លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

គណិតវិទ្យា

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ

និង អាហារូបករណ៍

Problems and Solutions

ស្នាដៃបោះពុម្ពផ្សាយ

សៀវភៅគណិតវិទ្យា ៖

១_ដំណោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យា បោះពុម្ព ឆ្នាំ២០០០

(សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងចូលសាកលវិទ្យាល័យ និង អាហារូបករណ៍)

២_ពិភពស៊ីតចំនួនពិត (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា)

៣_ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា)

៤_ ដំណោះស្រាយគំរូ ចំនួនកុំផ្លិច លីមីត ដេរីវេ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២)

៥_ សង្ខេបរូបមន្តគណិតវិទ្យា (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

៦_ គំរូសិក្សាអនុគមន៍ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

៧_ កំនែលំហាត់គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០កម្មវិធីសិក្សាថ្មី (ភាគ១ ឆ្នាំ២០០៨)

៨_ **151** គណនាលីមីត (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

៩_ **202** លំហាត់មានដំណោះស្រាយ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២)

✍✍✍✍✍

អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី ទុយ រីណា

លោក ទិត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្គុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **លំហាត់មានដំណោះស្រាយ** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំនងទុកជាឯកសារ សម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាយកទៅសិក្សាស្រាវជ្រាវដោយខ្លួនឯង និង ម្យ៉ាងទៀតក្នុងគោលបំនងចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យានៅប្រទេសកម្ពុជាយើងឲ្យកាន់តែរីកចម្រើនថែមទៀតដើម្បីបង្កើនធនធានមនុស្សឲ្យមានកាន់តែច្រើនដើម្បីជួយអភិវឌ្ឍន៍ប្រទេសជាតិរបស់យើង ។

នៅក្នុងសៀវនេះយើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវជ្រើសរើសយកលំហាត់យ៉ាងសម្រាំងបំផុតយកមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឲ្យលោកអ្នកងាយយល់ឆាប់ចងចាំអំពីសិល្បៈនៃការដោះស្រាយទាំងអស់នេះ ។ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាត និង កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីជួយកែលំអ សៀវភៅនេះឲ្យបានកាន់តែសុក្រិត្រភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់នេះយើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពមាំមួន និង ទទួលជ័យជំនះគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី១៧ កុម្ភះ ២០០៩

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

១-គេឲ្យសមីការ $(E): z^2 + iaz + a + ib = 0$ ដែល $a , b \in IR$

ក-កំនត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ (E) រួចគណនាឫសមួយទៀត z_2 ។

ខ-ចូរសរសេរ z_1 , z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ-ទាញបញ្ជាក់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

២-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើ IR ដោយ ៖

$$f(x) = \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) - \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$$

ក-ចូរគណនាតម្លៃ $f(-\sqrt{2})$, $f(0)$ និង $f(\sqrt{2})$ ។

បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

៣-គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = x + i.y$ ដែល x និង y ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ x និង y បើគេដឹងថា៖

$$(3 + 2i)z + (1 + 3i)\bar{z} = \frac{10}{2 - i}$$

($\bar{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z) ។

៤_គេអោយចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{4\pi}{7}+i.\sin\frac{4\pi}{7}$ ។

ចូរសរសេរ $(1+z)^4$ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

៥_គេអោយចំនួនកុំផ្លិច : $z_1=\frac{\sqrt{6}-i.\sqrt{2}}{2}$ និង $z_2=1-i$

ក.ចូរសរសេរ z_1 ,z_2និង $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ។

ខ.ចូរសរសេរ $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត។

គ.ទាញអោយបានថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

៦_គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+2\sin x-1}{x}$ ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n+1}$

៧_ចូរគណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

៨_ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$ ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

៩_កំនត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីអោយ $(x+1)+(3+2y).i=\frac{7+9i}{3+2i}$

១០_គេអោយ $f(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i).z^2+4(1+i\sqrt{3}).z-8i$

ក.ចូរបង្ហាញថា $\forall z\in ℂ\ \ f(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $f(z)=0$ ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

១១_ចូរគណនាលីមីត :

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+x\sin 2009x}{x^2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

១២_គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

ក.បង្ហាញថាមានតំលៃ x_0 ដែល $1<x_0<2$ ហើយ $f(x_0)=0$ ។

ខ.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

១៣_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{3x+1}$ កំនត់លើ $\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right]$

ក. ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{3}{8}\le f'(x)\le \dfrac{3}{4}$ ។

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពកំណើនមានកំនត់ទៅនឹងអនុគមន៍ f ចំពោះគ្រប់

$x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$

១៤_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+2+b.\ln x$ កំនត់លើចន្លោះ $]0,+\infty[$

ចូរកំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$

ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(T): y=2x-3$ ត្រង់ចំនុច $A(1,-2)$ ។

១៥_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4}-x)^2} & \text{បើ } x\neq\frac{\pi}{4} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{បើ } x=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនុច $x_0=\frac{\pi}{4}$ ។

១៦_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}$

ដែល $x>0$ ហើយ a និង b ជាចំនួនពិត។

ក-បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $a\neq 0$ ខ្សែកោង (C)

តាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតមួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់សមីការ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$

ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y=x+4$ ត្រង់ចំនុច $A(1,5)$ ។

១៧_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\sin(\pi x)}{1-x^3}$ កំនត់គ្រប់ $x\neq 1$ ។

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ f ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=1$ បានឬទេ ?

បើអាចកំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ $x_0=1$

១៨_គេឱ្យអនុគមន៍ពីរ

$F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d).e^x$ និង $f(x)=x^3.e^x$ កំនត់លើ IR ។

កំនត់ចំនួនពិត a,b,c និង d ដើម្បីឱ្យ$F(x)$ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

១៩_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+b-e^x$ មានក្រាបតំនាង (c) ។

កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (c) ប៉ះនឹងបន្ទាត់$(d): y=x+3$

ត្រង់ចំនុច $A(0,3)$ ។

២០_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+b-x.\ln x$ មានក្រាបតំនាង (c) ។

កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (c) ប៉ះនឹងបន្ទាត់

$(d): y=x+1$ ត្រង់ចំនុច $A(1,2)$ ។

២១_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+mx+4}{x^2+1}$

ដែល x ជាចំនួនពិត និង m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក. ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាត្រង់ចំនុច $x=2$ ។

ខ. ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាតែមួយគត់ ។

២២_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$

ក-សរសេរ $f(x)$ជាទំរង់ $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}$

រួចគណនាតំលៃ A,B និង C ។

ខ-គណនា $\int_1^2 f(x).dx$ ដោយសរសេរចំលើយជាទំរង់ $a+\ln b$ ដែល a និងb ជាចំនួនសនិទាន។

២៣_គេឲ្យអនុគមន៍ $g(x)=\frac{2x^2-5x-1}{x^3-x}$ ដែល $x\neq 0$, $x\neq \mp 1$ ។

ក.កំនត់ចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យ $g(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$

ខ.ចូរគណនា $I=\int g(x).dx$ ។

២៤_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}$ ដែល $x\neq 0$ និង $x\neq -1$

ក_កំនត់ចំនួនពិត A, B, C ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$ ។

ខ_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

២៥_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$

ដែល $x\neq -1$ និង $x\neq 3$ ។

ក_កំនត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$

ខ_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

២៦_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ និង មានដេរីវេត្រង់ចំនុច $x=c$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{h\to 0}\frac{f^2(c+h)-f^2(c-h)}{h}=4f'(c).f(c)$ ។

២៧_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{e^x}{ax+b}$ ដែល $a\neq 0, a, b\in IR$

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ e ចំពោះ $x=1$ ។

២៨_គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=\sin x$

ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

២៩_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{4x^2-x+1}{x^3+1}$ ដែល $x\neq -1$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត a , b , c ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

៣០_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$ ដែល $x\neq -1$ និង $x\neq 3$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត a , b , c ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

៣១_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x(1+x^4)}$ ដែល x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

ក-ចូរកំនត់បីចំនួនពិត A ,B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{Bx^3+C}{1+x^4}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int \frac{4x^3\ln x.dx}{(1+x^4)^2}$

៣២_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{e^{2x}+1}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ក-ចូរកំនត់បីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=A+\frac{B.e^{2x}}{e^{2x}+1}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int \frac{2xe^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2}$

៣៣_គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I=\int e^x\cos^2 x.dx$ និង $J=\int e^x\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ-ទាញរក I និង J

៣៤_គេឱ្យអាំងតេក្រាល :

$I=\int \frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}.dx$ និង $J=\int \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx$

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ-ទាញរក I និង J

៣៥_ គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}$

និង $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$, ($n \in IN$)

ក_ចូរគណនាតម្លៃនៃ I_0 រួច ស្រាយថា (I_n)ជាស្វ៊ីតចុះ។

ខ_ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

គ_ទាញឲ្យបានថា $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$។

៣៦_គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I = \int x\cos^2 x.dx$ និង $J = \int x\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I + J$ និង $I - J$

ខ-ទាញរក I និង J

៣៧_គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ ដែល$x \ne \{1, 2, 3\}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

៣៨_គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx$ និង $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J ។

៣៩_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}$ ដែល $x\neq -1$ និង $x\neq 0$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{1}^{3}f(x).dx$ ។

៤០_គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$ និង $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}$

ក-កំនត់ពីរចំនួនពិត a, b ដើម្បីឲ្យ $\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរកតម្លៃ J ។

៤១_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{e^{4x}+1}{(e^{2x}+1)^2}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A , B ដើម្បីឲ្យ $f(x)=A+\frac{B.e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x).dx$ ។

៥២_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A,B និង C ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរជារាង

$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

៥៣_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ កំនត់លើ IR ។

ក-ចូរសរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=A+\frac{B.e^{-x}}{1+e^{-x}}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

ដោយសរសេរលទ្ធផលជារាង $a+\ln b$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិតត្រូវរក

៥៤_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=(x^2+x-7).e^x$ កំនត់លើ IR ។

ក-កំនត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $F(x)=(ax^2+bx+c).e^x$

ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^3 f(x).dx$

៤៥_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

ក-កំនត់ចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_2^5 f(x).dx$ ។

៤៦_គេដឹងថា $\int_0^{x^2} f(2t-1).dt = 4x^6$ ។ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

៤៧១.ដោះស្រាយសមីការ $g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0 \ (E)$

២. កំនត់ចំលើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល $g(0)=0$ និង $g'(0)=1$

៤៨_ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=0$

ដោយដឹងថា $y(0)=1 \ , y'(0)=0$ ។

៤៩_គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-4y'+4y=4x^2-24x+34$

ក-កំនត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_P(x)=ax^2+bx+c$

ជាចំលើយដោយឡែកមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ-បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y=y_P(x)+y_h(x)$ ជាចំលើយទូទៅរបស់ (E)

លុះត្រាតែអនុគមន៍ $y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការអូម៉ូសែន

$(E'): y''-4y'+4y=0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចទាញរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៥០_ក-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): f''(x)-f'(x)-6f(x)=0$

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការ (E)

បើគេដឹងថាខ្សែកោង (C) តាង $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y=-x+3$

ត្រង់ចំនុច $M(0,3)$ ។

៥១_គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+9y=0$

ក-ដោះស្រាយសមីការ (E) ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការ (E) បើគេដឹងថា :

$f(0)=\sqrt{3}$, $f'(0)=3$ ។

៥២_គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល : $y''-4y=8x-12$ (E)

ក-កំនត់អនុគមន៍ $\varphi(x)=ax+b$ ជាចំលើយដោយឡែកមួយរបស់ (E) ។

ខ-រកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

៥៣_គេឱ្យប្រវែងប្រែប្រួលមួយ MN ដែល $MN = f(x)$ ។

អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

$(E): f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ ។

ក-គណនាប្រវែង MN បើគេដឹងថា $f(0) = 2$ និង $f'(0) = 1$ ។

ខ-កំនត់ប្រវែងអតិបរមានៃ MN ។

៥៤_គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y = 0$ ។

ក-ដោះស្រាយសមីការ (E) ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថា

$f(0) = 1$ និង $f'(0) = 2\sqrt{3}$ ។

គ-ចូរសរសេរអនុគមន៍ $f(x)$ ជារាង $f(x) = k.\cos(\omega x + \varphi)$

ដែល k ,ω និង φ ជាបីចំនួនពិត ។

ឃ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f^2(x)}$ ។

៥៥_គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1}.dx , n \in IN$ ។

ក-គណនា $I_0 + I_1$, I_1 រួចទាញរក I_0 ។

ខ-គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៥៦_គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ $IR-\{-1\}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$x^2f(x^3)+\frac{1}{(1+x)^2}f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=4x^3(1+x^4)^5$$

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល: $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

៥៧_គេសន្មត់ថា f ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$$ ។

ចូរគណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$ ។

៥៨_ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៏ : ចូរគណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

៥៩_គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$?

អនុវត្តន៏: ចូរគណនា $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$ ។

៦០_គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a} \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_{0}^{a} f(x).dx$, $q > 0$, $q \neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

៦១_ក-គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ $I_n = \int_0^1 (1+x)^n.dx$, $n \in IN$ ។

ខ-ទាញបង្ហាញថា $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

៦២_គេមានស្វ៊ីត (I_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ដោយ

$$I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$$

ក-ចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

ទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$ ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឲ្យសមីការ $(E): z^2 + iaz + a + ib = 0$ ដែល $a, b \in IR$

ក_កំនត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយរបស់សមីការ (E) រួចគណនាឫសមួយទៀត z_2 ។

ខ_ចូរសរសេរ z_1 , z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ_ទាញបញ្ជាក់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_កំនត់ a និង b ៖

ដើម្បីឲ្យ $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយរបស់ (E)លុះណាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ

គេបាន $(-1 + i\sqrt{3})^2 + ia(-1 + i\sqrt{3}) + a + ib = 0$

$$1 - 2\sqrt{3}\,i - 3 - ia - a\sqrt{3} + a + ib = 0$$

$$(-2 + a - a\sqrt{3}) + i(-2\sqrt{3} - a + b) = 0$$

គេទាញ $\begin{cases} -2 + a - a\sqrt{3} = 0 \\ -2\sqrt{3} - a + b = 0 \end{cases}$ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធគេបាន ៖

ដូចនេះ $\boxed{a = \frac{2}{1 - \sqrt{3}} = -1 - \sqrt{3} \text{ និង } b = -1 + \sqrt{3}}$

គណនាឫសមួយទៀត z_2 ៖

ដោយ z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ (E)

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតយើងបាន $z_1 + z_2 = -ia$ នាំឲ្យ

$$z_2 = -ia - z_1 = -i(-1-\sqrt{3}) - (-1+i\sqrt{3}) = 1+i$$

ដូចនេះ $z_2 = 1+i$ ។

ខ-សរសេរ z_1 , z_2 និង $\frac{z_2}{z_1}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងបាន $z_1 = -1+i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3})$

$$z_2 = 1+i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$$

និង $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})+i.\sin(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})\right] = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i.\sin\frac{5\pi}{12})$ ។

គ-ទាញបញ្ជាក់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i.\sin\frac{5\pi}{12})$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

លំហាត់ទី២

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើ IR ដោយ ÷

$$f(x)=\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

ក_ចូរគណនាតម្លៃ $f(-\sqrt{2})$, $f(0)$ និង $f(\sqrt{2})$ ។

បង្ហាញថា $f(x)$ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ_គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនាតម្លៃ $f(-\sqrt{2})$, $f(0)$ និង $f(\sqrt{2})$

មាន $f(x)=\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)$

យើងបាន $f(-\sqrt{2})=\ln(2+2+1)-\ln(2-2+1)=\ln 5$

$$f(0)=\ln(0-0+1)-\ln(0+0+1)=0$$

$$f(\sqrt{2})=\ln(2-2+1)-\ln(2+2+1)=-\ln 5$$

ដូចនេះ $\boxed{f(-\sqrt{2})=\ln 5\ ,\ f(0)=0\ ,f(\sqrt{2})=\ln 5}$

បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ÷

យើងមាន $x\in IR$ និង $-x\in IR$

យើងបាន $f(-x)=\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)=-f(x)$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ_គណនាដេរីវេ $f'(x)$និង $f''(x)$

យើងបាន $f'(x)=\dfrac{(x^2-x\sqrt{2}+1)'}{(x^2-x\sqrt{2}+1)}-\dfrac{(x^2+x\sqrt{2}+1)'}{(x^2+x\sqrt{2}+1)}$

$$=\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{(2x-\sqrt{2})(x^2+x\sqrt{2}+1)-(2x+\sqrt{2})(x^2-x\sqrt{2}+1)}{(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\ x^2-2\sqrt{2}}{x^4+1}=\frac{2\sqrt{2}(x^2-1)}{x^4+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=2\sqrt{2}\ \dfrac{x^2-1}{x^4+1}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $f''(x)=2\sqrt{2}\ \dfrac{(x^2-1)'(x^4+1)-(x^4+1)'(x^2-1)}{(x^4+1)^2}$

$$=2\sqrt{2}\ \frac{2x(x^4+1)-4x^3(x^2-1)}{(x^4+1)^2}$$

$$=2\sqrt{2}\ \frac{2x^5+2x-4x^5+4x^3}{(x^4+1)^2}$$

$$=-4\sqrt{2}\ \frac{x\ (x^4-2x^2-1)}{(x^4+1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=-4\sqrt{2}\ \dfrac{x\ (x^4-2x^2-1)}{(x^4+1)^2}}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = x + i.y$ ដែល x និង y ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ x និង y បើគេដឹងថា៖

$$(3+2i)z + (1+3i)\bar{z} = \frac{10}{2-i}$$

($\bar{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z) ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ x និង y

គេមាន $(3+2i)z + (1+3i)\bar{z} = \frac{10}{2-i}$

ដោយ $z = x + i.y$ នាំឲ្យ $\bar{z} = x - i.y$

គេបាន $(3+2i)(x+iy) + (1+3i)(x-iy) = \frac{10}{2-i}$

$$3x + 3iy + 2ix - 2y + x - iy + 3ix + 3y = \frac{10(2+i)}{5}$$

$$(4x+y) + i.(5x+2y) = 4 + 2i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$

គេមាន $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3$, $D_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6$

និង $D_y = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 20 = -12$

គេបាន $x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{3} = 2$, $y = \frac{D_y}{D} = -\frac{12}{3} = -4$

ដូចនេះ $\boxed{x = 2 , y = -4}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេអោយចំនួនកុំផ្លិច $z = \cos\frac{4\pi}{7} + i.\sin\frac{4\pi}{7}$ ។

ចូរសរសេរ $(1+z)^4$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ $(1+z)^4$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ៖

គេបាន $1 + z = 1 + \cos\frac{4\pi}{7} + i.\sin\frac{4\pi}{7}$

ដោយ $\begin{cases} 1 + \cos\frac{4\pi}{7} = 2\cos^2\frac{2\pi}{7} \\ \sin\frac{4\pi}{7} = 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} \end{cases}$

គេទាញ

$$1 + z = 2\cos^2\frac{2\pi}{7} + 2i.\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = 2\cos\frac{2\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7} + i.\sin\frac{2\pi}{7})$$

តាមរូបមន្តដឺមរ័គេអាចសរសេរ៖

$$(1+z)^4=\left[2\cos\frac{2\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7}+i.\sin\frac{2\pi}{7})\right]^4$$

$$=16\cos^4\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i.\sin\frac{8\pi}{7}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+z)^4=16\cos^4\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i.\sin\frac{8\pi}{7}\right)}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេអោយចំនួនកុំផ្លិច : $z_1=\frac{\sqrt{6}-i.\sqrt{2}}{2}$ និង $z_2=1-i$

ក.ចូរសរសេរ z_1 ,z_2 និង $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

ខ.ចូរសរសេរ $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត ។

គ.ទាញអោយបានថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរ z_1 ,z_2 និង $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រៈ

គេមាន $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i.\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i.\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{6})+i.\sin(-\frac{\pi}{6})\right]}$ ។

គេមាន $z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_2 = \sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i.\sin(-\frac{\pi}{4})\right]}$ ។

គេមាន $Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) + i.\sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})\right]$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12}}$ ។

ខ. សរសេរ $Z = \frac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត

គេបាន $Z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{6} - i\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$ ។

គ. ទាញអោយបានថា $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន :

$Z = \cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12}$ (1) និង $Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (2)

ផ្ទឹមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន :

$$\cos\frac{\pi}{12} + i.\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i.\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$ និង $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៦

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+2\sin x-1}{x}$ ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)^{n+1}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+2\sin x-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+2\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1+2=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+2\sin x-1}{x}=3}$ ។

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)^{n+1}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{n+1}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}\right)^{\frac{n+1}{2n-1}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right)^{n+1}=\sqrt{e}}$ ។

លំហាត់ទី៧

ចូរគណនាលីមីត ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-x^2}-1)+(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}=-\frac{1}{2}}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)-(e^{-x}-1)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}.\frac{x}{\sin x}=1+1=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=2}$ ។

លំហាត់ទី៨

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$ ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$

តាង $x=\frac{1}{n}$ កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $x\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}+5} = \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.(1+x)^5 = e$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = e}$ ។

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

តាង $1+x=\frac{n-1}{n+1}$ នាំឲ្យ $x=-\frac{2}{n+1}$ និង $n=-\frac{2+x}{x}$

កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $x\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2} = \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{-\frac{2+x}{x}+2} = \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{-\frac{2}{x}+1}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{-2}.(1+x) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2} = \frac{1}{e^2}}$ ។

លំហាត់ទី៩

កំនត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីអោយ $(x+1)+(3+2y).i = \frac{7+9i}{3+2i}$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត x និង y

គេមាន $(x+1)+(3+2y).i = \frac{7+9i}{3+2i}$

$$= \frac{(7+9i)(3+2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$

$$= \frac{21-14i+27i-18i^2}{9-4i^2}$$

$$= \frac{39+13i}{13} = 3+i$$

គេបាន $\begin{cases} x+1=3 \\ 3+2y=1 \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{x=2, y=-1}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេអោយ $f(z)=z^3-2(\sqrt{3}+i).z^2+4(1+i\sqrt{3}).z-8i$

ក.ចូរបង្ហាញថា $\forall z\in\mathbb{C}$ $f(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $f(z)=0$ ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $\forall z\in\mathbb{C}$: $f(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

យើងមាន $f(z)=(z-2i).(z^2-2\sqrt{3}z+4)$

ដោយពន្លាតអនុគមន៍នេះយើងបាន :

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3-2\sqrt{3}z+4z-2i(z^2-2\sqrt{3}z+4) \\ &= z^3-2\sqrt{3}.z^2+4z-2iz^2+4\sqrt{3}iz-8i \\ &= z^3-2(\sqrt{3}+i).z^2+4(1+i\sqrt{3}).z-8i \quad \text{ពិត} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\forall z\in\mathbb{C}\ f(z)=(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

បើ $f(z)=0$ នាំអោយ $(z-2i).(z^2-2\sqrt{3}.z+4)=0$

គេទាញឫស $z=2i$ ហើយ $,z^2-2\sqrt{3}.z+4=0$ $,\Delta'=3-4=-1=i^2$

នាំអោយ $z_1=\sqrt{3}+i$ $,z_2=\sqrt{3}-i$ ។

លំហាត់ទី១១

ចូរគណនាលីមីត :

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x + x\sin 2009x}{x^2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x + x\sin 2009x}{x^2}$ ដោយ $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x + x\sin 2009x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(2.\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\sin 2009x}{2009x}.2009\right)$$

$$= 2 + 2009 = 2011.$$

ខ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x^3-3x^2)+(a-1)x-3(a-1)}{(x^2-x)-(3x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x^2(x-3)+(a-1)(x-3)}{x(x-1)-3(x-1)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+a-1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x^2+a-1}{x-1} = \frac{9+a-1}{3-1} = \frac{a+8}{2}.$$

លំហាត់ទី១២

គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

ក.បង្ហាញថាមានតំលៃ x_0 ដែល $1<x_0<2$ ហើយ $f(x_0)=0$ ។

ខ.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថាមានតំលៃ x_0 ដែល $1<x_0<2$ ហើយ $f(x_0)=0$

$f(x)$ ជាអនុគមន៍កំនត់ជាប់លើ IR

គេមាន $f(1)=1^3-6.1^2+9.1-3=1$ និង $f(2)=2^3-6.2^2+9.2-3=-1$

ដោយ $f(1).f(2)=-1<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាលមានតំលៃ x_0

ដែល $1<x_0<2$ ហើយ $f(x_0)=0$ ។

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

យើងបាន $f'(x)=3x^2-12x+9$

សមីការ $f'(x)=3x^2-12x+9=0$ មានឬស $x_1=1$, $x_2=3$ ។

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$				

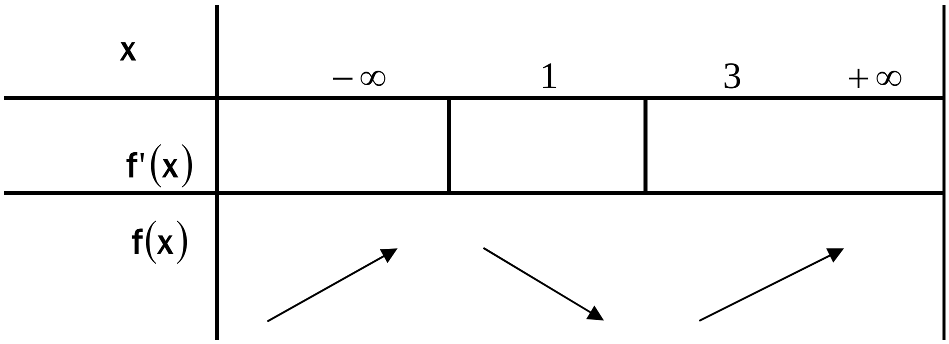
តាមតារាងខាងលើគេបាន

$f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \in]-\infty , 1[\cup]3 , +\infty[$

$f'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in]1 , 3[$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

គេមាន $f(1) = 1$ និង $f(3) = -3$



លំហាត់ទី១៣

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{3x+1}$ កំនត់លើ $\left[-\frac{1}{3},+\infty\right[$

ក. ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$ ។

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពកំណើនមានកំនត់ទៅនឹងអនុគមន៍ f ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ បង្ហាញថា $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$

គេមាន $f(x)=\sqrt{3x+1}$ នាំឱ្យ $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ គេមាន $1\le x\le 5$ ឬ $4\le 3x+1\le 16$

$$\frac{1}{4}\le\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\le\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8}\le\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\le\frac{3}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8} \le \sqrt{3x+1} \le \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ គេមាន $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទវិសមភាពកំណើនមានកំនត់

ចំពោះ $x\ge 1$ គេមាន $\frac{3}{8}(x-1)\le f(x)-f(1)\le\frac{3}{4}(x-1)$

ដោយ $f(x)=\sqrt{3x+1}$

គេបាន $\frac{3}{8}x-\frac{3}{8}\le\sqrt{3x+1}-2\le\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$

នាំឱ្យ $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8} \le \sqrt{3x+1} \le \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\frac{3}{8}x+\frac{13}{8} \le \sqrt{3x+1} \le \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+2+b.\ln x$ កំនត់លើចន្លោះ $]0,+\infty[$

ចូរកំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$

ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(T): y=2x-3$ ត្រង់ចំនុច $A(1,-2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ អនុគមន៍ $y=f(x)$ ប៉ះនឹងបន្ទាត់

$(T): y = 2x - 3$ ត្រង់ចំនុច $A(1,-2)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = -2 \end{cases}$

គេមាន $f(x) = ax + 2 + b\ln x$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left]0,+\infty\right[$

គេបាន $f'(x) = (ax + 2 + b.\ln x)' = a + \frac{b}{x}$

គេបាន $\begin{cases} f'(1) = a + b = 2 \\ f(1) = a + 2 + b.\ln 1 = -2 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} b = 2 - a = 6 \\ a = -4 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a = -4 \ , b = 6}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4} - x)^2} & \text{បើ } x \neq \frac{\pi}{4} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{បើ } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនុច $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនុច $x_0 = \frac{\pi}{4}$

គេមាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4} - x)^2}$

តាង $t = \frac{\pi}{4} - x$ នាំឱ្យ $x = \frac{\pi}{4} - t$

កាលណា $x \to \frac{\pi}{4}$ នោះ $t \to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - t) + \cos(\frac{\pi}{4} - t) - \sqrt{2}}{t^2}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos t - \sin t \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cos t + \sin\frac{\pi}{4}\sin t - \sqrt{2}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t - \sqrt{2}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{2}\cos t - \sqrt{2}}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{2}(\cos t - 1)}{t^2} = \frac{-2\sqrt{2}\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} . \lim_{t \to 0} \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{(\frac{t}{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = f(\frac{\pi}{4})$$

ដោយ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = f(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}$

ដែល $x>0$ ហើយ a និង b ជាចំនួនពិត។

ក-បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $a\neq 0$ ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតមួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់សមីការ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y=x+4$ ត្រង់ចំនុច $A(1,5)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថាខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតមួយ

គេមាន $f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}$ ដែល $x>0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ(C) ។

ដូចនេះ ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=ax+b$ ។

ខ.កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $f(x)=ax+b-\frac{\ln x}{x}$

គេបាន $f'(x)=(ax+b)'-\frac{(\ln x)'.x-(x)'.\ln x}{x^2}=a-\frac{1-\ln x}{x^2}$ ។

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y=x+4$ ។

ត្រង់ចំនុច $A(1,5)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(x_A)=a_T \\ f(x_A)=y_A \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} a-1=1 \\ a+b=5 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=2 \ , b=3}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x^3}$ កំនត់គ្រប់ $x\neq 1$ ។

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ f ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0=1$ បានឬទេ ?

បើអាច ចូរកំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ត្រង់ចំនុច $x_0=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

គេមាន $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x^3}$

តាង $t=1-x$ នាំឱ្យ $x=1-t$ ។

កាលណា $x\to 1$ នោះ $t\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\pi-\pi t)}{1-(1-t)^3}$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{1-1+3t-3t^2+t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{t(3-3t+t^2)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\cdot\frac{\pi}{3-3t+t^2} = \frac{\pi}{3}$$

ដោយ $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\pi}{3}$ កំនត់ នោះគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$ ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ ។

បើយើងតាង $g(x)$ ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$

ដូចនេះ $g(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x^3} & \text{បើ } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{\pi}{3} & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យអនុគមន៍ពីរ

$F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d).e^x$ និង $f(x) = x^3.e^x$ កំនត់លើ IR ។

កំនត់ចំនួនពិត a, b, c និង d ដើម្បីឱ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត a,b,c និង d

គេមាន $F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d).e^x$ និង $f(x)=x^3.e^x$

ដើម្បីឱ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើ IR លុះត្រាតែ

$$\forall x\in IR : F'(x)=f(x)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= (ax^3+bx^2+cx+d)'.e^x+(e^x)'.(ax^3+bx^2+cx+d) \\ &= (3ax^2+2bx+c).e^x+e^x.(ax^3+bx^2+cx+d) \\ &= [ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+d)].e^x \end{aligned}$$

គេបាន $[ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+d)].e^x = x^3.e^x$

គេទាញ $\begin{cases} a=1 \\ 3a+b=0 \\ 2b+c=0 \\ c+d=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=6 \\ d=-6 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=1\ ,b=-3\ ,c=6\ ,d=-6}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = ax + b - e^x$ មានក្រាបតំនាង (c) ។

កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (c) ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = x + 3$ ត្រង់ចំនុច $A(0,3)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $f(x) = ax + b - e^x$ នាំអោយ $f'(x) = a - e^x$

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (c) ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = x + 3$ ត្រង់ចំនុច $A(0,3)$

លុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = 3 \end{cases} \text{ នាំអោយ } \begin{cases} a - 1 = 1 \\ b - 1 = 3 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a = 2 \ , b = 4}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = ax + b - x.\ln x$ មានក្រាបតំនាង (c) ។

កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (c) ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = x + 1$ ត្រង់ចំនុច $A(1,2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេមាន $f(x) = ax + b - x.\ln x$

គេបាន $f'(x) = (ax + b - x\ln x)'$

$$= a - \ln x - 1$$

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (c) ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y = x + 1$ ត្រង់ចំនុច $A(1,2)$

លុះត្រាតែ :

$\begin{cases} f'(1) = 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} a - 1 = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a = 2 \ \ ,b = 0}$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^2 + mx + 4}{x^2 + 1}$

ដែល x ជាចំនួនពិត និង m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក. ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាត្រង់ចំនុច $x = 2$ ។

ខ. ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាតែមួយគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់តម្លៃ m

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាត្រង់ចំនុច $x=2$ លុះត្រាតែ $f'(2)=0$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+mx+4}{x^2+1}$

តាមរូបមន្ត $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(x^2+mx+4)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x^2+mx+4)}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{(2x+m)(x^2+1)-2x(x^2+mx+4)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x^3+2x+mx^2+m-2x^3-2mx^2-8x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-mx^2-6x+m}{(x^2+1)^2}$$

ចំពោះ $x=2$ គេបាន $f'(2)=\dfrac{-4m+12+m}{(4+1)^2}=\dfrac{12-3m}{25}=0$

នាំឱ្យ $\boxed{m=4}$ ។

ខ. កំនត់តម្លៃ m

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាតែមួយគត់លុះត្រាតែសមីការ

$f'(x)=0$ សមមូល $-mx^2+6x+m=0$ មានឫសតែមួយគត់

ពោលគឺត្រូវឱ្យ $m=0$ ។

លំហាត់ទី២២

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$

ក-សរសេរ $f(x)$ ជាទំរង់ $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}$

រួចគណនាតំលៃ A,B និង C ។

ខ-គណនា $\int_1^2 f(x).dx$ ដោយសរសេរចំលើយជាទំរង់ $a+\ln b$ ដែល a និង b

ជាចំនួនសនិទាន ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរ $f(x)$ ជាទំរង់ $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}$

ដោយគេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$ នោះគេបាន :

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}=\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$$

$$\frac{A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}=\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$$

$$A(x-3)^2+B(x+1)(x-3)+C(x+1)=3x^2-7x+6\ \ (1)$$

ចំពោះ $x=-1$ តាម (1) គេបាន :

$16A=3+7+6=16$ នាំឱ្យ $A=1$ ។

ចំពោះ $x=3$ តាម (1) គេបាន :

$$A.(3-3)^2+B(3+1)(3-3)+C(3+1)=3(3)^2-7(3)+6$$

$4C=27-21+6=12$ នាំឱ្យ $C=3$ ។

ចំពោះ $x=0$ តាម (1) គេបាន :

$9A-3B+C=6$ នាំឱ្យ $B=2$ ។

ដូចនេះ $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}$

ហើយ $A=1, B=2$ និង $C=3$

ខ-គណនា $\int_1^2 f(x).dx$ ដោយសរសេរចំលើយជាទំរង់ $a+\ln b$

គេបាន $\int_1^2 f(x).dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}\right).dx$

$$= \int_1^2 \left[\frac{(x+1)'}{(x+1)} + 2.\frac{(x-3)'}{(x-3)} + 3.\frac{(x-3)'}{(x-3)^2} \right].dx$$

$$= \left[\ln|x+1| + 2\ln|x-3| - \frac{3}{x-3} \right]_1^2$$

$$= [\ln 3 + 2\ln 1 + 3] - \left[\ln 2 + 2\ln 2 + \frac{3}{2} \right]$$

$$= \ln 3 + 0 + 3 - 3\ln 2 - \frac{3}{2}$$

$$= \ln 3 - \ln 2^3 + \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} + \ln\frac{3}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\int_1^2 f(x).dx = \frac{3}{2} + \ln\frac{3}{8}}$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យអនុគមន៍ $g(x) = \frac{2x^2 - 5x - 1}{x^3 - x}$ ដែល $x \neq 0$, $x \neq \mp 1$ ។

ក.កំនត់ចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យ $g(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$

ខ.ចូរគណនា $I = \int g(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យ

$$g(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

យើងបាន $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{2x^2-5x-1}{x^3-x}$

ឬ $A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)=2x^2-5x-1$

បើ $x=0$ នោះ $-A=-1$ ឬ $A=1$

បើ $x=-1$ នោះ $2C=6$ ឬ $C=3$

បើ $x=1$ នោះ $2B=-4$ ឬ $B=-2$

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=-2\ ,C=3}$ ។

ខ. គណនា $I=\int g(x).dx$

ចំពោះ $A=1\ ,B=-2\ ,C=3$

គេមាន $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}$

គេបាន ៖

$$I=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{x+1}$$
$$=\ln|x|-2\ln|x-1|+3\ln|x+1|+C$$

ដូចនេះ

$$\boxed{I=\int g(x).dx=\ln|x|-2\ln|x-1|+3\ln|x+1|+C}$$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}$ ដែល $x\neq 0$ និង $x\neq -1$

ក_កំនត់ចំនួនពិត A , B , C ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$ ។

ខ_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំនត់ចំនួនពិត A , B , C

គេបាន $\dfrac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$

$$\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$2x^2+2x+1=(A+C)x^2+(A+B)x+B$$

គេទាញបាន $\begin{cases}A+C=2\\A+B=2\\B=1\end{cases}$ នាំឲ្យ $A=1 , B=1 , C=1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A=1 , B=1 , C=1}$ ។

ខ_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A=1 , B=1 , C=1$

គេបាន ៖

$$f(x)=\frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$$

យើងបាន $I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right).dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x+1}$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x+1|+C}$ ។

<u>លំហាត់ទី២៥</u>

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$

ដែល $x\neq -1$ និង $x\neq 3$ ។

ក_កំនត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$

ខ_គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំនត់បីចំនួនពិត a, b, c

គេបាន $\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$

ឬ $3x^2-7x+6=a(x-3)^2+b(x+1)(x-3)+c(x+1)$

ចំពោះ $x=-1$ គេបាន $16=16a$ នាំឲ្យ $a=1$

ចំពោះ $x=3$ គេបាន $12=4c$ នាំឲ្យ $c=3$

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $6=9a-3b+c$ នាំឲ្យ $b=\frac{9a+c-6}{3}=2$

ដូចនេះ $\boxed{a=4\ ,\ b=2\ ,c=3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

$$f(x)=\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}=\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}$$

គេបាន $I=\int_0^1\left[\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}\right].dx$

$$=\left[4\ln|x+1|+2\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}\right]_0^1$$

$$=\left[4\ln 2+2\ln 2+\frac{3}{2}\right]-\left[4\ln 1+2\ln 3+1\right]$$

$$=6\ln 2+\frac{3}{2}-2\ln 3-1=\frac{1}{2}+2\ln\frac{8}{3}$$

ដូចនេះ $I=\int_0^1 f(x).dx=\frac{1}{2}+2\ln\frac{8}{3}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ និង មានដេរីវេត្រង់ចំនុច $x=c$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(c+h)-f^2(c-h)}{h}=4f'(c).f(c)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(c+h)-f^2(c-h)}{h}=4f'(c).f(c)$

តាង $L=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(c+h)-f^2(c-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[f(c+h)-f(c-h)].[f(c+h)+f(c-h)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{h}\times\lim_{h\to 0}[f(c+h)+f(c-h)]$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[f(c+h)-f(c)]-[f(c-h)-f(c)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(c-h)-f(c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(c+(-h))-f(c)}{(-h)}$$

$$=f'(c)+f'(c)=2f'(c)$$

និង $\lim\limits_{h\to 0}[f(c+h)+f(c-h)]=f(c)+f(c)=2f(c)$

នាំឱ្យ $L=2f'(c)\times 2f(c)=4f'(c).f(c)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(c+h)-f^2(c-h)}{h}=4f'(c).f(c)}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x}{ax+b}$ ដែល $a\neq 0, a, b\in IR$

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ e ចំពោះ $x=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(e^x)'(ax+b)-(ax+b)'e^x}{(ax+b)^2}$

$$=\frac{e^x(ax+b)-ae^x}{(ax+b)^2}=\frac{(ax+b-a).e^x}{(ax+b)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{(ax+b-a).e^x}{(ax+b)^2}}$ ។

និង $f''(x)=\dfrac{[(ax+b-a)e^x]'(ax+b)^2-[(ax+b)^2]'(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^4}$

$$=\frac{[ae^x+e^x(ax+b-a)](ax+b)^2-2a(ax+b)(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^4}$$

$$=\frac{(ax+b)^2.e^x-2a(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^3}=\frac{\left[(ax+b)^2-2a(ax+b-a)\right].e^x}{(ax+b)^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=\dfrac{\left[(ax+b)^2-2a(ax+b-a)\right].e^x}{(ax+b)^3}}$ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ e ចំពោះ $x=1$ លុះត្រាតែ

$$\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=e \\ f''(1)>0 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $\boxed{a=1\ \ ,b=0}$

លំហាត់ទី២៨

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=\sin x$

ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

គេមាន $f(x)=\sin x$

គេបាន $f'(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ (ព្រោះ $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sin\theta$)

$$f''(x)=(x+\frac{\pi}{2})'\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\pi)$$

$$f'''(x)=(x+\pi)'\cos(x+\pi)=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$$

....

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី n គឺ $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី $(n+1)$ គឺ

$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$ ពិត

យើងមាន $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$

ដោយ $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$

$$f^{(n+1)'}(x) = (x + \frac{n\pi}{2})'\cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

$$= \sin(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})}$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{x^3 + 1}$ ដែល $x \neq -1$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត a , b , c

គេបាន $\frac{4x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$

$$\frac{4x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{a(x^2-x+1)+(x+1)(bx+c)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$4x^2-x+1=ax^2-ax+a+bx^2+cx+bx+c$$

$$4x^2-x+1=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)$$

គេទាញបាន $\begin{cases}a+b=4\\-a+b+c=-1\\a+c=1\end{cases}$ នាំឱ្យ $a=2\ ,\ b=2\ ,c=-1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a=2\ ,\ b=2\ ,c=-1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a=2\ ,\ b=2\ ,c=-1$ គេមាន :

$$f(x)=\frac{4x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{2}{x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

គេបាន $I=\int(\ \frac{2}{x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}\ ).dx$

$$=\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{(2x-1).dx}{x^2-x+1}$$

$$=2\int\frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx+\int\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}.dx$$

$$=2\ln|x+1|+\ln|x^2-x+1|+C$$

លំហាត់ទី៣០

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}$ ដែល $x\neq -1$ និង $x\neq 3$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត a , b , c ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}+\dfrac{c}{(x-3)^2}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត a , b , c

គេបាន $\dfrac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}+\dfrac{c}{(x-3)^2}$

$$\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}=\frac{a(x-3)^2+b(x+1)(x-3)+c(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$5x^2-14x+13=ax^2-6ax+9a+bx^2-2bx-3b+cx+c$$

$$5x^2-14x+13=(a+b)x^2+(-6a-2b+c)x+(9a-3b+c)$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=5 \\ -6a-2b+c=-14 \\ 9a-3b+c=13 \end{cases}$

នាំឱ្យ $a=2$, $b=3$, $c=4$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a=2\ ,\ b=3,\ c=4}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a=2$, $b=3$, $c=4$ គេមាន ៖

$$f(x)=\frac{5x^2-14x+13}{(x+1)(x-3)^2}=\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}$$

គេបាន $I=\int\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{(x-3)^2}\right).dx$

$$=2\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{x-3}+4\int\frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$=2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\frac{4}{x-3}+c$$

លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x(1+x^4)}$ ដែល x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ ។

ក-ចូរកំនត់បីចំនួនពិត A ,B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{Bx^3+C}{1+x^4}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int\frac{4x^3\ln x.dx}{(1+x^4)^2}$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A , B , C

គេបាន $\frac{1}{x(1+x^4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx^3+C}{1+x^4}$

$$\frac{1}{x(1+x^4)} = \frac{A(1+x^4)+x(Bx^3+C)}{x(1+x^4)}$$

$$1 = A + Ax^4 + Bx^4 + Cx$$

$$1 = (A+B)\,x^4 + Cx + A$$

គេទាញ $\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $A=1$, $B=-1$, $C=0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=-1\ ,\ C=0}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A=1$, $B=-1$, $C=0$

គេមាន $f(x)=\frac{1}{x(1+x^4)}=\frac{1}{x}-\frac{x^3}{1+x^4}$

គេបាន $I=\int f(x).dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^3}{1+x^4}\right).dx=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{4x^3dx}{1+x^4}$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C}$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int\frac{4x^3\ln x.dx}{(1+x^4)^2}$

តាង $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{4x^3.dx}{(1+x^4)^2} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=\frac{1}{x}.dx \\ v=\int\frac{4x^3.dx}{(1+x^4)^2}=-\frac{1}{1+x^4} \end{cases}$

គេបាន $J=-\frac{\ln x}{1+x^4}-\int(-\frac{1}{1+x^4}).\frac{1}{x}.dx$

$$=-\frac{\ln x}{1+x^4}+\int\frac{dx}{x(1+x^4)}=-\frac{\ln x}{1+x^4}+I$$

ដោយ $I=\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C$

ដូចនេះ $\boxed{J=-\frac{\ln x}{1+x^4}+\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{e^{2x}+1}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ក-ចូរកំនត់បីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=A+\frac{B.e^{2x}}{e^{2x}+1}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int\frac{2xe^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2}$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A , B

គេបាន $\frac{1}{e^{2x}+1}=A+\frac{B.e^{2x}}{e^{2x}+1}$

$$\frac{1}{e^{2x}+1}=\frac{A(e^{2x}+1)+B.e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{(A+B)e^{2x}+A}{e^{2x}+1}$$

គេទាញ $\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $A=1\ ,\ B=-1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=-1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A=1\ ,\ B=-1$

គេមាន $f(x)=1-\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

គេបាន $I=\int (1-\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}).dx=\int dx-\dfrac{1}{2}\int \dfrac{2e^{2x}.dx}{e^{2x}+1}=x-\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C$

ដូចនេះ $\boxed{I=x-\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C}$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J=\int \dfrac{2xe^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2}$

តាង $\begin{cases} u=x \\ dv=\dfrac{2e^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=dx \\ v=\int \dfrac{2e^{2x}.dx}{(e^{2x}+1)^2}=-\dfrac{1}{e^{2x}+1} \end{cases}$

គេបាន $J=-\dfrac{x}{e^{2x}+1}+\int \dfrac{dx}{e^{2x}+1}=-\dfrac{x}{e^{2x}+1}+I$

ដោយ $I=x-\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C$

ដូចនេះ $\boxed{J=-\dfrac{x}{e^{2x}+1}+x-\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I=\int e^{x}\cos^{2}x.dx$ និង $J=\int e^{x}\sin^{2}x.dx$

ក-ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ-ទាញរក I និង J

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

គេបាន $I+J=\int e^{x}\cos^{2}x.dx+\int e^{x}\sin^{2}x.dx$

$$=\int (e^{x}\cos^{2}x+e^{x}\sin^{2}x).dx=\int e^{x}.dx$$

ដូចនេះ $\boxed{I+J=e^{x}+C_1}$ ។

គេបាន $I-J=\int e^{x}\cos^{2}x.dx-\int e^{x}\sin^{2}x.dx$

$$=\int (e^{x}\cos^{2}x-e^{x}\sin^{2}x).dx=\int e^{x}(\cos^{2}x-\sin^{2}x).dx$$

$$=\int e^{x}\cos 2x.dx$$

តាង $\begin{cases} u=e^{x} \\ dv=\cos 2x.dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=e^{x}dx \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

គេបាន $I-J=\frac{1}{2}e^{x}\sin 2x-\int \frac{1}{2}e^{x}\sin 2x.dx$

តាង $\begin{cases} u = \frac{1}{2}e^x \\ dv = \sin 2x.dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = \frac{1}{2}e^x.dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

គេបាន $I - J = \frac{1}{2}e^x \sin 2x - \left[-\frac{1}{4}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x.dx \right]$

$$I - J = \frac{1}{2}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x.dx$$

$$I - J = \frac{1}{2}(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)e^x - \frac{1}{4}(I - J)$$

$$\frac{5}{4}(I - J) = \frac{1}{2}(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)e^x$$

ដូចនេះ $\boxed{I - J = \frac{2}{5}(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)e^x + C_2}$ ។

ខ-ទាញរក I និង J

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\begin{cases} I + J = e^x + C_1 \\ I - J = \frac{2}{5}(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x)e^x + C_2 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងលើនេះគេបាន :

$$I = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{5}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x)e^x + K_1$$

និង $J = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{5}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x)e^x + K_2$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឱ្យអាំងតេក្រាល :

$$I=\int \frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}.dx \text{ និង } J=\int \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx$$

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ-ទាញរក I និង J

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

គេបាន $I+J=\int \frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}.dx+\int \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx$

$$=\int (\frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}+\frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}).dx$$

$$=\int \frac{2+\cos x+\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx=\int dx=x+C_1$$

ដូចនេះ $\boxed{I+J=x+C_1}$ ។

គេបាន $I-J=\int \frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}.dx-\int \frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx$

$$=\int (\frac{1+\cos x}{2+\sin x+\cos x}-\frac{1+\sin x}{2+\sin x+\cos x}).dx$$

$$=\int \frac{\cos x-\sin x}{2+\sin x+\cos x}.dx=\int \frac{(2+\sin x+\cos x)'}{2+\sin x+\cos x}dx$$

$$=\ln|2+\sin x+\cos x|+C_2$$

ដូចនេះ $\boxed{I - J = \ln|2+\sin x+\cos x| + C_2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល I និង J

គេមាន $\begin{cases} I + J = x + C_1 & (1) \\ I - J = \ln|2+\sin x+\cos x| + C_2 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន :

$$2I = x + \ln|2+\sin x+\cos x| + C_1 + C_2$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|2+\sin x+\cos x| + K_1}$ ដែល $K_1 = \frac{C_1 + C_2}{2}$

ដកសមីការ (1) និង (2) គេបាន :

$$2J = x - \ln|2+\sin x+\cos x| + C_1 - C_2$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|2+\sin x+\cos x| + K_2}$ ដែល $K_2 = \frac{C_1 - C_2}{2}$

លំហាត់ទី៣៥

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2}$

និង $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt \quad , \ (n \in IN)$

ក-ចូរគណនាតម្លៃនៃ I_0 រួច ស្រាយថា (I_n)ជាស្វ៊ីតចុះ។

ខ-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

គ_ទាញឲ្យបានថា $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n I_n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតម្លៃនៃ I_0 រួច ស្រាយថា (I_n) ជាស៊ីតចុះ

យើងបាន $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}+t)^2}$

តាង $U = \frac{1}{2}+t$ នាំឱ្យ $dU = dt$

ហើយចំពោះ $\forall t \in [0,1]$ នោះ $U \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

គេបាន $I_0 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dU}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+U^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2U}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$ និង $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt$

ចំពោះគ្រប់ $t \in [0,1]$ គេមាន $t^{n+1} \le t^n$ នាំឱ្យ $\frac{t^{n+1}}{1+t+t^2} \le \frac{t^n}{1+t+t^2}$

គេទាញ $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt \le \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$ ឬ $I_{n+1} \le I_n \ , \forall n \in IN$

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

យើងបាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t+t^2} + \int_0^1 \frac{t^{n+1}dt}{1+t+t^2} + \int_0^1 \frac{t^{n+2}dt}{1+t+t^2}$

$$= \int_0^1 \frac{(t^n + t^{n+1} + t^{n+2})dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{t^n(1+t+t^2).dt}{1+t+t^2}$$

$$= \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

គ. ទាញឱ្យបានថា $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)} \ , \forall n \ge 2$

យើងមាន (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតចុះយើងមាន :

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$$

ដោយ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ នាំឱ្យ $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n-1}$

គេទាញ $\frac{1}{n+1} \le 3I_n \le \frac{1}{n-1}$

នាំឱ្យ $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n I_n)$

មាន $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$

នាំឱ្យ $\frac{n}{3(n+1)} \le nI_n \le \frac{n}{3(n-1)}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\left(nI_n\right) = \frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I=\int x\cos^2 x.dx$ និង $J=\int x\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ-ទាញរក I និង J

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

គេបាន $I+J=\int x\cos^2 x.dx+\int x\sin^2 x.dx$

$$=\int (x\cos^2 x+x\sin^2 x).dx=\int x(\cos^2 x+\sin^2 x).dx=\int x.dx$$

ដូចនេះ $\boxed{I+J=\frac{1}{2}x^2+C_1}$ ។

គេបាន $I-J=\int x\cos^2 x.dx-\int x\sin^2 x.dx$

$$=\int (x\cos^2 x-x\sin^2 x).dx=\int x(\cos^2 x-\sin^2 x).dx$$

$$=\int x\cos 2x.dx$$

តាង $\begin{cases} u=x \\ dv=\cos 2x.dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=dx \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

គេបាន $I-J=\frac{1}{2}x\sin 2x-\int \frac{1}{2}\sin 2x.dx$

ដូចនេះ $I - J = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ ។

ខ-ទាញរក I និង J

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\begin{cases} I + J = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\ I - J = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C_2 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងលើនេះគេបាន :

$$I = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x) + K_1$$

និង $J = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x) + K_2$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ ដែល $x \neq \{1, 2, 3\}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក- កំនត់បីចំនួនពិត a, b, c

គេបាន $\frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$

$$\frac{6x^2-22x+18}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$6x^2-22x+18=a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)$$

-ចំពោះ $x=1$ គេបាន $2=2a$ នាំឱ្យ $a=1$

-ចំពោះ $x=2$ គេបាន $-2=-b$ នាំឱ្យ $b=2$

-ចំពោះ $x=3$ គេបាន $6=2c$ នាំឱ្យ $c=3$

ដូចនេះ $\boxed{a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

ចំពោះ $a=1, b=2\ , c=3$

គេមាន $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$

គេបាន $I=\int(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}).dx$

$$=\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{x-3}$$

$$=\ln|x-1|+2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int f(x).dx=\ln|x-1|+2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C}$

លំហាត់ទី៣៨

គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

យើងបាន $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x+\sin^2 x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{I+J=\frac{\pi}{4}}$ ។

យើងបាន $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x-\sin^2 x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 0=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{I - J = \frac{1}{2}}$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J

គេមាន $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$ នាំឱ្យ $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ និង $J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)}$ ដែល $x \neq -1$ និង $x \neq 0$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^3 f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក- កំនត់បីចំនួនពិត A និង B

គេបាន $\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ នាំឱ្យ $2x + 1 = A(x+1) + Bx$

-ចំពោះ $x = 0$ នាំឱ្យ $1 = A$ ឬ $A = 1$

-ចំពោះ $x = -1$ នាំឱ្យ $-1 = -B$ ឬ $B = 1$

ដូចនេះ $\boxed{A = 1 \,,\; B = 1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^3 f(x).dx$

ចំពោះ $A=1$, $B=1$ គេមាន $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$

គេបាន $I=\int_1^3(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}).dx=[\ln|x|+\ln|x+1)]_1^3=(\ln 3+\ln 4)-(\ln 1+\ln 2)$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln 12-\ln 2=\ln 6}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$ និង $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}$

ក-កំនត់ពីរចំនួនពិត a, b ដើម្បីឱ្យ $\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរកតម្លៃ J ។

ដំណោះស្រាយ

ក- កំនត់បីចំនួនពិត a, b

យើងបាន $\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{a\sin x(1-\cos x) + b\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x(a - a\cos x + b + b\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{(a+b)-(a-b)\cos x}{\sin x}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a=b=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{1}{2}\ ,\ b=\frac{1}{2}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរកតម្លៃ J

ចំពោះ $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=\frac{1}{2}$

គេមាន $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{1+\cos x}$

គេបាន $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{1+\cos x}\right).dx$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos x}.dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}.dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos x)'}{(1-\cos x)}.dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos x)'}{(1+\cos x)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|1-\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left[\ln|1+\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\right]-\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}})+\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})=\ln(\sqrt{2}+1)$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln(1+\sqrt{2})}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}.\frac{dx}{\sin^2 x}$

តាង $\begin{cases}u=\frac{1}{\sin x}\\ dv=\frac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}du=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\\ v=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x=-\frac{\cos x}{\sin x}\end{cases}$

គេបាន $J = \left[-\frac{\cos x}{\sin^2 x} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}.dx$

$$J = \sqrt{2} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x}.dx = \sqrt{2} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$$

$J = \sqrt{2} - J + I$ នាំឱ្យ $J = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{I}{2}$ ដោយ $I = \ln(1 + \sqrt{2})$

ដូចនេះ $\boxed{J = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1 + \sqrt{2})}$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{e^{4x} + 1}{(e^{2x} + 1)^2}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A , B ដើម្បីឱ្យ $f(x) = A + \frac{B.e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក- កំនត់បីចំនួនពិត A , B

គេមាន $f(x) = \frac{e^{4x} + 1}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{(e^{4x} + 2e^{2x} + 1) - 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{(e^{2x} + 1)^2 - 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$

$$f(x)=1-\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=A+\frac{Be^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=-2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x).dx$

គេមាន $f(x)=1-\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

គេបាន $I=\int_0^{\frac{1}{2}}[1-\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}].dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2}.dx$$

$$=\frac{1}{2}-\left[-\frac{1}{e^{2x}+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{e+1}-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{e+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\frac{1}{e+1}}$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរជារាង

$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់បីចំនួនពិត A, B និង C

គេមាន $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}$ និង $f(x)=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$

គេបាន $\dfrac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$

$$\frac{2x^2+4x+3}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{A.(x+2)^2+B.(x+1)(x+2)+C.(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$2x^2+4x+3=A.(x+2)^2+B.(x+1)(x+2)+C.(x+1) \quad (1)$$

ចំពោះ $x=-1$ តាម (1) គេបាន $2-4+3=A$ នាំឱ្យ $A=1$

ចំពោះ $x=-2$ តាម (1) គេបាន $8-8+3=-C$ នាំឱ្យ $C=-3$

ចំពោះ $x=0$ តាម (1) គេបាន $3=4A+2B+C$

នាំឱ្យ $B = \frac{3-4A-C}{2} = \frac{3-4+3}{2} = 1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{A = 1\ \ ,B = 1\ \ ,C = -3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 f(x).dx$

ចំពោះ $A = 1, B = 1, C = -3$ គេបាន $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$

គេបាន $I = \int_0^1 f(x).dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\right].dx$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}.dx + \int_0^1 \frac{1}{x+2}.dx - 3\int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2}.dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx + \int_0^1 \frac{(x+2)'}{(x+2)}.dx - 3.\int_0^1 \frac{(x+2)'}{(x+2)^2}.dx$$

$$I = \left[\ln|x+1|\right]_0^1 + \left[\ln|x+2|\right]_0^1 - 3.\left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^1$$

$$I = \left[\ln 2 - \ln 1\right] + \left[\ln 3 - \ln 2\right] + 3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right]$$

$$I = \ln 2 - 0 + \ln 3 - \ln 2 + 1 - \frac{3}{2}$$

$$I = \ln 3 - \frac{1}{2} = \frac{-1+2\ln 3}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \int_0^1 f(x).dx = \frac{-1+2\ln 3}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ កំនត់លើ IR ។

ក-ចូរសរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=A+\dfrac{B.e^{-x}}{1+e^{-x}}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

ដោយសរសេរលទ្ធផលជារាង $a+\ln b$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិតត្រូវរក

ដំណោះស្រាយ

ក- សរសេរ $f(x)$ ជារាង $f(x)=A+\dfrac{B.e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{(e^x+1)-2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$$

$$=1-\frac{2e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}=1-\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

ដូចនេះ $f(x)=1+\dfrac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ហើយ $A=1$ និង $B=-2$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

គេបាន $I=\int_0^1\left(1+\dfrac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}\right).dx$ ព្រោះ $f(x)=1+\dfrac{-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$=\int_0^1\left[1+2.\frac{(1+e^{-x})'}{\left(1+e^{-x}\right)}\right].dx=\left[x+2\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1$$

$$=\left[1+2\ln\left(1+e^{-1}\right)\right]-\left[0+2\ln(1+1)\right]=1+2\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)-2\ln 2$$

$$=1+2\ln(e+1)-2\ln e-2\ln 2$$

$$=1+2[\ln(e+1)-\ln 2]-2=-1+2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

ដូចនេះ $I=\int_0^1 f(x).dx=-1+2\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

ហើយ $a=-1$ និង $b=\frac{e+1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\left(x^2+x-7\right).e^x$ កំនត់លើ IR ។

ក-កំនត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right).e^x$

ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^3 f(x).dx$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត a,b និង c

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លុះត្រាតែ :

$\forall x \in IR : F'(x) = f(x)$

គេបាន $F'(x) = (ax^2 + bx + c)'.e^x + (e^x)'.(ax^2 + bx + c)$

$= (2ax + b).e^x + e^x(ax^2 + bx + c)$

$= [ax^2 + (2a + b)x + (b + c)].e^x$

ដោយ $F'(x) = f(x)$

នាំឱ្យ $[ax^2 + (2a + b)x + (b + c)].e^x = (x^2 + x - 7).e^x$

គេទាញបាន $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 1 \\ b + c = -7 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a = 1 \ , b = -1 \ , c = -6}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^3 f(x).dx$

ដោយ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ នោះគេបាន :

$I = \int_0^3 f(x).dx = [F(x)]_0^3 = F(3) - F(0)$

ចំពោះ $a = 1, b = -1, c = -6$ គេមាន $F(x) = (x^2 - x - 6).e^x$

គេបាន $F(3) = (9 - 3 - 6).e^3 = 0$ និង $F(0) = (0 - 0 - 6).e^0 = -6$

ដូចនេះ $I = 0 - (-6) = 6$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

ក-កំនត់ចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_2^5 f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេបាន $\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A.(x+1)+B.(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$1=A.(x+1)+B.(x-1)$$

$$1=Ax+A+Bx-B$$

$$1=(A+B)x+(A-B)$$

គេទាញបាន $\begin{cases}A+B=0\\A-B=1\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{2}\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{A=\frac{1}{2}\ ,B=-\frac{1}{2}}$ ។

ខ- គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_2^5 f(x).dx$

ចំពោះ $A=\frac{1}{2}\ ,B=-\frac{1}{2}$

គេបាន $f(x)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$

គេបាន $I=\int_2^5 f(x).dx$

$$=\int_2^5\left[\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right].dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^5\frac{1}{x-1}.dx-\frac{1}{2}.\int_2^5\frac{1}{x+1}.dx$$

$$=\frac{1}{2}.\int_2^5\frac{(x-1)'}{(x-1)}.dx-\frac{1}{2}.\int_2^5\frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_2^5-\frac{1}{2}\left[\ln|x+1|\right]_2^5$$

$$=\frac{1}{2}[\ln 4-\ln 1]-\frac{1}{2}[\ln 6-\ln 3]$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2^2-0-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{3}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2=\ln\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $I=\int_2^5 f(x).dx=\ln\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេដឹងថា $\int_0^{x^2} f(2t-1).dt = 4x^6$ ។

ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $\int_0^{x^2} f(2t-1).dt = 4x^6$

តាង $g(t) = f(2t-1)$ និង $G(t)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(t)$ ។

គេបាន $\int_0^{x^2} g(t).dt = 4x^6$

$$\left[G(t)\right]_0^{x^2} = 4x^6$$

$$G(x^2) - G(0) = 4x^6$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនងនេះគេបាន :

$2x.G'(x^2) = 24x^5$ នាំឱ្យ $G'(x^2) = 12x^4$ ដោយ $G'(t) = g(t)$

គេទាញ $g(x^2) = 12x^4$ តែ $g(t) = f(2t-1)$

គេបាន $f(2x^2-1) = 12x^4$ តាង $2x^2 - 1 = y$ នាំឱ្យ $x^2 = \dfrac{y+1}{2}$

នាំឱ្យ $f(y)=12\left(\frac{y+1}{2}\right)^2=3(y+1)^2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=3(x+1)^2}$ ។

លំហាត់ទី៤៧

១.ដោះស្រាយសមីការ $g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0\ \ (E)$

២. កំនត់ចំលើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល $g(0)=0$ និង $g'(0)=1$

ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការ $g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0\ \ (E)$

មានសមីការសំគាល់ $r^2-5r+6=0$

ដោយ $\Delta=25-24=1$ នាំឱ្យមានឫស $r_1=\frac{5-1}{2}=2\ \ ,r_2=\frac{5+1}{2}=3$

តាមរូបមន្ត $g(x)=A.e^{r_1x}+B.e^{r_2x}\ \ ,A,B\in IR$

ដូចនេះចំលើយសមីការជាអនុគមន៍ $g(x)=A.e^{2x}+B.e^{3x}\ \ ,A,B\in IR$ ។

២. កំនត់ចំលើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល $g(0)=0$ និង $g'(0)=1$

គេមាន $g(x) = A.e^{2x} + B.e^{3x}$ នាំឱ្យ $g'(x) = 2A.e^{2x} + 3B.e^{3x}$

តាមបំរាប់គេមាន $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g'(0) = 1 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x) = -e^{2x} + e^{3x}}$ ។

លំហាត់ទី៤៨

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y = 0$

ដោយដឹងថា $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

$(E): y''-3y'+2y = 0$ មានសមីការសំគាល់ $r^2 - 3r + 2 = 0$

ដោយ $a + b + c = 0$ នាំឱ្យ $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{c}{a} = 2$

តាមរូបមន្ត $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$

គេបាន $y = A.e^{x} + B.e^{2x}$ និង $y' = A.e^{x} + 2B.e^{2x}$, $A, B \in IR$

ដោយតាមបំរាប់គេមាន $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$

ដូចនេះ $y = 2e^{x} - e^{2x}$ ជាចំលើយសមីការ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-4y'+4y = 4x^{2} - 24x + 34$

ក-កំនត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_{P}(x) = ax^{2} + bx + c$

ជាចំលើយដោយឡែកមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ-បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = y_{P}(x) + y_{h}(x)$ ជាចំលើយទូទៅរបស់ (E)

លុះត្រាតែអនុគមន៍ $y_{h}(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការអូម៉ូសែន

$(E'): y''-4y'+4y = 0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចទាញរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ចំនួនពិត a,b និង c

$(E): y''-4y'+4y = 4x^2 - 24x + 34$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចំលើយដោយឡែកមួយ

របស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ $y_p(x), y'_p(x)$ និង $y''_p(x)$

ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ។

គេបាន$(E): y''_p(x) - 4y'_P(x) + 4y_p(x) = 4x^2 - 24x + 34$

ដោយ $\begin{cases} y_P(x) = ax^2 + bx + c \\ y'_p(x) = 2ax + b \\ y''_p(x) = 2a \end{cases}$

គេបាន $(2a) - 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = 4x^2 - 24x + 34$

នាំឱ្យ $4ax^2 + (4b - 8a)x + (2a - 4b + 4c) = 4x^2 - 24x + 34$

គេទាញបាន $\begin{cases} 4a = 4 \\ 4b - 8a = -24 \\ 2a - 4b + 4c = 34 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $a = 1 \ \ ,b = -4 \ \ ,c = -4$ និង $y_P(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ ។

ខ-ការបង្ហាញ

អនុគមន៍ $y = y_P(x) + y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់ (E) លុះត្រាអនុគមន៍

y, y', y'' ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ។

ដោយគេមាន $y' = y'_p(x) + y'_h(x)$ និង $y'' = y''_p(x) + y''_h(x)$

នោះគេបាន :

$$[y''_p(x) + y''_h(x)] - 4[y'_p(x) + y'_h(x)] + 4[y_p(x) + y_h(x)] = 4x^2 - 24x + 34$$

$$[y''_p(x) - 4y'_p(x) + 4y_p(x)] + [y''_h(x) - 4y'_h(x) + 4y_h(x)] = 4x^2 - 24x + 34 \quad (1)$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន

$$y''_p(x) - 4y'_P(x) + 4y_p(x) = 4x^2 - 24x + 34 \quad (2)$$

(ព្រោះ $y_p(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការ (E)) ។

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន :

$$4x^2-24x+34+\left[y''_h(x)-4y'_h(x)+4y_h(x)\right]=4x^2-24x+34$$

$y''_h(x)-4y'_h(x)+4y_h(x)=0$ ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y_h(x)$

ជាចំលើយរបស់សមីការ $(E'): y''-4y'+4y=0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ $(E'): y''-4y'+4y=0$

សមីការសំគាល់ $r^2-4r+4=0$ $,\Delta'=4-4=0$

នាំឱ្យសមីការមានឫសឌុប $r_1=r_2=r_0=2$ ។

ដូចនេះចំលើយសមីការ (E') ជាអនុគមន៍

$$y_h(x)=(Ax+B).e^{2x} \quad ,A,B\in IR$$ ។

ទាញរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

តាមសំរាយខាងលើចំលើយសមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍ទំរង់

$$y=y_p(x)+y_h(x)$$

ដោយគេមាន $y_p(x)=(x-2)^2$ និង $y_h(x)=(Ax+B).e^{2x}$

ដូចនេះ $y=(x-2)^2+(Ax+B).e^{2x}\quad ,A,B\in IR$

ជាចំលើយរបស់សមីការ ។

លំហាត់ទី៥០

ក-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):f''(x)-f'(x)-6f(x)=0$

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការ (E)

បើគេដឹងថាខ្សែកោង (C) តាង $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y=-x+3$

ត្រង់ចំនុច $M(0,3)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

$(E):f''(x)-f'(x)-6f(x)=0$

មានសមីការសំគាល់ $r^2-r-6=0$

$\Delta=1+24=25$ នាំឱ្យ $\left[\begin{array}{l} r_1=\dfrac{1-5}{2}=-2 \\ r_2=\dfrac{1+5}{2}=3 \end{array}\right.$

សមីការមានចំលើយជាអនុគមន៍ $f(x)=A.e^{-2x}+B.e^{3x}\quad ,A,B\in IR$ ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $y = f(x)$

បើ $y = f(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការ (E) នោះគេបាន :

$(C): y = f(x) = A.e^{-2x} + B.e^{3x}$

និង $y' = f'(x) = -2A.e^{-2x} + 3B.e^{3x}$ ។

ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) តាង $f(x)$ ប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់ $(T): y = -x + 3$

ត្រង់ចំនុច $M(0,3)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(0) = -1 \\ f(0) = 3 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} -2A + 3B = -1 \\ A + B = 3 \end{cases}$

នាំឱ្យ $A = 2$, $B = 1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{y = f(x) = 2e^{-2x} + e^{3x}}$ ។

លំហាត់ទី៥១

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 9y = 0$

ក-ដោះស្រាយសមីការ (E) ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយមួយរបស់សមីការ (E) បើគេដឹងថា :

$f(0) = \sqrt{3}$, $f'(0) = 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ដោះស្រាយសមីការ (E)

$(E): y''+9y=0$ មានសមីការសំគាល់ $r^2+9=0$

$r^2=-9$ នាំឱ្យ $r_1=-3i$ ឬ $r_2=3i$

គេទាញបាន $\alpha=0$ និង $\beta=3$ ។

ចំលើយសមីការជាអនុគមន៍ទំរង់ $y=(A\cos\beta x+B\sin\beta x).e^{\alpha x}$

ដូចនេះ $\boxed{y = A\cos 3x + B\sin 3x}$ ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=A\cos 3x+B\sin 3x$

នាំឱ្យ $f'(x)=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$

ដោយ $f(0)=A.\cos 0+B.\sin 0=\sqrt{3}$ នាំឱ្យ $A=\sqrt{3}$

និង $f'(0)=-3A\sin 0+3B\cos 0=3$ នាំឱ្យ $B=1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x}$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល : $y''-4y=8x-12 \quad (E)$

ក-កំនត់អនុគមន៍ $\varphi(x)=ax+b$ ជាចំលើយដោយឡែកមួយរបស់(E) ។

ខ-រកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់អនុគមន៍ $\varphi(x)=ax+b$

គេមាន : $y''-4y=8x-12 \quad (E)$

បើ $\varphi(x)$ ជាចំលើយសមីការ (E) នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ។

គេបាន $\varphi''(x)-4\varphi(x)=8x-12 \quad (E_1)$

ដោយ $\varphi(x)=ax+b$ នាំឱ្យ $\varphi'(x)=a$ និង $\varphi''(x)=0$

សមីការ (E_1) អាចសរសេរ: $0-4(ax+b)=8x-12$

$$-4ax-4b=8x-12$$

នាំឱ្យ $\begin{cases}-4a=8\\-4b=-12\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{\varphi(x)=-2x+3}$ ។

ខ-រកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

ដកសមីការ (E) និង (E_1) គេបាន $(y''-\varphi''(x))-4(y-\varphi(x))=0$

តាង $z=y-\varphi(x)$ នាំឱ្យ $z'=y'-\varphi'(x)$ និង $z''=y''-\varphi''(x)$

គេបាន $z''-4z=0$ មានសមីការសំគាល់ $r^2-4=0$

មានឬស $r_1=-2, r_2=2$ ។

សមីការមានចំលើយ $z=A.e^{-2x}+B.e^{2x}$ ដែល $A,B\in IR$

ដោយ $z=y-\varphi(x)$ នាំឱ្យ $y=\varphi(x)+z$

ដូចនេះ $y=-2x+3+A.e^{-2x}+B.e^{2x}\ \ ,A,B\in IR$ ។

<u>លំហាត់ទី៥៣</u>

គេឱ្យប្រវែងប្រែប្រួលមួយ MN ដែល $MN=f(x)$ ។

អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

$(E): f''(x)-2f'(x)+f(x)=0$ ។

ក-គណនាប្រវែង MN បើគេដឹងថា $f(0)=2$ និង $f'(0)=1$ ។

ខ-កំនត់ប្រវែងអតិបរមានៃ MN ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាប្រវែង

$(E): f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ មានសមីការសំគាល់ $r^2 - 2r + 1 = 0$

$\Delta' = 1 - 1 = 0$ សមីកាសំគាល់មានឬសឌុប $r_1 = r_2 = r_0 = -\frac{b'}{a} = 1$

ចំលើយសមីការ (E) ជាអនុគមន៍ $f(x) = (Ax + B).e^x$

ដោយ $f(0) = (A.0 + B).e^0 = 2$ នាំឱ្យ $B = 2$

ហើយ $f'(x) = (Ax + B)'.e^x + (e^x)'.(Ax + B)$

$$= A.e^x + e^x.(Ax + B)$$

ដោយ $f'(0) = A.e^0 + e^0(A.0 + B) = 1$ នាំឱ្យ $A = -1$

នាំអោយចំលើយដោយឡែកនៃសមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍

$f(x) = (-x + 2).e^x$

ដូចនេះប្រវែង $MN = f(x) = (-x + 2).e^x$ ដែល $x < 2$ ។

ខ-កំនត់ប្រវែងអតិបរមានៃ MN

គេមាន $MN = f(x) = (-x + 2).e^x$ ដែល $x < 2$

គេបាន $f'(x) = (-x + 2)'.e^x + (e^x)'.(-x + 2)$

$$= -e^x + e^x(-x + 2) = (-x + 1).e^x$$

បើ $f'(0)=(-x+1).e^{x}=0$ នាំឱ្យ $x=1$ ។

ចំពោះ $x=1$ នាំឱ្យ $f(1)=(-1+2).e^{1}=e=2,71828$ ។

គណនាដេរីវេទីពីរ $f''(x)=-e^{x}+(-x+1)e^{x}=-xe^{-x}$

ដោយ $f''(1)=-e^{-1}<0$ នាំឱ្យអនុគមន៍មានអតិបរមាត្រង់ $x=1$ ។

ដូចនេះប្រវែងអតិបរមានៃ MN គឺ $MN_{max}=e=2,71828$

(ឯកតាប្រវែង) ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y=0$ ។

ក-ដោះស្រាយសមីការ (E) ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចំលើយមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថា

$f(0)=1$ និង $f'(0)=2\sqrt{3}$ ។

គ-ចូរសរសេរអនុគមន៍ $f(x)$ ជារាង $f(x)=k.\cos(\omega x+\varphi)$

ដែល k ,ω និង φ ជាបីចំនួនពិត ។

ឃ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f^{2}(x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ដោះស្រាយសមីការ (E)

$(E): y''+4y=0$ មានសមីការសំគាល់ $r^2+4=0$

នាំឱ្យ $r_1=-2i\ \ ,r_2=2i$ គេទាញបាន $\alpha=0\ \ ,\beta=2$ ។

ចំលើយសមីការ (E) ជាអនុគមន៍ទំរង់ $y=(A\cos\beta x+B\sin\beta x).e^{\alpha x}$

ដូចនេះ $y=A\cos 2x+B\sin 2x$ ដែល $A,B\in IR$ ។

ខ-កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$

នាំឱ្យ $f'(x)=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$

ដោយ $f(0)=A.\cos 0+B.\sin 0=1$ នាំឱ្យ $A=1$

និង $f'(0)=-2A\sin 0+2B\cos 0=2\sqrt{3}$ នាំឱ្យ $B=\sqrt{3}$

ដូចនេះ $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}.\sin 2x$ ។

គ-សរសេរអនុគមន៍ $f(x)$ ជារាង $f(x)=k.\cos(\omega x+\varphi)$

គេមាន $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}.\sin 2x$ ដោយ $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

គេបាន $f(x)=\cos 2x+\tan\frac{\pi}{3}.\sin 2x$

$$= \cos 2x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}.\sin 2x = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\left(\cos 2x \cos\frac{\pi}{3} + \sin 2x \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2.\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = k.\cos(\omega x + \varphi)$

ឃ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f^2(x)}$

ដោយគេមាន $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

គេបាន $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{4}.\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$

តាង $u = 2x - \frac{\pi}{3}$ នាំឱ្យ $du = 2.dx$ ឬ $\frac{1}{2}.du = dx$

ចំពោះ $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ នាំឱ្យ $u \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

គេបាន $I = \frac{1}{4}.\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{2}.du}{\cos^2 u} = \frac{1}{8}.\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{8}.[\tan u]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f^2(x)} = \frac{\sqrt{3}}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}.dx \, , n \in IN$ ។

ក-គណនា $I_0 + I_1$, I_1 រួចទាញរក I_0 ។

ខ-គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I_0 + I_1$, I_1 រួចទាញរក I_0

យើងមាន $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}.dx$, $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}$

យើងបាន

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}.dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 \frac{1+e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)}.dx = \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}$$

ដោយ $I_0 + I_1 = 1$ នាំឱ្យ $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \ln(\frac{e+1}{2})$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I_0 + I_1 = 1 \, , \; I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \, , I_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$ ។

ខ-គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}.dx + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}.dx$

$$= \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{e^x + 1}.dx = \int_0^1 \frac{e^{nx}(1+e^x)}{e^x+1}.dx$$

$$= \int_0^1 e^{nx}.dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}}$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ $IR - \{-1\}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$x^2 f\left(x^3\right) + \frac{1}{(1+x)^2} f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 4x^3\left(1+x^4\right)^5$$

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល: $I = \int_0^1 f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល: $I = \int_0^1 f(x).dx$

តាង $x = t^3$ នាំឱ្យ $dx = 3t^2.dt$

ចំពោះ $x \in [\ 0,1\ ]$ នាំឱ្យ $t \in [\ 0,1\ ]$

គេបាន $I = \int_0^1 f(x).dx = \int_0^1 f(t^3).3t^2 dt$

នាំឱ្យ $\frac{1}{3} I = \int_0^1 t^2 f(t^3).dt \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀតបើគេតាង $x = \frac{1-t}{1+t}$ នាំឱ្យ $dx = -\frac{2dt}{(1+t)^2}$

ចំពោះ $x \in [\,0,1\,]$ នាំឱ្យ $t \in [1,0]$

គេបាន $I = \int_0^1 f(x).dx = \int_1^0 f\left(\frac{1-t}{1+t}\right).(-\frac{2dt}{(1+t)^2}) = 2\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} f(\frac{1-t}{1+t}).dt$

គេទាញបាន $\frac{1}{2}I = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} f(\frac{1-t}{1+t}).dt \quad (2)$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន :

$$\frac{1}{3}I + \frac{1}{2}I = \int_0^1 \left[t^2 f(t^3) + \frac{1}{(1+t)^2} f(\frac{1-t}{1+t}) \right].dt$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $x^2 f(x^3) + \frac{1}{(1+x)^2} f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 4x^3(1+x^4)^5$

គេបាន $\frac{5}{6}I = \int_0^1 4t^3(1+t^4)^5.dt = \left[\frac{1}{6}(1+t^4)^6\right]_0^1 = \frac{64}{6} - \frac{1}{6} = \frac{63}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{I = \int_0^1 f(x).dx = \frac{63}{5}}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេសន្មត់ថា f ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង៖

$f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$ ។

ចូរគណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$

យើងមាន $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ និង ចំពោះ $x\in\left[-\frac{\pi}{3}\ ,\ 0\right]$

នាំឱ្យ $t\in\left[\frac{\pi}{3},0\right]$ ។

គេបាន $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} f(-t).(-dt)=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-t).dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx$

គេទាញ $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}[f(-x)+f(x)].dx$

ដោយ $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}=\sqrt{4\sin^2 x}=2|\sin x|$

គេបាន $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2|\sin x|.dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x.dx=2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\left(-\frac{1}{2}+1\right)=1$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx=1}$ ។

លំហាត់ទី៥៨

ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ ៖ ចូរគណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

តាង $x=a+b-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ ចំពោះ $x\in[a,b]$ នាំឱ្យ $t\in[b,a]$

គេបាន $\int_a^b f(x).dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=\int_a^b f(a+b-t).dt$

ដូចនេះ $\boxed{\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx}$ ។

អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

យើងបាន $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2\left[1+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)\right].dx$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2\left[1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right].dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x+3-\sqrt{3}\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\log_2 4 - \log_2(1+\sqrt{3}\tan x)\right].dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2 4.dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx = \frac{\pi}{3}\log_2 2^2 - I = \frac{2\pi}{3} - I$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\boxed{I = \frac{\pi}{3}}$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$?

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

តាង $x = \pi - t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

ចំពោះ $x \in [0,\pi]$ នាំឱ្យ $t \in [\pi, 0]$

គេបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t).f[\sin(\pi - t)].dt$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \int_0^{\pi} (\pi - t).f(\sin t).dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t).dt - \int_0^{\pi} t.f(\sin t).dt$$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x).dx - \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

អនុវត្តន៍: គណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$

គេមាន $I=\int_0^\pi \frac{x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x}=\int_0^\pi x.\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}$

តាង $z=\cos x$ នាំឱ្យ $dz=-\sin x.dx$

ហើយចំពោះ $x\in[0,\pi]$ នោះ $z\in[1,-1]$

គេបាន $I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}[\arctan z]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^\pi \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi^2}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៦០

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx$, $q>0$, $q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx$, $q>0$, $q\neq 1$ ។

គេមាន $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}+\int_0^a\frac{f(x).dx}{1+q^x}$ (1)

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ និងចំពោះ $x\in[-a,0]$ នាំឱ្យ $t\in[a,0]$

គេបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=-\int_{a}^{0}\frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}}=\int_{0}^{a}\frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t}=\int_{0}^{a}\frac{q^x f(-x).dx}{1+q^x}$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x)=f(x)\ ,\ \forall x\in[-a,a]$

គេទាញបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x)}{1+q^x}.dx\ (2)$

យក (2) ទៅជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x).dx}{1+q^x}+\int_{0}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{(q^x+1)f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$$

ដូចនេះ $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

ដោយ $\cos x$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេបាន ៖

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx=[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I=1}$ ។

លំហាត់ទី៦១

ក-គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ $I_n = \int_0^1 (1+x)^n .dx \quad ,n \in IN$ ។

ខ-ទាញបង្ហាញថា $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់

$$I_n = \int_0^1 (1+x)^n .dx \quad ,n \in IN$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.2^{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

ខ-ទាញបង្ហាញថា $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេមាន :

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$$

ធ្វើអាំងតេក្រាលកំនត់ក្នុងចន្លោះ [0,1] នៃសមភាពនេះគេបាន :

$$\int_0^1 (1+x)^n.dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n\right).dx$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \left[C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

ដូចនេះ $\boxed{C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេមានស៊ីត (I_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ដោយ

$$I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$$

ក-ចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

ទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

ដំណោះស្រាយ

ក-ចូរគណនាតួ I_1

គេមាន $I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^1 (1-x)e^x.dx = \int_0^1 (1-x).e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x(-dx) = -1 + \left[e^x\right]_0^1 = e-2$

ដូចនេះ $\boxed{I = e-2}$ ។

ខ-បញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n

គេមាន $I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$

នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.\int_0^1 (1-x)^{n+1}.e^x dx$

តាង $\begin{cases} u = (1-x)^{n+1} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -(n+1)(1-x)^n \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[(1-x)^{n+1}e^x\right]_0^1 + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_n$$

ដូចនេះ $\boxed{I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}}$ ។

ទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$

គេមាន $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

ចំពោះ $n = 1 \ : I_2 = I_1 - \frac{1}{2!}$

ចំពោះ $n = 2 : I_3 = I_2 - \frac{1}{3!}$

....

ចំពោះ $n = n-1 : I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$

ដោយធ្វើផលបូកទំនាក់ទំនងនេះអង្គ និង អង្គ គេបាន :

$I_n = I_1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - .... - \frac{1}{n!}$ ដោយ $I_1 = e - 2 = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - .... - \frac{1}{n!} = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)}$ ។

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$

ចំពោះ $x \in [0, 1]$ គេមាន $1 \le e^x \le e$ និង $(1-x)^n \ge 0$

គេបាន $(1-x)^n \le e^x(1-x)^n \le e(1-x)^n$

នាំឱ្យ $\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n .dx \le \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x .dx \le \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-x)^n .dx$

ដោយ $\int_0^1 (1-x)^n .dx = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

គេទាញបាន $\frac{1}{n!(n+1)} \le I_n \le \frac{e}{n!(n+1)}$ ។

កាលណា $n \to +\infty$ នាំឱ្យ $\frac{1}{n!(n+1)} \to 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$ ។

ទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

គេមាន $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$ នាំឱ្យ $\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = e - I_n$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = \lim_{n\to+\infty}(e - I_n) = e$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

1.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = x + iy$ ដែល x និង y ជាចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ x និង y បើគេដឹងថា ៖

$$\frac{5(1+i)}{2-i}.z + \frac{1+12i}{1+2i}.\overline{z} = \frac{7-11i}{1-i}$$

2.ក_គេឲ្យ $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ។

ចូរសរសេរ z^9 និង z^{2009} ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ.កំនត់ពីរចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ជាឫស

របស់សមីការ $z^{2009} + pz^9 + q = 0$ ។

3.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i.\sqrt{2+\sqrt{2}}$

ចូរសរសេរ z^2 និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរកតម្លៃ

ប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$ ។

4.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = -\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $W = \frac{1+z^{2009}}{1-z}$

ចូរសរសេរ z និង W ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

5 .ដោះស្រាយសមីការ $z^2 - 2(1+i\sqrt{3})z - 1 + 2i\sqrt{3} = 0$

6 .គេតាង z_1 និង z_2 ជាឬសរបស់សមីការ $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

ចូរគណនា $S = z_1^{2009} + z_2^{2009}$ ។

7 .ដោះស្រាយសមីការ $|1+z| + 2z = 9 + 8i$

8 .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $\alpha = 3 + i\sqrt{3}$ និង $\beta = 1 + i\sqrt{3}$

គេតាង $Z_n = (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)....(\alpha^{2^n}+\beta^{2^n})$ ។

ចូរកំនត់រកផ្នែកពិត និង ផ្នែកនិម្មិតនៃ Z_n ។

9 .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_n = \dfrac{1}{n^2 + n - 1 + i.(2n+1)}$

ដែល $n \in IN$ ។

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត A និង B បើគេដឹងថា ៖

$$Z_n = \frac{A}{n+i} + \frac{B}{n+1+i}$$

ខ.គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n} (Z_k) = Z_0 + Z_1 + ... + Z_n$

ដោយសរសេរលទ្ធផលជារាងពីជគណិត ។

10 .គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = -1 + i\sqrt{2}$ ។

គេតាង $S_n = z^2 + \overline{z}^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ n ។

ចូរបង្ហាញថា $S_{n+2} + 2S_{n+1} + 3S_n = 0$ ។

11.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $w = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{1 - i}$

ចូរសរសេរ w ជាទម្រង់ពីជគណិត និង ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

រួចទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}$ ។

12.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច ៖

$$z = (\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}) + i.(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x})$$

ដែល $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ។

ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃម៉ូឌុលរបស់ z ។

13.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច ៖

$$z = 2(a+1)(2a-3) + i(a-4)(3a-2)$$

ដែល a ជាចំនួនពិត ។

ក.ចូរស្រាយថា $|z| = 5(a^2 - 2a + 2)$

ខ.ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o, \vec{i}, \vec{j})$ គេសន្មតថា M ជារូបភាពនៃ z ។

កំនត់ទីតាំង M ដើម្បីឲ្យចម្ងាយ OM ខ្លីបំផុត ។

14.ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេឲ្យបួនចំនុច A , B , C និង D មានអាហ្វិករៀងគ្នា $-2+4i , 4-2i , 5-i$ និង $6+2i$ ។

ក.ចូរដៅចំនុច A , B , C និង D ។

ខ.ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារិកក្នុងរង្វង់មួយ ។

15.គេមានសមីការ $(E): 2z^4+3z^2+3\sqrt{3}z+9=0$

ក.បង្ហាញថាបើ z_0 ជាឬសរបស់សមីការ (E) នោះ $\bar{z}_0$ ក៏ជាឬសរបស់សមីការ (E) ដែរ ។

ខ.ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចនូវសមីការ (E) ដោយដឹងថាឬសមួយរបស់វាមានទម្រង់ $a(1+i)$ ដែល $a\in IR$ ។

16.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

ក.បង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$

ខ.ចូរសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

17.គេឲ្យសមីការ ៖

$$(E): z^3-(1+3i)z^2+(1+2i)z-3-3i=0$$

ក.កំនត់ចំនួនពិត b ដើម្បីឲ្យ $z=i.b$ ជាឬសរបស់ (E)

ខ.ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចនូវសមីការ (E) ។

18.ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេឲ្យចំនុច M មានអាហ្វិក z ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\left|\frac{z-2+2i}{z+1+i}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ចូររក និងសង់សំណុំចំនុច M ។

19.គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ ៖

$$(E): z^2-(\sqrt{3}-1+2i)z-\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}-i=0$$

ក.ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចនូវសមីការ (E) ។

ខ.សរសេរឬសទាំងពីរនៃសមីការ (E)ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

20.គេឲ្យពហុធា $P(z)=\left(\frac{z^2+z-1}{2}\right)^{2009}$ ដែល z ជាចំនួនកុំផ្លិច។

ចូររកអនុគមន៍សំណល់នៃវិធីចែករវាង P(z) នឹង z^2-z+1

21.គេឲ្យសមីការ $(E): z^2+(4+4i)z+(7+32i)=0$

ក.កំនត់ឬស z_1 និង z_2 នៃសមីការ (E)ដែល $|z_1|<|z_2|$។

ខ.ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេតាង A,B,C ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច i, z_1, z_2 ។ ចូរដៅចំនុចទាំងនេះ ។

គ. G ជាបារីសង់នៃប្រព័ន្ធ $(A;2),(B;-2)$ និង $(C;-1)$ ។

ចូររកអាហ្វិកនៃចំនុច G ។

22 .គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់គ្រប់ $n \in IN$ ដោយ ៖

$u_0 = 0 \,;\, u_1 = 1$ និងទំនាក់ទំនង $u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - 4u_n$

ក.គេតាង $z_n = u_{n+1} - \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}.u_n$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}.z_n$ រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

23 .គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) និង (b_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} a_0 = 1 \,;\, b_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \quad , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក.តាង $z_n = a_n + i.b_n$ ។ ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = (1+i)z_n$

ខ.ចូរសរសេរ z_0 និង z_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ទាញរកតួ a_n និង b_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

24.គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n) កំនត់ដោយ ៖

$$z_0 = 2 \text{ និង } z_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} z_n + \frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}}$$

ដែល $n \in IN$ ។

ក.គេតាង $w_n = z_n - 1$ ។ ចូរស្រាយថា $w_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} w_n$

ខ.ចូរសរសេរ w_0 និង w_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.ចូរសរសេរ z_n ជាទម្រង់ $z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ ។

25.គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $(E): az^2 + bz + c = 0$

ដែល $a \neq 0$, $a , b , c \in IR$ ។សន្មតថា $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

នោះសមីការ (E) មានឬសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាដែលតាងដោយ

z និង $\bar{z}$ ។ចំពោះគ្រប់ $n \in Z$ គេយក $S_n = z^n + \bar{z}^n$ ។

ចូរស្រាយថា $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$ ។

អនុវត្តន៍ ៖ ដោយមិនបាច់ពន្លាតចូរគណនាតម្លៃ

$$M = (1 - i\sqrt{3})^7 + (1 + i\sqrt{3})^7$$

$$N = \frac{1}{(1 - i\sqrt{2})^5} + \frac{1}{(1 + i\sqrt{2})^5}$$

26 .គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 - 2i$ និង $z_2 = -1 + 3i$

តាង α និង β រៀងគ្នាជាអាគុយម៉ង់នៃ z_1 និង z_2 ។

ចូរបង្ហាញថា $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ។

27 .គេឲ្យ $C_n = \sum_{k=1}^{n}(\cos k\theta)$ និង $S_n = \sum_{k=1}^{n}(\sin k\theta)$

ក.ចូរបង្ហាញថា $C_n + iS_n = \frac{1 - z^n}{1 - z}$

ដែល $z = \cos\theta + i.\sin\theta$ ។

ខ.ចូរស្រាយថា $\frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.\left(\cos\frac{n\theta}{2} + i.\sin\frac{n\theta}{2}\right)$

គ.ទាញរកតម្លៃនៃ C_n និង S_n ។

28 .គេឲ្យ $C_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\cos^k x}{\cos kx}\right)$ និង $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\sin^k x}{\cos kx}\right)$

ក.បង្ហាញថា $C_n + i.S_n$ ជាផលបូកស៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចមួយ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃនៃ C_n និង S_n ។

29.គណនាផលបូក ៖

$$C_n = \sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p \cos px\right) \text{ និង } S_n = \sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p \sin px\right)$$

ដែល $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ។

30.គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} z_0 = 0 \ , \ z_1 = 1 \\ z_{n+2} = \dfrac{3+i}{2} z_{n+1} - \dfrac{1+i}{2} z_n \ , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក.គេតាង $w_n = z_{n+1} - z_n$ ។

ស្រាយថា $w_{n+1} = \dfrac{1+i}{2}.w_n$ រួចទាញថា $|w_n| = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

ខ.ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o, \vec{i}, \vec{j})$ គេហៅ $M_0, M_1, ..., M_n$

ជាចំនុចមានអាហ្វិករៀងគ្នា $z_0, z_1, ..., z_n$ ។

គេតាង $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\| \overrightarrow{M_k M_{k+1}} \| \right)$ ។ ចូររកលីមីត $\lim_{n \to +\infty} S_n$

31.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ α និង β ដែល $|\alpha| = |\beta| = 1$

និង $1 + \alpha\beta \neq 0$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$ ជាចំនួនពិត ។

32.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

ក.រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលធ្វើឲ្យ z^n ជាចំនួនពិត ។

គណនា z^n ចំពោះតម្លៃតូចជាងគេនៃ n ដែលបានរកឃើញ ។

ខ.គណនា n ដើម្បីឲ្យ z^n ជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ ។

33.គេឲ្យ z ជាចំនួនកុំផ្លិចមានម៉ូឌុលស្មើ 1 និងអាគុយម៉ង់ α ។

ចូរសរសេរ $Z=1+z+z^2$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

34.ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ ចំនុច M ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច ៖

$z=\cos\theta+i.\sin\theta$ ដោយ $\theta\in\,]\,0\,;\pi\,[$ ។

ក.ចូររកសំណុំនៃចំនុច M ។

ខ.ចំនុច N មានអាហ្វិក $z_N=1+z$ ។

រកសំណុំចំនុច N កាលណា θ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $\theta\in\,]\,0\,;\pi\,[$ ។

35.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ និង $Z=\dfrac{z+4i}{z-4i}$

ដែល x និង y ជាចំនួនពិត ។

តើ x និង y ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌយ៉ាងណាដើម្បីឲ្យ Z ៖

ក.ទៅជាចំនួនពិត ខ.ទៅជាចំនួននិម្មិតសុទ្ធ ។

36.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|2z-\sqrt{3}+5i|=6$

ហើយ M ជារូបភាពនៃ z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក.ចូររក និង សង់សំណុំនៃចំនុច M ។

ខ.ចូរកំនត់ទីតាំងនៃចំនុច M ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិច z មានអាគុយ

ម៉ង់អប្បបរមា រួចកំនត់រកអាគុយម៉ង់អប្បរមានោះ ។

37.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|z-8+6i|=5$

ហើយ M ជារូបភាពនៃ z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១.ចូររក និង សង់សំណុំនៃចំនុច M ។

២.ចូរកំនត់ទីតាំងនៃចំនុច M ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិច z មានម៉ូឌុល ÷

ក_ អប្បបរមា ?   ខ_អតិបរមា ?

38.ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចគេឲ្យបីចំនុច A , M និង M' មានអាហ្វិក

រៀងគ្នា $2+2i$, z និង $i.z$ ។

ចូរកំនត់សំណុំចំនុច M ដោយដឹងថា A,M,M'រត់ត្រង់គ្នា ។

39.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=x+i.y$ និង $Z=\dfrac{z-3}{z-1}$

ដែល $z\neq 1$; $x,y\in IR$ ។

គេហៅ M ជាចំនុចមានអាហ្វិក z និង M' ជាចំនុចមានអាហ្វិក

Z ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក.កំនត់សំណុំចំនុច M កាលណា M'ប្រែប្រួលលើអក្ស័ (ox)

ខ.កំនត់សំណុំចំនុច M កាលណា M'ប្រែប្រួលលើអក្ស័ (oy)

40.គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\frac{1-t^2}{1+t^2}+i.\frac{2t}{1+t^2}$ ដែល $t\in IR$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថាចំនួនកុំផ្លិច z មានម៉ូឌុលថេរគ្រប់តម្លៃ t ។

ខ.M ជារូបភាពនៃ z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ចូរកំនត់សំណុំចំនុច M កាលណា t ប្រែប្រួលតម្លៃ ។

41.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$

ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ។

42.គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x^4-3x^3+3x^2+3x-5}{x^2-1}$

ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x\to-1}f(x)$ និង $\lim_{x\to1}f(x)$ ។

43.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x+\sqrt[15]{x}-2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}-2}$ ។

ចូរគណនា $\lim_{x\to1}f(x)$ ។

44.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}$

ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ កាលណា x ខិតទៅជិត 0 ។

45.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\frac{\pi\cos 2x}{2})}{2x^2} & \text{បើ } x\neq 0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{បើ } x=0\end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ត្រង់ចំនុច $x=0$ ។

46.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3+ax+b}{x-1}$ ដែល $x\neq 1$

កំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$ ។

47.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}}$

48.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{mx^{m+1}-(m+1)x^m+1}{x^{n+1}-x^n-x+1}$

ដែល $m\in IN^*$ និង $n\in IN^*$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ។

49.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x+2x^2+3x^3+...+nx^n$

ក.គណនាតម្លៃ $f(1)$ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\dfrac{n(n+1)}{2}}{x-1}$ ។

50 .គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

51 .គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\cos(x\sin x)}{\pi-2x}$ ដែល $x\neq\dfrac{\pi}{2}$

ចូររកលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{2}$ ។

52 .គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\cos(\dfrac{\pi\cos x}{2})}{x^2}$, $x\neq 0$

53 .ចូររកលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា $x\to 0$ ។

54 .គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x^2+3x-4)}{x^2-1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan^2 x}-\cos 2x}{x^2}$

គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\sin x}{\ln(\tan x)}$

55.គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt[4]{x^4+4x^3}\right)$

ខ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)$

56.ចូរគណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+3^2+....+n^2}{n^2}-\dfrac{n}{3}\right)$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)....(1+a^{2^n})\ ,\ 0<a<1$

57.គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x}+...+\sqrt{x^2+nx}-nx\right)$

58.គេឲ្យអនុគមន៍ ៖

$$f_n(x)=\frac{\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}-3}{x-3}$$

មាន n ឫសការេ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{x\to3}f_n(x)$ ។

59.ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖ (nរ៉ាឌីកាល់)

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+\sqrt{2x+....+\sqrt{2x+\sqrt{2x+3}}}}}{x-3}$$ ។

60. ចូរគណនា $S_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{n(n+2)}$

រួចគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

61. គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ $\forall x \geq 0$ ដោយ ៖

$x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x$ ។ គេតាង $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[f(\frac{k}{n^2}) \right]$

ចូរគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

62. គេឲ្យ $P_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \times \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \times ..... \times \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$

ចូរគណនា $\lim_{n\to+\infty} P_n$ ។

63. គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1 + 4u_n^2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

ចូរគណនា $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}.u_n)$

64. គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 4 \, , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក.គេតាង $v_n = u_n - 12$ ។

ស្រាយថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចគណនា v_nជាអនុគមន៍n។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ដែល $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(v_k)$

65.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{បើ } x < 1 \\ 3x + 2 & \text{បើ } x \geq 1 \end{cases}$

ចូរកំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ f មានដេរីវេលើ IR

66.f ជាអនុគមន៍កំនត់លើចន្លោះ $]0\,;+\infty[$ ដែល

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + \dfrac{\ln x}{x} & \text{បើ } x \geq 1\,;\ a,b \in IR \\ 3x + 2 & \text{បើ } 0 < x < 1 \end{cases}$$

ចូរកំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ f មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$

67.ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1})$

68.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = e^{-2x} + (x+1)e^x$

ចូរស្រាយទំនាក់ទំនង $f^{(3)}(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$

69.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$

ក.បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មិនអាស្រ័យនឹង x ។

ខ.រកលទ្ធផលនេះឡើងវិញដោយចាត់ទុកថា f ជាអនុគមន៍អថេរ x។

70 .គេឲ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$

ក.ចូររកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍នេះ ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ x ក្នុងដែនកំនត់ចូរស្រាយថា $2xy' + (1 + y)^2 = 0$

71 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \cos x$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$; $f''(x)$ និង $f^{(3)}(x)$ ។

ខ.ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរស្រាយថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍នេះ

កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x) = \cos(x + \dfrac{n\pi}{2})$ ។

72 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = e^x \sin x$

ក.គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) = \sqrt{2}\, e^x \sin(x + \dfrac{\pi}{4})$

ខ.ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរស្រាយថា ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍នេះ

កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + \dfrac{n\pi}{4})$

73 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = (x + 1)e^{2x}$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$; $f''(x)$ និង $f^{(3)}(x)$ ។

ខ.ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរស្រាយថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍នេះ

កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x) = 2^n(x+1+\frac{n}{2})e^{2x}$ ។

74 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \ln x \;\; ; x > 0$

ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរស្រាយថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍នេះ

កំនត់ដោយ $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}.\frac{n!}{x^n}$ ។

75 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = (\cos x + \sqrt{3}\sin x)e^x$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x) ; f''(x)$ និង $f^{(3)}(x)$ ។

ខ.ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរស្រាយថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f

មានរាង $f^{(n)}(x) = (a_n\cos x + b_n\sin x)e^x$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតកំនត់លើ IN^*

ដោយ $a_{n+1} = a_n + b_n$ និង $b_{n+1} = b_n - a_n$ ។

គ.គេតាង $z_n = a_n + i.b_n$ ។ បង្ហាញថា $z_{n+1} = (1-i)z_n$

រួចគណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ.ទាញរក a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ង.ទាញរកអនុគមន៍ $f^{(n)}(x)$

76 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+1}$ ។

សន្មតថាមានចំនួនពិត $\varphi\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ ដែល $f(\tan\varphi)=0$។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(\tan\varphi)=\sin 2\varphi+a\cos^2\varphi$ ។

77 .ចូរកំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង $(c): y=f(x)=\dfrac{2e^x}{x+1}$

ត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 0 ។

78 .គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+12}{x^2-3x+3}$

ដោយមិនប្រើដេរីវេចូររកតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍នេះ ។

79 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x}{ax+b}$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត

ក.គណនា $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

ខ.កំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានអប្បបរមា

ស្មើ e ត្រង់ $x=1$ ។

80 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$ ដែល $x>0$

គណនាដេរីវេ $f'(x)$។បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរិមាមួយត្រូវកំនត់។

81 .គេឲ្យអនុគមន៍ $g(x) = ax + 1 + b\ln x$ មានក្រាប (H) ។

បន្ទាត់ (D) មានសមីការ $y = x - 1$ ។

កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់(D)ប៉ះនឹងក្រាប (H)

ត្រង់ចំនុច A (1 ; 0) ។

82 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

ក.គណនា $f'(x)$ ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}; \frac{4}{3}]$ បង្ហាញថា $0.6 \le f'(x) \le 0.8$

គ.ដោយប្រើវិសមភាពកំនើនមានកំនត់ចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}; \frac{4}{3}]$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{3x}{5} - \frac{9}{20} + \ln 2 \le \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \le \frac{4x}{5} - \frac{3}{5} + \ln 2$$

83 .គេមានអនុគមន៍ $g : x \mapsto \sqrt{x + 2}$ កំនត់លើ $[-2, +\infty[$

ដោយប្រើវិសមភាពកំនើនមានកំនត់បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x \in [-1; 2]$

គេបាន $\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \le \sqrt{x + 2} \le \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ។

84. f ជាអនុគមន៍កំនត់លើ $[0\,;+\infty[$ ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{x^2}.e^{-\frac{1}{x}} & \text{បើ } x>0\\ 0 & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

ក.គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ ។

តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះអនុគមន៍ f ? ចំពោះក្រាបតាង f ?

ខ.ចំពោះគ្រប់ $x\in]\,0\,,+\infty\,[$ បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}.e^{-\frac{1}{x}}$

គ.គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

85. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $0<a\le b$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{b-a}{b}\le \ln b-\ln a\le \frac{b-a}{a}$$

86. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $0<a\le b<\dfrac{\pi}{2}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{b-a}{\cos^2 a}\le \tan b-\tan a\le \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

87. ចំពោះគ្រប់ $x\in[\,-1\,;3\,]$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\le \sqrt{2x+3}\le x+2$$ ។

88.ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេឲ្យបន្ទាត់មានសមីការ ៖

$(d): y = 12 - 3x$ ។ M ជាចំនុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (d)

មានអាប់ស៊ីស r ដែល $0 < r < 4$ ។

P និង Q ជាចំណោលកែងនៃ M រៀងគ្នាលើអក្ស័ (ox)

និង (oy) ។ កំនត់តម្លៃរបស់ r ដើម្បីឲ្យចតុកោណ OPMQ

មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា។

89. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេឲ្យខ្សែកោងមានសមីការ

$(c): y = \frac{8}{x^2} + 2$ ។ M ជាចំនុចស្ថិតនៅលើ (c) មានអាប់ស៊ីស

r ដែល $r > 0$ ។ P និង Q ជាចំណោលកែងនៃ M

រៀងគ្នាលើអក្ស័ (ox) និង (oy) ។

កំនត់តម្លៃរបស់ r ដើម្បីឲ្យចតុកោណ OPMQ មានផ្ទៃក្រឡា

អប្បបរមា ។

90.ផលបូកពីរចំនួនវិជ្ជមានស្មើ 120 ។

កំនត់ពីរចំនួននេះដោយដឹងថាផលគុណរវាងចំនួនទីមួយនឹងការេនៃ

ចំនួនទីពីរមានតម្លៃអតិបរមា ។

91. គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y = x^2$ ហើយ A, B, C ជាបីចំនុច ស្ថិតនៅលើ (P)។ គេដឹងថា A និង B ជាពីរចំនុចមាន អាប់ស៊ីសរៀងគ្នា -1 និង 2 ហើយ C ជាចំនុចមានអាប់ស៊ីស r ដែល $-1 < r < 2$ ។

កំនត់ r ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ។

92. ត្រីកោណកែងមួយមានបរិមាត្រ $6m$ ។

កំនត់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាវាអតិបរមា ?

93. ត្រីកោណ ABC មួយមានបរិមាត្រ $6m$ និងមុំ $A = 60^o$ ។

កំនត់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាវាអតិបរមា ?

94. គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y = \frac{x^2}{2}$ និងចំនុច $A(6;0)$ ។

M ជាចំនុចស្ថិតនៅលើ (P) មានអាប់ស៊ីស r ។ កំនត់តម្លៃ r ដើម្បីឲ្យ AM មានតម្លៃអប្បបរមា ?

95. គេឲ្យ $(P): y = 4x - x^2$ និង $(d): 2x + y = 12$ ។

M ជាចំនុចស្ថិតនៅលើ (P)មានអាប់ស៊ីស r ។

កំនត់តម្លៃ r ដើម្បីឲ្យ $d(M;(d))$ មានតម្លៃអប្បបរមា ?

96.គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយដែលមានរង្វាស់ជ្រុង ៖

$AB = 10cm\ ;\ BC = 8cm\ ;\ CA = 6cm$ ។

M ជាចំនុចមួយនៃ $[BC]$ ដែល $CM = x\ cm$ ។

គេតាង $T = 5MA + 4MB$ ។

ចូរកំនត់ xដើម្បីឲ្យ T មានតម្លៃតូចបំផុតរួចរកតម្លៃតូចបំផុតនៃ T ?

97.កោនបរិវត្តន៍មួយចារិកក្រៅស្វ៊ែកាំ $R = 8\,cm$ ។តាង r និង h រៀងគ្នាជាកាំថាសបាតនិងកំពស់របស់កោណនេះ ។

កំនត់ r និង h ដើម្បីឲ្យកោននេះមានមាឌអប្បបរមា ?

98.ចូរកំនត់កំពស់របស់ស៊ីឡាំងត្រង់មួយដែលមានមាឌអតិបរមាហើយ អាចចារិកក្រៅស្វ៊ែមួយដែលមានកាំ $R = 4\sqrt{3}\ cm$ ។

99.កំនត់ចម្ងាយអប្បបរមាពីចំនុច$M(4;2)$ទៅប៉ារ៉ាបូល $y^2 = 8x$ ។

100.ចតុកោណកែងមួយចារិកក្នុងអេលីប $\dfrac{x^2}{400} + \dfrac{y^2}{225} = 1$

ហើយជ្រុងរបស់ចតុកោណនេះស្របជាមួយនឹងអក្ស៍របស់អេលីប ។

ក.កំនត់វិមាត្ររបស់ចតុកោណនេះដើម្បីឲ្យវាមានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ?

ខ.កំនត់វិមាត្ររបស់ចតុកោណនេះដើម្បីឲ្យវាមានបរិមាត្រអតិបរមា ?

101. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ កំនត់ចំពោះ $x>0$

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបញ្ជាក់សញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. ចូរទាញថាគ្រប់ $x\geq 1$ គេបាន $\ln x\geq \dfrac{2(x-1)}{x+1}$ ។

102. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}-\dfrac{x}{2}-1$ កំនត់គ្រប់ $x\in IR$

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ចូរបង្ហាញថា $e^{\frac{x}{2}}\geq \dfrac{x}{2}+1$ ។

103. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\cos x$

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)\,;f''(x), f^{(3)}(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ. ចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$ ចូរបញ្ជាក់សញ្ញា $f^{(4)}(x)$ រួចទាញរកសញ្ញារបស់ $f^{(3)}(x)\,,f''(x)$ និង $f'(x)$ ។

គ.ទាញថាគ្រប់ $x \geq 0$ គេបាន $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

104.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - e^x$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)\,;\, f''(x),\, f^{(3)}(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ.ចូរសិក្សាសញ្ញា $f^{(4)}(x)$ ។

ទាញរកសញ្ញារបស់ $f^{(3)}(x)\,, f''(x)$ និង $f'(x)$ ។

គ.ទាញថាគ្រប់ $x \in IR$ គេបាន ៖

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

105.ក_ចំពោះគ្រប់ $x \geq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងក្រោម ៖

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

ខ_គេពិនិត្យស្វ៊ីត $P_n = (1 + \frac{1}{n^3})(1 + \frac{4}{n^3})....(1 + \frac{n^2}{n^3})$ ។

ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើ ចូររកតម្លៃអមនៃ $\ln P_n$ ។

គ_ទាញរកលីមីតនៃ P_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

106.គេពិនិត្យស្វ៊ីត ៖

$$U_n = \sin(\frac{1}{n^2}) + \sin(\frac{2}{n^2}) + \sin(\frac{3}{n^2}) + ... + \sin(\frac{n}{n^2})$$

កំនត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ក.ចំពោះគ្រប់ $x \geq 0$ ចូរស្រាយថា $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ ។

ខ.ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើនេះចូរសរសេរកន្សោមអមនៃ U_n ។

គ.ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ ។

107.គេមានស្វ៊ីត ៖

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{n+k}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+n}$$

ក.ចំពោះគ្រប់ $p \in IN^*$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

ខ.ចូរសរសេរកន្សោមអមរបស់ S_n រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ ។

108.គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិតកំនត់គ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ ៖

$$S_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}})$$

ក.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $0 < a \le b$

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{3}.\frac{b-a}{\sqrt[3]{b^2}} \le \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} \le \frac{1}{3}.\frac{b-a}{\sqrt[3]{a^2}}$

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

109 .ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

110 .គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2+6x}{2(x^2-2x+2)}$ ។

(c) ជាក្រាបតំនាងនៃ f នៅក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក.បញ្ជាក់ថា f កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

ខ.គណនាលីមីតនៃ f កាលណា x ខិតទៅជិត $+\infty, -\infty$

រួចទាញថា (c) មានអាស៊ីមតូតមួយ។

គ.គណនា $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។

ទាញថា f មានធតិបរមាមួយ និង អប្បបរមាមួយរួចគណនាតម្លៃ

បរមាទាំងនោះ ។

ឃ.គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

ង.គណនាកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (c) និងអក្ស័

ទាំងពីរនៃតំរុយនិងចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោងជាមួយនឹងអាសុីមតូតដេក

ច.គណនា $f(2)$ និង $f(3)$ ។ ចូរសង់ខ្សែកោង (c) ។

111.គេឲ្យ $g(x)=\dfrac{4x-4}{x^2}$, $x\neq 0$ ។ (c) ជាក្រាបនៃ g ។

ក.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

រួចទាញរកអាសុីមតូតនៃ (c)។

ខ.គូសតារាងអថេរភាពនៃ g ។

គ.បង្ហាញថា (c) មានចំនុចរបត់មួយដែលគេនឹងរកកូអរដោនេវា ។

ឃ.គណនា $g(-4)$, $g(-2)$, $g(1)$ និង $g(4)$ ។

ង.សង់ខ្សែកោង (c) នៅក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ ។

112.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^3-6x^2+9x-4}$ មានក្រាប(c)។

ក.ចូរកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ។

ទាញបញ្ជាក់សមីការអាសុីមតូតឈរ និង អាសុីមតូតដេកនៃ (c) ។

គ.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

ឃ.គូសតារាងអថេរភាពនៃ f រួចគូសក្រាប (c) ។

113 .១.អនុគមន៍ h កំនត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $h(x)=e^{2x}-2x-1$

ហើយមានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម ៖

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$					
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

ដោយប្រើតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ h ចូរបញ្ជាក់ថា $e^{2x}\geq 2x+1$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

២. f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=(x+1)(e^{-2x}+1)$ ចំពោះ

គ្រប់ចំនួនពិត x និងមានក្រាប (c) ។

ក_គណនា $f'(x)$ និង $f'(0)$ ។ បញ្ជាក់ថាដេរីវេ $f'(x)$ និង

អនុគមន៍ $h(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នាចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ។

ខ_គណនា $f(0)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ_បង្ហាញថា $f(x)=x+1+(\frac{x}{e^x})(\frac{1}{e^x})+(\frac{1}{e^x})^2$ ។

បង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) មានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតនៃ (c) នៅខាង $+\infty$ ។

ឃ.សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (c) និងបន្ទាត់ (D) ។

ង.បន្ទាត់ (Δ) មួយស្របនឹងបន្ទាត់ (D)ហើយប៉ះនឹងក្រាប(c) ត្រង់ M ។ កំនត់កូអរដោនេ M និងសរសេរសមីការនៃ (Δ)។

ច.សង់បន្ទាត់ $(D);(\Delta)$និងក្រាប(c)នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ តែមួយ ។ គេឲ្យ $e = 2.7$ ។

114.១.f ជាអនុគមន៍កំនត់លើ IRដោយ $f(x) = (1-x)e^{x} - 1$

គណនា $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

(មិនបាច់គណនាលីមីតត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$)។រកសញ្ញាf(x)

២. gជាអនុគមន៍កំនត់លើIRដោយ$g(x) = (2-x)e^{x} + 2 - x$

ក.គណនា $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ។ គណនា $g'(x)$។

ដោយប្រើលទ្ធផលដែលបាននៅសំនួរទី១.ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។

ខ.បង្ហាញថាខ្សែកោង(c)តាងអនុគមន៍ g មាន$(D): y = 2 - x$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតកាលណា $x \to -\infty$ ។

បញ្ជាក់ទីតាំងនៃខ្សែកោង (c)ធៀបនឹង (D) ។

គ.កំនត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c)ដែលស្របនឹង(D)។

ឃ.រកកូអរដោនេចំនុចរបត់របស់ខ្សែកោង(c) ។

ង.សង់ខ្សែកោង(c)ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$។

115 .f ជាអនុគមន៍កំនត់ចំពោះ$x>0$ដោយ $f(x)=1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$

ហើយមានក្រាប (c) ។

១.គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។

កំនត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ដេកនៃក្រាប (c) ។

២.គណនាដេរីវេ$f'(x)$និងសិក្សាសញ្ញានៃ$f'(x)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣.កំនត់កូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ Aរវាងក្រាប(c)និង$(D): y=1$

កំនត់សមីការបន្ទាត់(L)ដែលប៉ះក្រាប(c)ត្រង់ A។

៤.គណនា $f(\frac{1}{2})$ ។ សង់បន្ទាត់(L)អាស៊ីមតូតនិងក្រាប(c)

នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។ គេយក$e=2.7, \frac{2}{e}=0.7$,$\ln 2=0.7$

116.គេឲ្យ $y = x\ln x - x + 1$; x ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

១.រកលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។

២.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

គណនាតម្លៃបរមានៃ f ។

៣.គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

៤.គណនា $f(2)$ ។ រក x បើ $f(x) = 1$ ។គេឲ្យ $\ln 2 = 0.69$ ។

៥.សង់ក្រាបនៃ f ក្នុងតម្រុយអតូនរម៉ាល់ ។

117.គេមានអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f(x) = \dfrac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}$

១.សរសេរ f ជារាង $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$ ដែល $A;B$

និង C ជាចំនួនថេរត្រូវកំនត់ ។

២.គណនាអាំងតេក្រាល $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}.dx$

118.គេឲ្យ $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x - 3}$

១.កំនត់ចំនួនពិត m, n និង p ដើម្បីឲ្យគេបាន ៖

$$g(x)=m+\frac{n}{x+1}+\frac{p}{x-3}$$ ចំពោះគ្រប់ $x\in]-1,3[$

២.គណនា $I=\int_0^2 g(x).dx$ ។

119 .អនុគមន៍ f កំនត់ដោយ $f(x)=\frac{e^{2x}+e^x+1}{(1+e^x)^2}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

១.កំនត់ចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $f(x)=A+\frac{B.e^x}{(1+e^x)^2}$

២.គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ $J=\int_0^1 f(x).dx$ ។

120 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ.គណនា $I=\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.dx$

121 .គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ក.បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

ខ.គណនា $I=\int_{0}^{\frac{4}{3}}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

122.ក.គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=\tan x-x$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃនៃ $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x.dx$

123.ក.គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^2\ln x-x$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃនៃ $I=\int_{1}^{e}x\ln x.dx$ ។

124.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f អាចសរសេរជារាង

$$f(x)=A+\frac{B(\cos x-\sin x)}{\cos x+\sin x}$$

ខ.គណនា $I=\int f(x).dx$ ។

125.គេឲ្យ $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx$ និង $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

ក.ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J ។

126.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(\cos x+\sin x)e^{x}$

ក.ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ.ចូរគណនា $I=\int_{0}^{\pi}e^{x}\cos x.dx$ ។

127.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{4x^{2}-x+1}{x^{3}+1}$

ក.កំនត់បីចំនួនពិត a,b,c ដើម្បីឲ្យបាន ៖

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^{2}-x+1}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{2}\frac{4x^{2}-x+1}{x^{3}+1}.dx$

128.ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int\frac{\cos 8x-\cos 7x}{1+2\cos 5x}.dx$

129.គេឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កំនត់ក្នុងចន្លោះ $[0;\pi]$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា $\int_{0}^{\pi}xf(\sin x).dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x).dx$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}.dx$

130.គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើ $[a;b]$ ដែល $f(a+b-x)=f(x)$

ចូរស្រាយថា $\int_{a}^{b}xf(x).dx=\frac{a+b}{2}\int_{a}^{b}f(x).dx$ ។

អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_0^{\pi} x\sin x\cos^4 x.dx$ ។

131 .ក.ចូរស្រាយថា $\int_0^a f(x).dx=\int_0^a f(a-x).dx$

ខ.*អនុវត្តន៍* ៖ គណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

132 .គេឲ្យស្វ៊ីត $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}.dx$ ដែល $n\in IN$

ក.ចូរគណនា I_0 និង I_1 ។ ស្រាយថា (I_n)ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ.ចូរបង្ហាញថា $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

គ.ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)}$;$\forall n\ge 2$ ។

ឃ.ចូរគណនា $\lim_{n\to+\infty} I_n$ និង $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

133 .គេឲ្យស្វ៊ីត $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ ដែល $n\in IN$

ក.ចូរគណនា I_0 និង I_1 ។ ស្រាយថា (I_n)ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ.ចូរសរសេរទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+2} ។

គ.ចូរគណនាផលគុណ $P_n=I_n.I_{n+1}$ ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ឃ.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}$ និង $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n+2}}$ ។

ង.ចូរស្រាយថា $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}.I_n\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ។

ច.រករូបមន្តសម្រាប់គណនា I_n ។

134 . គេឱ្យអាំងតេក្រាល :

$I=\int e^{-2x}\cos^2 x.dx$ **និង** $J=\int e^{-2x}\sin^2 x.dx$

ក-គណនា $I+J$ **និង** $I-J$

ខ-ទាញរក I **និង** J ។

135 . គេឱ្យអាំងតេក្រាល :

$I=\int x\cos^2 x.dx$ **និង** $J=\int x\sin^2 x.dx$

ក-គណនា $I+J$ **និង** $I-J$

ខ-ទាញរក I **និង** J ។

136 . គេឱ្យអាំងតេក្រាល :

$I=\int\frac{x+1}{e^{-x}+x}.dx$ **និង** $J=\int\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+x}.dx$

គណនា $I+J$,J **រួចទាញរក** I ។

137. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int \sin^n x.dx \quad ,n \in IN$ ។

ក. គណនាតួ I_0 និង I_1 ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2} ។

គ. គណនា $K = \int \sin^7 x.dx$ ។

138. គេអោយអាំងតេក្រាល : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^{n-1} x \quad ,n \in IN^*$

ក-គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ-គេតាង $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = \sum_{k=1}^{n} (I_k)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S_n = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \quad ,n \in IN^*$?

គ-គណនាលីមីត $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

139. គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^n x.dx \quad ,n \in IN$

ក-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(I_n)_{n \in IN}$ ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនា I_0 និង I_1 ។

ខ-ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ គេមាន $I_n = \frac{n-1}{n+2} . I_{n-2}$ ។

គ-គេតាង $P_n = I_n . I_{n-1}$ ដែល $n \geq 1$ ។

គណនា P_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនាលីមីត $\lim_{n \to +\infty} (n^2 . P_n)$ ។

ឃ-គេតាង $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n = \sum_{k=1}^{n}(P_k)$ ។

បង្ហាញថា $S_n = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$ រួចទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

ង-គណនាផលគុណ $\Pi_n = S_1 \times S_2 \times S_3 \times .... \times S_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

ច-គណនា I_{2n} និង I_{2n+1} ជាអនុគមន៍នៃ n ។

140. គេឱ្យស្ទីត $I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$ និង $J_n = \int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$ $, n \in IN^*, a > 0$ ។

ក-បង្ហាញថា $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរបង្រួមផលបូក ៖

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$

141. គេអោយស្ទីត $I_n = \int_{e^{-(n+1)\pi}}^{e^{-n\pi}} \cos(\ln x).dx$ $, n \in IN$

ក-ស្រាយបញ្ជាក់ $(I_n)_{n\in IN}$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

ខ-សរសេរកន្សោម I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-គណនាផលបូក $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$ រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

142 . គេអោយអាំងតេក្រាលៈ

$$I_n(t)=\int_0^t\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}+\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}}+\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x}}+...+\frac{2x+n}{\sqrt{x^2+nx}}-\frac{2nx}{\sqrt{x^2+1}}\right).dx$$

ក-គណនាកន្សោម $I_n(t)$ ។

ខ-គណនាលីមីតនៃកន្សោម $I_n(t)$ កាលណា $t\to+\infty$ ។

143 . គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ មានខួប p និងកំនត់លើ $[np,(n+1)p]$

ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ និង $a>0, a\neq 1$ ។

គេតាង $I_n=\int_{np}^{(n+1)p}a^x.f(x).dx$ ។

ក-ស្រាយថា $(I_n), n\in IN$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ-សរសេរ I_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង I_0 ។

គ-អនុវត្តន៍ ចូរគណនា $I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^x.\cos 2x.dx$ ។

144 . គេអោយអាំងតេក្រាល

$$I_n=\int_1^e\frac{x^{-(2n+1)}}{1+x^2}.dx\quad ,n\in IN, e=2,718...$$

ក-ចូរគណនាតួ I_0 ។

ខ-ចូរបង្ហាញថាៈ $I_{n+1}+I_n=\dfrac{e^{2n+2}-1}{2(n+1).e^{2n+2}}$ ។

គ-ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៖

$$\frac{1}{2}x^{-2(n+1)} \le \frac{x^{-2n}}{1+x^2} \le \frac{1}{2}x^{-2n} \quad ,\forall x \ge 1$$ ។

ឃ-គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$ និង $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

145. គណនាអាំងតេក្រាល :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^n x} \quad \text{និង} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot^n x}$$

146. គេឱ្យអាំងតេក្រាលៈ

$$I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x^2}.dx \quad \forall n \in IN, e = 2,71828....$$

ក-ចូរបង្ហាយថា $I_n = \left(\frac{n}{e^n} - \frac{n+1}{e^{n+1}}\right) + \left(1-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e}\right)^n$

ខ-គណនា $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

គ-គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(I_k) = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$ ។

ទាញបញ្ជាក់លីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

147. គេឱ្យស្ទីតចំនួនពិត $(I_n), n \in IN$ ដោយ :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx.dx$$

ក-គណនាតួ I_0 និង I_1 ។

ខ-ស្រាយថា (I_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនាតួទូទៅ I_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

គ-រកផលបូក $S_n = I_0 + I_1 + I_3 + ... + I_n$ រួចគណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

148. គេឱ្យស៊ីត $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n .\sqrt{\tan x.dx} \quad , n \in IN$

ក-គណនាតួ I_0 រួចបង្ហាញថា I_n គ្រប់ $n \in IN$ ជាស៊ីតចុះ ។

ខ-គណនា $I_n + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៏នៃn ។

គ-ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n \in IN^* : \frac{1}{2n+3} \le I_n \le \frac{1}{2n-1}$

រួចគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$ និង $\lim_{n\to+\infty} nI_n$ ។

149. គេអោយអនុគមន៏:

$y = f_n(x) = \int_{nx}^{(n+1)x} e^{-t^2}.dx \; ; \; \left(n \in IN \quad e = 2.71828...\right)$

ក-គណនាដេរីវេ $: y' = f'_n(x)$

ខ-ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេសន្មត $\Omega_n = f'_n(1)$ ។

គណនា $S_n = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + ... + \Omega_n$ រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

150 . គេអោយអនុគមន៍ពីរ $f(x)$ និង $g(x)$ កំណត់ក្នុង $[a,b]$ ។

ក-ចូរស្រាយបញ្ជាក់អោយឃើញថា:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x).dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x).dx \times \int_a^b g^2(x).dx}$$ ។

ខ-អនុវត្តន៍: ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

$$\left|\int_0^1 \sqrt{\frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}}.dx\right| \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{4}} \quad a,b \in IR$$

151 . គេអោយស្វ៊ីត: $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2-x+1}}.dx$

ក-គណនាតួ I_0 និង I_1 ។

ខ-រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n , I_{n+1} និង I_{n+2} ។

គ-អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $k = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x^2-x+1}}.dx$ ។

152 . គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \lim_{\lambda \to +\infty}\left[\int_1^{\lambda} \frac{1}{(1+x)^2}.\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}}.dx\right]$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $I_n = \frac{1}{2}.\frac{n}{n+1}$ រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

ខ-គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(I_k\right) = I_1.I_2.I_3.......I_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n ។

153 .គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$ ។

154 .គណនាអាំងតេក្រាល $I=12\int_0^4 |x^3-6x^2+11x-6|.dx$

155 .គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin^n x}{1+\sin^n x+\cos^n x}.dx$$

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos^n x}{1+\sin^n x+\cos^n x}.dx$$

ក.ចូរស្រាយថា $I_n=J_n$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ I_n និង J_n ។

156 .គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 x^3e^x.dx$

ក.កំនត់ចំនួនពិត a , b , c , d ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍កំនត់ដោយ $F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)e^x$ ជាព្រីមីទីវរបស់អនុគមន៍ $f(x)=x^3e^x$ លើ IR ។

157 .គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-4y'+4y=0$

ក.ដោះស្រាយសមីការ (E) ។

២.កំនត់អនុគមន៍ $g(x)$ ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) បើគេដឹងថា ក្រាប (c)តាងអនុគមន៍ gប៉ះបន្ទាត់ $y = x + 2$ត្រង់ $A(0;2)$

158 .ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-2y'+2y = 0$ បើគេដឹងថា $f(0) = 1$ និង $f'(0) = 3$ ។

159 .១.ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) = 0 \ (E)$$

២.រកចម្លើយ $g(x)$មួយនៃសមីការ (E)ដែល $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$

160 .ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+4y = 0$ បើគេដឹងថា $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$ ។

161 .១.ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+4y = 0$ (y_1 ជាចម្លើយរបស់ (E)) ។

២.រកចម្លើយនៃសមីការ (E)ដោយដឹងថា $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$

៣.កំនត់ a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = ax + b$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(F): y''+4y = x - 1$ ។

៤.បង្ហាញថាបើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃ (F) នោះ $y_1 + f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) ។

162 .ក.ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+9y=0$ ។

ខ.រកចម្លើយ (E) ជារាង $r\cos(x+\varphi)$ បើ $y(0)=1, y'(0)=-3$ ។

163 .គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$(E): y''-3y'+2y=0$

$(F): y''-3y'+2y=2x^3-15x^2+30x-17$

ក.ដោះស្រាយសមីការ (E) (តាង $h(x)$ ជាចម្លើយសមីការ)។

ខ. $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបីជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (F) ។

ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ។

គ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $y=h(x)+P(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ (F) លុះត្រាតែអនុគមន៍ $h(x)$ ជាចម្លើយ (E)។

ឃ.ទាញរកចម្លើយរបស់ (F) ។

164 .គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែ ៖

$(E): y''-4y'+4y=(x-1)e^x$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(ax+b)e^x$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $y=f(x)+h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ h(x) ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ $(F): y''-4y'+4y=0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E)។

165.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$(E): y''-4y = 2\,(3\cos x - \sin x)e^{x}$$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ៖

$f(x)=(a\cos x + b\sin x)e^{x}$ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $y=f(x)+h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ h(x) ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ $(F): y''-4y=0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E)។

166.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$(E): y''-2y'+5y = 2(3\sin x + \cos x)$$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់ដោយ៖

$f(x)=a\cos x + b\sin x$ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $y=f(x)+h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ $h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ $(F): y''-2y'+5y=0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E)។

167.គេឲ្យសមីការ $(E): y'-2y=(-x^2+4x+6)e^x$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត a , bនិង cដើម្បីឲ្យអនុគមន៍កំនត់ដោយ៖

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ ជាចម្លើយមួយរបស់ (E) ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $y=f(x)+h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ $h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅ

របស់សមីការ $(F): y'-2y=0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់ (E)។

168.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់និងមានដេរីវេលើ $]-1;+1[$ ដោយ៖

$f'(0)=1$ និង $f(x)+f(x)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $x\in]-1;1[$ និង $y\in]-1;1[$ ។

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

169.គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់និងមានដេរីវេលើ $]0;+\infty[$ ដោយ

$f'(1)=1$ និង $\forall x>0, y>0 : f(xy)=f(x)+f(y)$

ក.គ្រប់ $n\in IN^*$ បង្ហាញថា $f(x^n)=nf(x)$ ។

ខ.ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

170.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់និងមានដេរីវេលើ IR ដោយ ៖

$f'(0)=f(0)$ និង $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x+y)=f(x)f(y), \forall x,y\in IR \end{cases}$

ក.គ្រប់ $n\in IN^*$ បង្ហាញថា $f(x^n)=\left[f(x)\right]^n$ ។

ខ.ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

171.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$(E): xy+2y'=4x^2+9x$

ក.កំនត់ a,b,c ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax^2+bx+c$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $g(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ $h(x)=g(x)-f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): xy+2y'=0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយរបស់សមីការ (E)។

172.កំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$$(x^2+1)f'(x) + 2x\,f(x) = 4x^3 + 2x + 1 \ , \ f(0) = 1$$

173.ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x+1}f''(x) - \dfrac{2}{(2x+1)^2}f'(x) = 4x - 1 \\ f'(0) = f(0) = 0 \end{cases}$$

174.គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-2y'+y = 0$

ក.កំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាចម្លើយរបស់ (E) បើគេដឹងថា $f(0) = 2$ និង $f(-2) = 0$ ។

ខ.គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការ អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ។

គ.គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពតាងអនុគមន៍ f ។

ឃ. I ជាចំនុចរបត់នៃក្រាប (c) ។ កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច I រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះខ្សែកោង (c)ត្រង់ I ។

ង.ចូរសង់បន្ទាត់ (T) និង ក្រាប (c) ក្នុងតំរុយតែមួយ ។

ច.គណនាផ្ទៃក្រឡា $S(\lambda)$ នៃមណ្ឌលបួង់ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង (c) ជាមួយនឹងអក្ស័រអាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[0;\lambda]$។គណនា $\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$។

175.ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y=\frac{x^2}{2}$ ហើយ A និង B ជាពីរចំនុចនៃ (P) ដែល $AB=2$ ។ កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច A និង B ដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយ (P) និង បន្ទាត់ (AB) មានតម្លៃអតិបរមា ។

176.ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y=4-x^2$ (D) ជាបន្ទាត់មានមេគុណប្រាប់ទិស m វិលជុំវិញ $A(1;2)$។ កំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយ(P)និងបន្ទាត់ (D) មានតម្លៃអប្បបរមា ។

177.គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយ៖

$(C): y=x^2$និង$(d): y=x+2$

178.គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរប្រសព្វគ្នា ៖

$(C_1): y=4x-x^2$ និង $(C_2): y=x^2-2x$ ។

179 .គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង ៖

$(C): y = f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}$ ជាមួយអក្សអាប់ស៊ីស (ox)

ក្នុងចន្លោះ $[1; 3]$ ។

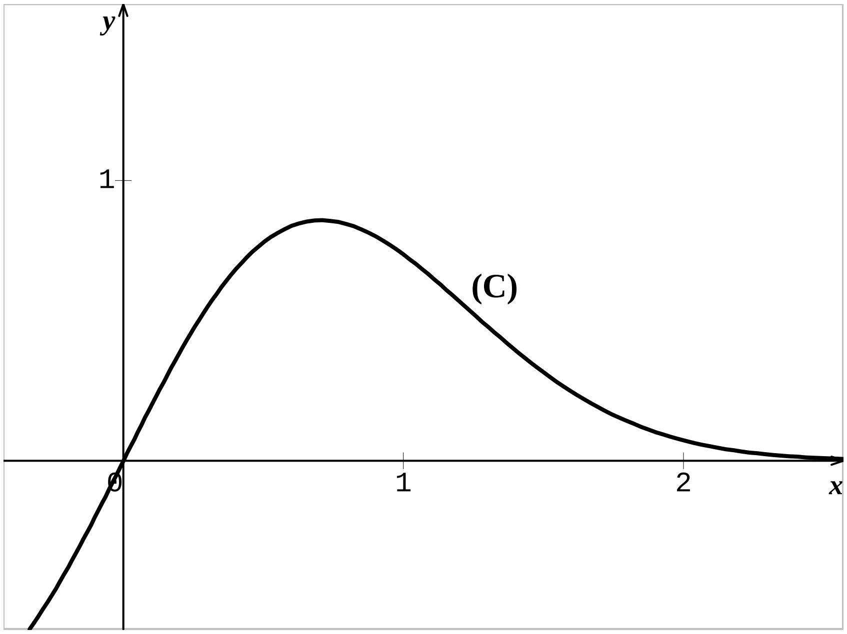
180.គេឲ្យខ្សែកោង $(c): y = \frac{2}{1+e^x}$

ក.គណនាផ្ទៃក្រឡា $S(\alpha)$ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង (c)ជាមួយអក្ស័

អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[0;\alpha]$ ។

ខ.គណនា $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} S(\alpha)$ ។

181 .ខាងក្រោមនេះគឺជាក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ $f(x) = 2xe^{-x^2}$

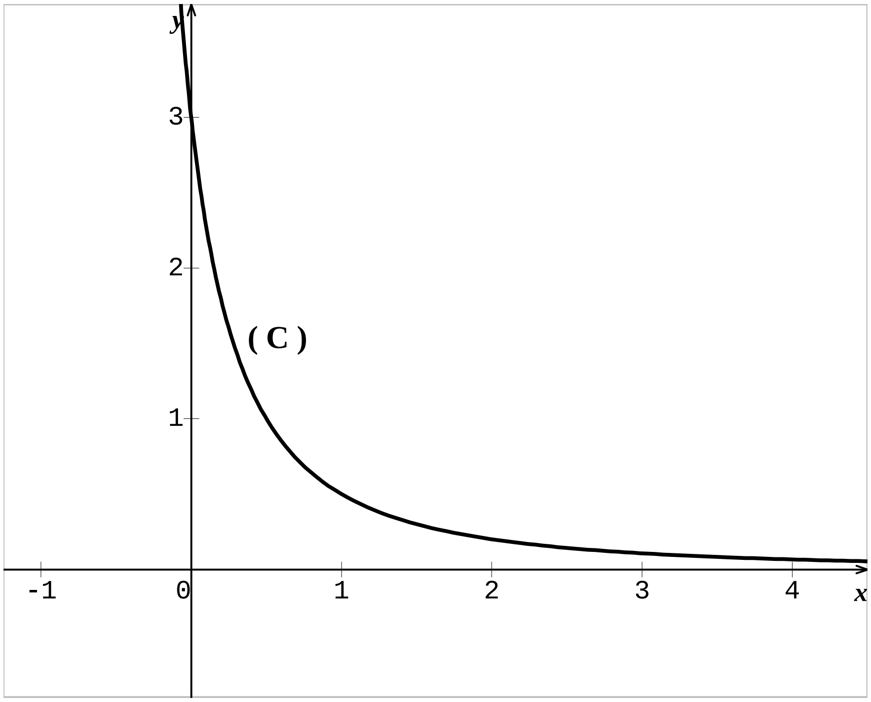


ក.គណនាផ្ទៃក្រឡា $S(\alpha)$ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង (c)ជាមួយអក្ស័
អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[0;\alpha]$ ។

ខ.គណនា $\lim_{\alpha\to+\infty} S(\alpha)$

182 .ខាងក្រោមនេះគឺជាក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ ៖

$$f(x)=\frac{3}{2x^2+3x+1}$$



ក.គណនាផ្ទៃក្រឡា $S(\alpha)$ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង (c)ជាមួយអក្ស័
អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[0;\alpha]$ ។

ខ.គណនា $\lim_{\alpha\to+\infty} S(\alpha)$ ។

183.គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(c): y = \frac{4x^3}{x^4+1}$ ជាមួយអក្ស័ $(x'ox)$ ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ។

184.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាកោណបរិវត្តន៍ដែលមានកំពស់ h និងកាំថាស បាតស្មើ r ត្រូវមានមាឌ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ។

185.ចូរស្រាយថាស្វ៊ែដែលមានកាំស្មើ R ត្រូវមានមាឌ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ។

186.គណនាមាឌសូលីដបរិវត្តន៍កំនត់បានពីរង្វិលផ្ទៃខណ្ឌ័ដោយក្រាបតាង អនុគមន៍ $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ ជាមួយអក្ស័អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[0;2]$ ជុំវិញអក្ស័អាប់ស៊ីស ។

187.គេឲ្យស្វ៊ីត $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

ក.ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \le u_n \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

ខ.គណនាអាំងតេក្រាល $I_n = \int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

គ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ ។

188 .គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\tan x+\cot x)^2.dx$ ។

189 .គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}.dx \text{ និង } J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}.dx$$

ក.ចូរគណនា $I+J$ ។

ខ.ចូរគណនា J រួចទាញរកតម្លៃ I ។

190 .គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=(1-x)e^x$

ក.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f(x)+f''(x)=2f'(x)$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ $I=\int_0^1(1-x)e^x.dx$ ។

191 .ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេឲ្យ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sin x)^n}{\cos x}.dx$

ក.ចូរគណនា $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin x)^n\cos x.dx$ រួចទាញរក $I_{n+2}-I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ $F(x)=\ln\left(\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right)$

ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ លើ $[0;\frac{\pi}{3}]$ ។

គ.ទាញរកតម្លៃនៃ I_0, I_1, I_2 ។

192.ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរគណនា ៖

$$I_n(x)=\int_1^x t^n \ln t.dt$$ ដែល $n\geq 1$ ។

193.គេឲ្យ $I_n=\int_0^{\pi} x(\pi-x)\cos(nx).dx \quad , n\in IN$

ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរគណនា I_n រួចបញ្ចាក់ I_{2p} និង I_{2p+1} ។

194.គេឲ្យ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$; $n\in IN$

ក.ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$2nI_n=(2n-1)I_{n-1}+\frac{2^n}{\sqrt{2}}$$

ខ.ទាញរកតម្លៃ $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^5 x}$ ។

195.ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^x \sin^5 t\cos t.dt\right).dx = \frac{15\pi - 44}{1152}$ ។

196.ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x.dx \quad \text{និង} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x.dx$$

១.ចូរគណនា I_0 និង J_0

២.គេសន្មតថា $n \geq 1$ ។

ក_ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរបង្ហាញថា ៖

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$

ខ_ចូរទាញរកកន្សោម I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ ។

197.គេឲ្យស្វ៊ីត (I_n) កំនត់គ្រប់ $n \geq 1$ ដោយ៖

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx$$

ក.ចូរគណនា I_1 ។

ខ.ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញបង្ហាញថាគ្រប់ $n \geq 1$

គេបាន $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}(\frac{1}{p!})$ ។

គ.ដោយប្រើវិធីអមចំពោះអនុគមន៍ $(1-x)^n e^x$ ក្នុងចន្លោះ$[0;1]$

ចូររកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ រួចទាញបង្ហាញថា ៖

$$e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!})$$ ។

198.ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\sqrt{3}+\tan x)$ ។

199.ចូរគណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}.dx$$ និង $$J = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}.dx$$

200.គេឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូកំនត់លើ $[-a\,;a\,]$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+q^x}.dx = \int_0^a f(x).dx$

ដែល $q>0\ ;q\neq 1$ ។

ខ.*អនុវត្តន៍* ៖

ចូរគណនា $I = \int_{-1}^{1} \frac{3x^2-4|x|+1}{1+2^x}.dx$

201 .គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងចន្លោះ $[a\,;b]$ ។

ក.ចូរស្រាយថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

ខ.គណនា $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x).dx$ ។

202 .ចូរស្រាយថា $\int_{-1979}^{1979} \frac{1-2009^x}{1+2009^x} = 0$ ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី១៦ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ២០០៩

អ្នករៀបរៀង **លឹម ផល្លុន**

TeL : (017) 768 246