + 1} + 1\right)^2$$

$$\sqrt{4a_{n+1} + 1} = 2\sqrt{4a_n + 1} + 1$$

$$\sqrt{4a_{n+1} + 1} + 1 = 2\left(\sqrt{4a_n + 1} + 1\right) \quad (i)$$

តាង $v_n = \sqrt{4a_n + 1} + 1$

តាម (i) គេបាន $v_{n+1} = 2v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

ផលធៀបរួម $q = 2$ និងតួ $v_0 = \sqrt{4a_0 + 1} + 1 = 3 + 1 = 4$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n = 2^{n+2}$

គេទាញ $\sqrt{4a_n+1}+1=2^{n+2}$

$$\sqrt{4a_n+1}=2^{n+2}-1$$

$$4a_n+1=4^{n+2}-2^{n+3}+1$$

$$a_n=\frac{4^{n+2}-2^{n+3}}{4}=4^{n+1}-2^{n+1}$$

ដូចនេះ $a_n=4^{n+1}-2^{n+1}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = \sin\dfrac{\pi}{11} \\ u_{n+1} = 3u_n - 4u_n^{\ 3} \ ; n \in IN \end{cases}$$

ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $u_n = \sin\dfrac{3^n\pi}{11}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $u_n = \sin\dfrac{3^n\pi}{11}$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $u_0 = \sin\dfrac{3^0\pi}{11} = \sin\dfrac{\pi}{11}$ ពិត

ឧបមាថាសមភាពពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k = \sin\dfrac{3^k\pi}{11}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ គឺ $u_{k+1} = \sin\dfrac{3^{k+1}\pi}{11}$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} = 3u_k - 4u_k^{\ 3}$ ដោយ $u_k = \sin\dfrac{3^k\pi}{11}$

គេបាន $u_{k+1} = 3\sin\dfrac{3^k\pi}{11} - 4\sin^3\dfrac{3^k\pi}{11} = \sin\dfrac{3^{k+1}\pi}{11}$ ពិត

ដូចនេះ $u_n = \sin\dfrac{3^n\pi}{11}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in N$ ដោយ :

$u_0 = -1$ និង $u_{n+1} = \dfrac{(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}$ ។

ក.តាង $v_n = \dfrac{2u_n+1}{u_n+n}$ ចំពោះ $n = 0 \,;\, 1 \,;\, 2 \,;\, \dots$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $v_n = \dfrac{2u_n+1}{u_n+n}$ នោះ $v_{n+1} = \dfrac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+n+1}$

ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}$ គេបាន :

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{2(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}+1}{\dfrac{(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}+n+1}$$

$$v_{n+1}=\frac{2(2n-1)u_n-4n+2+4u_n+6n-1}{(2n-1)u_n-2n+1+4(n+1)u_n+(n+1)(6n-1)}$$

$$v_{n+1}=\frac{(4n+2)u_n+2n+1}{(6n+3)u_n+6n^2+3n}=\frac{1}{3}.\frac{(2n+1)(2u_n+1)}{(2n+1)(u_n+n)}$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}.\frac{2u_n+1}{u_n+n}=\frac{1}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួមស្មើ $q=\dfrac{1}{3}$ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0\times q^n$ ដោយ $v_0=\dfrac{2u_0+1}{u_0}=1$

ដូចនេះ $v_n=\dfrac{1}{3^n}$ ។

ហើយដោយ $v_n=\dfrac{2u_n+1}{u_n+n}$ នោះ $u_n=\dfrac{nv_n-1}{2-v_n}$

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{n-3^n}{2\times 3^n-1}$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=5x^3-9x^2+15x-3$

ក. ស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំនត់របស់វា ។

ខ. គេពិនិត្យស៊ីត (a_n) និង (b_n) កំនត់ដោយ $a_0=\dfrac{1}{\sqrt[3]{f(1)}}$ និងចំពោះ

គ្រប់ $n\in IN$: $a_{n+1}=\dfrac{f(a_n)}{a_n^{\ 3}\, f\left(\dfrac{1}{a_n}\right)}$ និង $b_n=2\dfrac{1-a_n}{1+a_n}$ ។

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង b_{n+1} និង b_n ។

គ.ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $b_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^n}$ ។

ឃ. ទាញរក a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច :

$f(x)=5x^3-9x^2+15x-3$ មានដែនកំនត់ $D=IR$

ដេរីវេ $f'(x)=15x^2-18x+15>0\ \ \forall x\in D$

ព្រោះ $a=15>0$ និង $\Delta'=81-225=-144<0$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំនត់របស់វា ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង b_{n+1} និង b_n :

គេមាន $b_n = 2\,\dfrac{1-a_n}{1+a_n}$ នោះ $b_{n+1} = 2\,\dfrac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}}$

ដោយ $a_{n+1} = \dfrac{f(a_n)}{a_n^{\ 3}\ f\left(\dfrac{1}{a_n}\right)}$

តែ $f(a_n) = 5a_n^{\ 3} - 9a_n^{\ 2} + 15a_n - 3$

ហើយ $f\left(\dfrac{1}{a_n}\right) = \dfrac{5}{a_n^{\ 3}} - \dfrac{9}{a_n^{\ 2}} + \dfrac{15}{a_n} - 3$

ឬ $a_n^{\ 3}\ f\left(\dfrac{1}{a_n}\right) = 5 - 9a_n + 15a_n^{\ 2} - 3a_n^{\ 3}$

នាំឱ្យ $a_{n+1} = \dfrac{5a_n^{\ 3} - 9a_n^{\ 2} + 15a_n - 3}{5 - 9a_n + 15a_n^{\ 2} - 3a_n^{\ 3}}$

គេមាន $1 - a_{n+1} = \dfrac{8(1-a_n)^3}{5 - 9a_n + 15a_n^{\ 2} - 3a_n^{\ 3}}$

ហើយ $1 + a_{n+1} = \dfrac{2(1+a_n)^3}{5 - 9a_n + 15a_n^{\ 2} - 3a_n^{\ 3}}$

គេទាញ $b_{n+1} = \dfrac{8(1-a_n)^3}{(1+a_n)^3} = b_n^{\ 3}$

ដូចនេះ $b_{n+1} = b_n^{\ 3}$ ។

គ.ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $b_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^n}$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $b_0 = 2\,\dfrac{1-a_0}{1+a_0}$

ដោយ $a_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{f(1)}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5-9+15-3}} = \dfrac{1}{2}$

គេបាន $b_0 = 2\,\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^0}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $b_k = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^k}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា វាពិតចំពោះ $n = k+1$ គឺ $b_{k+1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^{k+1}}$

គេមាន $b_{k+1} = b_k^{\;3}$ (តាមសម្រាយក្នុងសំនួ ខ)

តែតាមការឧបមា $b_k = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^k}$

គេបាន $b_{k+1} = \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^k}\right]^3 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $b_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^n}$ ។

ឃ. ទាញរក a_n ជាអនុគមន៏នៃ n :

គេមាន $b_n = 2\,\dfrac{1-a_n}{1+a_n}$

គេបាន $b_n + a_n b_n = 2 - 2a_n$

នាំឱ្យ $a_n = \dfrac{2-b_n}{2+b_n}$ ដោយ $b_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3^n}$

គេបាន $$a_n=\frac{2-\left(\frac{2}{3}\right)^{3^n}}{2+\left(\frac{2}{3}\right)^{3^n}}=\frac{2(3)^{3^n}-(2)^{3^n}}{2(3)^{3^n}+(2)^{3^n}}$$

ដូចនេះ $$a_n=\frac{2(3)^{3^n}-(2)^{3^n}}{2(3)^{3^n}+(2)^{3^n}}$$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 2$ និង $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{n^2}{2} + 2n + \dfrac{7}{2}$ ដែល $n = 0;1;2;...$

គេតាង $v_n = u_n - (n^2+1)$ ។

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

គេមាន $v_n = u_n - (n^2+1)$

គេបាន $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)^2 - 1 = u_{n+1} - n^2 - 2n - 2$

ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{n^2}{2} + 2n + \dfrac{3}{2}$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{n^2}{2} + 2n + \dfrac{3}{2} - n^2 - 2n - 2$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[u_n - (n^2+1)\right] = \frac{1}{2}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \dfrac{1}{2}$ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \dfrac{1}{2}$ និងមាន

តួដំបូង $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

តាមរូបមន្តគេបាន $v_n = v_0 \times q^n$

ដូចនេះ $v_n = \dfrac{1}{2^n}$ ហើយ $u_n = v_n + n^2 + 1 = \dfrac{1}{2^n} + n^2 + 1$

លំហាត់ទី៣៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \;;\; u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_{n+1} - \dfrac{n+2}{2} \;\;;\;\; n = 0\;;1\;;2\;;\ldots \end{cases}$$

ក.តាង $v_n = u_{n+1} - u_n + n$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $v_n = u_{n+1} - u_n + n$

គេបាន $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} + n + 1$

ដោយ $u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{n+2}{2}$

នោះ $v_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{n+2}{2} - u_{n+1} + n + 1$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - u_n + n\right) = \frac{1}{2}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \dfrac{1}{2}$ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $v_0 = u_1 - u_0 = 1$

ដូចនេះ $v_n = \frac{1}{2^n}$ ។

ដោយ $v_n = u_{n+1} - u_n + n$

គេទាញ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n} - n$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1} - u_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2^k} - k\right)$$

$$u_n - u_0 = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$u_n - 1 = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 3 - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{(n+2)(n-3)}{2}$$

ដូចនេះ $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{(n+2)(n-3)}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} Z_0 = i \\ Z_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \frac{1-\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}} \end{cases}, n \in IN$$

ក. គេតាង $\forall n \in IN : U_n = Z_n + 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. ចូរសរសេរ U_n ជារាងត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

យើងមាន $\forall n \in IN : U_n = Z_n + 1$ នាំឱ្យ $U_{n+1} = Z_{n+1} + 1$

ដោយ $z_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \frac{1-\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}}$

យើងបាន $U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \frac{1-\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}} + 1$

$$U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} (Z_n + 1) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$$

ដូចនេះ $\boxed{U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} U_n}$ ។

ខ. សរសេរ U_n ជារាងត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $U_{n+1}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}U_n$

នាំឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចមានរេសុង

$$q=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}$$

និងតួ $U_0=Z_0+1=i+1=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$

តាមរូបមន្ត

$$U_n=U_0\times q^n=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}).(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})^n=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})^{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=\sqrt{2}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i.\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right]}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $U_n=Z_n+1$

នាំឱ្យ $Z_n=U_n-1=\sqrt{2}[\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i.\sin\frac{(n+1)\pi}{4}]-1$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n=\left[-1+\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}\right]+i.\sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}$

លំហាត់ទី៣៨

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0 = 0 \ , U_1 = 1 \\ U_{n+2} = \sqrt{3}.U_{n+1} - U_n \ , \forall n \in IN \end{cases}$

ក. គេតាង $Z_n = U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}-i}{2}U_n \ , \forall n \in IN$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. ចូរកំនត់រកទំរង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z_n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n$

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}-i}{2}U_n \ , \forall n \in IN$

នាំឱ្យ $Z_{n+1} = U_{n+2} - \frac{\sqrt{3}-i}{2}U_{n+1}$

ដោយគេមាន $U_{n+2} = \sqrt{3}.U_{n+1} - U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

គេបាន $Z_{n+1} = \sqrt{3}.U_{n+1} - U_n - \frac{\sqrt{3}-i}{2}U_{n+1}$

$$Z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}U_{n+1} - U_n = \frac{\sqrt{3}+i}{2}(U_{n+1} - \frac{2}{\sqrt{3}+i}U_n)$$

$$Z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}(U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}-i}{2}U_n) = \frac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n = U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}-i}{2}U_n \ , \forall n \in IN}$ ។

ខ.កំនត់រកទំរង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z_n រួចទាញរកតួ U_n ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$

ដោយយើងមាន $Z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n}\in\mathbf{IN}$

(តាមសម្រាយខាងលើ)

នាំឱ្យ (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង :

$$q=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6})$$

និងតួ $Z_0=U_1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}U_0=1$ (ព្រោះ $U_0=0$, $U_1=1$)

គេបាន $Z_n=Z_0\times q^n=(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6})^n=\cos\frac{n\pi}{6}+i.\sin\frac{n\pi}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n=\cos\frac{n\pi}{6}+i.\sin\frac{n\pi}{6}}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនងខាងក្រោម :

$Z_0 = 0$, $Z_1 = 1$ និង $Z_{n+2} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} Z_{n+1} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} Z_n$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ក. គេតាង $\forall n \in IN : U_n = Z_{n+1} - Z_n$ ។

បង្ហាញថា $U_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} U_n$

ខ. គណនា U_n និង $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកចំនួនកុំផ្លិច z_n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $U_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} U_n$

យើងមាន $U_n = Z_{n+1} - Z_n$

នាំឱ្យ $U_{n+1} = Z_{n+2} - Z_{n+1}$

ដោយចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

មាន $Z_{n+2} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} Z_{n+1} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} Z_n$

យើងបាន $U_{n+1} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} Z_{n+1} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} Z_n - Z_{n+1}$

$$U_{n+1}=(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}-1)Z_{n+1}-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z_n$$

$$U_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z_{n+1}-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z_n$$

$$U_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(Z_{n+1}-Z_n)=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.U_n$$

ដូចនេះ $\boxed{U_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}U_n}$ ។

ខ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $U_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}U_n$ នាំឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង

$$q=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}$$

និងតួ $U_0=Z_1-Z_0=1$ ។

តាមរូបមន្ត $U_n=U_0\times q^n=(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3})^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}}$ ។

គណនា $S_n=U_0+U_1+U_2+\dots+U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n :

ដោយ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចនោះតាមរូបមន្តយើងបាន :

$$S_n=U_0.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

ដោយ $U_0=1$, $q=\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}$

$$S_n = \frac{1-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{1-\cos\frac{(n+1)\pi}{3}-i.\sin\frac{(n+1)\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}-i.\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{(n+1)\pi}{6}-2i.\sin\frac{(n+1)\pi}{6}.\cos\frac{(n+1)\pi}{6}}{2\sin^2\frac{\pi}{6}-2i\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}.\left[\sin\frac{(n+1)\pi}{6}-i.\cos\frac{(n+1)\pi}{6}\right]}{2\sin\frac{\pi}{6}.\left(\sin\frac{\pi}{6}-i.\cos\frac{\pi}{6}\right)}\times\frac{i}{i}$$

$$= \frac{2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{6}+i.\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\right]}{2(\frac{1}{2})\left(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= 2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i.\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i.\sin\frac{n\pi}{6}\right)}$ ។

គ. ទាញរកចំនួនកុំផ្លិច Z_n

យើងបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}(U_k) = \sum_{k=0}^{n}(Z_{k+1}-Z_k) = Z_{n+1}-Z_0$ នាំឱ្យ $Z_{n+1} = Z_0 + S_n$

ដោយ $Z_0 = 0$ និង $S_n = 2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i.\sin\frac{n\pi}{6}\right)$

គេបាន $Z_{n+1} = 2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i.\sin\frac{n\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n = 2\sin\frac{n\pi}{6}\left[\cos\frac{(n-1)\pi}{6}+i.\sin\frac{(n-1)\pi}{6}\right]}$

លំហាត់ទី៤០

គេឱ្យស៊ីត $S_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ ដែល $n\in IN^*$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ។

ខ-គណនាផលបូក

$$\Sigma_n=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

យើងមាន $S_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ (ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$)

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក ៖

គេបាន

$$\Sigma_n = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} = \sum_{k=1}^{n}(S_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = n+1-\frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{n(n+1)} = \frac{n(n+2)}{n+1}$$

ដូចនេះ $\Sigma_n = \frac{n(n+2)}{n+1}$ ។

លំហាត់ទី១

ដោះស្រាយសមីការ :

$$\frac{3^{x^2-x}}{3^x}+\frac{4^{x^2-x}}{4^x}+\frac{5^{x^2-x}}{5^x}=\frac{6^{x^2-x}}{6^x}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$\frac{3^{x^2-x}}{3^x}+\frac{4^{x^2-x}}{4^x}+\frac{5^{x^2-x}}{5^x}=\frac{6^{x^2-x}}{6^x}$$

$$3^{x^2-2x}+4^{x^2-2x}+5^{x^2-2x}=6^{x^2-2x}$$

តាង $t=x^2-2x=(x-1)^2-1\geq -1$

សមីការអាចសរសេរ :

$$3^t+4^t+5^t=6^t \quad (i)$$

-បើ $t=3$ នោះសមីការ (i) អាចសរសេរ :

$$3^3+4^3+5^3=6^3$$

$$27+64+125=216$$

$216=216$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $t=3$ ជាឫសរបស់សមីការ (i) ។

-បើ $-1\leq t<3$ គេមាន :

$$\left(\frac{3}{6}\right)^t > \left(\frac{3}{6}\right)^3 \;;\; \left(\frac{4}{6}\right)^t > \left(\frac{4}{6}\right)^3 ; \left(\frac{5}{6}\right)^t > \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

គេបាន $\left(\frac{3}{6}\right)^t + \left(\frac{4}{6}\right)^t + \left(\frac{5}{6}\right)^t > \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3$

$$\frac{3^t + 4^t + 5^t}{6^t} > 1$$

នាំឱ្យ $3^t + 4^t + 5^t > 6^t$

ដូចនេះសមីការ (i) គ្មានឫសចំពោះ $-1 \le t < 3$ ។

-បើ $t > 3$ គេមាន :

$$\left(\frac{3}{6}\right)^t < \left(\frac{3}{6}\right)^3 \;;\; \left(\frac{4}{6}\right)^t < \left(\frac{4}{6}\right)^3 ; \left(\frac{5}{6}\right)^t < \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

គេបាន $\left(\frac{3}{6}\right)^t + \left(\frac{4}{6}\right)^t + \left(\frac{5}{6}\right)^t < \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3$

$$\frac{3^t + 4^t + 5^t}{6^t} < 1$$

នាំឱ្យ $3^t + 4^t + 5^t < 6^t$

ដូចនេះសមីការ (i) គ្មានឫសចំពោះ $t > 3$ ។

សរុបមកសមីការ (i) មានឫសទោល $t=3$

ចំពោះ $t=3$ គេបាន $x^2-2x=3$

ឬ $x^2-2x-3=0$ នាំឱ្យ $x_1=-1\ ;\ x_2=3$

ដូចនេះ $x_1=-1\ ;\ x_2=3$ ។

លំហាត់ទី២

ដោះស្រាយសមីការ :

$$3^{x^2-3x}+\frac{1}{3}=3^{x^2-4x+2}+3^{x-3}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$3^{x^2-3x}+\frac{1}{3}=3^{x^2-4x+2}+3^{x-3}$$

សមីការអាចសរសេរ :

$$3^{x^2-3x}-3^{x^2-4x+2}-3^{x-3}+\frac{1}{3}=0$$

$$3^{x^2-4x}\left(3^x-9\right)-\frac{1}{27}\left(3^x-9\right)=0$$

$$\left(3^x-9\right)\left(3^{x^2-4x}-\frac{1}{27}\right)=0$$

គេបាន $3^x-9=0$ នាំឱ្យ $x=2$

$3^{x^2-2x}-\frac{1}{27}=0$ នាំឱ្យ $x^2-4x+3=0$

មានឫស $x_1=1;\ x_2=3$ ។

ដូចនេះសមីការមានឫស $x\in\{\ 1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ]$ ។

លំហាត់ទី៣

ដោះស្រាយសមីការ :

$$3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}=6x-x^2$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}=6x-x^2$$

គេមាន $6x-x^2=9-(9-6x+x^2)=9-(3-x)^2$

ដោយ $(3-x)^2\geq 0$ នោះគេបាន $6x-x^2\leq 9 \quad (i)$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}\geq 3\sqrt[3]{3^{4x-11}.3^{10-x^2}.3^{(x-2)^2}}$$

$$3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}\geq 3\sqrt[3]{3^{4x-11+10-x^2+(x-2)^2}}$$

$$3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}\geq 9 \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) សមីការសមមូល :

$$\begin{cases}6x-x^2=9 & (1)\\ 3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}=9 & (2)\end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបានឫស $x=3$ ។

លំហាត់ទី៤

ដោះស្រាយសមីការ :

$$4^{(x-1)^2}+6=2^{(x-1)^2}+2\sqrt{8^{(x-1)^2}+8}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$4^{(x-1)^2}+6=2^{(x-1)^2}+2\sqrt{8^{(x-1)^2}+8}$$

តាង $X=2^{(x-1)^2}>0$ នោះសមីការអាចសរសេរ :

$$X^2+6=X+2\sqrt{X^3+8}$$

$$X^2-X+6=\sqrt{(X+2)(X^2-2X+4)}\ (i)$$

តាង $u=X+2$ និង $v=x^2-2x+2$

សមីការ (ii) អាចសរសេរ :

$u+v=2\sqrt{uv}$ ឬ $\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)^2=0$

នាំឱ្យ $u=v$ ឬ $X+2=X^2-2X+2$

ឬ $X^2-3X+2=0$ គេទាញឫស $X_1=1$; $X_2=2$ ។

-ចំពោះ $X_1=1$ នោះ $2^{(x-1)^2}=1$ នាំឱ្យ $x=1$ ។

-ចំពោះ $X_2=2$ នោះ $2^{(x-1)^2}=2$ សមមូល $(x-1)^2=1$

គេទាញ $x_1=0$ ឬ $x_2=2$ ។ ដូចនេះ $x\in\{\,0\,;1\,;2\,\}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

ក.ចូរស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ចូរស្រាយថា :

$$f\left(a+b\right)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេមាន $e^{x}+e^{-x}>0$

ដូចនេះអនុគមន៍ f មានដែនកំនត់ $D_f=IR$

ចំពោះគ្រប់ $x\in D_f$ គេបាន $-x\in D_f$

គេបាន $f(-x)+f\left(x\right)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}+\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=0$

គេទាញ $f(-x)=-f(x)$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ. ស្រាយថា $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

គេបាន $f(a+b)=\dfrac{e^{2(a+b)}-1}{e^{2(a+b)}+1}=\dfrac{e^{2a+2b}-1}{e^{2a+2b}+1}$

$f(a)=\dfrac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}$ និង $f(b)=\dfrac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}$

គេមាន $f(a)+f(b)=\dfrac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}+\dfrac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}$

$$f(a)+f(b)=\frac{2(e^{2a+2b}-1)}{(e^{2a}+1)(e^{2b}+1)} \quad (i)$$

ហើយ $1+f(a)f(b)=1+\dfrac{(e^{2a}-1)(e^{2b}-1)}{(e^{2a}+1)(e^{2b}+1)}$

$$1+f(a)f(b)=\frac{2(e^{2a+2b}+1)}{(e^{2a}+1)(e^{2b}+1)} \quad (ii)$$

ចែកសមភាព (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន :

$$\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}=\frac{e^{2a+2b}-1}{e^{2a+2b}+1}=f(a+b)$$

ដូចនេះ $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ ។

លំហាត់ទី៦

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ :

$$\begin{cases} 2^x \ 3^y = \dfrac{1}{72} \\ 3^x \ 4^y = \dfrac{1}{432} \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ :

$$\begin{cases} 2^x \ 3^y = \dfrac{1}{72} & (i) \\ 3^x \ 4^y = \dfrac{1}{432} & (ii) \end{cases}$$

សមីការ (i) អាចសរសេរ :

$$\log_2(2^x.3^y) = \log\left(\frac{1}{72}\right)$$

$$x + y\log_2 3 = \log_2\left(2^{-3}.3^{-2}\right)$$

$$x + y \ \log_2 3 = -3 - 2\log_2 3 \quad (1)$$

សមីការ (ii) អាចសរសេរ :

$$\log_3\left(3^x \ 4^y\right) = \log_3(432)$$

$$x + y\log_3 4 = \log_3\left(3^{-3}.2^{-4}\right)$$

$x+2y\log_3 2=-3-4\log_3 2 \quad (2)$

ដកសមីការ (1) នឹង (2) អង្គ នឹង អង្គគេបាន :

$y\log_2 3-2y\log_3 2=4\log_3 2-2\log_2 3$

$y(\log_2 3-2\log_3 2)=2(2\log_3 2-\log_2 3)$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\log_2 3-2\log_3 2$

គេទាញបាន $y=-2$ ។

យកតម្លៃ $y=-2$ ជំនួសក្នុង (2) គេបាន :

$x-4\log_3 2=-3-4\log_3 2$ នាំឱ្យ $x=-2$

ដូចនេះ $x=-2$; $y=-3$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

ក.រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍នេះ ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $-1<a<1$ និង $-1<b<1$ ចូរបង្ហាញថា

$$f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

ដំណោះស្រាយ

ក.រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ f

$$f(x)=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

អនុគមន៍មានន័យកាលណា $\begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x}>0 \\ x\neq -1 \end{cases}$

ដូចនេះ $D_f=]-1\,;1[$ ។

ខ. បង្ហាញថា :

$$f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

យើងមាន $f(a)=\lg\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$ និង $f(b)=\lg\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$

យើងបាន $f(a)+f(b)=\lg\left(\frac{1-a}{1+a}\right)+\lg\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$

$$=\lg\left(\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}\right)$$

$$=\lg\left(\frac{1-(a+b)+ab}{1+(a+b)+ab}\right)$$

$$f(a)+f(b)=\lg\left(\frac{1-(a+b)+ab}{1+(a+b)+ab}\right) \qquad (i)$$

ម្យ៉ាងទៀត $f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\lg\left(\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}\right)$

$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\lg\left(\frac{1-(a+b)+ab}{1+(a+b)+ab}\right) \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេទាញ $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ ។

លំហាត់ទី៨

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $A^{\log_a B} = B^{\log_a A}$

ដែល $a ; A ; B$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង ខុសពី 1 ។

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $7^{\log_2 x} + x^{\log_2 7} = 686$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A^{\log_a B} = B^{\log_a A}$

តាង $t = A^{\log_a B}\ (i)$

គេបាន $\log_A t = \log_a B$ ដោយ $\log_A t = \dfrac{\log_B t}{\log_B A}$

$$\frac{\log_B t}{\log_B A} = \log_a B$$

$$\log_B t = \log_a B . \log_B A$$

$$\log_B t = \log_a A$$

គេទាញ $t = B^{\log_a A}\ (ii)$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $A^{\log_a B} = B^{\log_a A}$ ។

ខ.ដោះស្រាយសមីការ

$$7^{\log_2 x} + x^{\log_2 7} = 686$$

តាមរូបមន្តខាងលើគេបាន $x^{\log_2 7} = 7^{\log_2 x}$

សមីការអាចសរសេរ ៖

$$7^{\log_2 x}+7^{\log_2 x}=686$$

$$2.7^{\log_2 x}=686$$

$$7^{\log_2 x}=343$$

$$7^{\log_2 x}=7^3$$

$$\log_2 x=3\Rightarrow x=2^3=8$$

ដូចនេះ $x=8$ ជាឫសរបស់សមីការ ។

លំហាត់ទី៩

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 4^x .5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x .6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} 4^x .5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x .6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$$

យើងមាន $\ln(4^x.5^y) = \ln(\frac{1}{400})$

ឬ $x\ln 4 + y\ln 5 = -2\ln 4 - 2\ln 5 \quad (1)$

ហើយ $\ln(5^x.6^y) = \ln(\frac{1}{900})$

ឬ $x\ln 5 + y\ln 6 = -2\ln 6 - 2\ln 5 \quad (2)$

តាម $(1)\,\&\,(2)$ គេបានប្រព័ន្ធ :

$$\begin{cases} x\ln 4 + y\ln 5 = -2\ln 4 - 2\ln 5 & \Big| \; (-\ln 6) \\ x\ln 5 + y\ln 6 = -2\ln 6 - 2\ln 5 & \Big| \; (\ln 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x\ln 4.\ln 6 - y\ln 5.\ln 6 = 2\ln 4.\ln 6 + 2\ln 5.\ln 6 & (3) \\ x\ln^2 5 + y\ln 5.\ln 6 = -2\ln 6.\ln 5 - 2\ln^2 5 & (4) \end{cases}$$

បូកសមីការ **(3) & (4)** គេបាន **:**

$(\ln^2 5 - \ln 4.\ln 6)\,x = 2(\ln 4.\ln 6 - \ln^2 5)$ នាំឱ្យ $x = -2$

តាមសមីការ $4^x.5^y = \dfrac{1}{400}$ គេទាញ $4^{-2}.5^y = \dfrac{1}{400}$

នាំឱ្យគេទាញ $y = -2$ ។

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $x = -2$, $y = -2$ ។

លំហាត់ទី១០

ដោះស្រាយសមីការ :

$$30\log_x \sqrt[3]{x} + \log_{0,5x} x^2 - \log_{4x} x^3 = 0$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$30\log_x \sqrt[3]{x} + \log_{0,5x} x^2 - \log_{4x} x^3 = 0$$

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0.5x \neq 1 \\ 4x \neq 1 \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{1}{4} \end{cases}$

សមីការខាងលើអាចសរសេរ :

$$30\,\frac{\ln\sqrt[3]{x}}{\ln x} + \frac{\ln x^2}{\ln(0,5x)} - \frac{\ln x^3}{\ln(4x)} = 0$$

$$10 + \frac{2\ln x}{\ln x - \ln 2} - \frac{3\ln x}{\ln x + \ln 4} = 0$$

តាង $t = \ln x$

យើងបាន $10 + \dfrac{2t}{t - \ln 2} - \dfrac{3t}{t + \ln 4} = 0$

$$10(t-\ln 2)(t+2\ln 2)+2t(t+2\ln 2)-3t(t-\ln 2)=0$$

$$10t^2+10t\ln 2-2\ln^2 2+2t^2+4t\ln 2-3t^2+3t\ln 2=0$$

$$9t^2+17t\ln 2-2\ln^2 2=0$$

$$\Delta=289\ln^2 2+72\ln^2 2=361.\ln^2 2$$

គេទាញឫស ៖

$$t_1=\frac{-17\ln 2+19\ln 2}{9}=\frac{2}{9}\ln 2$$

$$t_2=\frac{-17\ln 2-19\ln 2}{9}=-4\ln 2$$

ដោយ $t=\ln x$ គេទាញ $\left[\begin{array}{l}\ln x=\frac{2}{9}\ln 2\\ \ln x=-4\ln 2\end{array}\right.$

នាំឱ្យ $x=\sqrt[9]{4}$; $x=\frac{1}{16}$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x_1=\sqrt[9]{4}$, $x_2=\frac{1}{16}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right).\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$

ក. ដោះស្រាយសមីការ $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right)=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$

ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យកន្សោម $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right)$ និង $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$ វិជ្ជមានព្រមគ្នា ។

គ. រកតម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើចន្លោះ $[\,0\,;3\,]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right)=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$$

លក្ខខណ្ឌ $x\geq-\frac{1}{3}$

យើងបាន $\frac{3x+1}{x^2+1}=\frac{4x^2+4}{3x+1}$

$$(3x+1)^2=4(x^2+1)^2$$

សមមូល $\left[\begin{array}{l}3x+1=2x^2+2\\3x+1=-2x^2-2\end{array}\right.$ ឬ $\left[\begin{array}{l}2x^2-3x+1=0\\2x^2+3x+3=0\end{array}\right.$

គេទាញឫស $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ x

ដើម្បីឲ្យកន្សោម $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right)$ និង $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$

វិជ្ជមានព្រមគ្នាលុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} \frac{3x+1}{x^2+1} \geq 1 \\ \frac{4x^2+4}{3x+1} \geq 1 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} \frac{-x^2+3x}{x^2+1} \geq 0 \\ \frac{4x^2-3x+3}{3x+1} \geq 0 \end{cases}$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases}$ ឬ $0 \leq x \leq 3$ ។

ដូចនេះ $x \in [\ 0\ ;\ 3\ ]$ ។

គ. រកតម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើចន្លោះ $[\ 0\ ;\ 3\ ]$

ចំពោះ $x \in [\ 0\ ;\ 3\ ]$ គេមាន $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right) \geq 0 \\ \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right) \geq 0 \end{cases}$

តាមវិសមភាពកូស៊ីគេមាន $a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad ;\forall a;b \geq 0$

យើងមាន $f(x)=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right).\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$

យើងបាន :

$$f(x) \le \left[\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right)+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)\right]^2$$

$$f(x)\le\frac{1}{4}\left[\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right)\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)\right]^2$$

$$f(x)\le\frac{1}{4}\left(\log_{\sqrt{2}}4\right)^2=4 \quad ; \forall x\in[0\ ;3]$$

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ f ស្មើនឹង $M=4$ ។

លំហាត់ទី១២

ដោះស្រាយវិសមីការ $\sqrt{\log_2 x - 1} + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3 + 2 > 0$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយវិសមីការ

$\sqrt{\log_2 x - 1} + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3 + 2 > 0$

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} \log_2 x - 1 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ ឬ $x \geq 2$

វិសមីការអាចសរសេរ $\sqrt{\log_2 x - 1} - \frac{3}{2}\log_2 x + 2 > 0$

តាង $t = \sqrt{\log_2 x - 1} \geq 0$

គេបាន $t - \frac{3}{2}(t^2 + 1) + 2 > 0$

ឬ $-3t^2 + 2t + 1 > 0$

គេទាញ $-\frac{1}{3} < t < 1$ ដោយ $t \geq 0$

គេបាន $0 \leq t < 1$ ឬ $0 \leq \sqrt{\log_2 x - 1} < 1$ នាំឱ្យ $2 \leq x < 4$

ដូចនេះ $x \in [\,2\,,4\,)$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យ $a\ ,b\ ,c$ ជាបីចំនួនពិតដែល $a,b\ ,c\in(1\ ,+\infty\ )$

ឬ $a\ ,b\ ,c\in(0\ ,1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\geq 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\geq 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)$ (*)

យើងយក d ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(1,+\infty)$ ឬ $(0,1)$ ។

តាមរូបមន្តប្តូរគោលគេបាន $\log_a bc=\dfrac{\log_d bc}{\log_d a}=\dfrac{\log_d b+\log_d c}{\log_d a}$

$\log_b ca=\dfrac{\log_d ca}{\log_d b}=\dfrac{\log_d c+\log_d a}{\log_d b}$; $\log_c ab=\dfrac{\log_d ab}{\log_d c}=\dfrac{\log_d a+\log_d b}{\log_d c}$

ដោយយក $x=\log_d a\ ,\ y=\log_d b\ ,\ z=\log_d c$ វិសមភាព (*) សមមូល

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\geq 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\right)\geq\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}\quad (**)$$

តាមវិសមភាព $AM-HM$ គេមាន $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq\dfrac{4}{y+z}$ នាំឱ្យ $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}\geq\dfrac{4x}{y+z}$

តាមវិសមភាពនេះគេទាញបាន (**) ពិត ។

ដូចនេះ $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\geq 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)$ ។

លំហាត់ទី១៤

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} 27^x + 3^{x+1} x^2 \left(\log_2 y\right)^2 = 36 \\ 3^{1+2x} x \log_2 y + x^3 \left(\log_2 y\right)^3 = 28 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} 27^x + 3^{x+1} x^2 \left(\log_2 y\right)^2 = 36 \\ 3^{1+2x} x \log_2 y + x^3 \left(\log_2 y\right)^3 = 28 \end{cases}$$

លក្ខខណ្ឌ $y > 0$ និង $x \in IR$

តាង $a = 3^x > 0$ និង $b = x\log_2 y$

ប្រព័ន្ធសមីការសមមូល $\begin{cases} a^3 + 3ab^2 = 36 \quad (i) \\ 3a^2b + b^3 = 28 \quad (ii) \end{cases}$

បូកសមីការ **(i)** និង **(ii)** គេបាន $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 64$

ឬ $(a+b)^3 = 64$ នាំឲ្យ $a + b = 4 \quad (1)$

ដកសមីការ **(i)** និង **(2)** គេបាន $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 8$

ឬ $(a-b)^3 = 8$ នាំឲ្យ $a - b = 2 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} a + b = 4 \\ a - b = 2 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a = 3\ ,\ b = 1$

ដោយ $a = 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$ ហើយ $b = x\log_2 y = 1 \Rightarrow y = 2$

ដូចនេះ $x = 1\ ;\ y = 2$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ ,\ x\in IR$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})< f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})< f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

យើងមាន $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ ,\ x\in IR$

យើងបាន $$f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយគ្រប់ $x\in IR: x^2+1>0$

នាំឲ្យ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0\ ,\ \forall x\in IR$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR។

ម្យ៉ាងទៀតចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$គេមាន ៖

$$\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a} \quad \text{និង} \quad \frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}$$

គេទាញ $\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ឬ $\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ដោយសារតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR

ហេតុនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេបាន :

$$\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$

នាំឲ្យ $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ដូចនេះ $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ ។

លំហាត់ទី១៦

សន្មតថា a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^{\log_3 7} = 27$
$b^{\log_7 11} = 49$ និង $c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$ ។

ចូរគណនា $a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$

គេមាន $a^{(\log_3 7)^2} = \left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7} = (27)^{\log_3 7} = 3^{3\log_3 7} = 7^3 = 343$

$$b^{(\log_7 11)^2} = \left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11} = 49^{\log_7 11} = 7^{2\log_7 11} = 11^2 = 121$$

$$c^{(\log_{11} 25)^2} = \left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25} = \left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$$

គេបាន $a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2} = 343 + 121 + 5 = 469$

ដូចនេះ $a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2} = 469$ ៕

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យ x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ហើយ $a > 0$ និងខុសពី 1

ចូរស្រាយថា៖

$$\left(\log_a \frac{x}{y}\right)^3 + \left(\log_a \frac{y}{z}\right)^3 + \left(\log_a \frac{z}{x}\right)^3 = 3\log_a \frac{x}{y}\log_a \frac{y}{z}\log_a \frac{z}{x}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា៖

$$\left(\log_a \frac{x}{y}\right)^3 + \left(\log_a \frac{y}{z}\right)^3 + \left(\log_a \frac{z}{x}\right)^3 = 3\log_a \frac{x}{y}\log_a \frac{y}{z}\log_a \frac{z}{x}$$

តាង $p = \log_a \frac{x}{y}$, $q = \log_a \frac{y}{z}$, $r = \log_a \frac{z}{x}$

គេមាន $p + q + r = \log_a \frac{x}{y} + \log_a \frac{y}{z} + \log_a \frac{z}{x}$

$$p + q + r = \log_a\left(\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}\right) = \log_a 1 = 0$$

$$p + q = -r$$

លើកអង្គទាំងពីរជាគូប $(p + q)^3 = -r^3$

ឬ $p^3 + 3pq(p + q) + q^3 = -r^3$ ដោយ $p + q = -r$

គេទាញ $p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr$

ដូចនេះ $\left(\log_a \frac{x}{y}\right)^3 + \left(\log_a \frac{y}{z}\right)^3 + \left(\log_a \frac{z}{x}\right)^3 = 3\log_a \frac{x}{y}\log_a \frac{y}{z}\log_a \frac{z}{x}$

លំហាត់ទី១៨

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2\\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2\end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2 & (1)\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2 & (2)\\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2 & (3)\end{cases}$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\log_{a^n} b=\frac{\ln b}{\ln a^n}=\frac{\ln b}{n\ln a}=\frac{1}{n}\log_a b$ គេបាន ៖

$(1):\ \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2$

$$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 y+\frac{1}{2}\log_2 z=2$$

$$\log_2(x\sqrt{y}\sqrt{z}\ )=2\Rightarrow x\sqrt{yz}=4\ (4)$$

$(2):\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2$

$$\log_3(y\sqrt{z}\sqrt{x})=2\Rightarrow y\sqrt{zx}=9\ \ (5)$$

$(3):\log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2$

$$\log_4(z\sqrt{x}\sqrt{y}\ )=2\Rightarrow z\sqrt{xy}=16\ \ (6)$$

គុណទំនាក់ទំនង (1) , (2) និង (3) គេបាន $(xyz)^2=576\Rightarrow xyz=24$

តាម (4) គេបាន $x^2yz=16\Rightarrow x=\frac{16}{xyz}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$

តាម (5) គេបាន $y^2zx=81\Rightarrow y=\frac{81}{xyz}=\frac{81}{24}=\frac{27}{8}$

តាម $z^2xy = 256 \Rightarrow z = \frac{256}{xyz} = \frac{256}{24} = \frac{32}{3}$

ដូចនេះ $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{27}{8}$, $z = \frac{32}{3}$ ។

លំហាត់ទី១៩

ដោះស្រាយសមីការ

$2^{x^2+x}+\log_2 x=2^{x+1}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$2^{x^2+x}+\log_2 x=2^{x+1}$

–ចំពោះ $x>1$ គេមាន $2^{x^2+x}>2^{x+1}$ និង $\log_2 x>0$

គេបាន $2^{x^2+x}+\log_2 x>2^{x+1}$

–ចំពោះ $0<x<1$ គេមាន $2^{x^2+x}<2^{x+1}$ និង $\log_2 x<0$

គេបាន $2^{x^2+x}+\log_2 x<2^{x+1}$

–ចំពោះ $x=1$ គេបាន $2^{1^2+1}+\log_2 1=2^{1+1}$ ពិត

ដូចនេះសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x=1$ ។

លំហាត់ទី២០

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} 5\,(\log_y x+\log_x y)=26 \\ x\,y=64 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 5\,(\log_y x+\log_x y)=26 & (1) \\ x\,y=64 & (2) \end{cases}$$

លក្ខខ័ណ្ឌ $\begin{cases} x>0\ ,\ y>0 \\ x\neq 1,\ y\neq 1 \end{cases}$

សមីការ (1) អាចសរសេរ $\log_y x+\dfrac{1}{\log_y x}=\dfrac{26}{5}$

ឬ $(\log_y x)^2-\dfrac{26}{5}.\log_y x+1=0$ តាង $t=\log_y x$

គេបាន $t^2-\dfrac{26}{5}t+1=0$, $\Delta'=\dfrac{169}{25}-1=\dfrac{144}{25}$

នាំឱ្យ $t_1=\dfrac{13}{5}-\dfrac{12}{5}=\dfrac{1}{5}$, $t_2=\dfrac{13}{5}+\dfrac{12}{5}=5$

- ចំពោះ $t=\dfrac{1}{5}$ គេបាន $\log_y x=\dfrac{1}{5}$

នាំឱ្យ $x=y^{\frac{1}{5}}$ (3)

យក (3) ជួសក្នុង (2) គេបាន $y.y^{\frac{1}{5}} = 64$

នាំឱ្យ $y = 32$ ហើយតាម (3) គេបាន $x = (32)^{\frac{1}{5}} = 2$ ។

- ចំពោះ $t = 5$ គេបាន $\log_y x = 5$ នាំឱ្យ $x = y^5$ (4)

យក (4) ជួសក្នុង (2) គេបាន $y.y^5 = 64$

នាំឱ្យ $y = 2$ ហើយតាម (4) គេបាន $x = 2^5 = 32$ ។

ដូចនេះប្រព័ន្ធមានគូចម្លើយ :

$(x = 2\ ,\ y = 32)$ ឬ $(x = 32\ ,\ y = 2)$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យ $a \geq 1$ និង $b \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

ចំពោះ $a \geq 1$ និង $b \geq 1$ យើងមាន $a + b \geq 2\sqrt{a.b}$

(វិសមភាពកូស៊ី)

ឬ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

នាំឲ្យ $\log_2(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$

ឬ $\log_2 a + \log_2 b \leq 2\log_2(\frac{a+b}{2})$ **(1)**

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\log_2 a + \log_2 b \geq 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \geq \log_2 a + 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b} + \log_2 b$$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \geq (\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2$$

$$\log_2 a + \log_2 b \geq \frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង **(1)** និង **(2)** យើងទាញ៖

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\right)^2 \le 2\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\left(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\right)^2 \le 4\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^{2+\log_2 x}$ ដែល $x>0$

គេតាង $u_1 = f(x)$; $u_2 = f\left(f(x)\right)$; $u_3 = f\left(f\left(f(x)\right)\right)$

និង $u_n = f_n\left(f\left(....f\left(f(x)\right)....\right)\right)$ ។

ក.គេយក $V_n = 1+\log_2 u_n$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = {V_n}^2$

ខ.ប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $V_n = {V_1}^{2^n}$ ។

គ.គណនា V_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង x ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $V_{n+1} = {V_n}^2$

គេមាន $V_n = 1+\log_2 u_n$ នោះ $vV_{n+1} = 1+\log_2 u_{n+1}$

ដោយ $u_n = f_n\left(f\left(....f\left(f(x)\right)....\right)\right) = f\left(u_{n-1}\right)$

គេបាន $u_{n+1} = f(u_n) = \left(u_n\right)^{2+\log_2 u_n}$

ហេតុនេះ $V_{n+1} = 1+\log_2\left[\left(u_n\right)^{2+\log_2 u_n}\right]$

$$V_{n+1} = 1+\left(2+\log_2 u_n\right)\log_2 u_n$$

$$V_{n+1} = (1+\log_2 u_n)^2 = {V_n}^2$$

ដូចនេះ $V_{n+1} = {V_n}^2$ ។

ខ.ប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាស្រាយថា $V_n = {V_1}^{2^n}$

គេមាន $V_{n+1} = {V_n}^2$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

គេបាន $V_2 = V_1{}^2 = V_1{}^{2^1}$ ពិត

$V_3 = V_2{}^2 = V_1{}^4 = V_1{}^{2^2}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $V_k = V_1{}^{2^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k+1$ គឺ $V_{k+1} = V_1{}^{2^{k+1}}$

គេមាន $V_{k+1} = V_k{}^2$ ដោយ $V_k = V_1{}^{2^k}$

គេបាន $V_{k+1} = \left(V_1{}^{2^k}\right)^2 = V_1{}^{2^{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $V_n = V_1{}^{2^n}$ ។

គ.គណនា V_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង x :

គេមាន $V_n = V_1{}^{2^n}$

ដោយ $V_1 = 1 + \log_2 u_1 = 1 + \log_2\left(x^{2+\log_2 x}\right) = (1 + \log_2 x)^2$

ដូចនេះ $V_n = (1 + \log_2 x)^{2^{n+1}}$

ហើយ $V_n = 1 + \log_2 u_n$ នាំឱ្យ $u_n = 2^{V_n - 1}$

ដូចនេះ $u_n = (2)^{(1+\log_2 x)^{2^{n+1}} - 1}$ ។

លំហាត់ទី១

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដំណោះស្រាយ

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$

តាង $E_n(x)=\cos^n x+\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})\ (i)$

តាមរូបមន្ត $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

គេទាញ $\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n-3} x$ គេបាន ៖

$$\cos^n x=\frac{3}{4}\cos^{n-2} x+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3} x\ \ (1)$$

ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន ៖

$$\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{2\pi}{3})\ \ (2)$$

$$\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{4\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{4\pi}{3})\ \ (3)$$

ដោយបូកសមីការ (1); (2) និង (3) គេបាន ៖

$$E_n(x)=\frac{3}{4}E_{n-2}(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_{n-3}(x)\quad (ii)$$

តាម (i) ចំពោះ $n=0\ ;\ n=1\ ,\ n=2$ គេបាន ៖

$E_0(x)=3$

$E_1(x)=\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{4\pi}{3})$

$E_1(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=0$

$E_2(x)=\cos^2 x+(-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2+(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2$

$E_2(x)=\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{3}{2}\sin^2 x=\frac{3}{2}$

តាម (ii) ចំពោះ $n=3$; $n=4$, $n=5$; $n=7$ គេបាន

$E_3(x)=\frac{3}{4}E_1(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\, E_0(x)=\frac{3}{4}\cos 3x$

$E_4(x)=\frac{3}{4}E_2(x)+\frac{1}{4}\cos 3x E_1(x)=\frac{9}{8}$

$E_5(x)=\frac{3}{4}E_3(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\, E_2(x)=\frac{9}{16}\cos 3x+\frac{3}{8}\cos 3x=\frac{15}{16}\cos 3x$

$E_7(x)=\frac{3}{4}E_5(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\, E_4(x)=\frac{45}{64}\cos 3x+\frac{9}{32}\cos 3x=\frac{63}{64}\cos 3x$

ដូចនេះ $\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$ ។

លំហាត់ទី២

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$$

យក $z=\cos\frac{\pi}{11}+i.\sin\frac{\pi}{11}$ ហើយ $z^{11}=-1$

គេមាន $W=z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{z^{11}-z}{z^2-1}=\frac{-1-z}{z^2-1}=\frac{1}{1-z}$

ដោយ $1-z=1-\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}=2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})$

គេបាន $W=\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})}$

$$W=\frac{\sin\frac{\pi}{22}+i\cos\frac{\pi}{22}}{2\sin\frac{\pi}{22}}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{22}$$

ដោយផ្នែកពិតនៃ W គឺ $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣

គណនា $P=\cos 20^{o}\cos 40^{o}\cos 80^{o}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $P=\cos 20^{o}\cos 40^{o}\cos 80^{o}$

តាង $z=\cos 20^{o}+i\sin 20^{o}$ ហើយ $z^{9}=\cos 180^{o}+i\sin 180^{o}=-1$

គេបាន $\cos 20^{o}=\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}=\dfrac{z^{2}+1}{2z}$ (ព្រោះ $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$)

$$\cos 40^{o}=\frac{z^{2}+\overline{z}^{2}}{2}=\frac{z^{4}+1}{2z^{2}}\ ;\ \cos 80^{o}=\frac{z^{4}+\overline{z}^{4}}{2}=\frac{z^{8}+1}{2z^{4}}$$

គេបាន $P=\dfrac{(z^{2}+1)(z^{4}+1)(z^{8}+1)}{8z^{7}}=\dfrac{(z^{2}-1)(z^{2}+1)(z^{4}+1)(z^{8}+1)}{8z^{7}(z^{2}-1)}$

$$=\frac{z^{16}-1}{8(z^{9}-z^{7})}=\frac{-z^{7}-1}{8(-1-z^{7})}=\frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $P=\cos 20^{o}\cos 40^{o}\cos 80^{o}=\dfrac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d ។

គេតាង $S_n = \frac{\cos a_1}{\cos d} + \frac{\cos a_2}{\cos^2 d} + \frac{\cos a_3}{\cos^3 d} + ... + \frac{\cos a_n}{\cos^n d}$

ចំពោះ $n = 1, 2, 3, ...$

ចូរស្រាយថា $S_n = \frac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $S_n = \frac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$

ដោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d នោះ $a_{n+1} = a_n + d$

គេបាន $\sin a_{n+1} = \sin(a_n + d) = \sin a_n \cos d + \sin d \cos a_n$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n+1} d \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} = \frac{\sin a_n \cos d + \sin d \cos a_n}{\cos^{n+1} d}$$

គេទាញ $\frac{\cos a_n}{\cos^n d} = \frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} - \frac{\sin a_n}{\cos^n d}\right)$

$$S_n = \sum_{p=1}^{n}\left[\frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{p+1}}{\cos^{p+1} d} - \frac{\sin a_p}{\cos^p d}\right)\right]$$

$$S_n = \frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} - \frac{\sin a_1}{\cos d}\right) = \frac{\sin a_{n+1}}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេដឹងថា $\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

ចូរស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

តាង $u=e^{ix}$, $v=e^{iy}$, $w=e^{iz}$

គេបាន $u+v+w=\left(\cos x+\cos y+\cos z\right)+i\left(\sin x+\sin y+\sin z\right)$

ហើយ $uvw=e^{i(x+y+z)}=\cos(x+y+z)+i\sin(x+y+z)$

គេមាន $\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

នាំឲ្យ $\frac{(\cos x+\cos y+\cos z)+i(\sin x+\sin y+\sin z)}{\cos(x+y+z)+i\cos(x+y+z)}=a$

$$\frac{u+v+w}{uvw}=a$$

$$\frac{1}{vw}+\frac{1}{uw}+\frac{1}{uv}=a$$

$$e^{-i(y+z)}+e^{-i(x+z)}+e^{-i(x+y)}=a$$

តាមសមភាពនេះគេទាញបាន ៖

$$\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$$

និង $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(z+x)=0$

ដូចនេះ $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យ $f(x)=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}-\sqrt{\cos^4+4\sin^2 x}$

ក. សម្រួល $f(x)$

ខ.កំនត់ x ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{1}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. សម្រួល $f(x)$

គេមាន $f(x)=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}-\sqrt{\cos^4+4\sin^2 x}$

ដោយ $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ និង $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

$$\begin{aligned} f(x)&=\sqrt{\sin^4 x+4(1-\sin^2 x)}-\sqrt{\cos^4 x+4(1-\cos^2 x)} \\ &=\sqrt{4-4\sin^2 x+\sin^4 x}-\sqrt{4-4\cos^2 x+\cos^4 x} \\ &=\sqrt{(2-\sin^2 x)^2}-\sqrt{(2-\cos^2 x)^2} \\ &=(2-\sin^2 x)-(2-\cos^2 x)=\cos^2 x-\sin^2 x \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f(x)=\cos 2x$ ។

ខ.កំនត់ x ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{1}{2}$

គេបាន $\cos 2x=\frac{1}{2}$ នាំឱ្យ $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ដែល $k\in Z$ ។

លំហាត់ទី៧

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គេឱ្យ $S_n = \cos^n \frac{\pi}{12} + \sin^n \frac{\pi}{12}$

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ខ. បង្ហាញថា $4S_{n+2} - 2\sqrt{6}S_{n+1} + S_n = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$

គេមាន $S_n=\cos^n\frac{\pi}{12}+\sin^n\frac{\pi}{12}$

តាង $x_1=\cos\frac{\pi}{12}$; $x_2=\sin\frac{\pi}{12}$ នោះ $S_n={x_1}^n+{x_2}^n$

គេមាន $x_1+x_2=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

ហើយ $x_1.x_2=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{6-2}{16}=\frac{1}{4}$

គេបាន x_1 និង x_2 ជាឫសសមីការ $x^2-\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{1}{4}=0$

ឬ $4x^2-2\sqrt{6}x+1=0$

គេទាញ $\begin{cases}4{x_1}^2-2\sqrt{6}x_1+1=0\\4{x_2}^2-2\sqrt{6}x_2+1=0\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}4{x_1}^{n+2}-2\sqrt{6}{x_1}^{n+1}+{x_1}^n=0\ (i)\\4{x_2}^{n+2}-2\sqrt{6}{x_2}^{n+1}+{x_2}^n=0\ (ii)\end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន :

$$4({x_1}^{n+2}+{x_2}^{n+2})-2\sqrt{6}({x_1}^{n+1}+{x_2}^{n+1})+({x_1}^n+{x_2}^n)=0$$

ដូចនេះ $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យ $f_k(x)=\frac{1}{k}(\sin^k x+\cos^k x)$ ដែល $k=1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;...$

ចូរបង្ហាញថា $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$

គេមាន $f_4(x)=\frac{1}{4}(\sin^4 x+\cos^4 x)$

$$=\frac{1}{4}[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right)$$

ហើយ $f_6(x)=\frac{1}{6}(\sin^6 x+\cos^6 x)$

$$f_6(x)=\frac{1}{6}\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-3\sin^2 x\cos^2 x\right)$$

គេបាន $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

ដូចនេះ $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យ a , b , c , d ជាចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[\,0\,;\,\pi\,]$ ដោយដឹងថា

$$\begin{cases}\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d)\\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d)\end{cases}$$

ចូរបង្ហាញថា $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$

គេមាន $\begin{cases}\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d)\\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d)\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}\sin a - 8\sin d = 4\sin c - 7\sin b\\ \cos a - 8\cos d = 4\cos c - 7\cos b\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}(\sin a - 8\sin d)^2 = (4\sin c - 7\sin b)^2 \quad (i)\\ (\cos a - 8\cos d)^2 = (4\cos c - 7\cos b)^2 \quad (ii)\end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន :

$$65 - 16\cos(a-d) = 65 - 56\cos(b-c)$$

$$-16\cos(a-d) = -56\cos(b-c)$$

ដូចនេះ $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យ $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\cos^8\theta}{a^3} + \dfrac{\sin^8\theta}{b^3} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{\cos^8\theta}{a^3} + \dfrac{\sin^8\theta}{b^3} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$

គេមាន $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ នាំឱ្យ $\tan^2\theta = \dfrac{b}{a}$

ដោយ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

គេបាន $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{b}{a}$

សមមូល $\dfrac{\sin^2\theta}{b} = \dfrac{\cos^2\theta}{a} = \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{b+a} = \dfrac{1}{a+b}$

គេទាញ $\dfrac{\sin^2\theta}{b} = \dfrac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\dfrac{\sin^8\theta}{b^3} = \dfrac{b}{(a+b)^4}$ (1)

ហើយ $\dfrac{\cos^2\theta}{a} = \dfrac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\dfrac{\cos^8\theta}{a^3} = \dfrac{a}{(a+b)^4}$ (2)

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{\cos^8\theta}{a^3} + \frac{\sin^8\theta}{b^3} = \frac{a+b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}$$

ដូចនេះ $\dfrac{\cos^8\theta}{a^3} + \dfrac{\sin^8\theta}{b^3} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យ $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$

ដែល $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a+b\neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{1}{(a+b)^4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{1}{(a+b)^4}$

យើងមាន $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$

យើងបាន $(a+b)(b\cos^4 x+a\sin^4 x)=ab$

$ab\cos^4 x+a^2\sin^4 x+b^2\cos^4 x+ab\sin^4 x-ab=0$

$a^2\sin^4 x+b^2\cos^4 x+ab\,(\sin^4 x+\cos^4 x-1\,)=0$

$a^2\sin^2 x+b^2\cos^4 x+ab\left[\,(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-1\,\right]=0$

$a^2\sin^2 x+b^2\cos^4 x-2ab\sin^2 x\cos^2 x=0$

$(a\sin^2 x-b\cos^2 x)=0$

គេទាញ $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{a+b}=\frac{1}{a+b}$

គេបាន $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\cos^{10} x}{a^4}=\frac{a}{(a+b)^5}$ **(1)**

ហើយ $\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{a}{(a+b)^5}$ **(2)**

បូកសមីការគេបាន $\frac{\cos^{10} x}{a^4}+\frac{\sin^{10} x}{b^4}=\frac{a+b}{(a+b)^5}=\frac{1}{(a+b)^4}$

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យត្រីកោណ ABC ហើយគេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$

គេមាន $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$$=2\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

ហើយ $\cos C=1-2\sin^2\dfrac{C}{2}$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1-2\sin\frac{C}{2}(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2})$$

ដោយ $\sin\dfrac{C}{2}-\cos\dfrac{A-B}{2}=\cos\dfrac{A+B}{2}-\cos\dfrac{A-B}{2}$

$$=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\quad (i)$

គេដឹងថា :

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ ;\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

និង $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}$$

គេទាញ $(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=pr^2=r\,S$

ហើយ $abc=4prR$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4.\frac{r\,S}{4prR}=1+\frac{r}{R}$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យ $f(x)=\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}+\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}$

ចូរស្រាយថា $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c} \le f(x) \le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c}$

រួចបញ្ជាក់តម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c} \le f(x) \le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c}$

យើងមាន $f(x)=\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}+\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}$ (1)

ដោយ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះ $\forall x\in IR : f(x)>0$

លើកអង្គទាំងពីរនៃ (1) ជាការេគេបាន ៖

$$f^2(x)=\left(\sqrt{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}+\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x+c}\right)^2$$

$$f^2(x)=a+b+2c+2\sqrt{(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c)(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c)} \quad (2)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីគ្រប់ចំនួនពិត $A,\ B\ge 0$

គេមាន $A+B\ge 2\sqrt{A.B}$ ឬ $2\sqrt{A.B}\le A+B$

គេបាន $2\sqrt{(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c)(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c)} \le a+b+2c$

តាមទំនាក់ទំនង (2) គេទាញបាន ៖

$$f^2(x)\le a+b+2c+a+b+2c=4\left(\frac{a+b}{2}+c\right)$$

នាំឱ្យ $f(x)\le 2\sqrt{\frac{a+b}{2}+c}$ (3)

យក $P(x)=(a\sin^2 x+b\cos^2 x+c)(a\cos^2 x+b\sin^2 x+c)$

$$P(x)=[\,a(1-\cos^2 x)+b\cos^2 x+c]\,[a\cos^2 x+b(1-\cos^2 x)+c]$$

$$P(x)=[(a+c)+(b-a)\cos^2 x]\,[\,(b+c)-(b-a)\cos^2 x]$$

$$P(x)=(a+c)(b+c)+(b-a)^2\cos^2 x-(b-a)^2\cos^4 x$$

$$P(x)=(a+c)(b+c)+(b-a)^2\cos^2 x\sin^2 x$$

យើងមាន $(b-a)^2\sin^2 x\cos^2 x\geq 0\quad,\ \forall x\in IR$

គេទាញបាន $P(x)\geq (a+c)(b+c)\quad,\ \forall x\in IR$

ទំនាក់ទំនង (2) គេអាចសរសេរ ៖

$$f^2(x)=a+b+2c+2\sqrt{P(x)}\geq a+b+2c+2\sqrt{(a+c)(b+c)}$$

$$f^2(x)\geq (a+c)+(b+c)+2\sqrt{(a+c)(b+c)}$$

$$f^2(x)\geq (\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c})^2$$

គេទាញ $f(x)\geq \sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$ (4)

តាមទំនាក់ទំនង (3) និង (4) គេទាញបាន ៖

$\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}\ \leq\ f(x)\ \leq\ 2\sqrt{\dfrac{a+b}{2}+c}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ដូចអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាស្មើ $M=2\sqrt{\dfrac{a+b}{2}+c}$

និងមានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ $m=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2}$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍នេះ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍នេះ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2}\\
&= \sqrt{\cos^4 x+2+\frac{1}{\cos^4 x}+\sin^4 x+2+\frac{1}{\sin^4 x}}\\
&= \sqrt{4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x})}\\
&= \sqrt{4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\sin^4 x\cos^4 x})}\\
&= \sqrt{4+(\cos^4 x+\sin^4 x)(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x})}\\
&= \sqrt{4+\left[(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right](1+\frac{16}{\sin^4 2x})}\\
&= \sqrt{4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})}
\end{aligned}
$$

ដោយគេមាន $\sin^2 2x\le 1$ នាំឱ្យ $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\ge\frac{1}{2}$ និង

$1+\frac{16}{\sin^4 2x}\ge 17$ ។

គេទាញ $4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})\ge 4+\frac{17}{2}=\frac{25}{2}$

យើងបាន $f(x)=\sqrt{4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})}\ge\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍គឺ $m=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី១៥

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\sqrt{\frac{1}{16}+\cos^4 x-\frac{1}{2}\cos^2 x}+\sqrt{\frac{9}{16}+\cos^4 x-\frac{3}{2}\cos^2 x}=\frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\sqrt{\frac{1}{16}+\cos^4 x-\frac{1}{2}\cos^2 x}+\sqrt{\frac{9}{16}+\cos^4 x-\frac{3}{2}\cos^2 x}=\frac{1}{2} \quad (1)$$

សមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{\left(\cos^2 x-\frac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(\cos^2 x-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\left|\cos^2 x-\frac{1}{4}\right|+\left|\cos^2 x-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

តាង $t=\cos^2 x$ ដែល $0\le t\le 1$ សមីការ (2) អាចសរសេរ

$$\left|t-\frac{1}{4}\right|+\left|t-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2} \quad (3)$$

លើអក្ស (x'ox) ជ្រើសរើសចំនុច $M(t)$, $A(\frac{1}{4})$, $B(\frac{3}{4})$

តាម (3) គេបាន $MA+MB=\frac{1}{2}$ ដោយ $AB=\frac{1}{2}$

គេបាន $MA+MB=AB$ នាំឱ្យ M នៅក្នុង $[AB]$

គេទាញ $\frac{1}{4}\le t\le\frac{3}{4}$ សមមូល $\frac{1}{4}\le\cos^2 x\le\frac{3}{4}$

សមមូល $\frac{1}{2}\le|\cos x|\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ គេទាញ

$$\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi\\ -\frac{\pi}{3}+k'\pi\le x\le-\frac{\pi}{6}+k'\pi \quad , k;k'\in Z\end{array}\right.$$

លំហាត់ទី១៦

ក, ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

ខ, ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

តាង $A = \cot x - 2\cot 2x$ ដោយ $\begin{cases} \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \\ \cot 2x = \dfrac{1}{\tan 2x} = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x} \end{cases}$

គេបាន $A = \dfrac{1}{\tan x} - 2\left(\dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\right) = \dfrac{1-1+\tan^2 x}{\tan x} = \tan x$

ដូចនេះ $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ ។

ខ, គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$\begin{aligned} S_n &= \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\tan\frac{a}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2^k}\left(\cot\frac{a}{2^k} - 2\cot\frac{a}{2^{k-1}}\right)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{a}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}}\cot\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - 2\cot 2a \end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - 2\cot 2a$ ។

លំហាត់ទី១៧

ក, ចូរស្រាយថា $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

ខ, ចូរគណនា

$S_n = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + \dots + 3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

យើងមាន $\sin 3x = \sin(x + 2x)$

តាមរូបមន្ត $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$$\begin{aligned}
&= \sin x\cos 2x + \sin 2x\cos x\\
&= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x\cos^2 x\\
&= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x(1 - \sin^2 x)\\
&= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x - 2\sin^3 x\\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x
\end{aligned}$$

ដោយ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

ដូចនេះ $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ ។

ខ, គណនា $S_n = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + \dots + 3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(3^{k-1}\sin^3\frac{a}{3^k}\right)$ ដោយ $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$$S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(3^k\sin\frac{a}{3^k} - 3^{k-1}\sin\frac{a}{3^{k-1}}\right) = \frac{1}{4}(3^n\sin\frac{a}{3^n} - \sin a)$$

លំហាត់ទី១៨

បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេមាន

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$

គេមាន $a=2R\sin A$ និង $b=2R\sin B$

គេបាន $a-b=2R(\sin A-\sin B)$

$$a-b=4R\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$a-b=4R\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad(i)$$

ហើយ $a+b=2R(\sin A+\sin B)$

$$a+b=4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$a+b=4R\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\quad(ii)$$

ធ្វើវិធីចែក (i) និង (ii) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$$ ។

លំហាត់ទី១៩

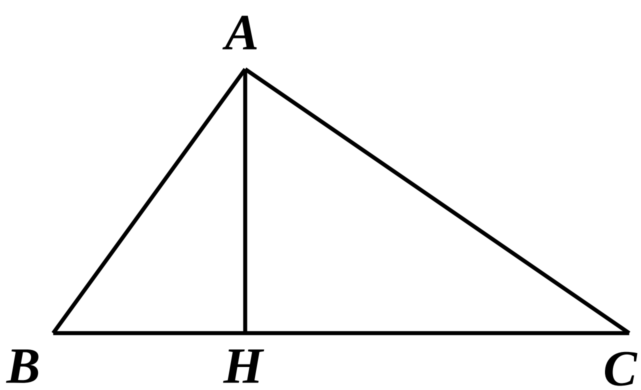
បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែល $A \neq B \neq C$ គេមាន

ក. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

ខ. $\dfrac{a^3\sin^3(B-C)+b^3\sin^3(C-A)+c^3\sin^3(A-B)}{\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)}=3abc$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$



ក្នុងត្រីកោណកែង ABH គេមាន $\cos B=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{BH}{c}$

គេទាញ $BH=c\cos B$

ក្នុងត្រីកោណកែង ACH គេមាន $\cos C=\dfrac{HC}{AC}=\dfrac{HC}{b}$

គេទាញ $HC=b\cos C$

ដោយ $a=BC=BH+HC$ នាំឱ្យ $a=b\cos C+c\cos B$

ដូចគ្នាដែរ $b=a\cos C+c\cos A$ និង $c=a\cos B+b\cos A$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

គេបាន $\frac{b\cos C+c\cos B}{\sin A}=\frac{a\cos C+c\cos A}{\sin B}$

$b\cos C\sin B+c\sin B\cos B=a\cos C\sin A+c\cos A\sin A$

ឬ $(b\sin B-a\sin A)\cos C=\frac{c}{2}(\sin 2A-\sin 2B)$

$(b\sin B-a\sin A)\cos c=c\sin(A-B)\cos(A+B)$

$(b\sin B-a\sin A)\cos C=-c\sin(A-B)\cos C$

គេទាញ $c\sin(A-B)=a\sin A-b\sin B\ \ (i)$

ដូចគ្នាដែរ $a\sin(B-C)=b\sin B-c\sin C\ \ (ii)$

$b\sin(C-A)=c\sin C-a\sin A\ \ (iii)$

បូកទំនាក់ទំនង (i) ; (ii) & (iii) គេបាន :

$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$ ។

ខ. $\frac{a^3\sin^3(B-C)+b^3\sin^3(C-A)+c^3\sin^3(A-B)}{\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)}=3abc$

តាង $x=a\sin(B-C); y=b\sin(C-A)\ ; z=c\sin(A-B)$

គេបាន $x+y+z=0$

ឬ $x+y=-z$

គេបាន $(x+y)^3=-z^3$

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=-z^3$$

$$x^3+3xy(x+y)+y^3=-z^3$$

$$x^3-3xyz+y^3=-z^3$$

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$

ជំនួស $x=a\sin(B-C);y=b\sin(C-A)\ \ ;z=c\sin(A-B)$

រួចចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)$

$$\frac{a^3\sin^3(B-C)+b^3\sin^3(C-A)+c^3\sin^3(A-B)}{\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)}=3abc$$

លំហាត់ទី២០

ក, ចូរស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

ខ, ចូរគណនា $S_n=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

យើងមាន $\cos(n+1)x=\cos(nx+x)$

ឬ $\cos(n+1)x=\cos(nx)\cos x-\sin(nx)\sin x$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n+1}x$ គេបាន ៖

$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\cos(nx)\cos x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\sin(nx)\sin x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}-\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}.\tan x$$

នាំឱ្យ $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\frac{1}{\tan x}$

ដូចនេះ $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$ ។

ខ, គណនា $S_n=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kx)}{\cos^k x}\right]$

ដោយ $\frac{\sin(kx)}{\cos^k x}=\left[\frac{\cos(k+1)x}{\cos^{k+1}x}-\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}\right].\cot x$

$$S_n=\cot x\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos(k+1)x}{\cos^{k+1}x}-\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}\right)=\cot x\left(\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-1\right)$$

ដូចនេះ $\mathbf{S_n=\cot x\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-1\right]}$ ។

លំហាត់ទី១

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\log_3(\frac{x+y}{2})+i\left(\log_2 x+\log_2 y\right)$

និង $W=\frac{13+i}{1-2i}$ ដែល $x\in IR_+^*$; $y\in IR_+^*$ ។

ក_ ចូរសរសេរ W ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ_ កំនត់ x និង y ដើម្បីឱ្យ $Z=W$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_សរសេរ W ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន $W=\frac{12+i}{1-2i}=\frac{(12+i)(1+2i)}{1+4}=\frac{12+24i+i-2}{5}=2+5i$

ដូចនេះ $\boxed{W=2+5i}$ ។

ខ_កំនត់ x និង y ដើម្បីឲ្យ $Z=W$

យើងបាន $Z=W$ សមមូល $\begin{cases}\log_2(\frac{x+y}{3})=2\\ \log_2 x+\log_2 y=5\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}\log_2(\frac{x+y}{3})=2\\ \log_2(x.y)=5\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}x+y=12\\ x.y\ \ =32\end{cases}$

គេទាញ $x\,;\,y$ ជាឫសសមីការ $u^2-12u+32=0$

ដោយ $\Delta'=36-32=4$ គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l}u_1=6-2=4\\ u_2=6+2=8\end{array}\right.$

ដូចនេះ $x=4\,;\,y=8$ ឬ $x=8\,;\,y=4$ ។

លំហាត់ទី២

ដោះស្រាយសមីការ $2z-|z|=\dfrac{9-7i}{1+i}$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$2z-|z|=\dfrac{9-7i}{1+i}$ តាង $z=x+i.y\ ,\ x;y\in IR$

គេបាន $2(x+iy)-|x+iy|=\dfrac{(9-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$$2x+2iy-\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9-9i-7i-7}{2}$$

$$(2x-\sqrt{x^2+y^2})+2iy=1-8i$$

គេទាញ $\begin{cases}2x-\sqrt{x^2+y^2}=1 & (1)\\ 2y=-8 & (2)\end{cases}$

តាម (2) គេទាញ $y=-4$ យកទៅជួសក្នុង (1) គេបាន

$2x-\sqrt{x^2+16}=1$

$$2x-1=\sqrt{x^2+16}\quad ,\ x>-\frac{1}{2}$$

$$(2x-1)^2=x^2+16$$

$$4x^2-4x+1=x^2+16$$

$$3x^2-4x-15=0\quad ;\ \Delta'=4+45=7^2$$

គេទាញឫស $x_1=\dfrac{2+7}{3}=3$; $x_2=\dfrac{2-7}{3}=-\dfrac{5}{3}<-\dfrac{1}{2}$ (មិនយក)

គេបាន $x=3$; $y=-4$ ។ដូចនេះ $\boxed{z=3-4i}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ដែល $Z_2 \neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}$

យើងតាង $Z_1 = a + i.b$ និង $Z_2 = c + i.d$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

យើងបាន $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{a+i.b}{c+i.d} = \dfrac{(a+i.b)(c-i.d)}{(c+i.d)(c-i.d)} = \dfrac{ac - i.ad + i.bc - i^2.bd}{c^2 - i^2.d^2}$

គេបាន $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + i.\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

នាំឱ្យ
$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2}}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(a^2c^2 + a^2d^2) + (b^2c^2 + b^2d^2)}}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)}}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(c^2+d^2)(a^2+b^2)}}{c^2+d^2}$$

គេទាញ $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$

ដោយគេមាន $\begin{cases} |Z_1| = \sqrt{a^2+b^2} \\ |Z_2| = \sqrt{c^2+d^2} \end{cases}$

ដូច្នេះ $\boxed{\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

ចំពោះគ្រប់ a,b,c,d ជាចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (XOY) យើងជ្រើសរើសវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{U}$ និង $\vec{V}$ មានអាហ្វិករៀងគ្នា

Z_1 និង Z_2 នាំឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{U}+\vec{V}$ មានអាហ្វិក Z_1+Z_2 ។

តាមលក្ខណៈជ្រុងរបស់ត្រីកោណគេបាន $\|\vec{U}+\vec{V}\| \le \|\vec{U}\|+\|\vec{V}\|$

ដោយ : $\|\vec{U}\|=|Z_1|$, $\|\vec{V}\|=|Z_2|$, $\|\vec{U}+\vec{V}\|=|Z_1+Z_2|$

ដូចនេះ $\boxed{|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|}$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$

យើងតាង $Z_1=a+i.b$ និង $Z_2=c+i.d$ ដែល a,b,c,d ជាចំនួនពិត ។

មាន $Z_1+Z_2=(a+c)+i.(b+d)$ នាំឱ្យ $|Z_1+Z_2|=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

ហើយ $|Z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|Z_2|=\sqrt{c^2+d^2}$ ។

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ ។

ក.ចូរសរសេរ $\mathbf{z^2}$ ជាទំរង់ពិជគណិត ។

ខ.ចូរសរសេរ $\mathbf{z^2}$ និង $\mathbf{z}$ ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\mathbf{\cos\frac{\pi}{8}}$ និង $\mathbf{\sin\frac{\pi}{8}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរ $\mathbf{z^2}$ ជាទំរង់ពិជគណិត

យើងបាន $\mathbf{z^2=(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}})^2}$

$$=(\sqrt{2+\sqrt{2}})^2+2(\sqrt{2+\sqrt{2}})(i.\sqrt{2-\sqrt{2}})+(i.\sqrt{2-\sqrt{2}})^2$$

$$=2+\sqrt{2}+2\sqrt{2^2-2}.i-2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{z^2=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}.i}}$

ខ-សរសេរ $\mathbf{z^2}$ និង $\mathbf{z}$ ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $\mathbf{z^2=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}.i=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

ដូចនេះ $\mathbf{z^2=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ និង $\mathbf{z=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i.\sin\frac{\pi}{8}\right)}$

គ-ទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\mathbf{\cos\frac{\pi}{8}}$ និង $\mathbf{\sin\frac{\pi}{8}}$

តាមសំរាយខាងលើគេទាញ $\mathbf{2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i.\sin\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} \text{ និង } \mathbf{\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8}}}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេអោយចំនួនកុំផ្លិច : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i.\sqrt{2}}{2}$ និង $z_2 = 1 - i$

ក.ចូរសរសេរ z_1 , z_2 និង $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.ចូរសរសេរ $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត ។

គ.ទាញអោយបានថា $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ z_1 , z_2 និង $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ:

គេមាន $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i.\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i.\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 = \sqrt{2}\left[\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i.\sin(-\dfrac{\pi}{6})\right]}$ ។

គេមាន $z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i.\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_2 = \sqrt{2}\left[\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i.\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right]}$ ។

គេមាន $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}) + i.\sin(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4})\right]$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \cos\dfrac{\pi}{12} + i.\sin\dfrac{\pi}{12}}$ ។

ខ. សរសេរ $Z = \frac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត

គេបាន $Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{6} - i\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ ។

គ. ទាញអោយបានថា :

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន :

$$Z = \cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12} \quad (1)$$

និង $Z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad (2)$

ផ្ទឹមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន :

$$\cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ និង $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរ ។

ចូរស្រាយថា $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

គេមាន $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)$

$$|z_1+z_2|^2=z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+z_2\overline{z}_2$$

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+|z_2|^2 \quad (1)$$

ហើយ $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)$

$$|z_1-z_2|^2=z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2+z_2\overline{z}_2$$

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2+|z_2|^2 \quad (2)$$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន ៖

$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរដែល $|z_1|=|z_2|=1$

និង $z_1.z_2 \neq -1$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ

តាង $Z=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ នោះ $\overline{Z}=\dfrac{\overline{z}_1+\overline{z}_2}{1+\overline{z}_1.\overline{z}_2}$

ដោយ $z_1.\overline{z}_1=|z_1|^2=1$ នោះ $\overline{z}_1=\dfrac{1}{z_1}$ ហើយដូចគ្នា $\overline{z}_2=\dfrac{1}{z_2}$

គេបាន $\overline{Z}=\dfrac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1}.\dfrac{1}{z_2}}=\dfrac{z_2+z_1}{z_2z_1+1}=Z$

ដោយ $\overline{Z}=Z$ នោះ $Z=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិត ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})+i.(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})$

ដែល x ជាចំនួនពិត។

ចូរកំនត់រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិចនេះ ?

ដំណោះស្រាយ

រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិច

យើងបាន $|Z|=\sqrt{(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2}$

តាង $f(x)=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2$

$$=\cos^4 x+2+\frac{1}{\cos^4 x}+\sin^4 x+2+\frac{1}{\sin^4 x}$$

$$=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x})$$

$$=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\sin^4 x\cos^4 x})$$

$$f(x)=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x})$$

$$=4+\left[(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right](1+\frac{16}{\sin^4 2x})$$

$$=4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})$$

ដោយគេមាន $\sin^2 2x\le 1$ នាំឲ្យ $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\ge\frac{1}{2}$

និង $1+\frac{16}{\sin^4 2x}\ge 17$

គេទាញ $4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})\ge 4+\frac{17}{2}=\frac{25}{2}$

យើងបាន $f(x)=4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})\ge\frac{25}{2}$

ដោយ $|Z|=\sqrt{f(x)}$ គេទាញបាន $|Z|\ge\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះម៉ូឌុលអប្បបរមានៃ Z គឺ $|Z|_{\min}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យ $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

យើងមាន $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$

តាង $Z=\frac{1}{\sqrt{3}}+i=\frac{1+i.\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $Z^n=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

ហើយ $\overline{Z}^n=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

គេទាញ $A=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)-\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$$=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}-\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}}$ ។

លំហាត់ទី១១

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(O, \vec{i}, \vec{j})$ គេឱ្យបួនចំនុច A, B, C, D

ដែលមានអាហ្វិករៀងគ្នា

$Z_A = 1+6i$, $Z_B = 4+5i$, $Z_C = 5+4i$ និង $Z_D = -2-3i$ ។

ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារិកក្នុងរង្វង់មួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់ផ្ចិត

និង កាំរបស់វា ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារិកក្នុងរង្វង់

យើងតាង $(c): x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ជាសមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

យើងបាន $A \in (c)$ នាំឱ្យ $1^2 + 6^2 + a + 6b + c = 0$

ឬ $a + 6b + c = -37$ (1)

$B \in (c)$ នាំឱ្យ $4^2 + 5^2 + 4a + 5b + c = 0$

ឬ $4a + 5b + c = -41$ (2)

$C \in (c)$ នាំឱ្យ $(-2)^2 + (-3)^2 - 2a - 3b + c = 0$

ឬ $-2a - 3b + c = -13$ (3)

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a + 6b + c = -37 \\ 4a + 5b + c = -41 \\ -2a - 3b + c = -13 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបានចម្លើយ

$a = -2$, $b = -2$, $c = -23$ ។

សមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ **ABC** អាចសរសេរ :

$$(c) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$$

ឬ $(c) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$

ម្យ៉ាងទៀតដោយយកកូអរដោនេ **D** ជួសក្នុងសមីការ

$(c) : (-2-1)^2 + (-3-1)^2 = 25$

វាផ្ទៀងផ្ទាត់នោះនាំឱ្យ $D \in (c)$ ។

ដោយបួនចំនុច **A , B , C, D** ស្ថិតនៅលើរង្វង់មានសមីការ

$(c) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ តែមួយ

នោះនាំឱ្យចតុកោណ**ABCD** ចារិកក្នុងរង្វង់ **(c)** មានផ្ចិត $I(1,1)$

និង កាំ $R = 5$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ z_1 និង z_2 ជាពីរចំនួនកុំផ្លិច ។

ចូរបង្ហាញថា $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\geq\sqrt{|z_1{}^2-1||z_2{}^2-1|}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\geq\sqrt{|z_1{}^2-1||z_2{}^2-1|}$

តាមវិសមភាពត្រីកោណគេបាន :

$$|1+z_1z_2|+|z_1+z_2| \;\geq\; |1+z_1z_2+z_1+z_2|$$

និង $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2| \;\geq\; |1+z_1z_2-z_1-z_2|$

គេបាន $\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\geq|(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2|$

ដោយ

$$(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2=1-z_1{}^2-z_2{}^2+z_1{}^2z_2{}^2=(1-z_1{}^2)(1-z_2{}^2)$$

គេបាន $\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\geq|(1-z_1{}^2)(1-z_2{}^2)|$

$$\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\geq|1-z_1{}^2||1-z_2{}^2|$$

ដូចនេះ $\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\geq|(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2|$

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យ z_1 ; z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1|=|z_2|=r>0$ ។

បង្ហាញថា $\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\geq\frac{1}{r^2}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\geq\frac{1}{r^2}$$

តាង $z_1=r(\cos 2x+i\sin 2x)$ និង $z_2=r(co2y+i\sin 2y)$

ដែល $x\in IR$; $y\in IR$ ។

គេបាន :

$$\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}=\frac{r[\ (\cos 2x+\cos 2y)+i(\sin 2x+\sin 2y)\ ]}{r^2+r^2[\ \cos(2x+2y)+i.\sin(2x+2y)\ ]}$$

$$=\frac{2\cos(x+y)\cos(x-y)+2i\sin(x+y)\cos(x-y)}{r\ [\ 2\cos^2(x+y)+2i\sin(x+y)\cos(x+y)\ ]}$$

$$=\frac{1}{r}.\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}=\frac{1}{r}\frac{\sin(y-x)}{\sin(y+x)}$

គេបាន :

$$\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}+\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\right]$$

ដោយ $\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}\geq\cos^2(x-y)$ ព្រោះ $\cos^2(x+y)\leq 1$

ហើយ $\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\geq\sin^2(x-y)$ ព្រោះ $\sin^2(x+y)\leq 1$

$$\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}+\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\geq\cos^2(x-y)+\sin^2(x-y)\ =1$$

ដូចនេះ $\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\geq\frac{1}{r^2}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេយក $z_1 ; z_2 ; ....; z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$(k+1)z_{k+1} - i(n-k)z_k = 0 \ ; \ k = 0 , 1 , 2 , ... , n-1$

ក-កំនត់ z_0 បើគេដឹងថា $z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_n = 2^n$

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា :

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2 < \frac{(3n+1)^n}{n!}$$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ z_0 បើគេដឹងថា $z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_n = 2^n$

គេមាន $(k+1)z_{k+1} - i(n-k)z_k = 0$

គេបាន $\frac{z_{k+1}}{z_k} = i.\frac{n-k}{k+1}$

$$\prod_{k=0}^{(p-1)}\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right) = \prod_{k=0}^{p-1}\left(i.\frac{n-k}{k+1}\right)$$

$$\frac{z_p}{z_0} = i^p C_n^p \quad ; \ C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

គេទាញ $z_p = i^p z_0 C_n^p \ ; p = 0 , 1 , 2 , ...$

ដោយ $z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_n = 2^n$ ឬ $\sum_{p=0}^{n}(z_p) = 2^n$

មាន $\sum_{p=0}^{n}(z_p)=z_0\sum_{p=0}^{n}C_n^p\, i^p=z_0(1+i)^n$

គេបាន $z_0(1+i)^n=2^n$

គេទាញ $z_0=\dfrac{2^n}{(1+i)^n}=(1-i)^n$

ដូចនេះ $z_0=(1-i)^n$ ។

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា :

$$|z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+....+|z_n|^2<\frac{(3n+1)^n}{n!}$$

ដោយអនុវត្តន៏វិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ យើងបាន

$$\begin{aligned}|z_0|^2+|z_1|^2+...+|z_n|^2&=|z_0|^2\left((C_n^0)^2+(C_n^1)^2+....+(C_n^n)^2\right)\\&=|z_0|^2C_{2n}^n=2^n.\frac{(2n)!}{n!n!}\\&=\frac{2^n}{n!}\left(2n(2n-1)(2n-2)....(n+1))\right)\\&<\frac{2^n}{n!}\left(\frac{2n+(2n-1)+(2n-2)+....+(n+1)}{n}\right)^n\\&<\frac{(3n+1)^n}{n!}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $|z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+....+|z_n|^2<\dfrac{(3n+1)^n}{n!}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យ z_1 ; z_2 ; z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដោយដឹងថា :

$z_1+z_2+z_3=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|z_1|=|z_2|=|z_3|$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|z_1|=|z_2|=|z_3|$

គេមាន $z_1+z_2+z_3=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$

គេទាញ $\begin{cases} z_1+z_2=-z_3 & (1) \\ z_1z_2+z_3(z_1+z_2)=0 & (2) \end{cases}$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) យើងបាន :

$z_1z_2-{z_3}^2=0$ នាំឱ្យ $|z_3|^2=|z_1|.|z_2|$

ដូចគ្នាដែរ $|z_2|^2=|z_1|.|z_3|$ និង $|z_1|^2=|z_2|.|z_3|$

យើងបាន :

$|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2=|z_1||z_2|+|z_2||z_3|+|z_3||z_1|$

ឬ $(|z_1|-|z_2|)^2+(|z_2|-|z_3|)^2+(|z_3|-|z_1|)^2=0$

ដូចនេះ $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ ។

លំហាត់ទី១៦

ចូរបង្ហាញថា $\left|\dfrac{6z-i}{2+3iz}\right| \le 1$ លុះត្រាតែ $|z| \le \dfrac{1}{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|z| \le \dfrac{1}{3}$

គេមាន $\left|\dfrac{6z-i}{2+3iz}\right| \le 1$

លក្ខខណ្ឌ $2+3iz \ne 0$ ឬ $z \ne \dfrac{2i}{3}$

គេបាន $|6z-i| \le |2+3iz|$

$$|6z-i|^2 \le |2+3iz|^2$$

$$(6z-i)(6\bar{z}+i) \le (2+3iz)(2-3i\bar{z})$$

$$36z\bar{z}+6iz-6i\bar{z}+1 \le 4-6i\bar{z}+6iz+9z\bar{z}$$

$$27z\bar{z} \le 3$$

$$z\bar{z} \le \frac{1}{9}$$

$$|z|^2 \le \frac{1}{9}$$

ដូចនេះ $|z| \le \dfrac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យ $z_1\ ;\ z_2\ ;\ z_3\ ;\ ....;\ z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1 ។

គេតាង $Z=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $0\le Z\le n^2$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $0\le Z\le n^2$

ដោយ $z_1\ ;\ z_2\ ;\ z_3\ ;\ ....;\ z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1

នោះគេអាចតាង $z_k=\cos x_k+i.\sin x_k$

ដែល $x_k\in IR\ ;k=1\ ,2\ ,\ 3\ ,....,n$

គេបាន $Z=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\cos x_k+i.\sin x_k)\times\sum_{k=1}^{n}(\cos x_k-i\sin x_k)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\cos x_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\right)^2\ge 0$$

គេបាន $Z\ge 0$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព **Cauchy – Schwartz**

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\cos x_k\right)^2 \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k\right)$$

និង $\left(\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\right)^2 \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\sin^2 x_k\right)$

គេទាញ $Z \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k\right) + n\sum_{k=1}^{n}(\sin^2 x_k)$

$$Z \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k + \sin^2 x_k\right)$$

$$Z \le n.n = n^2$$

ដូចនេះ $0 \le Z \le n^2$ ។

សំគាល់ : គេអាចស្រាយ $Z \le n^2$ តាមមួយរបៀបទៀតដូចខាងក្រោម

ដោយ $|z_k| = 1$ នោះ $\overline{z}_k = \frac{1}{z_k}$ គ្រប់ $k = 1 ; 2 ;.....; n$

គេបាន $Z = \left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)\times\overline{\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)}$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2 = n^2$$

គេទាញបាន $Z \le n^2$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $|z|=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$\sqrt{2} \le |1-z|+|1+z^2| \le 4$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{2} \le |1-z|+|1+z^2| \le 4$

តាង $z=\cos t+i.\sin t$

គេបាន $|1-z|=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=2|\sin\frac{t}{2}|$

ហើយ $|1+z^2|=\sqrt{(1+\cos 2t)^2+\sin^2 2t}=2|\cos t|$

$$=2|1-2\sin^2\frac{t}{2}|$$

គេបាន $|1-z|+|1-z^2|=2\left(|\sin\frac{t}{2}|+|1-2\sin^2\frac{t}{2}|\right)$

ដោយយក $x=\sin\frac{t}{2}$; $-1\le x\le 1$ ហើយតាងអនុគមន៍ f

កំនត់ដោយ $f(x)=|x|+|1-2x^2|$ ដែល $-1\le x\le 1$

ចំពោះ $-1\le x\le 1$ គេបាន $\frac{\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le 2$

ដូចនេះ $\sqrt{2} \le |1-z|+|1+z^2| \le 4$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=x+i.y$ ដែល x និង y ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ x និង y បើគេដឹងថា :

$(3+2i)z+(1+3i)\overline{z}=\dfrac{10}{2-i}$ ($\overline{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z) ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ x និង y

គេមាន $(3+2i)z+(1+3i)\overline{z}=\dfrac{10}{2-i}$

ដោយ $z=x+i.y$ នាំឱ្យ $\overline{z}=x-i.y$

គេបាន $(3+2i)(x+iy)+(1+3i)(x-iy)=\dfrac{10}{2-i}$

$$3x+3iy+2ix-2y+x-iy+3ix+3y=\frac{10(2+i)}{5}$$

$$(4x+y)+i.(5x+2y)=4+2i$$

គេទាញបាន $\begin{cases}4x+y=4\\5x+2y=2\end{cases}$

គេមាន $D=\begin{vmatrix}4 & 1\\5 & 2\end{vmatrix}=8-5=3$, $D_x=\begin{vmatrix}4 & 1\\2 & 2\end{vmatrix}=8-2=6$

និង $D_y=\begin{vmatrix}4 & 4\\5 & 2\end{vmatrix}=8-20=-12$

គេបាន $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{6}{3}=2$, $y=\dfrac{D_y}{D}=-\dfrac{12}{3}=-4$

ដូចនេះ $\boxed{x=2\ ,\ y=-4}$ ។

លំហាត់ទី១

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{Z=\log_3(\frac{x+y}{2})+i\left(\log_2 x+\log_2 y\right)}$

និង $\mathbf{W=\frac{13+i}{1-2i}}$ ដែល $\mathbf{x\in IR_+^*\ ;\ y\in IR_+^*}$ ។

ក_ចូរសរសេរ $\mathbf{W}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ_កំនត់ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{Z=W}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_សរសេរ $\mathbf{W}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងបាន $\mathbf{W=\frac{12+i}{1-2i}=\frac{(12+i)(1+2i)}{1+4}=\frac{12+24i+i-2}{5}=2+5i}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{W=2+5i}}$ ។

ខ_កំនត់ $\mathbf{x}$ និង $\mathbf{y}$ ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{Z=W}$

យើងបាន $\mathbf{Z=W}$ សមមូល $\begin{cases}\mathbf{\log_2(\frac{x+y}{3})=2}\\ \mathbf{\log_2 x+\log_2 y=5}\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}\mathbf{\log_2(\frac{x+y}{3})=2}\\ \mathbf{\log_2(x.y)=5}\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}\mathbf{x+y=12}\\ \mathbf{x.y\ \ =32}\end{cases}$

គេទាញ $\mathbf{x\ ;\ y}$ ជាឬសសមីការ $\mathbf{u^2-12u+32=0}$

ដោយ $\mathbf{\Delta'=36-32=4}$ គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l}\mathbf{u_1=6-2=4}\\ \mathbf{u_2=6+2=8}\end{array}\right.$

ដូចនេះ $\mathbf{x=4\ ;\ y=8}$ ឬ $\mathbf{x=8\ ;\ y=4}$ ។

លំហាត់ទី២

ដោះស្រាយសមីការ $2z-|z|=\dfrac{9-7i}{1+i}$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$2z-|z|=\dfrac{9-7i}{1+i}$ តាង $z=x+i.y\ ,\ x;y\in IR$

គេបាន $2(x+iy)-|x+iy|=\dfrac{(9-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$$2x+2iy-\sqrt{x^2+y^2}=\frac{9-9i-7i-7}{2}$$

$$(2x-\sqrt{x^2+y^2})+2iy=1-8i$$

គេទាញ $\begin{cases}2x-\sqrt{x^2+y^2}=1 & (1)\\ 2y=-8 & (2)\end{cases}$

តាម (2) គេទាញ $y=-4$ យកទៅជួសក្នុង (1) គេបាន

$2x-\sqrt{x^2+16}=1$

$$2x-1=\sqrt{x^2+16}\quad ,\ x>-\frac{1}{2}$$

$$(2x-1)^2=x^2+16$$

$$4x^2-4x+1=x^2+16$$

$$3x^2-4x-15=0\quad ;\ \Delta'=4+45=7^2$$

គេទាញឫស $x_1=\dfrac{2+7}{3}=3$; $x_2=\dfrac{2-7}{3}=-\dfrac{5}{3}<-\dfrac{1}{2}$ (មិនយក)

គេបាន $x=3$; $y=-4$ ។ដូចនេះ $\boxed{z=3-4i}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ដែល $Z_2 \neq 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

យើងតាង $Z_1 = a + i.b$ និង $Z_2 = c + i.d$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

យើងបាន $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+i.b}{c+i.d} = \frac{(a+i.b)(c-i.d)}{(c+i.d)(c-i.d)} = \frac{ac - i.ad + i.bc - i^2.bd}{c^2 - i^2.d^2}$

គេបាន $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

នាំឱ្យ
$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2}}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(a^2c^2 + a^2d^2) + (b^2c^2 + b^2d^2)}}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)}}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{\sqrt{(c^2+d^2)(a^2+b^2)}}{c^2+d^2}$$

គេទាញ $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$

ដោយគេមាន $\begin{cases} |Z_1| = \sqrt{a^2+b^2} \\ |Z_2| = \sqrt{c^2+d^2} \end{cases}$

ដូច្នេះ $\boxed{\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| = \dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$

ចំពោះគ្រប់ a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (XOY) យើងជ្រើសរើសវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{U}$ និង $\vec{V}$ មានអាហ្វិករៀងគ្នា

Z_1 និង Z_2 នាំឱ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{U} + \vec{V}$ មានអាហ្វិក $Z_1 + Z_2$ ។

តាមលក្ខណៈជ្រុងរបស់ត្រីកោណគេបាន $\|\vec{U} + \vec{V}\| \le \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\|$

ដោយ : $\|\vec{U}\| = |Z_1|$, $\|\vec{V}\| = |Z_2|$, $\|\vec{U} + \vec{V}\| = |Z_1 + Z_2|$

ដូចនេះ $\boxed{|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|}$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$

យើងតាង $Z_1 = a + i.b$ និង $Z_2 = c + i.d$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត ។

មាន $Z_1 + Z_2 = (a+c) + i.(b+d)$ នាំឱ្យ $|Z_1 + Z_2| = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$

ហើយ $|Z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|Z_2| = \sqrt{c^2 + d^2}$ ។

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ ។

ក.ចូរសរសេរ $\mathbf{z^2}$ ជាទំរង់ពិជគណិត ។

ខ.ចូរសរសេរ $\mathbf{z^2}$ និង $\mathbf{z}$ ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\mathbf{\cos\frac{\pi}{8}}$ និង $\mathbf{\sin\frac{\pi}{8}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរ $\mathbf{z^2}$ ជាទំរង់ពិជគណិត

យើងបាន $\mathbf{z^2=(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}})^2}$

$$=(\sqrt{2+\sqrt{2}})^2+2(\sqrt{2+\sqrt{2}})(i.\sqrt{2-\sqrt{2}})+(i.\sqrt{2-\sqrt{2}})^2$$

$$=2+\sqrt{2}+2\sqrt{2^2-2}.i-2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{z^2=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}.i}}$

ខ-សរសេរ $\mathbf{z^2}$ និង $\mathbf{z}$ ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $\mathbf{z^2=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}.i=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

ដូចនេះ $\mathbf{z^2=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ និង $\mathbf{z=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i.\sin\frac{\pi}{8}\right)}$

គ-ទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\mathbf{\cos\frac{\pi}{8}}$ និង $\mathbf{\sin\frac{\pi}{8}}$

តាមសំរាយខាងលើគេទាញ $\mathbf{2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i.\sin\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}\ \text{និង}\ \mathbf{\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8}}}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេអោយចំនួនកុំផ្លិច : $z_1=\frac{\sqrt{6}-i.\sqrt{2}}{2}$ និង $z_2=1-i$

ក.ចូរសរសេរ z_1 , z_2 និង $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.ចូរសរសេរ $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត ។

គ.ទាញអោយបានថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ z_1 , z_2 និង $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ:

គេមាន $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i.\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i.\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{6})+i.\sin(-\frac{\pi}{6})\right]}$ ។

គេមាន $z_2=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_2=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i.\sin(-\frac{\pi}{4})\right]}$ ។

គេមាន $Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})+i.\sin(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})\right]$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12}}$ ។

ខ. សរសេរ $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត

គេបាន $Z=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}=\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{Z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ ។

គ. ទាញអោយបានថា :

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន :

$$Z=\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12} \quad (1)$$

និង $Z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad (2)$

ផ្ទឹមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន :

$\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ និង $\boxed{\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរ ។

ចូរស្រាយថា $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

គេមាន $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$

$$|z_1+z_2|^2=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2$$

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+|z_2|^2 \quad (1)$$

ហើយ $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$$|z_1-z_2|^2=z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2$$

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+|z_2|^2 \quad (2)$$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន ៖

$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរដែល $|z_1| = |z_2| = 1$

និង $z_1.z_2 \neq -1$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ

តាង $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ នោះ $\overline{Z} = \dfrac{\overline{z}_1 + \overline{z}_2}{1 + \overline{z}_1.\overline{z}_2}$

ដោយ $z_1.\overline{z}_1 = |z_1|^2 = 1$ នោះ $\overline{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$ ហើយដូចគ្នា $\overline{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$

គេបាន $\overline{Z} = \dfrac{\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}}{1 + \dfrac{1}{z_1}.\dfrac{1}{z_2}} = \dfrac{z_2 + z_1}{z_2 z_1 + 1} = Z$

ដោយ $\overline{Z} = Z$ នោះ $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ ជាចំនួនពិត ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})+i.(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})$

ដែល x ជាចំនួនពិត។

ចូរកំនត់រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិចនេះ ?

ដំណោះស្រាយ

រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិច

យើងបាន $|Z|=\sqrt{(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2}$

តាង $f(x)=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2$

$$=\cos^4 x+2+\frac{1}{\cos^4 x}+\sin^4 x+2+\frac{1}{\sin^4 x}$$

$$=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x})$$

$$=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\sin^4 x\cos^4 x})$$

$$f(x)=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x})$$

$$=4+\left[(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right](1+\frac{16}{\sin^4 2x})$$

$$=4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})$$

ដោយគេមាន $\sin^2 2x\le 1$ នាំឲ្យ $1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\ge\frac{1}{2}$

និង $1+\frac{16}{\sin^4 2x}\ge 17$

គេទាញ $4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})\ge 4+\frac{17}{2}=\frac{25}{2}$

យើងបាន $f(x)=4+(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)(1+\frac{16}{\sin^4 2x})\ge\frac{25}{2}$

ដោយ $|Z|=\sqrt{f(x)}$ គេទាញបាន $|Z|\ge\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះម៉ូឌុលអប្បបរមានៃ Z គឺ $|Z|_{\min}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យ $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

យើងមាន $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$

តាង $Z=\frac{1}{\sqrt{3}}+i=\frac{1+i.\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $Z^n=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

ហើយ $\overline{Z}^n=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

គេទាញ $A=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)-\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$$=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}-\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}}$ ។

លំហាត់ទី១១

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(O, \vec{i}, \vec{j})$ គេឱ្យបួនចំនុច A , B , C ,D
ដែលមានអាហ្វិករៀងគ្នា

$Z_A = 1+6i$, $Z_B = 4+5i$, $Z_C = 5+4i$ និង $Z_D = -2-3i$ ។

ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារិកក្នុងរង្វង់មួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់ផ្ចិត
និង កាំរបស់វា ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារិកក្នុងរង្វង់

យើងតាង $(c): x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ជាសមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

យើងបាន $A \in (c)$ នាំឱ្យ $1^2 + 6^2 + a + 6b + c = 0$

ឬ $a + 6b + c = -37$ (1)

$B \in (c)$ នាំឱ្យ $4^2 + 5^2 + 4a + 5b + c = 0$

ឬ $4a + 5b + c = -41$ (2)

$C \in (c)$ នាំឱ្យ $(-2)^2 + (-3)^2 - 2a - 3b + c = 0$

ឬ $-2a - 3b + c = -13$ (3)

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a + 6b + c = -37 \\ 4a + 5b + c = -41 \\ -2a - 3b + c = -13 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបានចម្លើយ

$a=-2$, $b=-2$, $c=-23$ ។

សមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ **ABC** អាចសរសេរ :

$$(c): x^2+y^2-2x-2y-23=0$$

ឬ $(c):(x-1)^2+(y-1)^2=25$

ម្យ៉ាងទៀតដោយយកកូអរដោនេ **D** ជួសក្នុងសមីការ

$(c):(-2-1)^2+(-3-1)^2=25$

វាផ្ទៀងផ្ទាត់នោះនាំឱ្យ $D\in(c)$ ។

ដោយបួនចំនុច **A , B , C,D** ស្ថិតនៅលើរង្វង់មានសមីការ

$(c):(x-1)^2+(y-1)^2=25$ តែមួយ

នោះនាំឱ្យចតុកោណ**ABCD** ចារិកក្នុងរង្វង់ **(c)** មានផ្ចិត **I(1 ,1)**

និង កាំ $R=5$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ z_1 និង z_2 ជាពីរចំនួនកុំផ្លិច ។

ចូរបង្ហាញថា $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\geq\sqrt{|z_1{}^2-1||z_2{}^2-1|}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\geq\sqrt{|z_1{}^2-1||z_2{}^2-1|}$

តាមវិសមភាពត្រីកោណគេបាន :

$$|1+z_1z_2|+|z_1+z_2| \geq |1+z_1z_2+z_1+z_2|$$

និង $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2| \geq |1+z_1z_2-z_1-z_2|$

គេបាន $(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|)^2\geq|(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2|$

ដោយ

$$(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2=1-z_1{}^2-z_2{}^2+z_1{}^2z_2{}^2=(1-z_1{}^2)(1-z_2{}^2)$$

គេបាន $(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|)^2\geq|(1-z_1{}^2)(1-z_2{}^2)|$

$$(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|)^2\geq|1-z_1{}^2||1-z_2{}^2|$$

ដូចនេះ $(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|)^2\geq|(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2|$

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យ $z_1\ ;\ z_2$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1|=|z_2|=r>0$ ។

បង្ហាញថា $\left(\dfrac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\dfrac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\geq\dfrac{1}{r^2}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\geq\frac{1}{r^2}$$

តាង $z_1=r(\cos 2x+i\sin 2x)$ និង $z_2=r(co2y+i\sin 2y)$

ដែល $x\in IR\ ;\ y\in IR$ ។

គេបាន :

$$\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}=\frac{r[\ (\cos 2x+\cos 2y)+i(\sin 2x+\sin 2y)\ ]}{r^2+r^2[\ \cos(2x+2y)+i.\sin(2x+2y)\ ]}$$

$$=\frac{2\cos(x+y)\cos(x-y)+2i\sin(x+y)\cos(x-y)}{r\ [\ 2\cos^2(x+y)+2i\sin(x+y)\cos(x+y)\ ]}$$

$$=\frac{1}{r}.\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$$

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\sin(y-x)}{\sin(y+x)}$

គេបាន :

$$\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}+\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\right]$$

ដោយ $\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}\geq\cos^2(x-y)$ ព្រោះ $\cos^2(x+y)\leq 1$

ហើយ $\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\geq\sin^2(x-y)$ ព្រោះ $\sin^2(x+y)\leq 1$

$$\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}+\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\geq\cos^2(x-y)+\sin^2(x-y)=1$$

ដូចនេះ $\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\geq\frac{1}{r^2}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេយក $z_1\ ;\ z_2\ ;....;z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$(k+1)z_{k+1}-i(n-k)z_k=0\ ;\ k=0\,,1\,,2\,,...\,,n-1$$

ក-កំនត់ z_0 បើគេដឹងថា $z_0+z_1+z_2+....+z_n=2^n$

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា :

$$|z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+....+|z_n|^2<\frac{(3n+1)^n}{n!}$$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ z_0 បើគេដឹងថា $z_0+z_1+z_2+....+z_n=2^n$

គេមាន $(k+1)z_{k+1}-i(n-k)z_k=0$

គេបាន $\dfrac{z_{k+1}}{z_k}=i.\dfrac{n-k}{k+1}$

$$\prod_{k=0}^{(p-1)}\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right)=\prod_{k=0}^{p-1}\left(i.\frac{n-k}{k+1}\right)$$

$$\frac{z_p}{z_0}=i^pC_n^p\quad ;\ C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

គេទាញ $z_p=i^pz_0\,C_n^p\quad ;p=0\,,1\,,2\,,....$

ដោយ $z_0+z_1+z_2+....+z_n=2^n$ ឬ $\sum_{p=0}^{n}(z_p)=2^n$

មាន $\sum_{p=0}^{n}(z_p) = z_0 \sum_{p=0}^{n} C_n^p i^p = z_0(1+i)^n$

គេបាន $z_0(1+i)^n = 2^n$

គេទាញ $z_0 = \dfrac{2^n}{(1+i)^n} = (1-i)^n$

ដូចនេះ $z_0 = (1-i)^n$ ។

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា :

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2 < \frac{(3n+1)^n}{n!}$$

ដោយអនុវត្តន៏វិសមភាព AM – GM យើងបាន

$$\begin{aligned}
|z_0|^2 + |z_1|^2 + ... + |z_n|^2 &= |z_0|^2\left((C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2\right) \\
&= |z_0|^2 C_{2n}^n = 2^n.\frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{2^n}{n!}\left(2n(2n-1)(2n-2)....(n+1)\right) \\
&< \frac{2^n}{n!}\left(\frac{2n+(2n-1)+(2n-2)+....+(n+1)}{n}\right)^n \\
&< \frac{(3n+1)^n}{n!}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2 < \dfrac{(3n+1)^n}{n!}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យ $z_1\ ;\ z_2\ ; z_3$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដោយដឹងថា :

$z_1+z_2+z_3=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|z_1|=|z_2|=|z_3|$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|z_1|=|z_2|=|z_3|$

គេមាន $z_1+z_2+z_3=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$

គេទាញ $\begin{cases} z_1+z_2=-z_3 & (1) \\ z_1z_2+z_3(z_1+z_2)=0 & (2) \end{cases}$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) យើងបាន :

$z_1z_2-{z_3}^2=0$ នាំឱ្យ $|z_3|^2=|z_1|.|z_2|$

ដូចគ្នាដែរ $|z_2|^2=|z_1|.|z_3|$ និង $|z_1|^2=|z_2|.|z_3|$

យើងបាន :

$|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2=|z_1||z_2|+|z_2||z_3|+|z_3||z_1|$

ឬ $(|z_1|-|z_2|)^2+(|z_2|-|z_3|)^2+(|z_3|-|z_1|)^2=0$

ដូចនេះ $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ ។

លំហាត់ទី១៦

ចូរបង្ហាញថា $\left|\dfrac{6z-i}{2+3iz}\right| \le 1$ លុះត្រាតែ $|z| \le \dfrac{1}{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|z| \le \dfrac{1}{3}$

គេមាន $\left|\dfrac{6z-i}{2+3iz}\right| \le 1$

លក្ខខណ្ឌ $2+3iz \ne 0$ ឬ $z \ne \dfrac{2i}{3}$

គេបាន $|6z-i| \le |2+3iz|$

$$|6z-i|^2 \le |2+3iz|^2$$

$$(6z-i)(6\bar{z}+i) \le (2+3iz)(2-3i\bar{z})$$

$$36z\bar{z}+6iz-6i\bar{z}+1 \le 4-6i\bar{z}+6iz+9z\bar{z}$$

$$27z\bar{z} \le 3$$

$$z\bar{z} \le \frac{1}{9}$$

$$|z|^2 \le \frac{1}{9}$$

ដូចនេះ $|z| \le \dfrac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យ $z_1\ ;\ z_2\ ;\ z_3\ ;\ ....;\ z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1 ។

គេតាង $Z=\left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $0\le Z\le n^2$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $0\le Z\le n^2$

ដោយ $z_1\ ;\ z_2\ ;\ z_3\ ;\ ....;\ z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1

នោះគេអាចតាង $z_k=\cos x_k+i.\sin x_k$

ដែល $x_k\in IR\ ;\ k=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,....,n$

គេបាន $Z=\left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\cos x_k+i.\sin x_k)\times\sum_{k=1}^{n}(\cos x_k-i\sin x_k)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\cos x_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\right)^2\ge 0$$

គេបាន $Z\ge 0$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព **Cauchy – Schwartz**

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\cos x_k\right)^2 \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k\right)$$

និង $\left(\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\right)^2 \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\sin^2 x_k\right)$

គេទាញ $Z \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k\right) + n\sum_{k=1}^{n}(\sin^2 x_k)$

$$Z \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k + \sin^2 x_k\right)$$

$$Z \le n.n = n^2$$

ដូចនេះ $0 \le Z \le n^2$ ។

សំគាល់ : គេអាចស្រាយ $Z \le n^2$ តាមមួយរបៀបទៀតដូចខាងក្រោម

ដោយ $|z_k| = 1$ នោះ $\overline{z}_k = \dfrac{1}{z_k}$ គ្រប់ $k = 1\ ;2\ ;.....;n$

គេបាន $Z = \left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\times\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)}$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2 = n^2$$

គេទាញបាន $Z \le n^2$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $|z|=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$\sqrt{2} \le |1-z|+|1+z^2| \le 4$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{2} \le |1-z|+|1+z^2| \le 4$

តាង $z=\cos t+i.\sin t$

គេបាន $|1-z|=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=2|\sin\frac{t}{2}|$

ហើយ $|1+z^2|=\sqrt{(1+\cos 2t)^2+\sin^2 2t}=2|\cos t|$

$$=2|1-2\sin^2\frac{t}{2}|$$

គេបាន $|1-z|+|1-z^2|=2\left(|\sin\frac{t}{2}|+|1-2\sin^2\frac{t}{2}|\right)$

ដោយយក $x=\sin\frac{t}{2}$; $-1\le x\le 1$ ហើយតាងអនុគមន៍ f

កំនត់ដោយ $f(x)=|x|+|1-2x^2|$ ដែល $-1\le x\le 1$

ចំពោះ $-1\le x\le 1$ គេបាន $\frac{\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le 2$

ដូចនេះ $\sqrt{2} \le |1-z|+|1+z^2| \le 4$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = x + i.y$ ដែល x និង y ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ x និង y បើគេដឹងថា :

$(3+2i)z + (1+3i)\overline{z} = \dfrac{10}{2-i}$ ($\overline{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z) ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ x និង y

គេមាន $(3+2i)z + (1+3i)\overline{z} = \dfrac{10}{2-i}$

ដោយ $z = x + i.y$ នាំឱ្យ $\overline{z} = x - i.y$

គេបាន $(3+2i)(x+iy) + (1+3i)(x-iy) = \dfrac{10}{2-i}$

$$3x + 3iy + 2ix - 2y + x - iy + 3ix + 3y = \frac{10(2+i)}{5}$$

$$(4x+y) + i.(5x+2y) = 4 + 2i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$

គេមាន $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3$, $D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6$

និង $D_y = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 20 = -12$

គេបាន $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{6}{3} = 2$, $y = \dfrac{D_y}{D} = -\dfrac{12}{3} = -4$

ដូចនេះ $\boxed{x = 2 , y = -4}$ ។