រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន** និង **សែន ពិសិដ្ឋ**
បរិញ្ញាបត្រ័ផ្នែកគណិតវិទ្យា

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសពិសេស

សមីការពហុធា

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

រួមមាន ៖

- មេរៀនសង្ខេប អមដោយឧទាហរណ៍
- កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស
- ដំណោះស្រាយគំរូ
- កម្រងលំហាត់អនុវត្តន៍

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសពិសេស

ពហុធា

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
Tel: 017 768 246
www.mathtoday.wordpress.com

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី
លោក លឹម ឆុន
លោក អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក លឹម ផល្គុន និង លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !

សៀវភៅ កម្រងលំហាត់គណិតវិទ្យាជ្រើសរើសពិសេស ផ្នែកពហុធាដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងរួមមាន ៤ជំពូក ។ ជំពូកទី១ ជាមេរៀនសង្ខេប ជំពូកទី២ កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស ជំពូកទី៣ ជាផ្នែកដំណោះស្រាយលំហាត់ និង ជំពូកទី៤ ជាលំហាត់អនុវត្តន៍ ។ នៅក្នុងជំពូកទី២ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសលំហាត់ពិសេសៗមកធ្វើដំណោះស្រាយនៅក្នុងជំពូកទី៣ តាមរបៀបផ្សេងៗពីគ្នាយ៉ាងក្បោះក្បាយ ដែលអាចឲ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់ និង ឆាប់ចងចាំ ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវគំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យាកំរិតសិស្សពូកែចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី១២តុលា ឆ្នាំ២០១៣

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន និង **សែន ពិសិដ្ឋ**

Tel : 017 768 246

Email: lim_phalkun@ymail.com

Website: www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី១

មេរៀនសង្ខេបលើពហុធា

១-និយមន័យ

អនុគមន៍មួយដែលមានទម្រង់ $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

ឬ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$

ហៅថាពហុធាដឺក្រេទី n នៃមួយអថេរ x ។

ដែលចំនួន $a_0,a_1,a_2,....,a_n$ ជាមេគុណនៃពហុធា និង $a_n\neq 0$

a_k ជាមេគុណមុខតួ x^k នៃពហុធា $(0\leq k\leq n)$ ។

ឧទាហរណ៍

$P(x)=x^4+4x^3+3x^2+2x+1$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួន ។

២-ពហុធាពីរស្មើគ្នា

និយមន័យ ពហុធាពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែលេខមេគុណត្រូវគ្នាស្មើគ្នា ។

ឧបមាថា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$

និង $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+....+b_nx^n$ ដែល $b_n\neq 0$ ។

គេបាន $P(x)=Q(x)\Leftrightarrow a_k=b_k$ ដែល $k=0,1,2,....,n$ ។

ឧទាហរណ៍១

គេមានពហុធាពីរដូចខាងក្រោម ៖

$P(x)=x^4+(2a-1)x^3+bx^2+(3c+1)x+d-1$

$Q(x)=x^4+bx^3+(a-5)x^2+(c-d)x+c+7$

ចូរកំណត់ចំនួនពិត a,b,c និង d ដើម្បីឲ្យ $P(x)=Q(x)$ គ្រប់ x ។

គេបាន $P(x)=Q(x)$ សមមូល $\begin{cases}2a-1=b\\ b=a-5\\ 3c+1=c-d\\ d-1=c+7\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}2a-b=1\\ -a+b=-5\\ -2c-d=1\\ -c+d=8\end{cases}$ នាំឲ្យ

$a=-4\ ,\ b=-9\ ,\ c=-3\ ,\ d=5$

ដូចនេះ $a=-4\ ,\ b=-9\ ,\ c=-3\ ,\ d=5$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^2+px+q$ កំណត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ $P^2(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x+1$ ។

គេមាន $P^2(x)=(x^2+px+q)^2$

$$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 2p = 6 & (1) \\ p^2 + 2q = 11 & (2) \\ 2pq = 6 & (3) \\ q^2 = 1 & (4) \end{cases}$

តាម **(1)** និង **(2)** គេទាញបាន $p = 3\ ;\ q = 1$

យក $p = 3\ ;\ q = 1$ ជួសក្នុង **(3)** និង **(4)** នោះសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ដូចនេះ $p = 3$ និង $q = 1$ ។

៣-វិធីបូក និង វិធីដកពហុធា

គេមានពហុធាពីរ

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + ... + a_nx^n$$

និង $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_kx^k + ... + b_mx^m$

គេបានផលបូក និង ផលដកដូចខាងក្រោម ៖

$$P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_k + b_k)x^k + ...$$

និង

$$P(x) - Q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + ... + (a_k - b_k)x^k + ...$$

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យ $P(x) = 2x^2 + x - 7$ និង

$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$

គេបាន $P(x) + Q(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 4$

និង $P(x) - Q(x) = -x^3 + 6x^2 - 4x - 10$ ។

៤-វិធីគុណនៃពហុធា

គេមានពហុធា

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_kx^k+...+a_nx^n$$

និង $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+....+b_kx^k+...+b_mx^m$ ។

គេបាន

$$P(x).Q(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+....+a_nb_mx^{m+n}$$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^2-2x+2$ និង $Q(x)=2x^2+4x+4$

$$P(x).Q(x)=(x^2-2x+2)(2x^2+4x+4)$$
$$=2x^4+4x^3+4x^2-4x^3-8x^2-8x+4x^2+8x+8$$
$$=2x^4+8$$

៥-អាល់កូរីតវិធីចែក

ឧបមាថាគេមានពហុធាពីរ $A(x)$ និង $B(x)$ ដែល $B(x)\neq 0$ វិធីចែករវាងពហុធា $A(x)$ និង $B(x)$ គឺរកគូពហុធា $Q(x)$ និង $R(x)$ តែមួយគត់ដែល $A(x)=B(x).Q(x)+R(x)$ និង $\deg(R)<\deg(B)$ ។

ពហុធា $Q(x)$ ហៅថាផលចែក និង $R(x)$ ហៅថាសំណល់

តាង $\deg(A)$ និង $\deg(B)$ ជាដឺក្រេនៃពហុធា $A(x)$ និង $B(x)$ រៀងគ្នា ។

-បើ $\deg(A)<\deg(B)$ នោះ $Q(x)=0$ និង $R(x)=B(x)$ ។

-បើ $R(x) \equiv 0$ នោះ $A(x) = B(x)Q(x)$ ក្នុងករណីនេះគេថា $B(x)$ ជាកត្តានៃ $B(x)$ ឬ $A(x)$ ជាពហុគុណនៃ $B(x)$ ឬ $B(x)$ ចែកដាច់ $A(x)$ គេកំណត់សរសេរ $B(x) | A(x)$ ។

ឧទាហរណ៍១

វិធីចែករវាងពហុធា $A(x) = x^3 + x^2 - 1$ នឹង $B(x) = x^2 - x - 3$

ឲ្យផលចែក $Q(x) = x + 2$ និង សំណល់ $R(x) = 5x + 5$ ព្រោះ

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - x - 3} = x + 2 + \frac{5x + 5}{x^2 - x - 3}$$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យពហុធា $A(x) = x^4 + 4$ និង $B(x) = x^2 + 2x + 2$

ដោយ

$$A(x) = x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

នោះគេបាន $B(x) | A(x)$ ។

៦-ទ្រឹស្តីបទសំណល់ (Remainder Theorem)

សំណល់នៃវិធីចែកនៃគ្រប់ពហុធា $P(x)$ នឹង $x - \alpha$ គឺ $P(\alpha)$

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

តាមអាល់កូរីតនៃវិធីចែកយើងបាន $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + r$

យក $x = \alpha$ គេបាន $P(\alpha) = 0 \times Q(a) + r = r$ នោះ $r = P(\alpha)$

ឧទាហរណ៍១

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា

$P(x)=(x^3+3x^2-11x+4)^4$

នឹង $x-2$ ។

តាង r ជាសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង $x-2$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទសំណល់គេបាន

$r=P(2)=(8+12-22+4)^4=16$

ដូចនេះសំណល់នៃវិធីចែកគឺ $r=4$ ។

ឧទាហរណ៍២ កំណត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យ

$P(x)=x^5+\lambda x^3+2x^2+9$

ចែកនឹង $x-2$ ឲ្យសំណល់ 1 ។

គេបាន $P(2)=32+8\lambda+8+9=1$ នាំឲ្យ $\lambda=-6$ ។

៧-ទ្រឹស្តីបទ BEZOUT

ពហុធា $P(x)$ ចែកដាច់នឹងទ្វេធា $x-\alpha$ លុះត្រាតែ $P(\alpha)=0$

សម្រាយបញ្ជាក់

មានពហុធា $Q(x)$ និងចំនួនថេរ r ដែល

$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+r$

បើ $x=\alpha$ នោះ $P(\alpha)=r$ ។

ដោយ $(x-a)|P(x)$ នោះ $r=0$ ។

ហេតុនេះ $P(\alpha)=0$ ។

ឧទាហរណ៍១ កំណត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យ

$P(x)=x^3+\lambda x+16$

ចែកដាច់នឹង $x+4$ ។ គេបាន $x+4\,|\,P(x)\Leftrightarrow P(-4)=0$

$-64-4\lambda+16=0$ នាំឲ្យ $\lambda=-12$ ។

ឧទាហរណ៍២ កំណត់ចំនួនគត់រឺឡាមាន n ដើម្បីឲ្យ

$P(x)=x^n-12x-16$

ចែកដាច់នឹង $x-4$ ។

គេបាន $x-4\,|\,P(x)\Leftrightarrow P(4)=0$

$4^n-48-16=0$ នាំឲ្យ $n=3$ ។

៨-ទ្រឹស្តីបទ

បើពហុធា $P(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $Q(x)$ នោះគ្រប់ឫសនៃ $Q(x)$ ជាឫសរបស់ $P(x)$ ។

ឧទាហរណ៍

កំណត់ចំនួនគត់រឺឡាមាន n និងចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យពហុធា

$P(x)=x^n+\lambda x^3+48x-64$ ចែកដាច់នឹង

$Q(x)=x^2-6x+8$ ។

គេមាន $Q(x)=x^2-6x+8=(x-2)(x-4)=0$

នោះ $x_1=2$ ឬ $x_2=4$ ។

គេបាន $Q(x)|P(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(2)=0 \\ P(4)=0 \end{cases}$ ឬ

$$\begin{cases} 2^n+8\lambda+32=0 & (1) \\ 4^n+64\lambda+128=0 & (2) \end{cases}$$

គុណសមីការ (1) នឹង 8 គេបាន $8\times 2^n+64\lambda+256=0$ (3)

ដកសមីការ (2) និង (3) គេបាន $4^n-8\times 2^n-128=0$

ឬ $(2^n-4)^2-144=0$ នាំឲ្យ $2^n-4=12$ គេទាញ $n=4$

តាម (1) គេបាន $2^4+8\lambda+32=0$ នាំឲ្យ $\lambda=-6$ ។

ដូចនេះ $n=4$ និង $\lambda=-6$ ។

៩-ទ្រឹស្តីបទ

បើពហុធា $P(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធាពីរ $R(x)$ និង $Q(x)$ ដែល $R(x)$ និង $Q(x)$ ជាពហុធាបឋមរវាងគ្នានោះ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $P(x).Q(x)$ ។

ឧទាហរណ៍

រកពហុធា $P(x)$ មានដឺក្រេទីបួនបើគេដឹងថា $(x^2-4x+8)|P(x)$ និង $(x^2+4x+8)|P(x)$ ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $x-1$ ឲ្យសំណល់ 65 ។

ដោយ $P(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទីបួន ហើយ $P(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា x^2-4x+8 និង x^2+4x+8 ដែល

$GCD(x^2-4x+8,\ x^2+4x+8)=1$

នោះ $P(x)=a(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)$ ដែល $a\neq 0$

ដោយ $P(x)$ ចែកនឹង $x-1$ ឲ្យសំណល់ 65 នោះ $P(1)=65$

គេបាន $a(1-4+8)(1+4+8)=65$ នាំឲ្យ $a=1$ ។

ដូចនេះ $P(x)=(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)=x^4+64$ ។

១០-ទ្រឹស្តីបទ

បើ $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាពហុធាពីរមានដឺក្រេតូចជាង ឬ ស្មើ n

ហើយដោយដឹងថា $P(x_k)=Q(x_k)$, $k=1,2,3,4,...,m$

ដែល $x_1,x_2,...,x_m$ ជាចំនួនខុសគ្នា និង $m>n$ នោះ

$P(x)=Q(x)$ ចំពោះគ្រប់ x ។

ឧទាហរណ៍

ចូររកពហុធាដឺក្រេទីបួន $P(x)$ មួយដោយដឹងថា ៖

$P(0)=1$, $P(-1)=P(1)=2$, $P(2)=17$ និង $P(3)=82$

យើងពិនិត្យពហុធា $Q(x)=x^4+1$ ។

គេមាន $P(x_k)=Q(x_k)$ គ្រប់ $k=1,2,3,4,5$

ដែល $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=2$, $x_5=3$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើគេទាញបាន $P(x)=Q(x)=x^4+1$

ពីព្រោះ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួន គឺ $n=4<m=5$ ។

១១-ទ្រឹស្តីបទ

បើ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$ ជាពហុធាដឺក្រេទី $n>0$ មាន n ឫស $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,....,\alpha_n$ នោះគេអាចដាក់វាជាផលគុណកត្តាបានតែមួយបែបគត់គឺ ៖

$P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)....(x-\alpha_n)$ ។

ឧទាហរណ៍១

គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

ចូររកលេខមេគុណ a,b,c,d ដោយដឹងថា $f(k)=2k+1$

ចំពោះ $k=1,2,3$ និង $f(4)=33$ ។

តាងពហុធា $P(x)=f(x)-(2x+1)$

ចំពោះ $k=1,2,3$ គេបាន $P(k)=f(k)-(2k+1)=0$

(ព្រោះសម្មតិកម្ម $f(k)=2k+1$ ចំពោះតម្លៃ $k=1,2,3$)

គេទាញបាន $x=1,2,3$ ជាឫសនៃពហុធា $P(x)$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 នោះគេទាញ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 ដែរ ។

ហេតុនេះពហុធា $P(x)$ អាចសរសេរ ៖

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)$ ដែល α ជាឫសមួយទៀតនៃ $P(x)$ ។ គេបាន

$$f(x)=P(x)+2x+1=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)+2x+1$$

ចំពោះ $x=4$ គេបាន $f(4)=6(4-\alpha)+9=33$ នោះ $\alpha=0$

គេបាន $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)+2x+1$

ឬ $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-4x+1$

ដូចនេះ $a=-6\ ,\ b=11\ ,\ c=-4\ ,\ d=1$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

គេដឹងថា $f(k)=k^2$ គ្រប់ $k=1,3,5$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $f(-4)+f(10)$ និង $f(-9)+f(15)$?

តាងពហុធា $P(x)=f(x)-x^2$

ចំពោះ $k=1,3,5$ គេបាន $P(k)=f(k)-k^2=0$

(ព្រោះតាមសម្មតិកម្ម $f(k)=k^2$ ចំពោះតម្លៃ $k=1,3,5$)

គេទាញបាន $x=1\ ,\ 3\ ,\ 5$ ជាឫសនៃពហុធា $P(x)$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 នោះគេទាញ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 ដែរហេតុនេះពហុធា $P(x)$ អាចសរសេរ $P(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-\alpha)$ ដែល α ជាឫសមួយទៀតនៃ $P(x)$ ។ គេបាន

$f(x)=P(x)+x^2=(x-1)(x-3)(x-5)(x-\alpha)+x^2$

ចំពោះ $x=-4$ គេបាន $f(-4)=315(4+\alpha)+16$

ចំពោះ $x=10$ គេបាន $f(10)=315(10-\alpha)+100$

នោះគេបាន ៖

$$f(-4)+f(10)=315(4+\alpha)+16+315(10-\alpha)+100=4526$$

ចំពោះ $x=-9$ គេបាន $f(-9)=1680(9+\alpha)+81$

ចំពោះ $x=15$ គេបាន $f(15)=1680(15-\alpha)+225$

នោះគេបាន ៖

$$f(-6)+f(15)=1680(9+\alpha)+81+1680(15-\alpha)+225=40626$$

ដូចនេះ $f(-4)+f(10)=4526$ និង $f(-6)+f(15)=40626$

១២-ទ្រឹស្តីបទវ្យែត

បើ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$ ជាពហុធាដឺក្រេទី $n>0$ មាន n ឬស $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,....,\alpha_n$ នោះគេបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\ ,\ \sum_{1\le i<j\le n}\alpha_i\alpha_j=\frac{a_{n-2}}{a_n},....,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3.....\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

ឧទាហរណ៍១

បើ α និង β ជាឬសនៃ $P(x)=ax^2+bx+c\ ,\ a\neq 0$

នោះគេបាន $\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

ឧទាហរណ៍២

បើ α , β និង γ ជាឬសនៃពហុធា

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ ,\ a\neq 0$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

១៣-អាំងទែប៉ូឡាស្យុងឡាក្រង់

គេឲ្យ n ចំណុច $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),.....,(x_n,y_n)$ នោះមានពហុធា $P(x)$ តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P(x_i)=y_i$, $i=1,2,3,...,n$ ហើយរូបមន្តអ៊ិចព្លីស៊ីតរបស់វាគឺ $P(x)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i\prod_{1\le j\le n\,,\,j\ne i}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}\right]$ ។

ឧទាហរណ៍

រកពហុធា $P(x)$ តែមួយគត់ដែលកាត់តាមបីចំណុច $M_1(1,3)$, $M_2(2,4)$ និង $M_3(4,12)$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន ៖

$$P(x)=\sum_{i=1}^{3}\left[y_i\prod_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}\right]$$

$$=y_1.\frac{x-x_2}{x_1-x_2}.\frac{x-x_3}{x_1-x_3}+y_2.\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.\frac{x-x_3}{x_2-x_3}+y_3.\frac{x-x_1}{x_3-x_1}.\frac{x-x_2}{x_3-x_2}$$

$$=3.\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)}+4.\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)}+12.\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$$

$$=(x^2-6x+8)-2(x^2-5x+4)+2(x^2-3x+2)$$

$$=x^2-2x+4$$

ដូចនេះ $P(x)=x^2-2x+4$ ជាពហុធាដែលត្រូវរក ។

១៤-ការអនុវត្តន៍នៃការគណនា

ឧបមាថាគេមានពហុធាដឺក្រេទី n ៖

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$$ ដែល $a_n\neq 0$

ក/ដេរីវេនៃពហុធា ៖

ដេរីវេនៃពហុធានេះកំណត់ដោយ ៖

$$P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+...+2a_2x+a_1$$

ខ/អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ៖

អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃពហុធានេះគឺ ៖

$$\int P(x).dx=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+...+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+C$$

គ/ករណីដែលពហុធា $P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$ នោះ៖

គេបាន $$P'(x)=P(x)\times\left(\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+...+\frac{1}{x-\alpha_n}\right)$$

ឃ/ករណីដែលពហុធា

$$P(x)=a_n(x-\alpha_1)^{m1}(x-\alpha_2)^{m2}...(x-\alpha_k)^{mk}$$

ដែល $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = n$ នោះគេបាន ៖

$$P'(x) = P(x)\times\left(\frac{m_1}{x-\alpha_1}+\frac{m_2}{x-\alpha_2}+...+\frac{m_k}{x-\alpha_k}\right)$$ ។

ឃ/ឫសត្រួត ៖

បើមាន $m\in IN$ ដែល $P(x)=(x-\alpha)^m Q(x)$ និង $Q(\alpha)\neq 0$

នោះ α ជាឫសត្រួត m ដងនៃ $P(x)$ ។

ចំនួន α ជាឫសត្រួត m ដងនៃ $P(x)$ លុះត្រាតែ ៖

$P(\alpha)=0, P'(\alpha)=0, P''(\alpha)=0, ..., P^{(m-1)}(\alpha)=0$

និង $P^{(m)}(\alpha)\neq 0$ ។

១៥-ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថាគេមានពហុធា $P(x)$ មួយ ។

បើ $(x-\alpha)^k \mid P(x)$ នោះ $(x-\alpha)^{k-1} \mid P'(x)$ ដែល $k\in IN$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ដោយ $(x-\alpha)^k \mid P(x)$ នាំឲ្យមានពហុធា $Q(x)$ ដែល ៖

$P(x)=(x-\alpha)^k Q(x)$

គេបាន $P'(x)=k(x-\alpha)^{k-1}Q(x)+(x-\alpha)^k Q'(x)$

ទំនាក់ទំនងនេះគេទាញបាន $(x-\alpha)^{k-1} \mid P'(x)$ ។

ឧទាហរណ៍១

គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^4+2x^3+3x^2+5x-1$

តាង a,b,c,d ជាឫសរបស់ $P(x)$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $S=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ a,b,c,d ជាឫសរបស់ $P(x)$ នោះគេអាចសរសេរ ៖

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

គេបាន $\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-d}$

យក $x=-2$ នោះ

$$\frac{P'(-2)}{P(-2)}=-\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}\right)=-S$$

គេទាញ $S=-\frac{P'(-2)}{P(-2)}$ តែ $P(-2)=16-16+12-10-1=1$

$P'(x)=4x^3+6x^2+6x+5$ នោះ $P'(-2)=-15$ ។

ដូចនេះ $S=15$ ។

ឧទាហរណ៍២

ចូររកពហុធា $P(x)$ មួយមានដឺក្រេទីប្រាំដោយដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង $(x-1)^3$ ឲ្យសំណល់ -1 ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $(x+1)^3$ ឲ្យសំណល់ 1 ។

តាមបម្រាប់គេបាន $(x-1)^3 \,|\, P(x)+1$ នោះ

$(x-1)^2 \,|\, P'(x)$ (1)

ហើយ $(x+1)^3 \,|\, P(x)-1$ នោះ $(x+1)^2 \,|\, P'(x)$ (2)

តាម(1) និង (2) គេទាញ $(x+1)^2(x-1)^2 \,|\, P'(x)$

ដោយ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីប្រាំនោះ $P'(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួន ហេតុនេះ $P'(x)=a(x+1)^2(x-1)^2 = a(x^4-2x^2+1)$

គេទាញ $P(x)=a\int (x^4-2x^2+1).dx = a(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x)+C$

គេមាន $P(1)=-1$ និង $P(1)=1$ នោះ $\begin{cases} \frac{8}{15}a + C = -1 \\ -\frac{8}{15}a + C = 1 \end{cases}$

គេទាញបាន $a=-\frac{15}{8}$; $C=0$

ដូចនេះ $P(x)=-\frac{15}{8}(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x)=-\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{4}x^3-\frac{15}{8}x$

១៦-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

ឧបមាថា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n \neq 0$ និង $a_k \in IR, k=0,1,2,...,n$ ។

បើមានពីរចំនួនពិត α និង β ដែល $P(\alpha)$ និង $P(\beta)$ មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នានោះយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួនពិត c នៃចន្លោះចំនួនពិត α និង β ដែល $P(c)=0$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

ដែល a,b,c,d ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $|a+c|>|1+b+d|$

ចូរស្រាយថាសមីការ $P(x)$ មានឫសមួយយ៉ាងតិចជាចំនួនពិតនៅក្នុងចន្លោះ -1 និង 1 ។

គេមាន $P(-1)=1-a+b-c+d=(1+b+d)-(a+c)$

និង $P(1)=1+a+b+c+d=(1+b+d)+(a+c)$

គេបាន $P(-1).P(1)=(1+b+d)^2-(a+c)^2<0$

ដូចនេះសមីការមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ -1 និង 1

១៧-ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល

ឧបមាថាគេមានពហុធា $P(x)$ មួយ ។ចំពោះគ្រប់ចំនួន $\alpha\neq\beta$ ដែល $P(\alpha)=P(\beta)=0$ នោះមានចំនួន c នៅចន្លោះ α និង β ដែល $P'(c)=0$ ។

ឧទាហរណ៍

គេតាង r និង R ជាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង និងចារឹកក្រៅត្រីកោណមួយ ហើយ p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $9r(4R+r)\leq 3p^2\leq (4R+r)^2$ ។

តាង a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណនោះគេមានទំនាក់ទំនងឆ្លុះដូចខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases} a+b+c=2p \\ ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR \\ abc=4pRr \end{cases}$$ នោះ $a\,,b\,,c$ ជាឬសសមីការ

$$x^3-2px^2+(p^2+r^2+4rR)x-4pRr=0 \quad (1)$$

តាង $r_a\,,\,r_b\,,\,r_c$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A,B,C នៃត្រីកោណ ABC គេមាន $a=\dfrac{p(r_a-r)}{r_a}$, $b=\dfrac{p(r_b-r)}{r_b}$, $c=\dfrac{p(r_c-r)}{r_c}$

យក $x=\dfrac{p(y-r)}{y}$ ជួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន ៖

$$y^3-(4R+r)y^2+p^2y-p^2r=0 \quad (2)$$

មានន័យថា $r_a\,,\,r_b\,,r_c$ ជាឬសមីការ (2) ។

តាងពហុធា $P(x)=x^3-2px^2+(p^2+r^2+4rR)x-4pRr$

និង $Q(y)=y^3-(4R+r)y^2+p^2y-p^2r$ ។

គេបាន $P'(x)=3x^2-4px+p^2+r^2+4rR$

និង $Q'(y)=3y^2-2(4R+r)y+p^2$

តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលគេទាញបានសមីការ $P'(x)=0$ និង $Q'(y)=0$ សុទ្ធតែជាសមីការមានឬស ។

ដោយឌីសគ្រីមីណង់សមីការគឺ ៖

$$\Delta'_1=p^2-3r(4R+r) \quad \text{និង} \quad \Delta'_2=2(4R+r)^2-3p^2$$

ដោយ $\Delta'_1\ge 0$ និង $\Delta'_2\ge 0$ នោះគេទាញបានវិសមភាព ៖

$$9r(4R+r)\le 3p^2\le (4R+r)^2$$ ពិត ។

១៨-ទ្រឹស្តីបទ

បើ $\mathbf{P(x)}$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនពិត និង មានដឺក្រេជាចំនួនសេសនោះយ៉ាងតិចវាមានឫសមួយជាចំនួនពិត ។

១៩-ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថា $\mathbf{P(x)}$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនពិត ។
បើចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{x=\alpha+i\beta,\alpha,\beta\in IR}$ ជាឫសនៃ $\mathbf{P(x)}$ នោះ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ $\mathbf{\bar{x}=\alpha-i\beta}$ ក៏ជាឫសនៃ $\mathbf{P(x)}$ ដែរ ។

២០-ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថា $\mathbf{P(x)}$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនសនិទាន ។
បើចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{a+b\sqrt{c}}$ ជាឫសនៃ $\mathbf{P(x)}$ នោះចំនួន $\mathbf{a-b\sqrt{c}}$ ក៏ជាឫសនៃ $\mathbf{P(x)}$ ដែរ ។
$\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនសនិទាន និង $\mathbf{\sqrt{c}}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

២១-ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថា $\mathbf{P(x)}$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ និង $\mathbf{\alpha\in Z}$ ។ $\mathbf{P(\alpha)=0}$ នោះ $\mathbf{\alpha\,|\,P(0)}$ ។

២២-ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថា $\mathbf{P(x)}$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ និង $\mathbf{\alpha,\beta\in Z}$ ដែល $\mathbf{\alpha\neq\beta}$ នោះគេបាន $\mathbf{\alpha-\beta\,|\,P(\alpha)-P(\beta)}$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$

គេបាន $P(\alpha)-P(\beta)=\sum_{k=0}^{n}a_k(\alpha^k-\beta^k)$

ដោយ $\alpha^k-\beta^k=(\alpha-\beta)(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+....+\beta^{k-1})$

នោះគេទាញបាន $(\alpha-\beta)|\sum_{k=0}^{n}a_k(\alpha^k-\beta^k)$ ។

ឧទាហរណ៍ តើមានពហុធា $P(x)$ មានមេគុណជាចំនួនគត់ ដែល $P(2)=7$ និង $P(5)=15$ ឬទេ ?

ដោយ $P(5)-P(2)=8$ ចែកមិនដាច់នឹង $5-2=3$ នោះ គ្មានពហុធាបំពេញលក្ខខណ្ឌនេះទេ ។

២៣-សមភាពញូតុន

យក $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n$ ជាអថេរ ។ ចំពោះ $k\ge 1$ យើងតាង $p_k(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_k)$ ជាផលបូកស្វ័យគុណ k កំណត់ដោយ ៖

$$p_k(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k=\alpha_1^k+\alpha_2^k+...+\alpha_n^k$$

ហើយចំពោះគ្រប់ $k\ge 0$ តាង $e_k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ជាធាតុឆ្លុះ ពហុធាដែលជាផលបូកនៃគ្រប់ផលគុណខុសៗគ្នានៃអថេរ ខុសគ្នាៗ ដែលកំណត់ដោយ

$$e_0(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=1$$
$$e_1(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$$

$$e_2(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\sum_{1\le i<j\le n}\alpha_i\alpha_j$$

$$e_n(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\alpha_1.\alpha_2...\alpha_n$$

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

$e_k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=0$ ចំពោះ $k>n$ នោះសមភាពញូតុន កំណត់ដោយ៖

$$ke_k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}e_{k-i}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).p_i(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

២៨-ស៊េរីម៉ាក់ឡូរាំងចំពោះអនុគមន៍ពហុធា

ឧបមាថាគេមានពហុធា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ អនុគមន៍ពហុធានេះអាចសរសេរជាស៊េរីម៉ាក់ឡូរាំងដូចខាងក្រោម ៖

$$P(x)=P(0)+\frac{x}{1!}P'(0)+\frac{x^2}{2!}P''(0)+....+\frac{x^n}{n!}P^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.P^{(k)}(0)$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$

$$P'(0)=a_1\ ,\ P''(0)=2a_2\ ,P^{(3)}(0)=6a_3,\ ...,P^{(k)}(0)=k!a_k$$

គេទាញ $a_1=\dfrac{P'(0)}{1!}\ ,\ a_2=\dfrac{P''(0)}{2!},...,\ a_k=\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$

ដូចនេះ

$$P(x)=P(0)+\frac{x}{1!}P'(0)+\frac{x^2}{2!}P''(0)+....+\frac{x^n}{n!}P^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.P^{(k)}(0)$$

២៨-ស៊េរីតៃល័រចំពោះអនុគមន៍ពហុធា

ឧបមាថាគេមានពហុធា

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

អនុគមន៍ពហុធានេះអាចសរសេរជាស៊េរីតៃល័រដូចខាងក្រោម ៖

$$P(x) = P(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!}P'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}P''(\alpha) + ... + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}P^{(n)}(\alpha)$$

ឬ $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-\alpha)^k}{k!}P^{(k)}(\alpha)$ ។

តាងពហុធា $Q(x) = P(x+\alpha)$ គេបាន

$Q(0) = P(\alpha)$, $Q'(0) = P'(\alpha), Q''(0) = P''(\alpha), ..., Q^{(n)}(0) = P^{(n)}(\alpha)$

តាមស៊េរីម៉ាក់ឡូរាំងគេបាន ៖

$$Q(x) = Q(0) + \frac{x}{1!}Q'(0) + \frac{x^2}{2!}Q''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}Q^{(n)}(0) \quad (*)$$

ជំនួស x ដោយ $x-\alpha$ និង $Q(x-\alpha) = P(x)$ ក្នុង (*) គេបាន

$$P(x) = P(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!}P'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}P''(\alpha) + ... + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}P^{(n)}(\alpha)$$

ដូចនេះ $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-\alpha)^k}{k!}P^{(k)}(\alpha)$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^7-3x^6+5x+2$ ។

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង $(x-1)^3$ ។

គេមាន $P(x)=x^7-3x^6+5x+2$ នោះ $P(1)=5$

$P'(x)=7x^6-18x^5+5$ នោះ $P'(1)=-6$

$P''(x)=42x^5-90x^4$ នោះ $P''(1)=-48$

$P^{(3)}(x)=210x^4-360x^3$ នោះ

$P^{(3)}(1)=210-360=-150$

តាមស៊េរីតៃល័រគេអាចសរសេរ ៖

$$P(x)=P(1)+\frac{x-1}{1!}P'(1)+\frac{(x-1)^2}{2!}P''(1)+\frac{(x-1)^3}{3!}P^{(3)}(1)+\dots+\frac{(x-1)^7}{7!}P^{(7)}(1)$$

សមភាពនេះបញ្ជាក់ថា $P(x)$ ចែកនឹង $(x-1)^3$ ឲ្យអនុគមន៍សំណល់

$$R(x)=P(1)+\frac{x-1}{1!}P'(1)+\frac{(x-1)^2}{2!}P''(1)$$

$$=5-6(x-1)-24(x-1)^2$$

$$=-24x^2+42x-13$$

ដូចនេះអនុគមន៍សំណល់ដែលត្រូវរកគឺ

$R(x)=-24x^2+42x-13$ ។

ជំពូកទី២

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

១)ពហុធា $r(x)=x^5-5x^3-3x^2+2x+1$ មានឫសប្រាំផ្សេងគ្នា a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ហើយ $s(x)=-x^2+5$ ជាពហុធាមួយទៀត គណនាផលគុណ $P=s(a_1).s(a_2).s(a_3).s(a_4).s(a_5)$ ។

២)សមីការ $t^3=3t^2+4t-5$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា a,b,c គណនាតម្លៃលេខ $F_7(a,b,c)=\dfrac{a^7-b^7}{a-b}+\dfrac{b^7-c^7}{b-c}+\dfrac{c^7-a^7}{c-a}$

៣) $P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P_n(x)=-2x\,P_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ ។

ក)បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ ។

ខ)ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2x\,P_n(x)+2n\,P_{n-1}(x)=0$ ហើយ $P_n''(x)-2xP_n'(x)+2n\,P_n(x)=0$ ។

៤)គេឧបមាថាពហុធា $P(x)=x^5-x^3+2x^2-x+3$ មានឫស x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 ។

គេយក $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-x^2-2}$ ។ ចូរគណនាតម្លៃ

$$A=\prod_{k=1}^{5}[f(x_k)]=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)\ ?$$

៥)គេឧបមាថា x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x-1=0$
ចូរគណនាតម្លៃ $A=12x_1^7+169x_2^4$?

៦)គេឧបមាថា x_1,x_2,x_3 និង x_4 ជាឫសនៃសមីការ
$x^4-3x^3+2x^2-x-1=0$ ។
ចូរគណនាតម្លៃ $A=x_1{}^4+x_2{}^4+x_3{}^4+x_4{}^4$?

៧)គេឲ្យសមីការ
$(E):\ x^4-2(m+1)x^3+(2m^2+3)x^2-(11m+6)x+5m+4=0$
ដែល $m\in\Re$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។
ក)កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យសមីការ (E) មានឫសបួន
x_1,x_2,x_3,x_4 ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង៖ $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_3{}^2=30$
ខ)ដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m ដែលបានរក
ឃើញខាងលើ ។

៨)គេមានសមីការ $\mathbf{x^3+3mx^2+2(6m-7)x+10m-16=0}$
កំណត់ $\mathbf{m}$ ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫសបី $\mathbf{x_1,x_2,x_3}$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

៩)ចំពោះគ្រប់ $\boldsymbol{n\geq 1}$ គេមាន $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(n)=an^3+bn^2+cn+d \\ f(n+1)-f(n)=n^2 \end{cases}$

ក.គណនាតម្លៃលេខនៃ $\boldsymbol{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d}$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងលើ។
ខ.ទាញរកតម្លៃ $\boldsymbol{S_n=1^2+2^2+3^2+....+n^2}$ ។

១០)គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^4+2x^3+3x^2+5x-1$

តាង a,b,c,d ជាឫសរបស់ $P(x)$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $S=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}$ ។

១១)កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យពហុធា

$P(x)=x^n-12x^3+\lambda x-(2\lambda+81)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា

$Q(x)=x^2-12x+27$ ។

១២)កំណត់ចំនួនពិត a និងចំនួនពិត b ដើម្បីឲ្យពហុធា

$P(x)=x^6-3x^4+ax^3+bx^2-ax+1$ ចែកដាច់នឹងពហុធា

$(x-1)^2$ ។

១៣)កំណត់ចំនួនពិត a និងចំនួនពិត b ដើម្បីឲ្យពហុធា

$P(x)=ax^5+bx+1$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $Q(x)=x^2-2x-1$

១៤)គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។ គេដឹងថា $P(x)$ ចែក

នឹង $x-2$ ឲ្យសំណល់ 2 និង $P(x)$ ចែកនឹង $x+2$ ឲ្យសំណល់

-2 ។

ក/រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4 ។

ខ/គេដឹងថា $P(0)=P(1)=-8$ ។ រក $P(x)$?

១៥)គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។

គេដឹងថា $P(x+1)-P(x)=x^2$ និង $P(0)=0$ ។

ក/ចូររកពហុធា $P(x)$ ។

ខ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរស្រាយថា ៖

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

១៦)គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។ គេដឹងថា

$2P(x)-P(x+1)=x^3$

ក/ចូររកពហុធា $P(x)$ ។

ខ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរគណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+....+\frac{n^3}{2^n}$$

១៧)គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។

គេដឹងថា $P(x)-3$ ចែកដាច់នឹង $(x-3)^2$ និង $P(x)+3$ ចែកដាច់នឹង

$(x+3)^2$ ។ ចូរកំណត់រកពហុធា $P(x)$?

១៨)កំណត់រកពហុធា $P(x)$ មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)$ និង $P(2)=2$

១៩)គេឲ្យ a និង b ជាឫសនៃ $P(x)=x^4+x^3-1$ ។

ចូរបង្ហាញថា ab ជាឫសនៃ $Q(x)=x^6+x^4+x^3-x^2-1$

២០)គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ។

គេដឹងថា $P(1)=1$, $P(2)=8$ និង $P(3)=27$ ។

ចូរស្រាយថា $f(2+\lambda)+f(2-\lambda)=2\lambda^4+10\lambda^2+16$ ។

២១)បើ $P(x),Q(x),R(x)$ និង $S(x)$ ជាពហុធាដោយដឹងថា ៖

$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$

នោះចូរស្រាយថា $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ។

២២)គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ។

គេដឹងថា $P(k)=\frac{k}{k+1}$ ចំពោះ $k=0,1,2,....,n$ ។

ចូរកំណត់ $P(n+1)$ ។

២៣)គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនគត់ខុសគ្នា ។ យក $P(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។ ចូរបង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌ

$P(a)=b, P(b)=c, P(c)=a$

មិនអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នាបានទេ ។

២៤)គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in IR$

ក/ចូរស្រាយថា $f(x)-x$ ជាកត្តានៃ $f[f(x)]-x$ ។

ខ/ចូរស្រាយថាបើសមីការ $f(x)=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតនោះសមីការ $f[f(x)]=x$ ក៏គ្មានឫសជាចំនួនពិតដែរ ។

២៥)គេតាង α និង β ជាឫសនៃសមីការ $x^2-x-1=0$ ។

ចូរគណនា $S=5\alpha^8+21\beta^5$ និង $P=(5\alpha^8-1)(21\beta^5+1)$

២៦)គេឲ្យត្រីធា $P(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$ និង a,b,c ចំនួនថេរ ។ចូរស្រាយថា

$P(1)+P(4)+P(6)+P(7)=P(2)+P(3)+P(5)+P(8)$

២៧)គេឲ្យ a,b,c,d ជាបួនចំនួនខុសគ្នា និង ខុសពីសូន្យ ។

ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\begin{cases} ax_1+a^2x_2+a^3x_3+a^4x_4=1 \\ bx_1+b^2x_2+b^3x_3+b^4x_4=1 \\ cx_1+c^2x_2+c^3x_3+c^4x_4=1 \\ dx_1+d^2x_2+d^3x_3+d^4x_4=1 \end{cases}$

២៨)គេឲ្យពហុធា $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ដែល $a_n \neq 0$ មានឬស $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ។ តាង $S_m = x_1^m + x_2^m + x_3^m + ... + x_n^m$ ដែល m ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបហ្វ។ចូរស្រាយថា ៖

$$a_0S_m + a_1S_{m+1} + a_2S_{m+2} + ... + a_nS_{m+n} = 0$$

២៩)ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនពិត p ដើម្បីឲ្យសមីការ ៖

$x^3 - 2p(p+1)x^2 + (p^4 + 4p^3 - 1)x^2 - 3p^3 = 0$ មានឬសបីផ្សេងគ្នាបង្កីតបានជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែងមួយ ។

៣០)គេឲ្យ $a, b, c \in IR$ ។

បើ $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ គ្រប់ $x \in [-1,1]$ ។ ចូរស្រាយថា $|cx^2 + bx + a| \leq 2$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1,1]$ ។

៣១)គេឲ្យ a និង b ជាឬសនៃ $P(x) = x^4 + x^3 - 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា ab ជាឬសនៃ $Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$

៣២)សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ មានឬសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន (មិនចាំបាច់ខុសគ្នា)។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\dfrac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \dfrac{c}{b}$ ។

៣៣)គេឲ្យត្រីធា $f(x) = ax^2 + bx + c$

ដែល $a < b$ និង $a, b, c \in IR$

បើ $f(x) \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ នោះចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $D = \dfrac{a+b+c}{b-a}$ ។

៣៤)គេឲ្យចំនួនពិត α និង β ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-17=0$ និង $\beta^3-3\beta^2+5\beta+11=0$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ $\alpha+\beta$?

៣៥)គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} f(5)=5 \\ f(55)=5555 \\ f(555)=555555 \end{cases}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\underbrace{555...555}_{(n)})=\underbrace{555...555}_{(2n)}$ ។

៣៦)ឧបមាថាសមីការ $x^2-2013x+q=0$ មានឫសពីរ α និង β ជាចំនួនពិត។ គេដឹងថា $\alpha^3+\beta^3=2013^2$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ q ?

៣៧)គេឲ្យ $a\,,b\,,c\in IR$ និង $a\neq 0$ ។ គេដឹងថា a និង $4a+3b+2c$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ។ ចូរស្រាយថាឫសទាំងពីរនៃសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0$ មិនអាចស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(1,2)$ ព្រមគ្នាទេ ។

៣៨)គេឲ្យ $a\,,b\,,c$ ជាចំនួនគត់ ដែល a ជាចំនួនគូនិង b ជាចំនួនសេស ។ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដែល ax^2+bx+c ចែកដាច់នឹង 2^n

៣៩)ចូរកំណត់ចំនួនអសនិទាន x ដោយដឹងថា x^2+2x និង x^3-6x ជាចំនួនសនិទាន ។

៩០)ចូរកំណត់គ្រប់ពហុធាពិត $P(x)$ មានដឺក្រេទី៥ ដោយដឹងថា $P(x)+1$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^3$ និង $P(x)-1$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^3$ ។

៩១)គេឲ្យពហុធា

$$P_k(x)=(x^4-1)(x^3-x^2+x-1)^k+(x+1)x^{4k-1}$$

ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k បង្ហាញថាពហុធា $P_k(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា x^5+1 ជានិច្ច ។

៩២)គេឲ្យ $a\,,b,c$ ជាបីចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$a<b<c\,,a+b+c=6$ និង $ab+bc+ca=9$ ។

ចូរបង្ហាញថា $0<a<1<b<3<c<4$?

ជំពូកទី៣

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី០១

ពហុធា $r(x)=x^5-5x^3-3x^2+2x+1$ មានឫសប្រាំផ្សេងគ្នា a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ហើយ $s(x)=-x^2+5$ ជាពហុធាមួយទៀត ។

គណនាផលគុណ $P=s(a_1).s(a_2).s(a_3).s(a_4).s(a_5)$ ។

(ប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាឆ្នាំ២០១២)

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P=s(a_1).s(a_2).s(a_3).s(a_4).s(a_5)$

ដោយ a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ជាឫសបហុធា

$r(x)=x^5-5x^3-3x^2+2x+1$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទកត្តា

គេអាចសរសេរ

$$r(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)=\prod_{k=1}^{5}(x-a_k)$$

ហើយគេមាន $s(x)=-x^2+5=(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)$

គេបាន

$$P=s(a_1).s(a_2).s(a_3).s(a_4).s(a_5)=\prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}-a_k)(\sqrt{5}+a_k)$$

$$= \prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}-a_k)\times\prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}+a_k) = -\prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}-a_k)\times\prod_{k=1}^{5}(-\sqrt{5}-a_k)$$

ព្រោះ $\prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}+a_k) = -\prod_{k=1}^{5}(-\sqrt{5}-a_k)$ ។

ដោយ $\prod_{k=1}^{5}(\sqrt{5}-a_k) = r(\sqrt{5})$ និង $\prod_{k=1}^{5}(-\sqrt{5}-a_k) = r(-\sqrt{5})$

គេបាន $P = -r(\sqrt{5})\times r(-\sqrt{5})$ ។

$$r(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^5 - 5(\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} + 1 = -14 + 2\sqrt{5}$$
$$r(-\sqrt{5}) = (-\sqrt{5})^5 - 5(-\sqrt{5})^3 - 3(-\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1 = -14 - 2\sqrt{5}$$

ហេតុនេះ $P = -r(\sqrt{5})\times r(-\sqrt{5}) = -(-14+2\sqrt{5})(-14-2\sqrt{5})$

$$= -\left[(-14)^2 - (2\sqrt{5})^2\right] = -(196-20) = -176$$

ដូចនេះ $P = s(a_1).s(a_2).s(a_3).s(a_4).s(a_5) = -176$ ។

លំហាត់ទី០២

សមីការ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា a, b, c

គណនាតម្លៃលេខ $F_7(a,b,c) = \dfrac{a^7 - b^7}{a-b} + \dfrac{b^7 - c^7}{b-c} + \dfrac{c^7 - a^7}{c-a}$

(ប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាឆ្នាំ២០១២)

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃលេខ

$$F_7(a,b,c) = \frac{a^7 - b^7}{a-b} + \frac{b^7 - c^7}{b-c} + \frac{c^7 - a^7}{c-a}$$

តាង

$$F_n = F_n(a,b,c) = \frac{a^n - b^n}{a-b} + \frac{b^n - c^n}{b-c} + \frac{c^n - a^n}{c-a} = \sum_{cyc} \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

គេមាន a និង b ជាឫសនៃ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$

នោះ $\begin{cases} a^3 = 3a^2 + 4a - 5 \\ b^3 = 3b^2 + 4b - 5 \end{cases}$

ដោយ $t = 0$ មិនមែនជាឫសនៃសមីការ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$

នោះ $a \neq 0$ និង $b \neq 0$

គេបាន $\begin{cases} a^3 = 3a^2 + 4a - 5 \\ b^3 = 3b^2 + 4b - 5 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} a^{n+3} = 3a^{n+2} + 4a^{n+1} - 5a^n \\ b^{n+3} = 3b^{n+2} + 4b^{n+1} - 5b^n \end{cases}$

គេទាញ

$$a^{n+3} - b^{n+3} = 3(a^{n+2} - b^{n+2}) + 4(a^{n+1} - b^{n+1}) - 5(a^n - b^n)$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $a - b \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{a^{n+3} - b^{n+3}}{a-b} = 3\frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b} + 4\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} - 5\frac{a^n - b^n}{a-b}$$

នាំឲ្យ

$$\sum_{cyc} \frac{a^{n+3} - b^{n+3}}{a-b} = 3\sum_{cyc} \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a-b} + 4\sum_{cyc} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} - 5\sum_{cyc} \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

គេទាញ

$$F_{n+3}(a,b,c) = 3F_{n+2}(a,b,c) + 4F_{n+1}(a,b,c) - 5F_n(a,b,c)$$

-បើ $n = 0$ តាម (*) គេបាន $F_3 = 3F_2 + 4F_1 - 5F_0$

តែតាម

$$F_n(a,b,c) = \frac{a^n - b^n}{a-b} + \frac{b^n - c^n}{b-c} + \frac{c^n - a^n}{c-a} = \sum_{cyc} \frac{a^n - b^n}{a-b}$$ គេ

បាន $F_0 = 0$; $F_1 = \dfrac{a-b}{a-b} + \dfrac{b-c}{b-c} + \dfrac{c-a}{c-a} = 3$ និង

$$F_2 = \frac{a^2 - b^2}{a-b} + \frac{b^2 - c^2}{b-c} + \frac{c^2 - a^2}{c-a} = 2(a+b+c)$$

ដោយ a,b,c ជាឫសនៃ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$ នោះ $a + b + c = 3$

ហេតុនេះ $F_2 = 6$ គេបាន $F_3 = 18 + 12 - 0 = 30$ ។

-បើ $n=1$ តាម $(*)$ គេបាន

$$F_4 = 3F_3 + 4F_2 - 5F_1 = 90 + 24 - 15 = 99$$

-បើ $n=2$ តាម $(*)$ គេបាន

$$F_5 = 3F_4 + 4F_3 - 5F_2 = 297 + 120 - 30 = 387$$

-បើ $n=3$ តាម $(*)$ គេបាន

$$F_6 = 3F_5 + 4F_4 - 5F_3 = 1161 + 396 - 150 = 1407$$

-បើ $n=4$ តាម $(*)$ គេបាន

$$F_7 = 3F_6 + 4F_5 - 5F_4 = 4221 + 1548 - 495 = 5274$$

ដូចនេះ $F_7(a,b,c) = \dfrac{a^7 - b^7}{a-b} + \dfrac{b^7 - c^7}{b-c} + \dfrac{c^7 - a^7}{c-a} = 5274$

លំហាត់ទី០៣

$P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$P_n(x)=-2x\,P_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ ។

ក)បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ

$y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ ។

ខ)ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2x\,P_n(x)+2n\,P_{n-1}(x)=0$

ហើយ $P_n''(x)-2xP_n'(x)+2n\,P_n(x)=0$ ។

(ប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាឆ្នាំ២០១១)

ដំណោះស្រាយ

ក)បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ

$y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$

តាមរូបមន្តដេរីវេ $\left(e^u\right)'=u'.e^u$ នោះគេបាន

$y'=(-x^2)'e^{-x^2}=-2x\,e^{-x^2}=e^{-x^2}.P_1(x)$

នោះ $y'=e^{-x^2}P_1(x)$ ពិតចំពោះ $n=1$ ។

យើងឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $y^{(k)}=e^{-x^2}P_k(x)$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$ គឺ

$y^{(k+1)}=e^{-x^2}P_{k+1}(x)$

គេមាន $y^{(k+1)}=\left[y^{(k)}\right]'=\left[e^{-x^2}P_k(x)\right]'$

$$= -2xe^{-x^2}P_k(x) + e^{-x^2}P'_k(x)$$

$$= e^{-x^2}\left[-2xP_k(x) + P'_k(x)\right]$$

$P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$P_n(x) = -2x\,P_{n-1}(x) + P'_{n-1}(x)$ ។

យក $n = k+1$ គេបាន $P_{k+1}(x) = -2xP_k(x) + P'_k(x)$

គេទាញ $y^{(k+1)} = e^{-x^2}P_{k+1}(x)$ ពិត

ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ

$y^{(n)} = e^{-x^2}P_n(x)$ ។

ខ)ទាញ ថា $P_{n+1}(x) + 2x\,P_n(x) + 2n\,P_{n-1}(x) = 0$ និង

$P_n''(x) - 2xP_n'(x) + 2n\,P_n(x) = 0$

មាន $y = e^{-x^2}$ នោះ $y' = -2xe^{-x^2} = -2xy$ ឬ $2xy + y' = 0$

តាងអនុគមន៍ z កំណត់ដោយ $z = 2xy + y'$ ។

តាមរូបមន្តឡៃបនិចគេមាន $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$ ដែល

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ គេបាន

$$z^{(n)} = 2\sum_{k=0}^{n} C_n^k y^{(n-k)} x^{(k)} + y^{(n+1)} = 2C_n^0 y^{(n)} x + 2C_n^1 y^{(n-1)} + y^{(n+1)} = 0$$

គេទាញ $y^{(n+1)} + 2xy^{(n)} + 2ny^{(n-1)} = 0$ ដោយ

$y^{(n)} = e^{-x^2}P_n(x)$

គេបាន $e^{-x^2}P_{n+1}(x)+2xe^{-x^2}P_n(x)+2ne^{-x^2}P_{n-1}(x)=0$

សមមូល $e^{-x^2}\left[P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)\right]=0$

ដូចនេះ $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ ពិត ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $P_n(x)=-2x\,P_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ នោះ

$P_{n+1}(x)=-2x\,P_n(x)+P'_n(x)$

ដោយ $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ នោះគេបាន ៖

$-2xP_n(x)+P'_n(x)+2x\,P_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ ឬ

$P'_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$

គេបាន $P'_{n+1}(x)+2(n+1)P_n(x)=0$ (*)

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃ $P_n(x)=-2x\,P_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$

នោះ គេបាន $P'_n(x)=-2P_{n-1}(x)-2xP'_{n-1}(x)+P''_{n-1}(x)$

នោះ $P'_{n+1}(x)=-2P_n(x)-2xP'_n(x)+P''_n(x)$ (**)

យក (**) ជំនួសក្នុង (*) គេបាន

$-2P(x)-2xP'_n(x)+P''_n(x)+2(n+1)P_n(x)=0$

ដូចនេះ $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ ពិត ។

លំហាត់ទី០៤

គេឧបមាថាពហុធា $P(x)=x^5-x^3+2x^2-x+3$ មានឫស x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 ។

គេយក $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^4-x^2-2}$ ។ ចូរគណនាតម្លៃ

$A=\prod_{k=1}^{5}[f(x_k)]=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)$?

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $A=\prod_{k=1}^{5}[f(x_k)]=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)$

ដោយ $P(x)=x^5-x^3+2x^2-x+3$ មានឫស x_1,x_2,x_3,x_4,x_5

នោះ $P(x)$ អាចសរសេរ ៖

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)=\prod_{k=1}^{5}(x-x_k)$$

គេមាន

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^4-x^2-2}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x^2+1)(x^2-2)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-i)(x+i)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(1-x)(2-x)}{(i-x)(-i-x)(\sqrt{2}-x)(-\sqrt{2}-x)}$$

គេអាចសរសេរ $A=\prod_{k=1}^{5}[f(x_k)]=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)$

$$=\prod_{k=1}^{5}\frac{(1-x_k)(2-x_k)}{(i-x_k)(-i-x_k)(\sqrt{2}-x_k)(-\sqrt{2}-x_k)}$$

$$=\frac{\prod_{k=1}^{5}(1-x_k)\times\prod_{k=1}^{5}(2-x_k)}{\prod_{k=1}^{5}(i-x_k)\prod_{k=1}^{5}(-i-x_k)\prod_{k=1}^{5}(\sqrt{2}-x_k)\prod_{k=1}^{5}(-\sqrt{2}-x_k)}$$

$$=\frac{P(1)P(2)}{P(i)P(-i)P(\sqrt{2})P(-\sqrt{2})}$$

ដោយគេមាន

$P(1)=1-1+2-1+3=4$

$P(2)=32-8+8-2+3=33$

$P(i)=i+i-2-i+3=1+i$

$P(-i)=-i-i-2+i+3=1-i$

$P(\sqrt{2})=4\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4-\sqrt{2}+3=7+\sqrt{2}$

$P(-\sqrt{2})=-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4+\sqrt{2}+3=7-\sqrt{2}$

គេបាន $A=\dfrac{4\times33}{(1+i)(1-i)(7+\sqrt{2})(7-\sqrt{2})}=\dfrac{4\times33}{2\times45}=\dfrac{22}{15}$ ។

ដូចនេះ: $A=\prod_{k=1}^{5}[f(x_k)]=f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)=\dfrac{22}{15}$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឧបមាថា x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x-1=0$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ $A=12x_1^7+169x_2^4$?

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $A=12x_1^7+169x_2^4$

ដោយ x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x-1=0$

នោះគេបាន $\begin{cases} x_1^2-2x_1-1=0 \\ x_2^2-2x_2-1=0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x_1^2=2x_1+1 \quad (1) \\ x_2^2=2x_2+1 \quad (2) \end{cases}$

តាម (1) គេបាន $x_1^3=2x_1^2+x_1=2(2x_1+1)+x_1=5x_1+2$

លើកជាការេ

$$x_1^6=(5x_1+2)^2=25x_1^2+20x_1+4=25(2x_1+1)+20x_1+4=70x_1+29$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង x_1 គេបាន

$$x_1^7=70x_1^2+29x_1=70(2x_1+1)+29x_1=169x_1+70$$

ម្យ៉ាងទៀតតាម(2)គេបាន

$$x_2^4=(2x_2+1)^2=4x_2^2+4x_2+1=4(2x_2+1)+4x_2+1=12x_2+5$$

ហេតុនេះ

$$A=12x_1^7+169x_2^4=12(169x_1+70)+169(12x_2+5)$$
$$=2028(x_1+x_2)+1685$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2$ នោះគេបាន

$A = 2028\times 2 + 1685 = 5741$ ។

ដូចនេះ $A = 12x_1^7 + 169x_2^4 = 5741$ ។

លំហាត់ទី០៦

គេឧបមាថា x_1, x_2, x_3 និង x_4 ជាឫសនៃសមីការ $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ $A = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$?

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $A = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$

តាង $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n$ ដែល $n \in \mathbb{Z}$ នោះគេបាន $A = S_4$

គេមាន x_k , $k = 1, 2, 3, 4$ ជាឫសនៃសមីការ $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ នោះគេបាន ៖

$x_k^4 - 3x_k^3 + 2x_k^2 - x_k - 1 = 0$ (1)

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង x_k^n គេបាន

$x_k^{n+4} - 3x_k^{n+3} + 2x_k^{n+2} - x_k^{n+1} - x_k^n = 0$

ហេតុនេះ $\sum_{k=1}^{4}(x_k^{n+4} - 3x_k^{n+3} + 2x_k^{n+2} - x_k^{n+1} - x_k^n) = 0$ ឬ

$S_{n+4} - 3S_{n+3} + 2S_{n+2} - S_{n+1} - S_n = 0$

គេទាញ $S_{n+4} = 3S_{n+3} - 2S_{n+2} + S_{n+1} + S_n$ (2)

យក $n = 0$ ជួសក្នុង (2) គេបាន $S_4 = 3S_3 - 2S_2 + S_1 + S_0$ (3)

យក $n = -1$ ជួសក្នុង (2) គេបាន $S_3 = 3S_2 - 2S_1 + S_0 + S_{-1}$ (4)

គេមាន $S_0 = 1+1+1+1 = 4$, $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + x_4^{\,2} \\
&= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_3x_4) \\
&= 3^2 - 2(2) = 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{-1} &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \\
&= \frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} \\
&= \frac{1}{-1} = -1
\end{aligned}
$$

តាម(4)គេបាន $S_3 = 3(5) - 2(3) + 4 + (-1) = 16$

តាម(4)គេបាន $S_4 = 3(16) - 2(5) + 3 + 4 = 45$

ដូចនេះ: $A = x_1^{\,4} + x_2^{\,4} + x_3^{\,4} + x_4^{\,4} = 45$

❖❖❖ សម្គាល់ទ្រឹស្តីបទវ្យែតក្នុងសមីការដឺក្រេទីបួន

បើ x_1, x_2, x_3, x_4 ជាឫសសមីការ $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ នោះ: គេមាន ៖

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a} \\[2ex]
x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a} \\[2ex]
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a} \\[2ex]
x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a}
\end{cases}
$$

លំហាត់ទី០៧

គេឲ្យសមីការ

$(E):\ x^4-2(m+1)x^3+(2m^2+3)x^2-(11m+6)x+5m+4=0$

ដែល $m\in\Re$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក)កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យសមីការ (E) មានឫសបួន x_1,x_2,x_3,x_4 ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_3{}^2=30$ ។

ខ)ដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

ក)កំណត់តម្លៃ m ៖

បើ x_1,x_2,x_3,x_4 ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះគេមានទំនាក់ទំនង ៖

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2(m+1) & (1)\\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=2m^2+3 & (2)\\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=11m+6 & (3)\\ x_1x_2x_3x_4=5m+4 & (4)\end{cases}$$

តាមលក្ខខណ្ឌសម្មតិកម្ម $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_3{}^2=30 \quad (5)$

ដោយ

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+...+x_3x_4) \quad (6)$$

យកទំនាក់ទំនង (1) , (2) និង (5) ជួសក្នុង (6) គេបាន ៖

$$30=4(m+1)^2-2(2m^2+3)$$

$$30=4m^2+8m+4-4m^2-6$$

$$30=8m-2$$

$$32=8m$$

$$m=\frac{32}{8}=4$$

ដូចនេះ $m=4$ ។

ខ)ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

ចំពោះ $m=4$ សមីការអាចសរសេរ

$$(E): x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$$

សមមូល $(E):\ (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$

ដើម្បីឲ្យផលគុណនៃកត្តាស្មើសូន្យលុះត្រាតែ និង គ្រាន់តែកត្តាមួយស្មើសូន្យ ។

គេបាន $x\in\{1,2,3,4\}$ ជាសំណុំឫសរបស់សមីការ ។

លំហាត់ទី០៨

គេមានសមីការ $x^3+3mx^2+2(6m-7)x+10m-16=0$

កំណត់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឬសបី x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ m

បើ x_1, x_2, x_3 ជាឬសរបស់សមីការនោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមានទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-3m & (1) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=2(6m-7) & (2) \\ x_1x_2x_3=-10m+16 & (3) \end{cases}$$

បើ x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះ $x_1+x_3=2x_2 \quad (4)$

យកសមីការ (4) ជួសក្នុង (1) គេបាន $3x_2=-3m$

ឬ $x_2=-m$ ។

តាមសមីការ (3) គេបាន $x_1x_3=-\dfrac{10m-16}{x_2}=\dfrac{10m-16}{m}$

តាមសមីការ (2) គេបាន $(x_1+x_3)x_2+x_1x_3=12m-14$

ឬ $-2m(-m)+\dfrac{10m-16}{m}=12m-14$

ឬ $2m^3-12m^2+24m-16=0$ ឬ $2(m-2)^3=0$ នាំឱ្យ $m=2$

ដូចនេះ $m=2$ ។

លំហាត់ទី០៩

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ គេមាន $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(n)=an^3+bn^2+cn+d \\ f(n+1)-f(n)=n^2 \end{cases}$

ក.គណនាតម្លៃលេខនៃ $a\ ;b\ ;c\ ;d$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងលើ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ $S_n=1^2+2^2+3^2+....+n^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនាតម្លៃលេខនៃ $a\ ;b\ ;c\ ;d$

គេមាន $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(n)=an^3+bn^2+cn+d \\ f(n+1)-f(n)=n^2 \end{cases}$

ដោយ $f(n)=an^3+bn^2+cn+d$

នោះ $f(n+1)=a(n+1)^3+b(n+1)^2+c(n+1)+d$

គេបាន $f(n+1)-f(n)=3an^2+(3a+2b)n+a+b+c$

គេទាញ $3an^2+(3a+2b)n+a+b+c=n^2$

នាំឱ្យ $a=\dfrac{1}{3}\ ;b=-\dfrac{1}{2}\ ;\ c=\dfrac{1}{6}$

ហើយ $f(1)=a+b+c+d=1$ នោះ $d=1$

ដូចនេះ $a=\dfrac{1}{3}\ ;b=-\dfrac{1}{2}\ ;c=\dfrac{1}{6}\ ;d=1$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

តាមសម្រាយខាងលើគេបាន ៖

$$f(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + 1$$

ដោយ $f(n+1) - f(n) = n^2$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[f(k+1) - f(k) \right]$

$$= f(n+1) - f(1)$$

ដោយ $f(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + 1$

នោះ $f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 1 = 1$

ហើយ $f(n+1) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) + 1$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + 1$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 1$$

ដូចនេះ $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^4+2x^3+3x^2+5x-1$

តាង a,b,c,d ជាឫសរបស់ $P(x)$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $S=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $S=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}$

ដោយ a,b,c,d ជាឫសរបស់ $P(x)$ នោះគេអាចសរសេរ ៖

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

គេបាន $\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}+\frac{1}{x-d}$

យក $x=-2$ នោះ

$$\frac{P'(-2)}{P(-2)}=-(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2})=-S$$

គេទាញ $S=-\frac{P'(-2)}{P(-2)}$ តែ $P(-2)=16-16+12-10-1=1$

$P'(x)=4x^3+6x^2+6x+5$ នោះ $P'(-2)=-15$ ។

ដូចនេះ $S=15$ ។

លំហាត់ទី១១

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ និងចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យពហុធា

$\mathbf{P(x)=x^n-12x^3+\lambda x-(2\lambda+81)}$ ចែកដាច់នឹងពហុធា

$\mathbf{Q(x)=x^2-12x+27}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ និងចំនួនពិត λ

គេមាន $\mathbf{Q(x)=x^2-12x+27=(x-3)(x-9)=0}$

នោះ $\mathbf{x_1=3}$ ឬ $\mathbf{x_2=9}$ ។

គេបាន $\mathbf{Q(x)\,|\,P(x)\Leftrightarrow\begin{cases}P(3)=0\\P(9)=0\end{cases}}$ ឬ

$$\begin{cases}3^n+\lambda-405=0 & (1)\\9^n+7\lambda-8829=0 & (2)\end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះគេបាន $\mathbf{n=4}$, $\mathbf{\lambda=324}$ ។

លំហាត់ទី១២

កំណត់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ និងចំនួនពិត $\mathbf{b}$ ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x)=x^6-3x^4+ax^3+bx^2-ax+1$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $(x-1)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ និងចំនួនពិត $\mathbf{b}$

បើ $(x-1)^2\,|\,P(x)$ នោះ $(x-1)\,|\,P'(x)$ គេទាញបាន

$$\begin{cases} P(1)=0 \\ P'(1)=0 \end{cases}$$

ដោយ $P(1)=1-3+a+b-a+1=b-1=0$ នោះ $b=1$

ហើយ $P'(x)=6x^5-12x^3+3ax^2+2bx-a$

នោះ $P'(1)=6-12+3a+2b-a=2a+2b-6=0$

គេទាញ $a=3-b=3-1=2$ ។

ដូចនេះ $a=2$ និង $b=1$ ។

លំហាត់ទី១៣

កំណត់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ និងចំនួនពិត $\mathbf{b}$ ដើម្បីឲ្យពហុធា

$\mathbf{P(x) = ax^5 + bx + 1}$ ចែកដាច់នឹងពហុធា

$\mathbf{Q(x) = x^2 - 2x - 1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ និងចំនួនពិត $\mathbf{b}$

តាង α និង β ជាឫសនៃពហុធា $\mathbf{Q(x) = x^2 - 2x - 1}$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមាន $\alpha + \beta = 2$ និង $\alpha\beta = -1$ ។

ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{Q(x) | P(x)}$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} \mathbf{P(\alpha) = 0} \\ \mathbf{P(\beta) = 0} \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} \mathbf{a\alpha^5 + b\alpha + 1 = 0} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{a\beta^5 + b\beta + 1 = 0} & \mathbf{(2)} \end{cases}$

គុណសមីការ (1) នឹង β ហើយសមីការ (2) នឹង $-\alpha$ រួចបូកគ្នាគេបាន

$\mathbf{a(\alpha^5\beta - \alpha\beta^5) - (\alpha - \beta) = 0}$ នាំឲ្យ $\mathbf{a = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha\beta(\alpha^4 - \beta^4)}}$

ឬ $\mathbf{a = \dfrac{1}{\alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)} = \dfrac{1}{\alpha\beta(\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]}}$

ដោយ $\alpha + \beta = 2$ និង $\alpha\beta = -1$ នោះ៖

$$\mathbf{a = \frac{1}{(-1)(2)(2^2 + 2)} = -\frac{1}{12}}$$

ម្យ៉ាងទៀតដកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$a(\alpha^5-\beta^5)+b(\alpha-\beta)=0$ នោះ $b=-\dfrac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha-\beta}\times a$

ឬ $b=-(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)a$

ឬ $b=\dfrac{[(\alpha^4+\beta^4)+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2]}{12}$ ព្រោះ $a=-\dfrac{1}{12}$

ដោយ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4+2=6$

ហើយ $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=36-2=34$

គេបាន $b=\dfrac{34-6+1}{12}=\dfrac{29}{12}$ ។

ដូចនេះ $a=-\dfrac{1}{12}$, $b=\dfrac{29}{12}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។ គេដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង $x-2$
ឲ្យសំណល់ 2 និង $P(x)$ ចែកនឹង $x+2$ ឲ្យសំណល់ -2 ។

ក/រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4 ។

ខ/គេដឹងថា $P(0)=P(1)=-8$ ។ រក $P(x)$?

ដំណោះស្រាយ

ក/រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4

តាមបំរាប់គេបាន $\begin{cases} \dfrac{P(x)}{x-2}=Q_1(x)+\dfrac{2}{x-2} & (1) \\ \dfrac{P(x)}{x+2}=Q_2(x)+\dfrac{-2}{x+2} & (2) \end{cases}$

ធ្វើផលសងរវាងសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2})P(x)=Q_1(x)-Q_2(x)+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}$$

ឬ $\dfrac{4}{x^2-4}P(x)=Q_1(x)-Q_2(x)+\dfrac{4x}{x^2-4}$

ឬ $\dfrac{P(x)}{x^2-4}=Q(x)+\dfrac{x}{x^2-4}$ (3) ដែល $Q(x)=\dfrac{Q_1(x)-Q_2(x)}{4}$

តាមទំនាក់ទំនង (3) គេទាញបានថាសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4 គឺ $R(x)=x$ ។

ខ-រកពហុធា $\mathbf{P(x)}$ ៖

តាម (3) គេសរសេរ $P(x)=(x^2-4)Q(x)+x$

ដោយ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបីនោះ $Q(x)$ ត្រូវតែជាពហុធាដឺក្រេទី១

ហេតុនេះគេអាចតាង $R(x)=ax+b$

គេសរសេរ $P(x)=(x^2-4)(ax+b)+x$

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $P(0)=-4b=-8$ នោះ $b=2$ ។

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $P(1)=-3(a+b)+1=-8$

គេទាញ $a=3-b=3-2=1$ ។

ដូចនេះ $P(x)=(x^2-4)(x+2)+x=x^3+2x^2-3x-8$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $\mathbf{P(x)}$ មួយ ។

គេដឹងថា $\mathbf{P(x+1)-P(x)=x^2}$ និង $\mathbf{P(0)=0}$ ។

ក/ចូររកពហុធា $\mathbf{P(x)}$ ។

ខ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរស្រាយថា ៖

$$\mathbf{1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

ដំណោះស្រាយ

ក/ រកពហុធា $\mathbf{P(x)}$ ៖

តាង $\mathbf{P(x)=ax^3+bx^2+cx+d}$

គេបាន $\mathbf{P(x+1)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d}$

$$\mathbf{P(x+1)=P(x)+3ax^2+(3a+2b)x+a+b+c}$$

ឬ $\mathbf{P(x+1)-P(x)=3ax^2+(3a+2b)x+a+b+c \quad (1)}$

តាមសម្មតិកម្ម $\mathbf{P(x+1)-P(x)=x^2 \quad (2)}$

ដោយប្រៀបធៀបសមភាព (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$\begin{cases}\mathbf{3a=1}\\ \mathbf{3a+2b=0}\\ \mathbf{a+b+c=0}\end{cases}$$ នាំឲ្យ $\mathbf{a=\frac{1}{3}\ ,\ b=-\frac{1}{2}\ ,\ c=\frac{1}{6}}$

គេបាន $\mathbf{P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+d}$ ដោយ $\mathbf{P(0)=0}$ នោះ $\mathbf{d=0}$

ដូចនេះ $P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x=\frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$ ។

ខ/ ស្រាយថា $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

គេមាន $P(x+1)-P(x)=x^2$ នោះ

$$\sum_{k=1}^{n}\left[P(k+1)-P(k)\right]=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

គេទាញ $\sum_{k=1}^{n}k^2=P(n+1)-P(1)$ ដោយ

$$P(x)=\frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$$

នោះ $P(1)=0$ និង $P(n+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $\mathbf{P(x)}$ មួយ ។ គេដឹងថា

$$2P(x)-P(x+1)=x^3$$

ក/ចូររកពហុធា $\mathbf{P(x)}$ ។

ខ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរគណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+....+\frac{n^3}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក/រកពហុធា $\mathbf{P(x)}$ ៖

តាង $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

នោះ $P(x+1)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

គេបាន ៖

$$2P(x)-P(x+1)=ax^3+(b-3a)x^2+(c-2b-3a)x+d-a-b-c$$

ដោយ $2P(x)-P(x+1)=x^3$ នោះ $\begin{cases} a=1 \\ b-3a=0 \\ c-2b-3a=0 \\ d-a-b-c=0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a=1$, $b=3$, $c=9$, $d=13$

ដូចនេះ $P(x)=x^3+3x^2+9x+13$ ។

ខ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរគណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+....+\frac{n^3}{2^n}$$

គេមាន $2P(x)-P(x+1)=x^3$

យក $x=k$ នោះ៖ $2P(k)-P(k+1)=k^3$ ដែល $k=1,2,3,...$

ចែកសមភាពនឹង 2^{k+1} នោះ៖ $\frac{P(k)}{2^k}-\frac{P(k+1)}{2^{k+1}}=\frac{k^3}{2^{k+1}}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{P(k)}{2^k}-\frac{P(k+1)}{2^{k+1}}\right]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{2^k}=\frac{1}{2}S_n$

ហេតុនេះ៖ $S_n=2\left[\frac{P(1)}{2}-\frac{P(n+1)}{2^{n+1}}\right]=P(1)-\frac{P(n+1)}{2^n}$

តែ $P(1)=26$, $P(n+1)=(n+1)^3+3(n+1)^2+9(n+1)+13$

$$=n^3+6n^2+18n+26$$

ដូចនេះ៖ $S_n=26-\frac{n^3+6n^2+18n+26}{2^n}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $\mathbf{P(x)}$ មួយ ។

គេដឹងថា $\mathbf{P(x)-3}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{(x-3)^2}$ និង $\mathbf{P(x)+3}$ ចែកដាច់នឹង

$\mathbf{(x+3)^2}$ ។ ចូរកំណត់រកពហុធា $\mathbf{P(x)}$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកពហុធា $\mathbf{P(x)}$ ៖

គេមាន $\mathbf{(x-3)^2 \mid P(x)-3}$ នោះ $\mathbf{(x-3) \mid P'(x)}$

ហើយ $\mathbf{(x+3)^2 \mid P(x)+3}$ នោះ $\mathbf{(x+3) \mid P'(x)}$

ដោយ $\mathbf{GCD(x-3, x+3)=1}$ នោះ $\mathbf{(x-3)(x+3) \mid P'(x)}$

នាំឲ្យមាន $\mathbf{a \in IR}$ ដែល $\mathbf{P'(x)=a(x-3)(x+3)=a(x^2-9)}$

គេបាន $\mathbf{P(x)=a\int(x^2-9).dx=a(\frac{x^3}{3}-9x)+C}$

ម្យ៉ាងទៀតមាន $\mathbf{P(3)=3}$ និង $\mathbf{P(-3)=-}$ នោះ៖

$$\begin{cases} -18a+C=3 \\ 18a+C=-3 \end{cases}$$

គេទាញបាន $\mathbf{a=-\frac{1}{6}\,,\ C=0}$ ។ ដូចនេះ៖

$$\mathbf{P(x)=-\frac{1}{18}x^3+\frac{3x}{2}}$$ ។

លំហាត់ទី១៨

កំណត់រកពហុធា $P(x)$ មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)$ និង $P(2)=2$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកពហុធា $P(x)$

តាង n ជាដឺក្រេនៃពហុធា $P(x)$ ហើយដោយគេមាន

សមភាព $P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)$ (1)

នោះ $2n=2+2+n=n+4$ ឬ $n=4$ ។

ជំនួស x ដោយ $-x$ ក្នុង (1) នោះ

$P(x^2)=x^2(x^2+1)P(-x)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $P(x)=P(-x)$ នោះ $P(x)$ ជាអនុគមន៍គូ។

យក $x=0$ គេបាន $P(0)=0$

យក $x=i$ គេបាន $P(-1)=0$

យក $x=-1$ គេបាន $P(1)=2P(-1)=0$

គេបាន $P(0)=P(-1)=P(1)=0$ នោះ $0,-1,1$ ជាឫសនៃ $P(x)$

គេបាន $P(x)=x(x-1)(x+1)(ax+b)$ ដែល $a\neq 0$

ដោយ $P(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេទាញបាន $b=0$ ។

ហេតុនេះ $P(x)=ax^2(x^2-1)$

ដោយ $P(2)=2$ នោះគេបាន $12a=2$ នាំឲ្យ $a=\frac{1}{6}$

ដូចនេះ $P(x)=\frac{1}{6}x^2(x^2-1)=\frac{x^4}{6}-\frac{x^2}{6}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យ **a** និង **b** ជាឬសនៃ $P(x)=x^4+x^3-1$ ។

ចូរបង្ហាញថា **ab** ជាឬសនៃ $Q(x)=x^6+x^4+x^3-x^2-1$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា **ab** ជាឬសនៃ $Q(x)$

តាង $S=a+b$ និង $P=ab$ នោះ **a** និង **b** ជាឬសនៃ

$x^2-Sx+P=0$

ដោយ **a** និង **b** ជាឬសនៃ $P(x)=x^4+x^3-1$ នោះគេអាចដាក់

x^2-Sx+P ជាកត្តារួមក្នុង $P(x)$ ។ គេអាចសរសេរ ៖

$$\begin{aligned} x^4+x^3-1 &= (x^2-Sx+P)(x^2+cx+d) \\ &= P(\frac{1}{P}x^2-\frac{S}{P}x+1)(x^2+cx+d) \\ &= (\frac{1}{p}x^2-\frac{S}{P}x+1)(Px^2+Pcx+Pd) \\ &= (\frac{1}{p}x^2-ux+1)(px^2+vx+w) \end{aligned}$$

ដែល $u=\frac{S}{P}$, $v=Pc$, $w=Pd$ ។

តាមសមភាពខាងលើនេះគេទាញបាន $w=-1$ ។

គេទាញបាន $x^4+x^3-1=(\frac{1}{p}x^2-ux+1)(px^2+vx-1)$

ឬ

$$x^4+x^3-1=x^4+(\frac{v}{p}-up)x^3+(p-\frac{1}{p}-uv)x^2+(u+v)x-1$$

គេទាញ $\begin{cases} \frac{v}{P}-uP=1 & (1) \\ P-\frac{1}{P}-uv=0 & (2) \\ u+v=0 & (3) \end{cases}$

តាម (1) និង (3) គេទាញបាន $v=-u$, $u=-\frac{P}{1+P^2}$

ទំនាក់ទំនង (2) ទៅជា $P-\frac{1}{P}+\frac{P^2}{(1+P^2)^2}=0$

នាំឲ្យ $P^6+P^4+P^3+P^2-1=0$ មានន័យថា $P=ab$

ជាឫសរបស់ពហុធា $Q(x)=x^6+x^4+x^3+x^2-1$ ។

ដូចនេះបើ a និង b ជាឫសនៃ $P(x)$ នោះ ab ជាឫសនៃ $Q(x)$

លំហាត់ទី២០

គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ។

គេដឹងថា $P(1)=1$, $P(2)=8$ និង $P(3)=27$ ។

ចូរស្រាយថា $f(2+\lambda)+f(2-\lambda)=2\lambda^4+10\lambda^2+16$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $f(2+\lambda)+f(2-\lambda)=2\lambda^4+10\lambda^2+16$

តាងពហុធា $P(x)=f(x)-x^3$

ចំពោះ $k=1,2,3$ គេបាន $P(k)=f(k)-k^3=0$

គេទាញបាន $x=1$, 2 , 3 ជាឬសនៃពហុធា $P(x)$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 នោះ

គេទាញ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 ដែរ

ហេតុនេះពហុធា $P(x)$ អាចសរសេរ ៖

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)$ ដែល α ជាឬសមួយទៀតនៃ $P(x)$

គេបាន $f(x)=P(x)+x^3=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)+x^3$

-ចំពោះ $x=2+\lambda$ គេបាន ៖

$$f(2+\lambda)=\lambda(\lambda^2-1)(2+\lambda-\alpha)+(2+\lambda)^3 \quad (1)$$

-ចំពោះ $x = 2 - \lambda$ គេបាន ៖

$$f(2-\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 1)(2 - \lambda - \alpha) + (2-\lambda)^3 \quad (2)$$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន ៖

$$f(2+\lambda) + f(2-\lambda) = 2\lambda^4 + 10\lambda^2 + 16$$ ។

លំហាត់ទី២១

បើ $P(x),Q(x),R(x)$ និង $S(x)$ ជាពហុធាដោយដឹងថា ៖

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$$

នោះចូរស្រាយថា $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ៖

គេមាន

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x) \quad (*)$$

យក $\alpha=e^{\frac{2\pi i}{5}}$ នោះ $\alpha^5=1$

ហើយ $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=\dfrac{\alpha^5-1}{\alpha-1}=0$

ជំនួស x ដោយ $\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4$ ក្នុង $(*)$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} P(1)+\alpha Q(1)+\alpha^2R(1)=0 & (1)\\ P(1)+\alpha^2Q(1)+\alpha^4R(1)=0 & (2)\\ P(1)+\alpha^3Q(1)+\alpha R(1)=0 & (3)\\ P(1)+\alpha^4Q(1)+\alpha^3R(1)=0 & (4)\end{cases}$$

គុណសមីការ (1),(2),(3) និង (4) នឹងចំនួនរៀងគ្នា

$-\alpha,-\alpha^2,-\alpha^3,-\alpha^4$

គេបាន $\begin{cases} -\alpha P(1)-\alpha^2Q(1)-\alpha^3R(1)=0 & (5) \\ -\alpha^2P(1)-\alpha^4Q(1)-\alpha R(1)=0 & (6) \\ -\alpha^3P(1)-\alpha\ Q(1)-\alpha^4R(1)=0 & (7) \\ -\alpha^4P(1)-\alpha^3Q(1)-\alpha^2R(1)=0 & (8) \end{cases}$

បូកសមីការទាំង(8)ខាងលើគេបាន $5P(1)=0$ នោះ $P(1)=0$

ដូចនេះ $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ។

គេដឹងថា $P(k)=\dfrac{k}{k+1}$ ចំពោះ $k=0,1,2,....,n$ ។

ចូរកំណត់ $P(n+1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $Q(x)=(x+1)P(x)-x$ នោះ $Q(k)=0$ គ្រប់

$k=0,1,2,....,n$ ។

នោះគេអាចសរសេរ

$Q(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)...(x-n)$

គេទាញបាន

$(x+1)P(x)-x=ax(x-1)(x-2)(x-3)....(x-n)$

យក $x=-1$ គេបាន $1=a(-1)^{n+1}.(n+1)!$ នោះ $a=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

គេបាន $P(x)=\dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-n)+x}{x+1}$

ដូចនេះ $P(n+1)=\begin{cases} 1 & \text{បើ } n \text{ គូ} \\ \dfrac{n}{n+2} & \text{បើ } n \text{ សេស} \end{cases}$

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនគត់ខុសគ្នា ។ យក $P(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណ

ជាចំនួនគត់ ។ ចូរបង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌ

$P(a)=b, P(b)=c, P(c)=a$

មិនអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នាបានទេ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $P(a)=b, P(b)=c, P(c)=a$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} P(x)-b=(x-a)\,Q_1(x) & (1) \\ P(x)-c=(x-b)\,Q_2(x) & (2) \\ P(x)-a=(x-c)\,Q_3(x) & (3) \end{cases}$$

ក្នុងចំណោមបីចំនួនគត់ខុសគ្នា a,b,c យើងអាចជ្រើសរើសយកតម្លៃ

ដាច់នៃផលដកធំជាងគេមួយ ។ សន្មតថា $|a-c|$ ជាចំនួនធំជាងគេក្នុង

ចំណោមចំនួន $|a-b|, |b-c|, |a-c|$ គេបាន

$|a-c|>|a-b|$ ។

ដោយយក $x=c$ ជួសក្នុង (1) នោះ

$P(c)-b=a-b=(c-a).Q_1(c)$

គេបាន $|a-b|=|a-c|.|Q_1(c)|$ ដោយ $Q_1(c)$ ជាចំនួនគត់ នោះ៖

$|a-b|\geq|a-c|$ ដែលផ្ទុយពីការឧបមាខាងលើ។

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in IR$

ក/ចូរស្រាយថា $f(x)-x$ ជាកត្តានៃ $f[f(x)]-x$ ។

ខ/ចូរស្រាយថាបើសមីការ $f(x)=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត នោះសមីការ $f[f(x)]=x$ ក៏គ្មានឫសជាចំនួនពិតដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/ស្រាយថា $f(x)-x$ ជាកត្តានៃ $f[f(x)]-x$ ៖

គេមាន $f(x)=ax^2+bx+c$

គេបាន
$$\begin{aligned}f[f(x)]&=af^2(x)+bf(x)+c\\&=a[f^2(x)-x^2]+b[f(x)-x]+ax^2+bx+c\\&=a[f^2(x)-x^2]+b[f(x)-x]+[f(x)-x]+x\\&=[f(x)-x][af(x)+ax+b+1]+x\end{aligned}$$

នោះ $f[f(x)]-x=[f(x)-x][af(x)+ax+b+1]$

គេទាញ $f(x)-x$ ជាកត្តានៃ $f[f(x)]-x$ ។

ខ/សមីការ $f(x)=x$

ឬ $ax^2+bx+c=x$

ឬ $ax^2+(b-1)x+c=0$ មាន $\Delta_1=(b-1)^2-4ac$

ដោយ $f(x)=x$ ជាសមីការគ្មានឫសនោះ

$\Delta_1=(b-1)^2-4ac<0$

សមីការ $f[f(x)]=x$ សមមូល

$$[f(x)-x][af(x)+ax+b+1]=0$$

យើងនឹងស្រាយថា $af(x)+ax+b+1=0$ ជាសមីការគ្មានឫស ។

គេមាន $a(ax^2+bx+c)+ax+b+1=0$

$$a^2x^2+a(b+1)x+ac+b+1=0$$

មាន $\Delta_2=a^2(b+1)^2-4a^2(ac+b+1)$

$$=a^2[(b+1)^2-4ac-4b-4]$$

$$=a^2(b^2+2b+1-4ac-4b-4)$$

$$=a^2[(b-1)^2-4ac-4]=a^2[\Delta_1-4]$$

ដោយ $\Delta_1<0$ គេទាញបាន $\Delta_2<0$ ។ ដូចនេះបើសមីការ $f(x)=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតនោះសមីការ $f[f(x)]=x$ ក៏គ្មានឫសជាចំនួនពិតដែរ ។

លំហាត់ទី២៩

គេតាង α និង β ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - x - 1 = 0$ ។

ចូរគណនា $S = 5\alpha^8 + 21\beta^5$ និង $P = (5\alpha^8 - 1)(21\beta^5 + 1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S = 5\alpha^8 + 21\beta^5$

ដោយ α និង β ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - x - 1 = 0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ

វ្យែតគេមាន $\alpha + \beta = 1$ និង $\alpha\beta = -1$

គេមាន $\begin{cases} \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\ \beta^2 - \beta - 1 = 0 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} \alpha^2 = \alpha + 1 & (1) \\ \beta^2 = \beta + 1 & (2) \end{cases}$

តាម(1)គេបាន $(\alpha^2)^2 = (\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1$

$$\alpha^4 = (\alpha + 1) + 2\alpha + 1 = 3\alpha + 2$$

លើកជាការេ $\alpha^8 = (3\alpha + 2)^2 = 9\alpha^2 + 12\alpha + 4$

$$\alpha^8 = 9(\alpha + 1) + 12\alpha + 4 = 21\alpha + 13$$

នោះគេទាញ $5\alpha^8 = 105\alpha + 65 \quad (1)$

តាម(2)គេបាន $(\beta^2)^2 = (\beta + 1)^2 = \beta^2 + 2\beta + 1$

$$\beta^4 = (\beta + 1) + 2\beta + 1 = 3\beta + 2$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង β គេបាន ៖

$\beta^5 = 3\beta^2 + 2\beta = 3(\beta + 1) + 2\beta = 5\beta + 3$

នោះគេទាញ $21\beta^5 = 105\beta + 63 \quad (2)$

បូក (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$S=5\alpha^8+21\beta^5=105(\alpha+\beta)+128$ ដោយ $\alpha+\beta=1$

ដូចនេះ $S=105+128=233$ ។

គណនា $P=(5\alpha^8-1)(21\beta^5+1)$ ៖

គេមាន $5\alpha^8=105\alpha+65$ និង $21\beta^5=105\beta+63$

គេបាន
$$\begin{aligned}P&=(105\alpha+64)(105\beta+64)\\&=11025\alpha\beta+6720(\alpha+\beta)+4096\\&=-11025+6720+4096\\&=-209\end{aligned}$$

ដូចនេះ $P=(5\alpha^8-1)(21\beta^5+1)=-209$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យត្រីធា $P(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$ និង a,b,c ចំនួនថេរ ។

ចូរស្រាយថា

$$P(1)+P(4)+P(6)+P(7)=P(2)+P(3)+P(5)+P(8)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា

$$P(1)+P(4)+P(6)+P(7)=P(2)+P(3)+P(5)+P(8)$$

គេមាន $P(1)=a+b+c$

$$P(4)=16a+4b+c$$

$$P(6)=36a+6b+c$$

$$P(7)=49a+7b+c$$

គេបាន $P(1)+P(4)+P(6)+P(7)=102a+18b+4c \quad (1)$

ហើយ $P(2)=4a+2b+c$

$$P(3)=9a+3b+c$$

$$P(5)=25a+5b+c$$

$$P(8)=64a+8b+c$$

គេបាន $P(2)+P(3)+P(5)+P(8)=102a+18b+4c \quad (2)$

ដូចនេះ៖

$$P(1)+P(4)+P(6)+P(7)=P(2)+P(3)+P(5)+P(8)$$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យ a,b,c,d ជាបួនចំនួនខុសគ្នា និង ខុសពីសូន្យ ។

ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\begin{cases} ax_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = 1 \\ bx_1 + b^2x_2 + b^3x_3 + b^4x_4 = 1 \\ cx_1 + c^2x_2 + c^3x_3 + c^4x_4 = 1 \\ dx_1 + d^2x_2 + d^3x_3 + d^4x_4 = 1 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\begin{cases} ax_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = 1 \\ bx_1 + b^2x_2 + b^3x_3 + b^4x_4 = 1 \\ cx_1 + c^2x_2 + c^3x_3 + c^4x_4 = 1 \\ dx_1 + d^2x_2 + d^3x_3 + d^4x_4 = 1 \end{cases}$

តាងពហុធា $P(t) = x_1t + x_2t^2 + x_3t^3 + x_4t^4$ និង $P(0) = 0$

ដែល $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 1$ នោះពហុធា $P(t)$ អាចសរសេរ

$P(t) = A(t-a)(t-b)(t-c)(t-d) + 1$ ។

យក $t = 0$ គេបាន $P(0) = A.(abcd) + 1 = 0$ នោះ

$$A = -\frac{1}{abcd}$$

ហេតុនេះ $P(t) = 1 - \dfrac{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}{abcd}$

ដោយ $P(t)=x_1t+x_2t^2+x_3t^3+x_4t^4$ នោះគេបានសមភាព

$$x_1t+x_2t^2+x_3t^3+x_4t^4=1-\frac{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}{abcd}$$

បន្ទាប់ពីពន្លាតរួចផ្ទឹមលេខមេគុណគេទទួលបានលទ្ធផលដូចតទៅ ៖

$$x_1=\frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd}$$

$$x_2=-\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{abcd}$$

$$x_3=\frac{a+b+c+d}{abcd}\quad ; \quad x_4=-\frac{1}{abcd}$$

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យពហុធា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$ មានឫស $x_1,x_2,x_3,....,x_n$ ។

តាង $S_m=x_1^m+x_2^m+x_3^m+....+x_n^m$ ដែល m ជាចំនួនគត់រឺឡាទីហ្វ។

ចូរស្រាយថា $a_0S_m+a_1S_{m+1}+a_2S_{m+2}+....+a_nS_{m+n}=0$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$

ដោយ $x_i\ ,\ i=1,2,3,...,n$ ជាឫសនៃ $P(x)$ នោះ $P(x_i)=0$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n}a_kx_i^k=0\quad(*)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ $(*)$ នឹង x_i^m នោះគេបាន

$\sum_{k=0}^{n}a_kx_i^{m+k}=0$

នោះគេទាញ $\sum_{k=0}^{n}a_kS_{m+k}=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{n}a_kx_i^{m+k}\right]=0$ ពិត

ដូចនេះ $a_0S_m+a_1S_{m+1}+a_2S_{m+2}+....+a_nS_{m+n}=0$ ។

លំហាត់ទី២៩

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនពិត p ដើម្បីឲ្យសមីការ ៖

$x^3-2p(p+1)x^2+(p^4+4p^3-1)x^2-3p^3=0$ មានឬសបីផ្សេងគ្នាបង្កើតបានជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែងមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចំនួនពិត p

តាង α,β,γ ជាឬសទាំងបីនៃសមីការដែល $0<\alpha<\beta<\gamma$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2p(p+1)\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p^4+4p^3-1\\ \alpha\beta\gamma=3p^3\end{cases}$

ដោយ α,β,γ អាចបង្កើតបានជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែងមួយនោះ $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ ឬ $2\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

ដោយ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$$\begin{aligned}&=4p^2(p+1)^2-2(p^4+4p^3-1)\\&=4p^4+8p^3+4p^2-2p^4-8p^3+2\\&=2(p^2+1)^2\end{aligned}$$

គេទាញបាន $\gamma=p^2+1$ ។

គេមាន $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2p(p+1)\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p^4+4p^3-1\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}\alpha+\beta=2p(p+1)-\gamma \\ \alpha\beta=p^4+4p^3-1-(\alpha+\beta)\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}\alpha+\beta=2p(p+1)-(p^2+1) \\ \alpha\beta=p^4+4p^3-1-(p^2+1)(p^2+2p-1)\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}\alpha+\beta=p^2+2p-1 \\ \alpha\beta=2p^3-2p\end{cases}$

នោះគេទាញបាន α និង β ជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទីពីរ ៖

$z^2-(p^2+2p-1)z+(2p^3-2p)=0$

$$(z-2p)(z-p^2+1)=0$$

គេទាញឫស $\alpha=p^2-1$, $\beta=2p$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $\alpha\beta\gamma=3p^3$

នោះ $(p^2-1)(2p)(p^2+1)=3p^3$

ដោយ $\alpha,\beta,\gamma>0$ នោះ $p>0$ និង $p^2-1>0$ ឬ $p>1$ ។

ហេតុនេះសមីការសមមូល ៖

$2p^4-3p^2-2=(p^2-2)(2p^2+1)=0$

គេទាញបាន $p=\sqrt{2}$ ហើយ $\alpha=1\,,\beta=2\sqrt{2}\,,\gamma=3$ ។

ដូចនេះ $p=\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យ $a,b,c\in IR$ ។ បើ $|ax^2+bx+c|\le 1$ គ្រប់ $x\in[-1,1]$

ចូរស្រាយថា $|cx^2+bx+a|\le 2$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|cx^2+bx+a|\le 2$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,1]$

តាង $f(x)=ax^2+bx+c$ នោះ $|f(1)|=|a+b+c|\le 1$

$|f(-1)|=|a-b+c|<1$ និង $|f(0)|=|c|\le 1$ ។

តាង $g(x)=cx^2+bx+a$ ។

គេអាចសរសេរ

$$g(x)=c(x^2-1)+(a+b+c)\frac{1+x}{2}+(a-b+c)\frac{1-x}{2}$$

$$=(x^2-1)f(0)+\frac{1+x}{2}f(1)+\frac{1-x}{2}f(-1)$$

គេបាន $|g(x)|=|(x^2-1)f(0)+\frac{1+x}{2}f(1)+\frac{1-x}{2}f(-1)|$

ដោយប្រើវិសមភាពត្រីកោណគេបាន ៖

$$|g(x)|\le|x^2-1|.|f(0)|+\frac{|1+x|}{2}|f(1)|+\frac{|1-x|}{2}|f(-1)|$$

ដោយ $|f(1)|\le 1$, $|f(-1)|\le 1$ និង $|f(0)|\le 1$

នោះគេបាន ៖

$$|g(x)| \le |x^2-1| + \left|\frac{1+x}{2}\right| + \left|\frac{1-x}{2}\right| = -x^2+1+\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2} = 2-x^2$$

ដោយ $2-x^2 \le 2$ នោះ $|g(x)| \le 2$ ។

ដូចនេះ បើ $|ax^2+bx+c| \le 1$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1,1]$

នោះ $|cx^2+bx+a| \le 2$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1,1]$ ។

ចំណាំ! វិសមភាពត្រីកោណ៖

◇ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b គេមាន $|a+b| \le |a|+|b|$ សមភាពកើតឡើងតែក្នុងករណី a និង b មានសញ្ញាដូចគ្នា

◇ ជាទូទៅ ៖

គ្រប់ចំនួនពិត $a_1, a_2, ..., a_n$ គេមាន ៖

$$|a_1+a_2+...+a_n| \le |a_1|+|a_2|+...+|a_n| \text{ ។}$$

◇ ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច ៖

គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច $z_1, z_2, ..., z_n$ គេមាន ៖

$$|z_1+z_2+...+z_n| \le |z_1|+|z_2|+...+|z_n| \text{ ។}$$

(ដែល $|z|$ តាងឲ្យម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច z)

◇ ចំពោះវ៉ិចទ័រក្នុងប្លង់ ឬ ក្នុងលំហ ៖

$$|\vec{u_1}+\vec{u_2}+....+\vec{u_n}| \le |\vec{u_1}|+|\vec{u_2}|+....+|\vec{u_n}| \text{ ។}$$

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យ **a** និង **b** ជាឬសនៃ $P(x)=x^4+x^3-1$ ។

ចូរបង្ហាញថា **ab** ជាឬសនៃ $Q(x)=x^6+x^4+x^3-x^2-1$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា **ab** ជាឬសនៃ $Q(x)$

តាង $S=a+b$ និង $P=ab$ នោះ **a** និង **b** ជាឬសនៃសមីការ $x^2-Sx+P=0$ ។

ដោយ **a** និង **b** ជាឬសនៃ $P(x)=x^4+x^3-1$ នោះគេអាចដាក់

x^2-Sx+P ជាកត្តារួមក្នុង $P(x)$ ។ គេអាចសរសេរ ៖

$$x^4+x^3-1=(x^2-Sx+P)(x^2+cx+d)$$

$$=P(\frac{1}{P}x^2-\frac{S}{P}x+1)(x^2+cx+d)$$

$$=(\frac{1}{p}x^2-\frac{S}{P}x+1)(Px^2+Pcx+Pd)$$

$$=(\frac{1}{p}x^2-ux+1)(px^2+vx+w)$$

ដែល $u=\frac{S}{P}$, $v=Pc$, $w=Pd$ ។

តាមសមភាពខាងលើនេះគេទាញបាន $\mathbf{w=-1}$ ។

គេទាញបាន $\mathbf{x^4+x^3-1=(\frac{1}{p}x^2-ux+1)(px^2+vx-1)}$

$$\mathbf{x^4+x^3-1=x^4+(\frac{v}{p}-up)x^3+(p-\frac{1}{p}-uv)x^2+(u+v)x-1}$$

គេទាញ $\begin{cases} \mathbf{\frac{v}{P}-uP=1} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{P-\frac{1}{P}-uv=0} & \mathbf{(2)} \\ \mathbf{u+v=0} & \mathbf{(3)} \end{cases}$

តាម (1) និង (3) គេទាញបាន $\mathbf{v=-u\ ,\ u=-\frac{P}{1+P^2}}$

ទំនាក់ទំនង (2) ទៅជា $\mathbf{P-\frac{1}{P}+\frac{P^2}{(1+P^2)^2}=0}$

នាំឲ្យ $\mathbf{P^6+P^4+P^3+P^2-1=0}$ មានន័យថា $\mathbf{P=ab}$

ជាឬសរបស់ពហុធា $\mathbf{Q(x)=x^6+x^4+x^3+x^2-1}$ ។

ដូចនេះបើ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាឬសនៃ $\mathbf{P(x)}$ នោះ $\mathbf{ab}$ ជាឬសនៃ $\mathbf{Q(x)}$ ។

សម្គាល់ ៖ *ចំនួន λ ជាឬសរបស់ពហុធា*

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $P(x)=0$ ពោលគឺ ៖

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k=\lambda_0+\lambda_1x+\lambda_2x^2+...+\lambda_nx^n=0$$ ។

លំហាត់ទី៣២

សមីការ $x^3-ax^2+bx-c=0$ មានឫសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន (មិនចាំបាច់ខុសគ្នា)។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\frac{c}{b}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\frac{c}{b}$

តាង u,v,w ជាឫសរបស់សមីការ $x^3-ax^2+bx-c=0$ ។

គេបាន $\begin{cases}u+v+w=a\\ uv+vw+wu=b\\ uvw=c\end{cases}$

ដោយ $u>0,v>0,w>0$ នោះ $a>0,b>0,c>0$

$$\frac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\frac{c}{b}=\frac{b^2+ab-2ac+b-3c}{b^2+2ab+3a}$$

$$= \frac{3b^2 + 3ab - 6ac + 3b - 9c}{3(b^2 + 2ab + 3b)}$$

$$= \frac{(b^2 + 2ab + 3b) + (2b^2 + ab - 6ac - 9c)}{3(b^2 + 2ab + 3b)}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2b^2 + ab - 6ac - 9c}{3(b^2 + 2ab + 3b)}$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន ៖

$a = u + v + w \geq 3\sqrt[3]{uvw}$

និង $b = uv + vw + wu \geq 3\sqrt[3]{u^2v^2w^2}$

គេបាន $ab \geq 9uvw = 9c$ ឬ $ab - 9c \geq 0$ (*)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន ៖

$$\frac{u^2v^2 + v^2w^2}{2} \geq uv^2w \quad (1)$$

$$\frac{v^2w^2 + u^2w^2}{2} \geq uvw^2 \quad (2)$$

$$\frac{u^2w^2 + u^2v^2}{2} \geq u^2vw \quad (3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2),(3)$ គេបាន ៖

$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 \geq uvw(u + v + w)$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2uvw(u + v + w)$ គេបាន

$(uv + vw + wu)^2 \geq 3uvw(u + v + w)$

ឬ $b^2 \geq 3ac$ ឬ $2b^2-6ac \geq 0$ (**)

បូកវិសមភាព (*) & (**) គេបាន $2b^2+ab-6ac-9c \geq 0$

ហេតុនេះ $\frac{1}{3}+\frac{2b^2+ab-6ac-9c}{3(b^2+2ab+3b)} \geq \frac{1}{3}$

ឬ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\frac{c}{b} \geq \frac{1}{3}$ ។

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\frac{c}{b}$ គឺ $\frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a<b$ និង $a,b,c \in IR$

បើ $f(x) \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ នោះចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមា

នៃ $D=\frac{a+b+c}{b-a}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $f(x) \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ សមមូល $\begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac \leq 0 \end{cases}$

យក $t=b-a>0$ (ព្រោះ $b>a$)

ដោយ $b^2-4ac \leq 0$ នោះ $c \geq \frac{b^2}{4a}=\frac{(t+a)^2}{4a}$

គេបាន $D=\frac{a+b+c}{b-a}=\frac{a+(t+a)+c}{t} \geq \frac{t+2a+\frac{(t+a)^2}{4a}}{t}$

ឬ $$D \geq \frac{4a(t+2a)+(t+a)^2}{4at}$$

តាង $f(t)=\dfrac{4a(t+2a)+(t+a)^2}{4at}=\dfrac{t^2+6at+9a^2}{4at}$

$$=\frac{1}{4}.\frac{t}{a}+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}.\frac{a}{t}$$

គេបាន $f(t)\geq\dfrac{3}{2}+2\sqrt{\dfrac{1}{4}.\dfrac{t}{a}.\dfrac{9}{4}.\dfrac{a}{t}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}=3$

គេទាញបាន $D\geq 3$ នោះតម្លៃអប្បបរមានៃ D គឺ $D_{\min}=3$

លំហាត់ទី៣៨

គេឲ្យចំនួនពិត α និង β ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-17=0$ និង $\beta^3-3\beta^2+5\beta+11=0$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ $\alpha+\beta$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ $\alpha+\beta$

តាង $f(x)=x^3-3x^2+5x$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} f(\alpha)=\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=17 \\ f(\beta)=\beta^3-3\beta^2+5\beta=-11 \end{cases}$$

គេបាន $f(\alpha)+f(\beta)=6$ ។

ដោយ $f(x)=x^3-3x^2+5x=(x-1)^3+2(x-1)+3$

$$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha-1)^3+(\beta-1)^3+2(\alpha-1)+2(\beta-1)+6=6$$

គេទាញ $(\alpha-1)^3+(\beta-1)^3+2(\alpha-1)+2(\beta-1)=0$

ឬ $(\alpha+\beta-2)\left[(\alpha-1)^2+(\alpha-1)(\beta-1)+(\beta-1)^2+2\right]=0$

ដោយ $(\alpha-1)^2+(\alpha-1)(\beta-1)+(\beta-1)^2+2>0$

ដូចនេះ $\alpha+\beta=2$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} f(5)=5 \\ f(55)=5555 \\ f(555)=555555 \end{cases}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\underbrace{555...555}_{(n)})=\underbrace{555...555}_{(2n)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\begin{cases} f(5)=5 \\ f(55)=5555 \\ f(555)=555555 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} 25a+5b+c=55 \\ 3025a+55b+c=5555 \\ 308025a+555b+c=555555 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $a=\frac{9}{5}, b=2, c=0$

គេបាន $f(x)=\frac{9}{5}x^2+2x=x\left(\frac{9}{5}x+2\right)$

ដោយ $\underbrace{555...555}_{(n)} = \frac{5}{9}(10^n - 1)$ នោះគេបាន ៖

$$f\left(\underbrace{555...555}_{(n)}\right) = \frac{5}{9}(10^n - 1)\left[\frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(10^n - 1)\right) + 2\right] = \frac{5}{9}(10^{2n} - 1)$$

$$= \left(\underbrace{555....555}_{(2n)}\right)$$ ពិត

លំហាត់ទី៣៦

ឧបមាថាសមីការ $x^2 - 2013x + q = 0$ មានឫសពីរ α និង β ជាចំនួនពិត។ គេដឹងថា $\alpha^3 + \beta^3 = 2013^2$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ q ?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ q

ដោយ α និង β ជាឫសសមីការនោះ $\begin{cases} \alpha + \beta = 2013 \\ \alpha\beta = q \end{cases}$

គេដឹងថា $\alpha^3 + \beta^3 = 2013^2$

នោះយើងបាន $(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2013^2$

$$2013^3 - 3q(2013) = 2013^2$$

គេទាញ

$$q=\frac{2013^3-2013^2}{3(2013)}=\frac{2013^2\times 2012}{3\times 2013}=671\times 2012=1350052$$

ដូចនេះ $q=1350052$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឲ្យ $a\,,b\,,c\in IR$ និង $a\neq 0$ ។ គេដឹងថា a និង $4a+3b+2c$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ។ ចូរស្រាយថាឬសទាំងពីរនៃសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0$ មិនអាចស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(1,2)$ ព្រមគ្នាទេ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

ដោយ a និង $4a+3b+2c$ មានសញ្ញាដូចគ្នានោះគេបាន

$$0\leq\frac{4a+3b+2c}{a}=4+3\frac{b}{a}+2\frac{c}{a}=4-3(x_1+x_2)+2x_1x_2$$

ដោយគេមាន ៖

$$4-3(x_1+x_2)+2x_1x_2=(x_1-1)(x_2-2)+(x_1-2)(x_1-1)$$

បើ $x_1 , x_2 \in (1,2)$ នោះ $(x_1-1)(x_2-2)<0$ និង $(x_1-2)(x_2-1)<0$

គេបាន $4-3(x_1+x_2)+2x_1x_2<0$ មិនពិត(ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម)

ដូចនេះឫសទាំងពីរនៃសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0$ មិនអាចស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(1,2)$ ព្រមគ្នាទេ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនគត់ ដែល a ជាចំនួនគូនិង b ជាចំនួនសេស ។ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដែល ax^2+bx+c ចែកដាច់នឹង 2^n

ដំណោះស្រាយ

យើងនឹងស្រាយសំណើនេះតាមកំណើនលើ $n\in IN\cup\{0\}$

ចំពោះ $n=0$ យក $x_0\in IN$ គេបាន $2^0\,|\,ax_0^2+bx_0+c$ ពិត

ចំពោះ $n\geq 0$ យក $x_n\in IN$ ដែល $2^n\,|\,ax_n^2+bx_n+c=P(x_n)$

យើងនឹងស្រាយថាគ្រប់ $x_{n+1}\in IN$ នោះ $2^{n+1}\,|\,P(x_{n+1})$

បើ $2^n\,|\,ax_n^2+bx_n+c=P(x_n)$ នោះ $P(x_n)=2^n\mu$ ដែល μ ជាចំនួនគត់សេស ។

គេមាន $P(x)-P(x_n)=(x-x_n)\left[a(x+x_n)+b\right]$

ដែល $a(x+x_n)+b$ ជាចំនួនគត់សេសគ្រប់ $x\in IN$

យក $x_{n+1}=x_n+2^n\lambda$ ដែល λ ជាចំនួនគត់សេសនោះ

គេបាន

$P(x_{n+1})=P(x_n)+2^n\lambda\left[a(x_{n+1}+x_n)+b\right]$ ដោយ $P(x_n)=2^n\mu$

គេបាន $P(x_{n+1})=2^n\left[\mu+\lambda\left[a(x_{n+1}+x_n)+b\right]\right]$

ដោយ $\mu+\lambda\left[a(x_{n+1}+x_n)+b\right]$ ជាចំនួនគូនោះ

$2^{n+1}\mid P(x_{n+1})$

ដូចនេះចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដែល ax^2+bx+c ចែកដាច់នឹង 2^n ។

លំហាត់ទី៣៩

ចូរកំណត់ចំនួនអសនិទាន x ដោយដឹងថា x^2+2x និង x^3-6x ជាចំនួនសនិទាន ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនអសនិទាន x

តាង $A=x^2+2x$ និង $B=x^3-6x$

គេមាន $B=x^3-6x=x(x^2+2x)-2(x^2+2x)-2x$

$$=Ax-2A-2x$$

$$=(A-2)x-2A$$

ដោយ $x\notin\mathbb{Q}$ និង $A,B\in\mathbb{Q}$ នោះតាម $B=(A-2)x-2A$

គេទាញបាន $\begin{cases}A-2=0\\B=-2A\end{cases}$ នោះ $\begin{cases}A=2\\B=-4\end{cases}$

សមមូល $x^2+2x=2$ នោះ $x_1=-1+\sqrt{3}$, $x_2=-1-\sqrt{3}$ ។

ដូចនេះ $x_1 = -1+\sqrt{3}$, $x_2 = -1-\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៤០

ចូរកំណត់គ្រប់ពហុធាពិត $P(x)$ មានដឺក្រេទី៥ ដោយដឹងថា $P(x)+1$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^3$ និង $P(x)-1$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ពហុធាពិត $P(x)$ មានដឺក្រេទី៥

របៀបទី១

តាមសម្មតិកម្មគេបាន $P(x)+1=(x-1)^3(ax^2+bx+c)$ (1) និង $P(x)-1=(x+1)^3(ax^2+px+q)$ (2) ដែល $a\neq 0$ និង a,b,c , p,q ជាចំនួនពិត ។

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ ៖

$$P(x)+1=ax^5+(b-3a)x^4+(c-3b+3a)x^3+(-3c+3b-a)x \\ +(3c-b)x-c$$

ទំនាក់ទំនង (2) អាចសរសេរ ៖

$$P(x)-1=ax^5+(p+3a)x^4+(q+3p+3a)x^3+(3q+3p+a)x^2+(3q+p)x+q$$

ប្រៀបធៀបលេខមេគុណគេបាន

$$\begin{cases} b-3a=p+3a \\ c-3b+3a=q+3p+3a \\ -3c+3b-a=3q+3p+a \\ 3c-b=3q+p \\ -c=q+2 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធ័នេះគេទទួលបានចម្លើយ ៖

$$a=-\frac{3}{8}\,,\ b=-\frac{9}{8}\,,\ c=-1\,,\ p=\frac{9}{8}\,,\ q=-1$$

តាម (1) គេបាន $P(x)=(x-1)^3(-\frac{3}{8}x^2-\frac{9}{8}x-1)-1$

បន្ទាប់ពីបង្រួមគេបាន $P(x)=-\frac{3}{8}x^5+\frac{10}{8}x^3-\frac{15}{8}x$ ។

របៀបទី២

តាមសម្មតិកម្មគេបាន $P(x)=(x-1)^3Q(x)-1$ (1)

និង $P(x)=(x+1)^3R(x)+1$ (2) ដែល $P(x)$ និង $Q(x)$

ជាពហុធាមានដឺក្រេទីពីរ ។

តាម(1) គេបាន $P'(x)=(x-1)^2\left[3Q(x)+(x-1)Q'(x)\right]$ (3)

តាម(2)គេបាន $P'(x)=(x+1)^2\left[3R(x)+(x+1)R'(x)\right]$ (4)

តាម (3) និង (4) បញ្ជាក់ថា $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x^2-1)^2$

ដោយ $P(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទី៥នោះ$P'(x)$ពហុធាដឺក្រេទី៤

ហេតុនេះគេបាន $P'(x)=k(x^2-1)^2=k(x^4-2x^2+1)$

គេទាញបាន

$$P(x)=k\int(x^4-2x^2+1).dx=k\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right)+\ell$$

តាម (1) និង (2) គេទាញ $\begin{cases}P(1)=-1\\P(-1)=1\end{cases}$

ដោយ $P(-1)=\frac{8}{15}k+\ell\ ,\ P(1)=-\frac{8}{15}k+\ell$

គេបានប្រពន្ធ័ $\begin{cases}\ell+\frac{8}{15}k=-1\\ \ell-\frac{8}{15}k=1\end{cases}$ នាំឲ្យ $\ell=0\ ,\ k=-\frac{15}{8}$

ដូចនេះ $P(x)=-\frac{15}{8}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x\right)=-\frac{3x^5}{8}+\frac{5x^3}{4}-\frac{15}{8}x$

លំហាត់ទី៤១

គេឲ្យពហុធា

$P_k(x) = (x^4 - 1)(x^3 - x^2 + x - 1)^k + (x+1)x^{4k-1}$

ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k បង្ហាញថាពហុធា $P_k(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $x^5 + 1$ ជានិច្ច ។

ដំណោះស្រាយ

យើងតាង $A(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ និង $B(x) = x^4 - A(x)$

នោះ $x^4 - 1 = (x+1)A(x)$ និង $x^5 + 1 = (x+1)B(x)$

គេបាន $P(x) = (x^4 - 1)A^k(x) + (x+1)x^{4k-1}$

$$= (x+1)A^{k+1}(x) + (x+1)x^{4k-1}$$

$$= (x+1)\left[A^{k+1}(x) + x^{4k-1}\right]$$

ចំពោះ $k = 1$ បាន $P_1(x) = (x^4 - 1)(x^3 - x^2 + x - 1) + x^3(x+1)$

$$= (x^5 + 1)(x^2 - x + 1)$$

នោះ $(x^5 + 1) \mid P_1(x)$ ពិត

ឧបមថា $x^5 + 1 \mid P_k(x) = (x+1)\left[A^{k+1}(x) + x^{4k-1}\right]$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា

$x^5+1 \mid P_{k+1}(x)=(x+1)\left[A^{k+2}(x)+x^{4k+3}\right]$

តាង $Q_k(x)=A^{k+1}(x)+x^{4k-1}$

គេបាន $Q_{k+1}(x)=A^{k+2}(x)+x^{4k+3}$

$$=A^{k+2}(x)+\left[A(x)+B(x)\right]x^{4k-1}$$

$$=A(x)Q_k(x)+B(x)x^{4k-1}$$

ដើម្បីស្រាយថា $x^5+1 \mid P_k(x)$ យើងត្រូវស្រាយថា

$B(x) \mid Q_k(x)$

បើ $B(x) \mid Q_k(x)$ នាំឲ្យ $B(x) \mid Q_{k+1}(x)$

ព្រោះ $Q_{k+1}(x)=A(x)Q_k(x)+B(x)x^{4k-1}$

គេទាញបាន $x^5+1 \mid P_{k+1}(x)=(x+1)\left[A^{k+2}(x)+x^{4k+3}\right]$

ដូចនេះចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k បង្ហាញថាពហុធា

$P_k(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា x^5+1 ជានិច្ច ។

លំហាត់ទី៨២

គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់
$a < b < c \, , a + b + c = 6$
និង $ab + bc + ca = 9$ ។

ចូរបង្ហាញថា $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$?

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$

តាង $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$

$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

$$= x^3 - 6x^2 + 9x - p$$

ដែល $p = abc$ ។

គេមាន $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

បើ $f'(x) = 0$ មានឫស $x_1 = 1 \, , x_2 = 3$ ។

នោះគេទាញ $f(1) > 0$ និង $f(3) < 3$ ហើយ
$a < 1 < b < 3 < c$

ដោយ $f(1) = 4 - p > 0$ និង $f(3) = -p < 0$ គេទាញ
$0 < p < 4$

ម្យ៉ាងទៀត f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតចំពោះ $x>3$
ហើយមាន $f(4)=4-p=f(1)>0$ នោះគេទាញបាន $c<4$
ដូចនេះ $0<a<1<b<3<c<4$ ។

ជំពូកទី៤

កម្រងលំហាត់អនុវត្តន៍

១-គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^5+ax^3-7x+6$

ដែល a ជាចំនួនពិត ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ ។

២-គេមានពហុធា $P(x)=x^n-6x^{n-1}+7x^3+5x-2$

ដែល $n\in N$ ។

កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ ។

៣-គេមានពហុធា $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

គេដឹងថា $P(2)=4$, $P(4)=16$, $P(8)=64$ និង $P(10)=4$

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ a,b,c,d ។

៤-គេមានពហុធា $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

គេដឹងថា $P(1)=20$, $P(2)=40$ និង $P(3)=60$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $P(-6)+P(10)$ ។

៥-គេមានពហុធា $P(x)$ មានដឺក្រេទីប្រាំ ។

គេដឹងថា $(x^2+1)|P(x)$ និង $(x^3+1)|P(x)$ ។

រក $P(x)$ បើ $P(1)=8$ ។

៦-គេឲ្យ $P(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$ និង $a,b,c\in IR$

កំណត់ a,b,c ដោយដឹងថា $a+b+c=4$ ហើយពហុធា

$P^2(x)+2P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x(x+1)(x+2)(x+3)$ ។

៧-កំណត់ពហុធា $P(x)$ មួយមានដឺក្រេទីប្រាំដោយដឹងថា ៖

$P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+2)^3$ និង $P(x)-2$ ចែកដាច់

នឹង $(x-2)^3$ ។

៨-គេមានពហុធា $P(x)=(2x^2-7x+4)^5$

ក/រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង $x-2$

ខ/ឧបមាថា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{10}x^{10}$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{10}$ ។

៩-រកសំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា $P(x)=(x+1)^n\ ,\ n\geq 2$

នឹងពហុធា $Q(x)=x^2+1$ ។

១០-គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^4+ax^2+b$ ដែល $a,b\in IR$ ។

កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-2x+4

១១-គេឲ្យពហុធា $P(x)=ax^5+bx^3+1$ ដែល $a,b\in IR$ ។

កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-x-1

១២-គេឲ្យ $P(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ និង a,b,c ថេរ ។

គេតាង $u_k=(-1)^{\frac{(k-1)k}{2}}[P(k+1)-P(k)]$ ។

ចូរស្រាយថា $u_1+u_3+u_5+u_7=0$ ។

១៣-គេឲ្យពហុធា $P(x)=1+x+x^2+x^3+....+x^{2^{n-1}}$ ។

ចូរស្រាយថា $P(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^{n-1}})$

១៤-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទី n ដែល $P(k)=2^k$

ចំពោះតម្លៃ $k=0\ ,1\ ,2,3\ ,....,n$ ។

ចូរគណនា $P(n+1)$?

១៥-គេឲ្យពហុធា ៖

$$P(x)=x(x-2)(x-4)(x-6)+(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

ចូរស្រាយថាពហុធានេះមានឫសបួនសុទ្ធតែជាចំនួនពិត

១៦-គេឲ្យពហុធា P មួយមានមេគុណជាចំនួនពិតដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $P(\cos x)=P(\sin x)$ ចំពោះគ្រប់ x ។

ចូរស្រាយថាមានពហុធា Q មួយដោយដឹងថា

$P(x)=Q(x^4-x^2)$ ចំពោះគ្រប់ x ។

១៧-បង្ហាញថាប្រសិនបើពហុធា

$Q(x)=ax^2+(c-b)x+(e-d)$ មាន

ឫសទាំងអស់ជាចំនួនពិតធំជាង 1 នោះពហុធា ៖

$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ មានយ៉ាងតិចឫសមួយ

ជាចំនួនពិត (ដែល $a,b,c,d,e\in IR$)។

១៨-ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌលើលេខមេគុណដើម្បីឲ្យ
x^3+px+q ចែកដាច់ នឹង x^2+mx-1 ។

១៩-ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌលើលេខមេគុណដើម្បីឲ្យ
x^4+px^2+q ចែកដាច់នឹង x^2+mx+1 ។

២០-កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ ax^4+bx^3+1 ចែកដាច់នឹង
$(x-1)^2$ ។

២១-កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $ax^{n+1}+bx^n+1$ ចែកដាច់នឹង
$(x-1)^2$ ។

២២-បើ m,n,p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះចូរស្រាយថា៖
$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ ចែកដាច់នឹង x^2+x+1 ។

២៣-កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដើម្បីឲ្យ $(x+1)^m-x^m-1$
ចែកដាច់នឹង x^2+x+1 ។

២៤-គេតាង α,β,γ ជាឫសនៃពហុធា
$P(x)=x^3+x^2+2x+4$

រក $S=\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}+\dfrac{1}{\gamma^3}$

និង $T=\dfrac{1}{(1+\alpha)^3}+\dfrac{1}{(1+\beta)^3}+\dfrac{1}{(1+\gamma)^3}$

២៥-គេតាង α,β,γ និង δ ជាឫសនៃពហុធា

$P(x)=x^4-x^3+x+4$

ចូរគណនា $S=\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}+\frac{1}{\delta^3}$

និង $T=\frac{1}{(1-\alpha)^3}+\frac{1}{(1-\beta)^3}+\frac{1}{(1-\gamma)^3}+\frac{1}{(1-\delta)^3}$

២៦-ឫសនៃសមីការ $x^4-x^3-x^2-1=0$ គឺ a,b,c និង d ។ ចូរគណនា $p(a)+p(b)+P(c)+p(d)$ ដោយដឹងថា ៖ $P(x)=x^6-x^5-x^3-x^2-x$ ។

២៧-គេឲ្យសមីការ $x^2-3x+1=0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2 ។ ចូរគណនាតម្លៃ $S=(x_1{}^5+21)(x_2{}^6+55)+144x_1{}^5+55x_2{}^6$ ។

២៨-គេឲ្យសមីការ $x^2-x-3=0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2 ។ចូរគណនាតម្លៃ $A=\frac{1}{2x_1^5+1}+\frac{2}{19x_2^3-7}$ ។

២៩-គេឲ្យសមីការ $x^2-2x-1=0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2 ។ ចូរគណនាតម្លៃ $P=(x_1{}^3+3)(x_2{}^7+x_2+100)$

៣០-គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$ ដែល $n>1$ ។ ចូរបង្ហាញថា $f(x)$ មិនអាចដាក់ជាផលគុណនៃពីរពហុធាមិនថេរដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។

៣១-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទី $3n$ ហើយគេដឹងថា ៖

$P(0)=P(3)=...=P(3n)=2$,

$P(1)=P(4)=...=P(3n-2)=1$

និង $P(2)=P(5)=...=P(3n-1)=0$ ។

សន្មតថា $P(3n+1)=730$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ n ។

៣២-គេឲ្យពហុធា $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-9$ ដែល a,b,c,d ជាចំនួនគត់ខុសគ្នា។ បើ $P(x)$ មានឬស ជាចំនួនគត់នោះបង្ហាញថាផលបូក $a+b+c+d$ ចែកដាច់នឹង 4 ។

៣៣-គេឲ្យពហុធា $P(x)=(x^2+x+1)^n$ ដែល $n\in IN$

ក/ចូរស្រាយថា $P(x^2)=P(x).P(x-1)$

ខ/ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2+1 ។

គ/គេឧបមាថា

$$P(x)=\sum_{k=0}^{2n}a_kx^k=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$$

ចូរគណនា $S_n=a_0+a_2+a_4+....+a_{2n}$

និង $T_n=a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n

៣៤-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែល $P(0)=0$ និង $P(k)=1$ ចំពោះ $k=1,2,3,....,n$ ។ ចូរកំណត់រក $P(x)$

៣៥-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីប្រាំដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P(k)=k$ ចំពោះ $k=0,1,2,3,4$ និង $P(5)=245$ ។

ចូរកំណត់ **P(x)** ។

៣៦-គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^3+mx^2-(3m+13)x-(5m+3)$ ដែល $m\in\Re$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យផលបូកការេនៃឬសទាំងបីរបស់ពហុធា $P(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមា រួចដាក់ $P(x)$ ជាផលគុណកត្តាចំពោះតម្លៃ m ដែលបានរកឃើញ ។

៣៧-គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^2-x-3$ មានឬសពីរតាងដោយ α និង β ។ គណនាតម្លៃ $N=217\alpha^5+19\beta^8$ ។

៣៨-គេឲ្យពហុធា $P(x)=ax^7+bx^4+1$ ដែល $a,b\in\Re$ ។ កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $Q(x)=x^2-x-1$ ។

៣៩-គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^5-3x^3+2x^2+4x-1$ មានឬសប្រាំខុសគ្នាតាងដោយ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 ។ យក $Q(x)=x^2-3$ ចូរគណនាតម្លៃ $M=\prod_{i=1}^{5}Q(x_i)$ ។

៤០-តាង a និង b ជាឬសសមីការ $x^2-x-1=0$ ។ គណនា $S=3a^8+2b^7+13a^3+21b^4$ ។

ឯកសារយោង

1. A Few Elementary Properties of Polynomials.

   (Adeel Khan , June 21, 2006)

2. Polynomials

   (Yufei Zhao July 2, 2008)

3. Some Polynomial Theorems

   (By John Kennedy)

4. Problems in Higher Algebra

   (D. K. Faddeev, I. S. Sominskii)

5. Polynomial Equations

   (Dušan Djukić)

6. Polynomials in One Variable

   (Dušan Djukić)