វិញ្ញាសាជ្រើសរើសពិសេស

គណិតវិទ្យា

ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅប្រទេសនានា

ជប៉ុន-ចិន-រុស្សី-វៀតណាម-សិង្ហបុរី

រៀបរៀងដោយ

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី

លោក លឹម ឆុន

លោក អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក អ៊ឹង សំណាង និង លឹម ផល្គុន

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !

សៀវភៅ **គណិតវិទ្យាអាហារូបករណ៍** *ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមាន បំណងចង់ត្រៀមប្រឡងទៅបន្តការសិក្សានៅបរទេស។*

នៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសលំហាត់ល្អៗ មកធ្វើដំណោះស្រាយ ជាគំរូ ដែលអាចឲ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់ និង ឆាប់ចងចាំ ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវ គំនិតនិងវិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍ ចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ៣ កក្កដា ឆ្នាំ២០១៣

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 246

Email: lim_phalkun@ymail.com

Website: www.mathtoday.wordpress.com

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី០១

សម្រាប់រយៈពេល ១ម៉ោង៣០នាទី

(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ទៅវៀតណាម ១៥ ខែមិថុនាឆ្នាំ ២០១៣)

I-គេដាក់ឃ្លីក្រហម 5 និងឃ្លីខៀវ 15 ចូលក្នុងថង់មួយ ។ ឃ្លីបីត្រូវយកចេញដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាប ៖

ក)ឃ្លីទាំងបីសុទ្ធតែពណ៌ក្រហម

ខ)ឃ្លីពីរគត់ពណ៌ក្រហម

គ)យ៉ាងតិចឃ្លីពីរពណ៌ក្រហម

ឃ)យ៉ាងតិចឃ្លីមួយពណ៌ខៀវ ។

II-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $9y''+y=0$ **(1)**

ក)រកចម្លើយនៃសមីការ (1)

ខ)កំណត់អនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយនៃសមីការ (1) ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(0)=0$ និង $f'(0)=3$ ។

គ)កំណត់អនុគមន៍ g ជាចម្លើយនៃសមីការ (1) ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x).dx = 0$ និង $\int_0^{\pi} g(x).dx = 3$ ។

III-គេឲ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ 0 និង $f(0)=0$ ។ គណនា

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x)+f\left(\frac{x}{2}\right)+\dots+f\left(\frac{x}{k}\right)\right];k\in\mathbb{N}$$

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{(1+x)^{\alpha}}{1+x^{\alpha}}\ ,\alpha\ge 1\ ,\ x\in[0,1]$ ។

ក)រកចំណុចបរមានៃអនុគមន៍ f ។

ខ)ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}\le\left(|x|+|y|\right)^{\alpha}\le 2^{\alpha-2}\left(|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}\right)$$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-រកប្រូបាប៖

ក)ឃ្លីទាំងបីសុទ្ធតែពណ៌ក្រហម

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកឃ្លីបីពីថង់បានឃ្លីទាំងបីសុទ្ធតែពណ៌ក្រហម ។

គេបាន $P(A)=\dfrac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

ដោយ $n(S)=C_{20}^{3}=\dfrac{20!}{3!.17!}=\dfrac{18\times 19\times 20}{6}=1140$

និង $n(A)=C_{5}^{3}=\dfrac{5!}{3!.2!}=\dfrac{120}{12}=10$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{10}{1140}=\dfrac{1}{114}$ ។

ខ)ឃ្លីពីរគត់ពណ៌ក្រហម

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកឃ្លីបីពីថង់បានឃ្លីពីរគត់ពណ៌ក្រហម ។

គេបាន $P(B)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(B)}{n(S)}$

ដោយ $n(B)=C_5^2\times C_{15}^1=\frac{5!}{2!.3!}\times15=150$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{150}{1140}=\frac{5}{38}$ ។

គ)យ៉ាងតិចឃ្លីពីរពណ៌ក្រហម

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកឃ្លីបីពីថង់បានយ៉ាងតិចឃ្លីពីរពណ៌ក្រហមនោះ $C=A\cup B$ ។

គេបាន $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$$=\frac{1}{114}+\frac{5}{38}=\frac{16}{114}=\frac{8}{57}$$

ដូចនេះ $P(C)=\frac{8}{57}$ ។

ឃ)យ៉ាងតិចឃ្លីមួយពណ៌ខៀវ

តាង D ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកឃ្លីបីពីថង់បានយ៉ាងតិចឃ្លីមួយពណ៌ខៀវ នោះ D និង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរផ្ទុយគ្នា ។

គេបាន $P(D)=1-P(A)=1-\frac{1}{114}=\frac{113}{114}$ ។

II-ក)រកចម្លើយនៃសមីការ (1)

$9y''+y=0\quad(1)$

មានសមីការសម្គាល់ $9r^2+1=0$ មានឫស $r=\pm\frac{1}{3}i$

គេបានចម្លើយនៃសមីការ(1)គឺ $y=A\cos\frac{x}{3}+B\sin\frac{x}{3},\ A,B\in\Re$ ។

ខ)កំណត់អនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយនៃសមីការ (1) ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(0)=0$ និង $f'(0)=3$ ៖

គេមាន $f(x)=A\cos\frac{x}{3}+B\sin\frac{x}{3}$ នោះ $f(0)=A=0$

ហើយ $f'(x)=-\frac{A}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{B}{3}\cos\frac{x}{3}$ នោះ $f'(0)=\frac{B}{3}=3$

គេទាញ $B=9$ ។

ដូចនេះ $f(x)=9\sin\frac{x}{3}$ ។

គ)កំណត់អនុគមន៍ g ជាចម្លើយនៃសមីការ (1) ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x).dx=0$ និង $\int_0^{\pi} g(x).dx=3$

គេមាន $g(x)=A\cos\frac{x}{3}+B\sin\frac{x}{3}$

គេបាន $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[A\cos\frac{x}{3}+B\sin\frac{x}{3}\right].dx=0$

$$\left[3A\sin\frac{x}{3}-3B\cos\frac{x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

$(\frac{3}{2}A-\frac{3\sqrt{3}}{2}B)-(-3B)=0$ ឬ $A-(\sqrt{3}-2)B=0\ (a)$

ម្យ៉ាងទៀត $\int_0^{\pi} g(x).dx=\int_0^{\pi}\left[A\cos\frac{x}{3}+B\sin\frac{x}{3}\right].dx=3$

$$\left[3A\sin\frac{x}{3}-3B\cos\frac{x}{3}\right]_0^{\pi}=3$$

$(\frac{3\sqrt{3}}{2}A-\frac{3}{2}B)-(-3B)=3$ ឬ $\sqrt{3}A+B=2$ (b)

តាម (a) និង (b) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} A-(\sqrt{3}-2)B=0 \\ \sqrt{3}A+B=2 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $A=-1$, $B=2+\sqrt{3}$

ដូចនេះ $g(x)=-\cos\frac{x}{3}+(2+\sqrt{3})\sin\frac{x}{3}$ ។

III-គណនា

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x)+f(\frac{x}{2})+...+f(\frac{x}{k})\right];k\in\mathbb{N}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{p=1}^{k}f\left(\frac{x}{p}\right) \text{ ដោយ } f(0)=0$$

$$=\lim_{x\to 0}\sum_{p=1}^{k}\frac{f(\frac{x}{p})-f(0)}{x}$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{x}{p})-f(0)}{x}$$

ដោយ $\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{x}{p})-f(0)}{x}=\frac{1}{p}\times f'(0)$

ដូច្នេះ $L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x)+f(\frac{x}{2})+...+f(\frac{x}{k})\right]=f'(0)\times\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}$ ។

IV-ក)រកចំណុចបរមានៃអនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=\dfrac{(1+x)^{\alpha}}{1+x^{\alpha}}$,$\alpha\geq 1$, $x\in[0,1]$

គេបាន $\ln f(x)=\ln\left[\dfrac{(1+x)^{\alpha}}{1+x^{\alpha}}\right]=\alpha\ln(1+x)-\ln(1+x^{\alpha})$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការគេបាន ៖

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{\alpha}{1+x}-\dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}}=\dfrac{\alpha(1-x^{\alpha-1})}{(1+x)(1+x^{\alpha})}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{(1+x)^{\alpha}}{1+x^{\alpha}}$

គេទាញបាន $f'(x)=\dfrac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}(1-x^{\alpha-1})}{(1+x^{\alpha})^2}$

ចំពោះ $x\in[0,1]$ នោះ $f'(x)\geq 0$ នាំឲ្យ f កើនលើចន្លោះ $[0,1]$

ដូចនេះអនុគមន៍ f មានចំណុចអប្បបរមាត្រង់ $x=0$ និងមាន
ចំណុចអតិបរមាត្រង់ $x=1$ ។

ខ)ស្រាយថា $|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}\leq(|x|+|y|)^{\alpha}\leq 2^{\alpha-2}\left(|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}\right)$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $x\in[0,1]$ គេមាន ៖

$f(0)\leq f(x)\leq f(1)$ ឬ $1\leq\dfrac{(1+x)^{\alpha}}{1+x^{\alpha}}\leq 2^{\alpha-1}$ (*)

-ចំពោះ $y=0$ នោះវិសមភាពខាងលើពិត ។

-ចំពោះ $y\neq 0$ នោះគេជំនួស x ដោយ $\dfrac{|x|}{|y|}$ ក្នុង (*) គេបាន ៖

$$1\leq\frac{(|x|+|y|)^{\alpha}}{|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}}\leq 2^{\alpha-1}$$

សមមូល $|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}\leq(|x|+|y|)^{\alpha}\leq 2^{\alpha-2}\left(|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}\right)$ ពិត ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី០២

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

៙៙៙☆៚៚៚

I-គេមានស៊ីតនព្វន្ត **51,47,43,39,....**

ចូរគណនាផលបូក **n** តួដំបូង S_n នៃស៊ីតនេះ ។

កំណត់ **n** ដើម្បីឲ្យ S_n មានតម្លៃអតិបរមា រួចកំណត់តម្លៃនោះ

II-ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,2,3)$ និងប្លង់ $(\alpha): x+2y-2z-8=0$ ។

ក-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) គូសចេញពីចំណុច A ហើយកែងនឹងប្លង់ (β) ត្រង់ចំណុច H ។

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹងប្លង់ (α) ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) កាត់តាមចំណុច A' ហើយស្របនឹងប្លង់ (α) ខាងលើ ។

III-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} x^2+px+q & \text{បើ } x\le 1 \\ 3x+4 & \text{បើ } x>1 \end{cases}$

កំណត់ពីរចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ f មានដេរីវេត្រង់ $x=1$

IV-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 x^n e^{-2x}.dx \;\; ; n\in IN$

ក/សិក្សាអថេរភាពនៃ (I_n) រួចរកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+1}

ខ/ស្រាយថា $\forall n\ge 2:\ 0\le I_n\le \frac{1}{(n-1)e^2}$ ។ ទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

ដំណោះស្រាយ

I-ក/គណនាផលបូក n តួដំបូង S_n នៃស្វ៊ីត៖

ដោយ $a_1=51\,,\,a_2=47$ នោះ $d=a_2-a_1=47-51=-4$

ហើយ $a_n=a_1+(n-1)d=51+(n-1)(-4)=-4n+55$

គេបាន $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(51-4n+55)}{2}=n(53-2n)$

គេអាចសរសេរ $S_n=53n-2n^2=\frac{2809}{8}-2(n-\frac{53}{4})^2$

ដើម្បីឲ្យ S_n មានតម្លៃធំបំផុតលុះត្រាតែ $(n-\frac{53}{2})^2$ មានតម្លៃតូច

បំផុតដោយ $n\in IN$ និង $(n-\frac{53}{4})^2=(n-13-\frac{1}{4})^2$ នោះគេត្រូវ

ឲ្យ $n=13$ ។

ដូចនេះ $n=13$ និង $S_{13}=\frac{2809}{8}-\frac{1}{8}=351$ ។

II-ក-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) ៖

ប្លង់ $(\alpha): x+2y-2z-8=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(1,2,-2)$

ដោយបន្ទាត់ $(\Delta)\perp(\alpha)$ នោះ $\vec{n}=(1,2,-2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ

(Δ)ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម $A(1,2,3)$ សរសេរ ៖

$$(\Delta):\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 3-2t \quad ; t\in IR \end{cases}$$

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹងប្លង់ (α) ៖

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុង (α) គេបាន ៖

$$(1+t)+2(2+2t)-2(3-2t)-8=0$$

$$1+t+4+4t-6+4t-8=0$$

$$9t-9=0$$

គេទាញបាន $t=\frac{9}{9}=1$ យកជួសក្នុងសមីការ (Δ) គេបាន $H(2,4,1)$ ។

ហើយដោយចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹងប្លង់ (α) នោះ ចំណុច H ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ A និង A' ។

គេបាន $x_{A'}=2x_H-x_A=4-1=3$, $y_{A'}=2y_H-y_A=8-2=6$ និង $z_{A'}=2z_H-z_A=2-3=-1$ ។ដូចនេះ $A'(3,6,-1)$ ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) ៖

ដោយ $(\beta)//(\alpha)$ នោះ $\vec{n}=(1\,,2\,,-2)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ (β) ។ ដោយ (β)កាត់តាមចំណុច $A'(3,6,-1)$ នោះគេបាន

$$(\beta): 1.(x-3)-2(y-6)+2(z+1)=0$$
$$(\beta): x-3-2y+12+2z+2=0$$
$$(\beta): x-2y+2z+11=0$$

ដូចនេះ $(\beta): x-2y+2z+11=0$ ។

III-កំណត់ពីរចំនួនពិត p និងq ដើម្បីឲ្យ f មានដេរីវេត្រង់ $x=1$

គេត្រូវឲ្យ f ជាប់ត្រង់ $x=1$ គឺ $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)$

គេបាន $\lim_{x\to1^-}(x^2+px+q)=\lim_{x\to1^+}(3x+4)$

$$1+p+q=7 \text{ ឬ } q=6-p \quad (1)$$

និងគេត្រូវឲ្យ $f'_-(1)=f'_+(1)$ ។

គេមាន $f'_-(1)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to0^-}\frac{(1+h)^2+p(1+h)+q-(1+p+q)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0^-}\frac{1+2h+h^2+p+ph+q-1-p-q}{h}$$
$$=\lim_{h\to0^-}\frac{h^2+(2+p)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0^-}(h+2+p)=2+p$$

ហើយ $f'_+(1)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{3(h+1)+4-(3+4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{3h}{h} = 3$$

ហេតុនេះ $2+p=3$ នោះ $p=1$

ហើយតាម(1) គេបាន $q=6-1=5$ ។

ដូចនេះ $p=1$, $q=5$ ។

IV-ក/សិក្សាអថេរភាពនៃ (I_n) រួចរកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+1}

ចំពោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ និង $n\in IN$ គេមាន $x^{n+1}\le x^n$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង e^{-2x} គេបាន $x^{n+1}e^{-2x}\le x^n e^{-2x}$

នាំឲ្យ $\int_0^1 x^{n+1}e^{-2x}.dx \le \int_0^1 x^n e^{-2x}.dx$ ឬ $I_{n+1}\le I_n$ ។

ដូចនេះ I_n ជាស្វីតចុះ ។

ម្យ៉ាងទៀត $I_n=\int_0^1 x^n e^{-2x}.dx$; $n\in IN$ នាំឲ្យ

$$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-2x}.dx$$

តាង $\begin{cases} u=x^{n+1} \\ dv=e^{-2x}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(n+1)x^n.dx \\ v=-\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

គេបាន $I_{n+1}=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}x^{n+1}\right]_0^1+\frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{-2x}.dx$

ដូច្នេះ $I_{n+1}=-\frac{1}{2e^2}+\frac{n+1}{2}I_n$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

ខ/ស្រាយថា $\forall n\geq 2:\ 0\leq I_n\leq\frac{1}{(n-1)e^2}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$

គេមាន (I_n) ជាស្វីតចុះនោះគេបាន $I_{n+1}\leq I_n$ តែ

$$I_{n+1}=-\frac{1}{2e^2}+\frac{n+1}{2}I_n$$

គេបាន $-\frac{1}{2e^2}+\frac{n+1}{2}I_n\leq I_n$ នាំឲ្យ $I_n\leq\frac{1}{(n-1)e^2}$ (1)

ហើយ $\forall x\in[0,1]:x^ne^{-2x}\geq 0$ នាំឲ្យ $I_n=\int_0^1 x^ne^{-2x}.dx\geq 0$ (2) ។

តាម(1)និង(2) $\forall n\geq 2:\ 0\leq I_n\leq\frac{1}{(n-1)e^2}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី០៣

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

❧❧❧☆❧❧❧

I-គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=\sin x$ ។

II-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$u_n=\frac{6^n}{(2^n+3^n)(2^{n+1}+3^{n+1})}$$ ដែល $n=0;1\,;\,2\,;\,3\,;\,....$

ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $u_n=\dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}}-\dfrac{3^n}{2^n+3^n}$

ខ. គណនាផលបូក $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(u_k)=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n\to+\infty$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.dx\,,\,n\in IN$

1/រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2} ។

2/ទាញរក I_{2p} និង I_{2p+1} ដែល $p\in IN$ ។

IV-គេឲ្យប្លង់ $(\alpha):2x-2y+z-1=0$ និងស្វ៊ែ (S)មានសមីការ

$(S):x^2+y^2+z^2+2x-8y-4z+12=0$ ។

ក-បង្ហាញថាប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A មួយ ។

ខ-កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ។

គ-កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់(α) ត្រង់ចំណុច A

ឃ-ក្រៅពីចំណុច A បន្ទាត់(Δ) ប្រសព្វស្វ៊ែ (S)ត្រង់ចំណុច B មួយទៀត ។

ចូរកំណត់កូអរដោនេចំណុច B រួចកំណត់សមីការនៃប្លង់ (β) ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ B ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = \sin x$

គេបាន $y' = (\sin x)' = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

$$y'' = (\sin(\frac{\pi}{2} + x))' = \cos(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\pi + x)$$

$$y''' = (\sin(\pi + x))' = \cos(\pi + x) = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$$

ឧបមាថា $y^{(n)} = \sin(\frac{n\pi}{2} + x)$ ពិត

យើងបាន

$$y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = \cos(\frac{n\pi}{2} + x) = \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2} + x\right)$$ ពិត

ដូចនេះ $y^{(n)} = \sin(\frac{n\pi}{2} + x)$ ។

II-ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}} - \frac{3^n}{2^n+3^n}$

គេបាន $u_n = \frac{3^{n+1}(2^n+3^n)-3^n(2^{n+1}+3^{n+1})}{(2^n+3^n)(2^{n+1}+3^{n+1})}$

$$= \frac{3.6^n+3^{2n+1}-2.6^n-3^{2n+1}}{(2^n+3^n)(2^{n+1}+3^{n+1})}$$

$$= \frac{6^n}{(2^n+3^n)(2^{n+1}+3^{n+1})}$$ ពិត

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$

គេមាន $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}} - \frac{3^n}{2^n+3^n}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3^{k+1}}{2^{k+1}+3^{k+1}} - \frac{3^k}{2^k+3^k}\right)$

$$= \left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{9}{13}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{27}{35}-\frac{9}{13}\right)+\left(\frac{81}{97}-\frac{27}{35}\right)+$$

$$\dots\dots+\left(\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}}-\frac{3^n}{2^n+3^n}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}} = \frac{-2^{n+1}-3^{n+1}+2.3^{n+1}}{2(2^{n+1}+3^{n+1})}$$

$$= \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{2(3^{n+1}+2^{n+1})}$$

ដូចនេះ៖ $S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^{n+1}+2^{n+1}}$ ហើយ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$ ។

III-1/រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2} ៖

មាន $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x.\cos x.dx$, $n\in IN$

តាង $\begin{cases}u=\cos^{n-1}x\\ dv=\cos x.dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-(n-1)\sin x\cos^{n-2}x.dx\\ v=\sin x\end{cases}$

$$I_n=\left[\cos^{n-1}x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{n-2}x.dx$$

$$I_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x.dx$$

$$I_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x.dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.dx$$

$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}.I_{n-2}$$

ដូចនេះ $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$,

2/ទាញរក I_{2p} និង I_{2p+1} ដែល $p\in IN$ ៖

គេមាន $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ នោះ $\dfrac{I_n}{I_{n-2}}=\dfrac{n-1}{n}$

-បើ $n=2k$ នោះ $\dfrac{I_{2k}}{I_{2k-2}}=\dfrac{2k}{2k-1}$

គេបាន $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$

$$\frac{I_2}{I_0}\cdot\frac{I_4}{I_2}\cdot\frac{I_6}{I_4}\cdots\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\frac{1\times3\times5\times....\times(2p-1)}{2\times4\times6\times.......\times2p}$$

$$I_{2p}=\frac{1\times3\times5\times....\times(2p-1)}{2\times4\times6\times......\times2p}\times I_0$$

តែ $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ ដូចនេះ $I_{2p}=\frac{1\times3\times5\times....\times(2p-1)}{2\times4\times6\times......\times2p}\times\frac{\pi}{2}$

-បើ $n=2k+1$ នោះ $\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}}=\frac{2k}{2k+1}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{p}\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$

$$\frac{I_3}{I_1}\cdot\frac{I_5}{I_3}\cdot\frac{I_7}{I_5}\cdots\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}}=\frac{2\times4\times6\times....\times2p}{3\times5\times7\times.......\times2p+1}$$

$$I_{2p+1}=\frac{2\times4\times6\times....\times(2p)}{3\times5\times7\times......\times2p+1}\times I_1$$

តែ $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

ដូចនេះ $I_{2p+1}=\frac{2\times4\times6\times....\times(2p)}{3\times5\times7\times......\times2p+1}$ ។

IV-ក-បង្ហាញថាប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A មួយ ៖

សមីការស្វ៊ែ (S) អាចសរសេរជាទម្រង់ស្តង់ដាដូចខាងក្រោម ៖

$(S):(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9$ នោះគេទាញបាន $I(-1,4,2)$

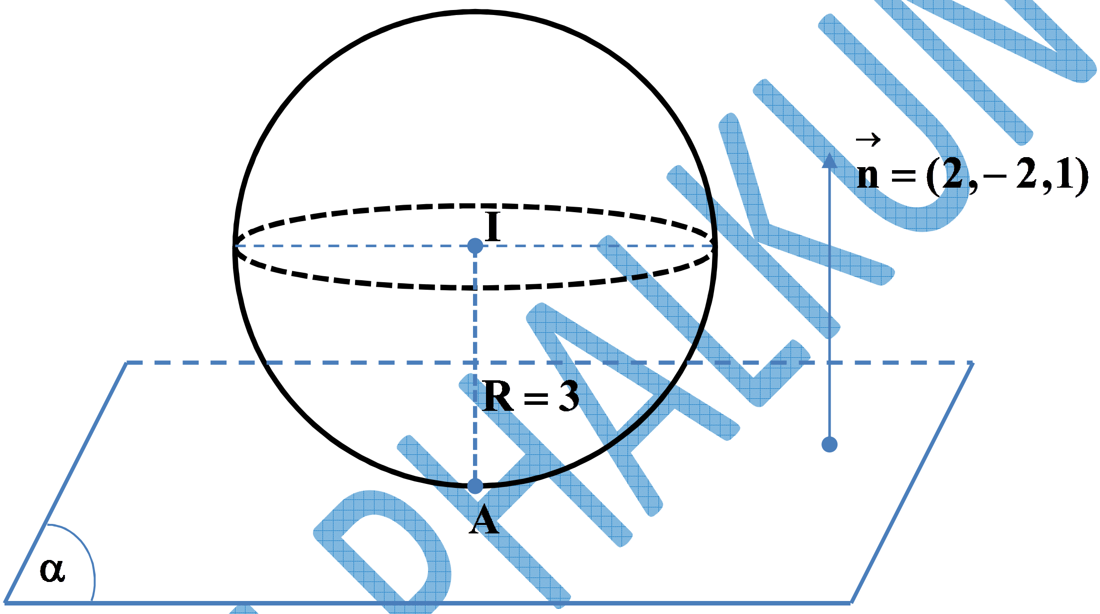
ជាផ្ចិត និង $R=3$ ជារង្វាស់កាំរបស់ស្វ៊ែ ។

ចម្ងាយពីចំណុច I ទៅប្លង់ (α) កំណត់ដោយ ៖

$$d(I,\alpha)=\frac{|2x_I-2y_I+z_I-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|-2-8+2-1|}{3}=3$$

ដោយ $d(I,\alpha)=R=3$ នោះប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុចមួយ

ខ-កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ៖



តាង $A(x_A,y_A,z_A)$ ជាចំណុចប៉ះដែលត្រូវរក ។

គេមាន $A\in(\alpha)$ នោះ $2x_A-2y_A+z_A-1=0$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{IA}//\vec{n}$ នោះ $\overrightarrow{IA}=t.\vec{n}$

ដោយ $\overrightarrow{IA}=(x_A+1,y_A-4,z_A-2)$ និង $\vec{n}=(2,-2,1)$

គេបាន $\begin{cases}x_A+1=2t\\ y_A-4=-2t\\ z_A-2=t\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_A=2t-1\\ y_A=-2t+4\\ z_A=t+2\end{cases}$ (2)

យកសមីការ (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$2(2t-1)-2(-2t+4)+(t+2)-1=0$$

$$4t-2+4t-8+t+2-1=0$$

$$9t-9=0$$

គេទាញបាន $t=1$ យកជំនួសក្នុង(2)គេបាន $x_A=1, y_A=2, z_A=3$

ដូចនេះ $A(1,2,3)$ ។

គ-កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់(α) ត្រង់ចំណុច A ៖

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(Δ)ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(α)

នោះគេបាន $\vec{u}=\vec{n}=(2,-2,1)$ ហើយដោយ $A\in(\Delta)$ នោះ

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ (Δ) អាចសរសេរ ៖

$$(\Delta):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3+t \ , \ t\in IR \end{cases} \text{ ។}$$

ឃ-កំណត់កូអរដោនេចំណុច B ៖

តាង $B(x_B,y_B,z_B)$ ។ ដោយ $B\in(\Delta)$ នោះ $\begin{cases} x_B=1+2t \\ y_B=2-2t \\ z_B=3+t \end{cases}$ (3)

យក (3) ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែរនៃ (S) គេបាន ៖

$$(1+2t+1)^2+(2-2t-4)^2+(3+t-2)^2=9$$

$$(2t+2)^2+(-2t-2)^2+(t+1)^2=9$$

$$4(t+1)^2+4(t+1)^2+(t+1)^2=9$$

$$9(t+1)^2=9$$

គេទាញបាន $t_1 = 0$, $t_2 = -2$ ។

-ចំពោះ $t = 0$ នោះតាម(3)គេបាន $x = 1, y = 2, z = 3$ជាចំណុច A

-ចំពោះ $t = -2$ នោះតាម(3)គេបាន $x = -3, y = 6, z = 1$ ។

ដូចនេះ $B(-3,6,1)$ ។

កំណត់សមីការនៃប្លង់ (β) ដែលប៉ះស្វ៊ែ (S) ត្រង់ B ៖

ប្លង់ (β) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (2,-2,1)$ ។

ដូចនេះ $(\beta): 2(x+3) - 2(y-6) + (z-1) = 0$

ឬ $(\beta): 2x - 2y + z + 17 = 0$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី០៨

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

ꕥꕥꕥ☆ꕥꕥꕥ

I-ទូកមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរពីចំណុចត្រួតពិនិត្យដែលខណៈ t នាទីក្រោយមកទូកនោះមានចម្ងាយពីចំណុចត្រួតពិនិត្យដែលតាងដោយអនុគមន៍ $S(t)=t^3+60t$ (គិតជាម៉ែត្រ)

ក/រកល្បឿនទូកត្រង់ចំណុចចាប់ផ្តើម ។

ខ/កំណត់ល្បឿននៃទូកនៅខណៈ $t=3$ នាទី ។

II-គេឲ្យស្វ៊ីត $a_k=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$

ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$

ក/រក I_0 រួចបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1} ។ គណនា I_n ។

ខ/ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n<\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$ ។

IV-គេឲ្យបន្ទាត់ $(d):\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}$ និងស្វ៊ែ (S) មានសមីការទូទៅ $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ ។

ក-កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត **I** និង កាំ **R** របស់ស្វ៊ែ **(S)** ។

ខ-តាង **A** ជាចំណោលកែងនៃ **I** លើបន្ទាត់ **(d)** ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច **A** ។គណនា **IA** រួចទាញថាបន្ទាត់**(d)**ប៉ះនឹងស្វ៊ែ**(S)** ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់**(d)** ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ**(S)** ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក/រកល្បឿនទូកត្រង់ចំណុចចាប់ផ្តើម ៖

គេបាន t គឺ $V'(t) = \frac{dS}{dt} = S'(t) = 3t^2 + 60$

បើ $t = 0$ នោះ $V'(0) = 3(0)^2 + 60 = 60m/mn$ ។

ខ/កំណត់ល្បឿននៃទូកនៅខណៈ $t = 3$ នាទី ៖

បើ $t = 3mn$ នោះ

$V'(3) = 3(3)^2 + 60 = 27 + 60 = 87m/mn$ ។

II-គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ។

គេមាន

$$a_k = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2}}{k(k+1)}$$

$$a_k = \frac{\sqrt{k^2(k+1)^2 + k^2 + 2k + 1 + k^2}}{k(k+1)}$$
$$= \frac{\sqrt{k^2(k+1)^2 + (2k^2 + 2k) + 1}}{k(k+1)}$$
$$= \frac{\sqrt{k^2(k+1)^2 + 2k(k+1) + 1}}{k(k+1)}$$
$$= \frac{\sqrt{\left(k(k+1)+1\right)^2}}{k(k+1)} = \frac{k(k+1)+1}{k(k+1)}$$
$$= 1 + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}(1) + \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$

$$= n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}$$

ដូចនេះ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{n(n+2)}{n+1}$ ។

III-ក/រក I_0 រួចបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1} ៖

បើ $n = 0$ នោះ $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}.dx$

តាង $\sqrt{1-x} = t$ នាំឲ្យ $x = 1 - t^2$ នោះ $dx = -t.dt$

បើ $x = 0$ នោះ $t = 1$ និង $x = 1$ នោះ $t = 0$

គេបាន $I_0 = \int_1^0 t.(-2tdt) = \int_0^1 2t^2.dx = \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

ដូចនេះ $I_0 = \frac{2}{3}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$

តាង $\begin{cases} u = x^n \\ dv = \sqrt{1-x}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}.dx \\ v = \int \sqrt{1-x}dx = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

$$I_n = \left[-\frac{2x^n}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}.dx - \frac{2n}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3}I_{n-1} - \frac{2n}{3}I_n$$

$$(1+\frac{2n}{3})I_n = \frac{2n}{3}I_{n-1}$$

ដូចនេះ $I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

គណនា I_n ៖

គេមាន $I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ នោះ $\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{2n}{2n+3}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{n}\frac{I_k}{I_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+3}$

ឬ $\frac{I_n}{I_0} = \frac{2\times4\times6\times....\times2n}{5\times7\times9\times...\times(2n+3)}$ ដោយ $I_0 = \frac{2}{3}$

ដូចនេះ $I_n = \frac{2\times4\times6\times....\times2n}{5\times7\times9\times...\times(2n+3)}\times\frac{2}{3}$ ។

ខ/ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n < \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$

គេមាន $I_n = \frac{2\times4\times6\times....\times2n}{5\times7\times9\times...\times(2n+3)}\times\frac{2}{3}$

$$= \frac{2\times4\times6\times....\times(2n+2)}{3\times5\times7\times....\times(2n+3)}\times\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k}{2k+1}$$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រចំពោះគ្រប់

$k\in IN$ គេមាន $(2k)+(2k+2)\geq 2\sqrt{(2k)(2k+2)}$

ឬ $2k+1\geq\sqrt{2k(2k+2)}$

គេទាញ $\frac{2k}{2k+1}\leq\frac{2k}{\sqrt{2k(2k+2)}} = \sqrt{\frac{k}{k+1}}$

គេបាន $I_n \leq \frac{1}{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\sqrt{\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

ដូចនេះ $I_n < \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$ ។

IV-ក-កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និង កាំ R របស់ស្វ៊ែ (S) ៖

សមីការ $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ អាចសរសេរ ៖

$(S): (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = 9$ ។

ដូចនេះកូអរដោនេនៃផ្ចិតស្វ៊ែគឺ $I(2,-1,1)$ និងកាំ $R=3$ ។

ខ- រកកូអរដោនេនៃចំណុច A ៖

តាង $A(x_A,y_A,z_A)$ ។

ដោយ $A\in(d)$ នោះកូអរដោនេ A ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (d) ។

គេបាន $\frac{x_A-3}{2}=\frac{y_A-3}{2}=\frac{z_A-2}{-1}=t$ នោះ $\begin{cases} x_A=3+2t \\ y_A=3+2t \quad (1) \\ z_A=2-t \end{cases}$

គេមាន $\overrightarrow{IA}=(1+2t\,,4+2t\,,1-t)$ ។

បន្ទាត់ (d) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(2,2,-1)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{IA}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}.\vec{u}=0$

គេបាន $2(1+2t)+2(4+2t)-(1-t)=0$

$$2+4t+8+4t-1+t=0$$

$$9t+9=0$$

គេទាញ $t=-1$ យកជំនួសក្នុង(1)គេបាន $x_A=1,y_A=1\,,z_A=3$ ។

ដូចនេះ $A(1,1,3)$ ។

គណនា IA រួចទាញថាបន្ទាត់(d)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ៖

គេបាន $IA=\sqrt{(1-2)^2+(1+1)^2+(3-1)^2}=3$ ។

ដោយ $IA=R=3$ ដូចនេះបន្ទាត់(d)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S)ត្រង់ A ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់(d) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ៖

តាង α ជាប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់ (d) នោះ $\vec{u}=(2,2,-1)$ ជាវ៉ិចទ័រ

នរម៉ាល់នៃប្លង់ α ។ សមីការប្លង់ α អាចសរសេរ $(\alpha): 2x+2y-z+d=0$ ។ ដោយប្លង់ α ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) នោះគេបាន

$$d(I,\alpha)=R=3$$

$$\frac{|4-2-1+d|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=3$$

$$|1+d|=9$$

គេទាញបាន $d_1=8$ ឬ $d_2=-10$ ។

ដូចនេះសមីការប្លង់ដែលត្រូវរកគឺ ៖ $(\alpha_1): 2x+2y-z+8=0$ និង $(\alpha_2): 2x+2y-z-10=0$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី០៥

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

ꕥꕥꕥ☆ꕥꕥꕥ

I-កំណត់រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n): 6, 11, 18, 27, 38, ...$ ។

II-ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលចូរគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\tan 46^o$?

III-គេឲ្យអនុគមន៍ f និង g កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin \pi x}{1-x} & \text{បើ } x\neq 1\\ \pi & \text{បើ } x=1\end{cases}$$ និង

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n \sin \pi x}{1-x} & \text{បើ } 0\leq x<1\\ \pi & \text{បើ } x=1\end{cases}$$

1/ស្រាយបញ្ជាក់ថា f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[0,1]$ ។

2/គណនា $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_{n-1}$ ដែល $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x.dx$

3/ស្រាយថា $S_n = \int_0^1 f(x).dx - \int_0^1 g(x).dx$ រួចទាញថា៖

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}.dx$$ ។

IV-គេឲ្យបន្ទាត់ $(d):\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{4}$ និងប្លង់ (α) មានសមីការ $(\alpha): x+2y+2z-10=0$ ។

ក-កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង (d) និងប្លង់ (α) ។

ខ-រកសមីការស្វ៊ែកាំ $R=3$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (α) ត្រង់ចំណុច A ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំណត់រកតួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n): 6, 11, 18, 27, 38, ...$

តាង (b_n) ជាផលសងលំដាប់1 នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែល (b_n) មានតួកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។

គេបាន $(b_n): 5, 7, 9, 11, ...$ នោះ (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួ $b_1 = 5$ និងផលសងរួម $d = 7-5 = 2$ ។

គេបាន $b_n = b_1 + (n-1)d = 5 + 2(n-1) = 2n+3$

ចំពោះ $n \ge 2$ គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 6 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)$

$$= 6 + \frac{(n-1)(5+2(n-1)+3)}{2}$$

$$= 6 + (n-1)(n+3)$$

$$= 6 + n^2 + 3n - n - 3$$

$$= n^2 + 2n + 3$$

ដូចនេះ $a_n = n^2 + 2n + 2$

II-គណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\tan 46^o$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \tan x$

យក $x = 45^o$ និង $\Delta x = 1^o$ នោះគេបាន ៖

$f(46^o) = f(45^o) + f'(45^o).\Delta x$

ដោយ $f'(x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

នោះ $f'(45^o) = 2$

គេបាន $f(46^o) = 1 + 2\times\frac{3.14}{180} = 1.035$ ។

ដូចនេះ $\tan 46^o = 1.035$ ។

III-1/ស្រាយបញ្ជាក់ថា f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[0,1]$

គេមាន $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin \pi(1-t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin \pi}{\pi t}\times\pi = \pi = f(1)$

ដូចគ្នាដែរ $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n \sin \pi x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1}[x^n f(x)] = \pi = g(1)$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

2/គណនា $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_{n-1}$ ដែល $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x.dx$

គេបាន

$$S_n = \int_0^1 (1 + x + x^2 + ... + x^{n-1})\sin \pi x.dx = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\sin \pi x.dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1-x}.dx - \int_0^1 \frac{x^n \sin \pi x}{1-x}.dx \text{ ។}$$

3/ស្រាយថា $S_n=\int_0^1 f(x).dx-\int_0^1 g(x).dx$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}.dx$

គេមាន $=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{1-x}.dx-\int_0^1\frac{x^n\sin\pi x}{1-x}.dx$ ។

ដោយ $f(x)=\frac{\sin\pi x}{1-x}$ និង $g(x)=\frac{x^n\sin\pi x}{1-x}$ កំណត់ជាប់លើ $[0,1]$ ។ដូចនេះ $S_n=\int_0^1 f(x).dx-\int_0^1 g(x).dx$ ។

ដោយ f និង g ជាអនុគមន៍កំណត់ និង ជាប់លើ $[0,1]$

នោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ មាន $M>0$ ដែល $|f(x)|<M$

ហើយនិង $|g(x)|=x^n|f(x)|<M.x^n$ ។

នាំឲ្យ $\left|\int_0^1 g(x).dx\right|\le\int_0^1|g(x)|dx<M.\int_0^1 x^n.dx=\frac{M}{n+1}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M}{n+1}=0$ នោះ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 g(x).dx=0$

គេទាញ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{1-x}.dx$ (1)

តាង $1-x=t$ ឬ $x=1-t\Rightarrow dx=-dt$

បើ $x=0$ នោះ $t=1$ និង $x=1$ នោះ $t=0$

គេបាន $\int_0^1\frac{\sin\pi x}{1-x}.dx=\int_1^0\frac{\sin\pi(1-t)}{t}(-dt)=\int_0^1\frac{\sin\pi t}{t}.dt$ (2)

តាង $x=\pi t\Rightarrow dx=\pi.dt$

បើ $t=0$ នោះ $x=0$ និង $t=1$ នោះ $t=\pi$

គេបាន $\int_0^1 \frac{\sin \pi t}{t}.dt=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}.dx$ (3)

តាម (1) , (2) និង (3) គេបាន $\lim_{n\to+\infty} S_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}.dx$ ពិត ។

IV-ក-កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង (d) និងប្លង់ (α)

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{4} & (d) \\ x+2y+2z-10=0 & (\alpha) \end{cases}$$

តាង $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{4}=t$ នោះ $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=-2t+3 \\ z=4t-1 \end{cases}$ (1)

យក (1) ជួសក្នុង (α) គេបាន ៖

$$(3t-1)+2(-2t+3)+2(4t-1)-10=0$$
$$3t-1-4t+6+8t-2-10=0$$
$$7t-7=0$$

គេទាញបាន $t=1$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $x=2, y=1, z=3$

ដូចនេះ $A(2,1,3)$ ។

ខ-រកសមីការស្វ៊ែកាំ $R=3$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (α) ត្រង់ចំណុច A ៖

តាង $I(a,b,c)$ ជាផ្ចិតរបស់របស់ស្វ៊ែ (S) ដែលត្រូវរក ។

សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែអាចសរសេរ ៖

$$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2=9$$

ដោយ (S) ប៉ះប្លង់ (α) ត្រង់ A នោះគេបាន $\overrightarrow{AI} // \vec{n}$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AI} = (a-2, b-1, c-3)$ និង $\vec{n} = (1,2,2)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(α) ។

ដោយ $\overrightarrow{AI} // \vec{n}$ នោះ $\overrightarrow{AI} = t.\vec{n}$

គេទាញ $\begin{cases} a-2=t \\ b-1=2t \\ c-3=2t \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=t+2 \\ b=2t+1 \\ c=2t+3 \end{cases}$ (2)

ហើយ $|\overrightarrow{AI}| = |t|.|\vec{n}|$ នោះ $|t| = \dfrac{|\overrightarrow{AI}|}{|\vec{n}|} = \dfrac{R}{|\vec{n}|} = \dfrac{3}{\sqrt{1+4+4}} = 1$

គេទាញ $t_1 = -1 ; t_2 = 1$ ។

-ចំពោះ $t=-1$ តាម (2) គេបាន $a=1, b=-1, c=1$

ដូចនេះ $(S_1) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$ ។

-ចំពោះ $t=1$ តាម(2)គេបាន $a=3, b=3, c=5$

ដូចនេះ $(S_2) : (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 9$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី០៦

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

ဢဢဢ☆ଓଓଓ

I-ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) ដោយស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1 = 1\,;\, a_{n+1} = 2a_n + 4n + 1$ ដែល $n = 1,2,3,4,\ldots$

II-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

ដែល $a,b,c \in IR$ ។

ក/គណនា $f(a)$ និង $f(b)$ រួចទាញថាសមីការ $f'(x)$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះចំនួន a និង b ។

ខ/ទាញបញ្ជាក់វិសមភាព $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ ។

III-គេឲ្យ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ ដែល n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។

1/រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+2} ។

2/ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $f(n) = (n+1)I_n.I_{n+1}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(n+1) = f(n)$ ។

3/គណនា $f(n)$ ។

IV-គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (d_1) និង (d_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា ៖

$(d_1): \frac{x-5}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ និង $(d_2): \frac{x-6}{-4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$

A ជាចំណុចមួយនៃ (d_1)មានអាប់ស៊ីស $x_A=1$ ហើយ B ជាចំណុចមួយនៃ (d_2) មានអាប់ស៊ីស $x_B=t$ ដែល $t\in IR$ ។

ក-ចូរស្រាយថា $AB=\frac{\sqrt{26(t-2)^2+144}}{4}$

ខ-កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឲ្យ (AB) មានតម្លៃអប្បបរមា ។

គ-ចំពោះតម្លៃ t ដែលបានរកឃើញខាងលើ ចូរបង្ហាញថា (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) រួចទាញរកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់(d_1) និង (d_2) ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n)

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $r_n=\alpha n+\beta$ ដែល α,β ថេរ

ជំនួសស្វ៊ីតជំនួយ r_n ក្នុងស្វ៊ីត (a_n) គេបាន $r_{n+1}=2r_n+4n+1$

សមមូល $\alpha(n+1)+\beta=2(\alpha n+\beta)+4n+1$

$$\alpha n+(\alpha+\beta)=(2\alpha+4)n+(2\beta+1)$$

គេទាញ $\begin{cases}\alpha=2\alpha+4\\ \alpha+\beta=2\beta+1\end{cases}$ នាំឲ្យ $\alpha=-4\,;\beta=-5$

ហេតុនេះ $r_n=-4n-5$ ។

តាងស្វ៊ីត $b_n = a_n - r_n = a_n + 4n + 5$

គេបាន $b_{n+1} = a_{n+1} + 4(n+1) + 5 = 2a_n + 4n + 1 + 4n + 4 + 5$

$$b_{n+1} = 2a_n + 8n + 10 = 2(a_n + 4n + 5) = 2b_n$$

គេបាន (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 2$

និងតួ $b_1 = a_1 + 4 + 5 = 1 + 4 + 5 = 10$ ។

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 \times q^{n-1} = 10 \times 2^{n-1} = 5 \times 2^n$

ដោយ $b_n = a_n + 4n + 5$ នោះ $a_n = b_n - (4n + 5)$

ដូចនេះ $a_n = 5 \times 2^n - (4n + 5)$ ។

II-ក/គណនា $f(a)$ និង $f(b)$ ៖

គេបាន $f(a) = a^3 - (a + b + c)a^2 + (ab + bc + ca)a - abc = 0$

$$f(b) = b^3 - (a + b + c)b^2 + (ab + bc + ca)b - abc = 0$$

ដូចនេះ $f(a) = f(b) = 0$ ។

ទាញថាសមីការ $f'(x) = 0$ មានឬសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ (a, b) ៖ ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a, b]$ និង មានដេរីវេលើ (a, b) ហើយ $f(a) = f(b) = 0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលមាន $\alpha \in (a, b)$ ដែល $f'(\alpha) = 0$ នោះមានន័យថាសមីការ $f'(x) = 0$ មានឬសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ (a, b) ។

ខ/ទាញបញ្ជាក់វិសមភាព $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

គេមាន $f'(x) = 3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca)$

ដោយ $f'(x)=0$ ជាសមីការមានឫសនោះ $\Delta' \geq 0$

តែ $\Delta' = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)$

ដូចនេះ $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ ។

III-1)រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+2} ៖

គេមាន $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ នោះ

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x.\sin x dx$$

តាង $\begin{cases} u = \sin^{n+1} x \\ dv = \sin x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n+1)\cos x \sin^n x.dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

គេបាន $I_{n+2} = \left[-\sin^{n+1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x.dx$

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^n x.dx$$

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x.dx$$

$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$ នាំឲ្យ $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ ។

2)បញ្ជាក់ថា $f(n)=(n+1)I_n.I_{n+1}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(n+1)=f(n)$

គេមាន $f(n)=(n+1)I_n.I_{n+1}$ នោះ $f(n+1)=(n+2)I_{n+1}.I_{n+2}$

តែ $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$ នោះ

$$f(n+1)=(n+2).I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n=(n+1)I_nI_{n+1}$$

ដូចនេះ $f(n+1)=f(n)$ ។

3/គណនា $f(n)$ ៖

ដោយ $f(n+1)=f(n)$ នោះ $f(n)$ ជាអនុគមន៍ថេរ ។

គេបាន $f(n)=f(0)=I_0.I_1$ ដោយ $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\dfrac{\pi}{2}$ និង

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.dx=1$ ដូចនេះ $f(n)=\dfrac{\pi}{2}$ ។

IV-ក)ស្រាយថា $AB=\dfrac{\sqrt{26(t-2)^2+144}}{4}$

គេមាន $A\in(d_1)$ ដែល $x_A=1$ នោះ $\dfrac{1-5}{-2}=\dfrac{y_A-1}{-1}=\dfrac{z_A+2}{2}$

គេទាញបាន $y_A=-1\,,z_A=2$ នោះ $A(1,-1,2)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $B\in(d_2)$ ដែល $x_B=t$ នោះ $\dfrac{t-6}{-4}=\dfrac{y_B-2}{-1}=\dfrac{z_B-1}{3}$

គេទាញបាន $y_B=\dfrac{t+2}{4}, z_B=\dfrac{22-3t}{4}$ នោះ $B(t\,,\dfrac{t+2}{4}\,,\dfrac{22-3t}{4})$ ។

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(t-1\,,\dfrac{t+6}{4}\,,\dfrac{14-3t}{4})$

ហេតុនេះ $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(t-1)^2+\frac{(t+6)^2}{16}+\frac{(14-3t)^2}{16}}$

ដូចនេះ $AB=\frac{\sqrt{26t^2-104t+248}}{4}=\frac{\sqrt{26(t-2)^2+144}}{4}$ ។

ខ)កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឲ្យ AB មានតម្លៃអប្បបរមា ៖

គេមាន $AB=\frac{\sqrt{26(t-2)^2+144}}{4}$ (សម្រាយខាងលើ)

ដើម្បីឲ្យ AB មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $t-2=0$ ឬ $t=2$

ដូចនេះ $t=2$ ។

គ)បង្ហាញថា (AB)ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ៖

ចំពោះ $t=2$ គេបាន $B(2,1,4)$ និង $\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$ ។

តាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

គេបាន $\vec{u}=(-2,-1,2)$ និង $\vec{v}=(-4,-1,3)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=-2-2+4=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$ ។

ហើយ $\overrightarrow{AB}.\vec{v}=-4-2+6=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$ នោះ $(AB)\perp(d_2)$។

ដូចនេះ(AB)ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

ទាញរកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់(d_1) និង (d_2) ៖

ដោយ (AB)ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) នោះ AB ជាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

ដូចនេះ $d(d_1,d_2)=AB=\sqrt{1+4+4}=3$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី០៧

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

I-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន α និង β ដែល $\alpha<\beta$

ចូរស្រាយថា $\frac{\beta-\alpha}{\beta}<\ln(\frac{\beta}{\alpha})<\frac{\beta-\alpha}{\alpha}$

II-គេមាន $S_n=4-a_n-\frac{1}{2^{n-2}}$,$n=1,2,3,4,....$ ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ក/កំណត់ទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង a_{n+1} និង a_n ។

ខ/កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។

III-គេឲ្យ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.dx$, $n\in IN$

ក/រកទំនាក់ទំនង I_n និង I_{n-2} ដែលមាន n ។

ខ/គេសន្មត $I_{2p}=\frac{1\times3\times....\times(2p-1)}{2\times4\times6\times.....\times(2p)}\times\frac{\pi}{2}$ និង

$I_{2p+1}=\frac{2\times4\times6\times.....\times2p}{1\times3\times5\times.....\times(2p+1)}$ ។ បង្ហាញថា $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}}\le\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}\le1$

រួចទាញរក $\lim_{p\to+\infty}\frac{(2\times4\times6\times....\times2p)^2}{[1\times3\times5\times....\times(2p-1)]^2}\times\frac{1}{2p+1}$ ។

IV-គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (d_1) និង (d_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា ៖

$(d_1): x-2=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$ និង $(d_2): \frac{x-3}{-1}=y=\frac{z-4}{4}$

ចូររកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2)

ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយថា $\frac{\beta-\alpha}{\beta}<\ln(\frac{\beta}{\alpha})<\frac{\beta-\alpha}{\alpha}$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\ln x$ ដែល $x\in[\alpha,\beta]$ និង $0<\alpha<\beta$

គេបាន f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[\alpha,\beta]$ និង មានដេរីវេលើ $(\alpha\ ,\ \beta)$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមមាន $c\in(\alpha,\beta)$ ដែល ៖

$$f'(c)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}\quad(1)$$

គេមាន $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ នោះ $f'(c)=\frac{1}{c}$

តែ $c\in(\alpha,\beta)$ នោះ $\alpha<c<\beta$ ឬ $\frac{1}{\beta}<\frac{1}{c}<\frac{1}{\alpha}$

គេបាន $\frac{1}{\beta}<f'(c)<\frac{1}{\alpha}\quad(2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញ $\frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}$

ដូចនេះ $\frac{\beta-\alpha}{\beta}<\ln(\frac{\beta}{\alpha})<\frac{\beta-\alpha}{\alpha}$ ។

II-ក/កំណត់ទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង a_{n+1} និង a_n ៖

គេមាន $S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}$ (1)

នោះ $S_{n+1} = 4 - a_{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}}$ (2)

ធ្វើផលដករវាងទំនាក់ទំនង (2) និង (1) គេបាន ៖

$S_{n+1} - S_n = a_n - a_{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}}$ តែ $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

គេបាន $a_{n+1} = a_n - a_{n+1} + \frac{1}{2^{n-1}}$ ឬ $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^n}$ ។

ដូចនេះទំនាក់ទំនងរវាង a_{n+1} និង a_n គឺ $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^n}$ ។

ខ/កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ៖

គេមាន $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^n}$ នោះ $2^{n+1}a_{n+1} - 2^n a_n = 2$

ដោយតាង $b_n = 2^n a_n$ គេបាន $b_{n+1} - b_n = 2$ ថេរ

គេទាញបាន (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 2$

និង $b_1 = 2a_1$ តាម $S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}$ នោះ $S_1 = 4 - a_1 - \frac{1}{2^{-1}}$

តែ $S_1 = a_1$ នោះ $a_1 = 4 - a_1 - 2$ នាំឲ្យ $a_1 = 1$ និង $b_1 = 2a_1 = 2$

ហេតុនេះ $b_n = b_1 + (n-1)d = 2 + 2(n-1) = 2n$

តាមទំនាក់ទំនង $b_n = 2^n a_n$ គេទាញ $a_n = \frac{b_n}{2^n} = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

ដូចនេះ $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$ ។

III-ក)រកទំនាក់ទំនង I_n និង I_{n-2} ដែលមាន n ៖

មាន $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x.\cos x.dx$, $n \in IN$

តាង $\begin{cases} u = \cos^{n-1} x \\ dv = \cos x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -(n-1)\sin x \cos^{n-2} x.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$I_n = \left[\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x.dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx$$

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n}.I_{n-2}$$

ដូចនេះ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

ខ/បង្ហាញថា $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \le \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \le 1$

គ្រប់ $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ និង $p \in IN$ គេមាន

$\cos^{2p+2} x \le \cos^{2p+1} x \le \cos^{2p} x$

គេបាន $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+2} x.dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1} x.dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x.dx$

ឬ $I_{2p+2} \le I_{2p+1} \le I_{2p}$ នាំឲ្យ $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \le \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \le 1$ ។

ទាញរក $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{(2\times4\times6\times....\times2p)^2}{[1\times3\times5\times....\times(2p-1)]^2}\times\frac{1}{2p+1}$ ៖

គេមាន $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ នោះ $I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p} I_{2p}$

ឬ $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \frac{2p+1}{2p}$

ដោយ $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \le \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \le 1$ នោះ $\frac{2p+1}{2p} \le \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \le 1$

ដោយ $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{2p+1}{2p}=1$ គេទាញ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}=1$ ។

មាន $I_{2p} = \frac{1\times3\times....\times(2p-1)}{2\times4\times6\times.....\times(2p)}\times\frac{\pi}{2}$

និង $I_{2p+1} = \frac{2\times4\times6\times.....\times2p}{1\times3\times5\times.....\times(2p+1)}$

គេបាន $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{(2\times4\times6\times....\times2p)^2}{[1\times3\times5\times....\times(2p-1)]^2}\times\frac{1}{2p+1}\times\frac{2}{\pi}$

គេទាញ $\frac{(2\times4\times6\times....\times2p)^2}{[1\times3\times5\times....\times(2p-1)]^2}\times\frac{1}{2p+1} = \frac{\pi}{2}.\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}=1$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{(2\times4\times6\times....\times2p)^2}{[1\times3\times5\times....\times(2p-1)]^2}\times\frac{1}{2p+1} = \frac{\pi}{2}$ ។

IV-រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2)

តាង $A(x_A,y_A,z_A)\in(d_1)$ និង $B(x_B,y_B,z_B)\in(d_2)$

គេបាន $\begin{cases} x_A-2=\dfrac{y_A-4}{2}=\dfrac{z_A-5}{2}=p \\ \dfrac{x_B-3}{-1}=y_B=\dfrac{z_B-4}{4}=q \end{cases}$

នោះ $\begin{cases} x_A=p+2 \\ y_A=2p+4 \quad (1) \\ z_A=2p+5 \end{cases}$

និង $\begin{cases} x_B=-q+3 \\ y_B=q \quad (2) \\ z_B=4q+4 \end{cases}$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(-q-p+1\,,q-2p-4\,,4q-2p-1\,)$

តាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

គេបាន $\vec{u}=(1\,,2\,,2)$ និង $\vec{v}=(-1\,,1\,,4)$ ។

ដើម្បីឲ្យ (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់(d_1) និង (d_2)

លុះត្រាតែ $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\vec{u} \\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{v} \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{v}=0 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} -q-p+1+2q-4p-8+8q-4p-2=0 \\ q+p-1+q-2p-4+16q-8p-4=0 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} 9q-9p-9=0 \\ 18q-9p-9=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $p=-1\,,q=0$ ។

យក $p=-1\,,\,q=0$ ជួសក្នុង (1) និង (2) គេបាន ៖

$A(1,2,3)$ និង $B(3\,,0\,,\,4)$ ហើយគេបាន $\overrightarrow{AB}=(2\,,-2\,,1)$

ដូចនេះ $(AB):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \quad ;\ t\in IR \\ z=3+t \end{cases}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី០៨

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

ននន☆លលល

I-គេឱ្យអនុគមន៍f មានដេរីវេលើ $(-2,+\infty)$ ដែល $f(x)=\sqrt{x+2}$

ក. រកតម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$ គេបាន ៖

$$\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$ ។

II-គេឲ្យស្វីត (a_n) កំណត់ដោយ ៖

$a_1=7\ ;\ a_2=17$ និង $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ ដែល $n\in IN$

គណនាតួទូទៅនៃស្វីត (a_n) ។

III-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}.dx$

IV-គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx \quad \text{និង} \quad J_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$$

ក/ចូរស្រាយថា $I_n=J_n$ ។

ខ /គណនា I_n និង J_n ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក. រកតម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$

គេមាន $f(x)=\sqrt{x+2}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(x+2)'}{2\sqrt{x+2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

ដោយ $-1\le x\le 2$ នោះ $1\le x+2\le 4$ ឬ $1\le\sqrt{x+2}\le 2$

គេទាញ $\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}\le\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{4}\le f'(x)\le\dfrac{1}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$ ។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$ គេបាន ៈ

$$\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\dfrac{1}{4}\le f'(x)\le\dfrac{1}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$

តាមទ្រឹស្តីបទវិសមភាពកំណើនមានកំណត់អនុវត្តន៍ចំពោះអនុគមន៍ f ក្នុងចន្លោះ $[-1,2]$ គេបាន៖

ចំពោះ $x\ge -1$ នោះ $\dfrac{1}{4}(x+1)\le f(x)-f(-1)\le\dfrac{1}{2}(x+1)$

ឬ $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}\le\sqrt{x+2}-1\le\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ ។

II-គណនាតួទូទៅនៃស្វីត (a_n) ។

សមីការសម្គាល់នៃស្វីតគឺ $r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1$ គេទាញឫស $r_1 = 2 ; r_2 = 3$ ។

ទំនាក់ទំនង $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ អាចសរសេរជាពីរទំរង់ ៖

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) & (1) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) & (2) \end{cases}$$

តាង $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ និង $c_n = a_{n+1} - 3a_n$

នោះ $b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1}$ និង $c_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1}$

តាម (1) និង (2) គេបាន $\begin{cases} b_{n+1} = 3b_n \\ c_{n+1} = 2c_n \end{cases}$

នាំឲ្យ (b_n) និង (c_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុងរៀងគ្នា

$q_b = 3 , q_c = 2$

គេបាន $b_n = b_1 \times q_b^{n-1}$ និង $c_n = c_1 \times q_c^{n-1}$

ដោយ $b_1 = a_2 - 2a_1 = 17 - 14 = 3$

និង $c_1 = a_2 - 3a_1 = 17 - 21 = -4$

គេបាន $b_n = 3^n$ និង $c_n = -2^{n+1}$

នោះ $\begin{cases} a_{n+1} - 2a_n = 3^n & (3) \\ a_{n+1} - 3a_n = -2^{n+1} & (4) \end{cases}$

ដកសមីការ (3)និង(4) គេបាន $a_n = 2^{n+1} + 3^n$ ។

III-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}.dx$

គេអាចសរសេរ $I=\int_0^1\frac{x^{\frac{1}{2}}.dx}{\sqrt{x^3+1}}$ តាង $t=x^{\frac{3}{2}}$ នោះ

$dt=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.dx$

បើ $x=0$ នោះ $t=0$ និង $x=1$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ តាង $t=\tan\varphi$ នោះ

$dt=(1+\tan^2\varphi)d\varphi$

បើ $t=0$ នោះ $\varphi=0$ និង $t=1$ នោះ $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ។

គេបាន $I=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\varphi.d\varphi}{1-\sin^2\varphi}$

តាង $u=\sin\varphi$ នោះ $du=\cos\varphi.d\varphi$

បើ $\varphi=0$ នោះ $u=0$ និង $\varphi=\frac{\pi}{4}$ នោះ $u=\frac{1}{\sqrt{2}}$

គេបាន $I=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u})du$

$$I=\frac{1}{3}\left[-\ln|1-u|+\ln|1+u|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

ដោយ $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$ នោះ $I=\frac{1}{3}\ln(\sqrt{2}+1)^2$

ដូចនេះ $I=\frac{2}{3}\ln(\sqrt{2}+1)$ ។

IV-ក/ស្រាយថា $I_n=J_n$

មាន $I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$ និង

$$J_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$$

ចំពោះ $I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$ តាង $x=\frac{\pi}{2}-t$ នោះ

$dx=-dt$

បើ $x=\frac{\pi}{6}$ នោះ $t=\frac{\pi}{3}$ និង $x=\frac{\pi}{3}$ នោះ $t=\frac{\pi}{6}$

គេបាន $I_n=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^n(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin^n(\frac{\pi}{2}-t)+\cos^n(\frac{\pi}{2}-t)}.(-dt)$

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t}.dt = J_n$$

ដូចនេះ $I_n = J_n$ ។

ខ /គណនា I_n និង J_n ៖

គេបាន $I_n + J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$

$$I_n + J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$ តែ $I_n = J_n$

នោះ $2I_n = 2J_n = \frac{\pi}{6}$ នាំឲ្យ $I_n = J_n = \frac{\pi}{12}$ ។

ដូចនេះ $I_n = \frac{\pi}{12}$ និង $J_n = \frac{\pi}{12}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី០៩

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

ឝឝឝ☆ឝឝឝ

I-គេមានស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 5$ និងទំនាក់ទំនង

$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$ ដែល $n = 1,2,3,4,....$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = 2^{2^n} + 1$ ។

II-គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ IR ដែល

$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

ក. រកតម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$ ។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$ គេបាន ៖

$$\frac{3x}{5} - \frac{9}{20} + \ln 2 \le \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \le \frac{4x}{5} - \frac{3}{5} + \ln 2$$

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_\alpha = \int_0^{\sqrt{\alpha}} x^3 e^{-x^2}.dx$ ដែល $\alpha > 0$ ។

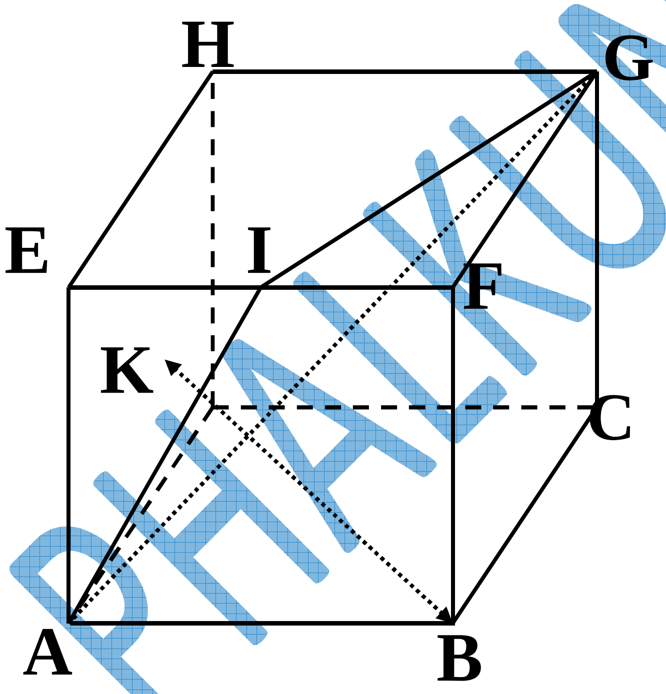
គណនា I_α ជាអនុគមន៍នៃ α រួចគណនា $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I_\alpha$ ។

IV-គេអោយគូប **ABCDEFGH** មួយមានទ្រនុងស្មើ1។ លំហមានទិសដៅតាមតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ គេយក I ជាចំនុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ [EF]

និង K ជាផ្ចិតការេ ADHE ។

ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ IGA ។

ខ. គណនាមាឌតេត្រាអែត ABIG រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច B ទៅប្លង់ (AIG)



ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = 2^{2^n} + 1$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $a_1 = 2^2 + 1 = 5$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $a_k = 2^{2^k} + 1$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k + 1$ គឺ $a_{k+1} = 2^{2^{k+1}} + 1$

គេមាន $a_{k+1} = a_k^2 - 2a_k + 2 = (a_k - 1)^2 + 1$ តែ $a_k = 2^{2^k} + 1$

គេបាន $a_{k+1} = (2^{2^k} + 1 - 1)^2 + 1 = 2^{2^{k+1}} + 1$ ពិត

ដូចនេះ $a_n = 2^{2^n} + 1$ ។

II-ក. រកតម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$

គេបាន $f'(x) = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})'}{x + \sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$ គេបាន $\frac{25}{16} \le 1 + x^2 \le \frac{25}{9}$

ឬ $\frac{5}{4} \le \sqrt{1+x^2} \le \frac{5}{3}$ នាំឱ្យ $\frac{3}{5} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{4}{5}$

ដូចនេះ $\frac{3}{5} \le f'(x) \le \frac{4}{5}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$ ។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$ គេបាន ៈ

$$\frac{3x}{5} - \frac{9}{20} + \ln 2 \le \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \le \frac{4x}{5} - \frac{3}{5} + \ln 2$$

តាមសម្រាយខាងលើ $\frac{3}{5} \le f'(x) \le \frac{4}{5}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$

តាមទ្រឹស្តីបទវិសមភាពកំណើនមានកំណត់គេបាន៖

ចំពោះ $x \geq \frac{3}{4}$: $\frac{3}{5}(x-\frac{3}{4}) \leq f(x)-f(\frac{3}{4}) \leq \frac{4}{5}(x-\frac{3}{4})$

ឬ $\frac{3x}{5}-\frac{9}{20} \leq \ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln 2 \leq \frac{4x}{5}-\frac{3}{5}$

ដូចនេះ: $\frac{3x}{5}-\frac{9}{20}+\ln 2 \leq \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \leq \frac{4x}{5}-\frac{3}{5}+\ln 2$ ។

III-គណនា I_α ជាអនុគមន៍នៃ α រួចគណនា $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha$

គេមាន $I_\alpha = \int_0^{\sqrt{\alpha}} x^3 e^{-x^2}.dx$ ដែល $\alpha > 0$

តាង $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = xe^{-x^2}dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = 2x.dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{cases}$

គេបាន $I_\alpha = \left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{\sqrt{\alpha}} xe^{-x^2}.dx$

$$= -\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha} - \left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\sqrt{\alpha}} = -\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha} - (\frac{1}{2}e^{-\alpha} - \frac{1}{2})$$

ដូចនេះ: $I_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\alpha+1}{2}e^{-\alpha}$ និង $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = \frac{1}{2}$ ។

IV-ក-ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}$

ក្នុងលំហ $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ គេមាន ៖

$A(0,0,0)\ ,B(1,0,0)\ ,C(1,1,0)\ ,D(0,1,0)$

$E(0,0,1)\ ,F(1,0,1)\ ,G(1,1,1)\ ,H(0,1,1)$

ដោយ I ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្គត់ $[EF]$ គេបាន ៖

$$I\left(\frac{0+1}{2},\frac{0+0}{2},\frac{1+1}{2}\right)$$

ឬ $I\left(\frac{1}{2},0,1\right)$ និង K ជាផ្ចិតការេ $ADHE$ នោះវាជាចំនុចកណ្តាល

នៃអង្គត់ $[AH]$ គេបាន ៖

$$K\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+1}{2},\frac{0+1}{2}\right) \text{ ឬ } K\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ ។}$$

យើងបាន ៖ $\overrightarrow{BK}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\quad(1)$

ហើយ $\overrightarrow{IG}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$, $\overrightarrow{IA}=\left(-\frac{1}{2},0,-1\right)$ គេបាន ៖

$$\overrightarrow{IG}\times\overrightarrow{IA}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{AE}\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{IG}\times\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{AE}$$

គេបាន $\overrightarrow{IG}\times\overrightarrow{IA}\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\quad(2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន ៖ $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ IGA ៈ

តាមរូបមន្ត ៖ $S_{IGA} = \frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}\right\| = \frac{1}{2}.\left\|\overrightarrow{BK}\right\|$

$$= \frac{1}{2}.\sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$ ឯកតាផ្ទៃ។

ខ. គណនាមាឌតេត្រាអែត ABIG ៖

តាមរូបមន្ត $V_{ABIG} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}\right).\overrightarrow{IB}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{IB} = \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$ និង $\overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

គេបាន ៖ $V_{ABIG} = \frac{1}{6}.\left|-\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}$ ឯកត្តាមាឌ ។

រកចំងាយពីចំនុច B ទៅប្លង់ (AIG) ៖

តាមរូបមន្ត $V_{ABIG} = \frac{1}{3}.S_{IGA} \times d(B,(AIG))$

នាំអោយ $d(B,(AIG)) = \frac{3V_{ABIG}}{S_{IGA}}$

ដូចនេះ: $d(B,(AIG)) = \dfrac{3.\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១០

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

☆

I-គេឲ្យស៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = \sqrt{5}+1 \\ u_{n+1} = u_n^{\ 2} - 2u_n \end{cases}$

ដែល $n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ .....$ ។

ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា៖

$$u_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n} + 1$$ ។

II-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x) = (x+\sqrt{1+x^2})^n$

ដែល $x \in IR$ និង $n \in IN$ ។

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា ៖

$\sqrt{1+x^2}.f'(x) = n.f(x)$ ។

ខ-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង ៖

$(1+x^2).f''(x) + x.f'(x) = n^2.f(x)$ ។

III- f ជាអនុគមន៍កំណត់ពីសំណុំ IR ទៅ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

សមីការ $f(x+1) + x^2 f(x^3+1) = x^3 + \sqrt[3]{x}$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^2 f(x).dx$ ។

IV-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$

ដែល $n = 1,2,3,...$ ។

ក/ ចូរគណនា I_1 ។

ខ/បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចទាញរក I_n ។

គ /គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ /ទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយថា $u_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n} + 1$

- ចំពោះ $n = 0$

គេបាន $u_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \sqrt{5}+1$ ពិត ។

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ ៖

$$u_k = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^k} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^k} + 1 \quad \text{ពិត}$$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ គឺ៖

$$u_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^{k+1}} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^{k+1}} + 1 \quad \text{ពិត}$$

គេមាន $u_{k+1}=u_k^{\,2}-2u_k=(u_k-1)^2-1$

ដោយ $u_k=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^k}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^k}+1$

គេបាន៖

$$u_{k+1}=\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^k}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^k}\right]^2-1$$

$$u_{k+1}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^{k+1}}+2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^{k+1}}-1$$

$$u_{k+1}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^{k+1}}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^{k+1}}+1 \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $u_n=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n}+1$ ។

II-ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^n$

តាមរូបមន្ត $(u^n)'=nu'.u^{n-1}$

គេបាន $f'(x)=n.(x+\sqrt{1+x^2})'.(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$

$$f'(x)=n.\left(1+\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}\right).(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=n.\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right).(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=n.\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})^n$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^n}$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$

គេមាន $f'(x)=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^n$

ដោយ $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^n$

គេបាន $f'(x)=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.f(x)$ នាំឱ្យ $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)}$ ។

ខ-ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង៖

$$(1+x^2).f''(x)+x.f'(x)=n^2.f(x)$$

គេមាន $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ នាំឱ្យ $f'(x)=n.\frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

គេបាន $f''(x) = n.\dfrac{f'(x)\sqrt{1+x^2} - (\sqrt{1+x^2})' f(x)}{(\sqrt{1+x^2})^2}$

$$f''(x) = n\dfrac{f'(x).\sqrt{1+x^2} - \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}.f(x)}{1+x^2}$$

$$f''(x) = n.\dfrac{\sqrt{1+x^2}.f'(x) - x.\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \quad (1)$$

គេមាន $\sqrt{1+x^2}.f'(x) = n.f(x) \quad (2)$

និង $\dfrac{1}{n}.f'(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \quad (3)$

យក (2) និង (3) ជួសក្នុងទំនាក់ទំនង (1) គេបាន៖

ដូចនេះ: $\boxed{(1+x^2).f''(x) + x.f'(x) = n^2.f(x)}$ ។

III-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^2 f(x).dx$

បើគេតាង-$x = t+1$ នោះ $dx = dt$

ចំពោះ $x = 1$ នោះ $t = 0$ និង $x = 2$ នោះ $t = 1$ ។

គេបាន $I = \int_1^2 f(x).dx = \int_0^1 f(t+1).dt \quad (1)$

បើគេតាង-$x = t^3 + 1$ នោះ $dx = 3t^2 dt$

ចំពោះ $x = 1$ នោះ $t = 0$ និង $x = 2$ នោះ $t = 1$ ។

គេបាន $I=\int_1^2 f(x).dx = 3\int_0^1 t^2 f(t+1).dt$

ឬ $\frac{1}{3}I=\int_0^1 t^2 f(t^3+1).dt \quad (2)$

បូកសមីការ និង (2) គេបាន ៖ (1)

$$I+\frac{1}{3}I=\int_0^1 [f(t+1)+t^2 f(t^3+1)].dt$$

ដោយ $f(x+1)+x^2 f(x^3+1)=x^3+\sqrt[3]{x}$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

គេបាន $\frac{4}{3}I=\int_0^1 (t^3+\sqrt[3]{t}).dt=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_0^1=1$

ដូចនេះ $I=\frac{3}{4}$ ។

IV-ក /គណនា I_1 ៖

បើ $n=1$ នោះ $I_1=\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x.dx$

តាង $\begin{cases} u=e^{-x} \\ dv=\sin x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du=-e^{-x}.dx \\ v=-\cos x \end{cases}$

គេបាន៖

$$I_1 = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x.dx$$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x.dx$$

តាង $\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \cos x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = -e^{-x}.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

គេបាន ៖

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x.dx$$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - I_1$$

ដូចនេះ $I_1 = \dfrac{1+e^{-\pi}}{2} = \dfrac{1+e^{\pi}}{2e^{\pi}}$ ។

ខ/បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

មាន $I_n = \displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ នោះ $I_{n+1} = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x.dx$

តាង $x = \pi + t$ នោះ $dx = dt$

ចំពោះ $x = n\pi$ នោះ $t = (n-1)\pi$ និង $x = (n+1)\pi$ នោះ $t = n\pi$

គេបាន $I_{n+1} = \displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-\pi-t}\sin(\pi+t).dt = -e^{-\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-t}\sin t.dt$

$I_{n+1} = -e^{-\pi} I_n$ នាំឲ្យ (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ទាញរក I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $I_n = I_1 \times q^{n-1} = \frac{1+e^{-\pi}}{2} \times (-e^{-\pi})^{n-1}$ ។

គ គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេបាន $S_n = I_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1+e^{-\pi}}{2} \times \frac{1-(-e^{-\pi})^n}{1+e^{-\pi}} = \frac{1-(-e^{-\pi})^n}{2}$

ឃ ទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ៖

គេបាន $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+(-e^{-\pi})^n}{2} = \frac{1}{2}$ ព្រោះ $\lim_{n\to\infty}(-e^{-\pi})^n = 0$ ។

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១១

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

ꕥꕥꕥ☆ꕥꕥꕥ

I-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3 + a^3}$, $a > 0$

ក. ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ **n** ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង **a** ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

II-គេមានសមីការ $x^3 + 3mx^2 + 2(6m-7)x + 10m - 16 = 0$

កំណត់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫសបី x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស្ទីតនព្វន្តមួយ ។

III-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ និងមានដេរីវេលើ IR ។

គេដឹងថា $\begin{cases} f(1) = f'(1) = 3 \\ \frac{1}{2x-1} f''(x) - \frac{2}{(2x-1)^2} f'(x) = 4x + 1 \end{cases}$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

IV-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1}.dx$, $n \in IN$ ។

ក)គណនា $I_0 + I_1$, I_1 រួចទាញរក I_0 ។

ខ)គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក. កំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a

យើងមាន $I_n = \int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3+a^3}$, $a>0$

យើងតាង $x = a.t$ នាំឱ្យ $dx = a.dt$

ហើយចំពោះ $x \in [0,a]$ នាំឱ្យ $t \in [0,1]$

គេបាន $I_n = \int_0^1 \frac{(a.t)^n.a.dt}{(at)^3+a^3} = a^{n-2}.\int_0^1 \frac{t^n.dt}{t^3+1}$

តាមទំនាក់ទំនងនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a លុះត្រាតែ $n-2=0$ ឬ $n=2$ ។

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a គេត្រូវឱ្យ $n=2$ ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ

ចំពោះ $n=2$ គេបាន $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1}$

តាង $U = x^3+1$ នាំឱ្យ $dU = 3x^2.dx$

ហើយចំពោះ $x \in [0,1]$ នាំឱ្យ $U \in [1\,,\,2]$

យើងបាន $I_2 = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{dU}{U} = \frac{1}{3}[\ln|U|]_1^2 = \frac{1}{3}\ln 2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I_2 = \frac{1}{3}\ln 2}$ ។

II-កំណត់ m

បើ x_1, x_2, x_3 ជាឬសរបស់សមីការនោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេមានទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3m & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 2(6m-7) & (2) \\ x_1x_2x_3 = -10m + 16 & (3) \end{cases}$$

បើ x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស្វីតនព្វន្តនោះ $x_1 + x_3 = 2x_2$ (4)

យកសមីការ (4) ជួសក្នុង (1) គេបាន $3x_2 = -3m$

ឬ $x_2 = -m$ ។

តាមសមីការ (3) គេបាន $x_1x_3 = -\dfrac{10m-16}{x_2} = \dfrac{10m-16}{m}$

តាមសមីការ (2) គេបាន $(x_1 + x_3)x_2 + x_1x_3 = 12m - 14$

ឬ $-2m(-m) + \dfrac{10m-16}{m} = 12m - 14$

ឬ $2m^3 - 12m^2 + 24m - 16 = 0$

ឬ $2(m-2)^3 = 0$ នាំឱ្យ $m = 2$ ។

ដូចនេះ $m = 2$ ។

III-កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

គេមាន $\dfrac{1}{2x-1} f''(x) - \dfrac{2}{(2x-1)^2} f'(x) = 4x + 1$ (1)

តាង $g(x) = f'(x).\dfrac{1}{2x-1}$ គេបាន $g'(x) = \dfrac{1}{2x-1} f''(x) - \dfrac{1}{(2x-1)^2} f'(x)$

ទំនាក់ទំនង (1) ក្លាយទៅជា $g'(x) = 4x + 1$ នោះ

$g(x) = 2x^2 + x + C$

បើ $x = 1$ នោះ $g(1) = 3 + C$ តែ $g(1) = f'(1).\frac{1}{2(1)-1} = f'(1) = 3$

គេបាន $3 + C = 3$ នាំឲ្យ $C = 0$ ដូចនេះ $g(x) = 2x^2 + x$

ដោយ $g(x) = f'(x).\frac{1}{2x-1}$ គេទាញ $\frac{f'(x)}{2x-1} = 2x^2 + x$

$f'(x) = 4x^3 - x$ នាំឲ្យ $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + k$

បើ $x = 1$ នោះ $f(1) = \frac{1}{2} + k = 3$ នាំឲ្យ $k = \frac{5}{2}$ ។

ដូចនេះ $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}$ ។

IV-ក) គណនា $I_0 + I_1$, I_1 រួចទាញរក I_0

យើងមាន $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1}.dx$, $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}$

យើងបាន

$$I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1}.dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}.dx = \int_0^1 \frac{1 + e^x}{e^x + 1}.dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}.dx = \int_0^1 \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)}.dx = \left[\ln(e^x + 1)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}$$

ដោយ $I_0 + I_1 = 1$ នាំឱ្យ $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \ln(\frac{e+1}{2})$ ។

ដូចនេះ

$$\boxed{I_0 + I_1 = 1\ ,\ I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\ ,\ I_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$$ ។

ខ-គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}.dx + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}.dx$

$$= \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{e^x+1}.dx = \int_0^1 \frac{e^{nx}(1+e^x)}{e^x+1}.dx$$

$$= \int_0^1 e^{nx}.dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១២

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

៚៚៚☆៙៙៙

I-គេដឹងថា $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

II-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $0\le a<b$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$na^{n-1}(b-a)\le b^n-a^n\le nb^{n-1}(b-a)$ ដែល $n\in IN$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$

តាង $S_n=I_0+I_1+I_2+....+I_n$ ។

ក/ចូរស្រាយថា $S_n=-1+\int_0^1(1+x)^{n+1}.dx$ ។

ខ/គណនា S_n រួចទាញរក I_n ។

គ/ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញថា៖

$$\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+....+\frac{1}{n+2}C_n^n=\frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$ ។

IV-គេឲ្យប្លង់ពីរ $(\alpha): x+2y+2z-11=0$, $(\beta): 2x-2y+z-1=0$

និងបន្ទាត់ $(\Delta): x=3+t\ ,y=6-4t\ ,z=7-t$ ដែល $t\in IR$

ក-គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់ (Δ) ជាមួយប្លង់ (α) និង (β) រៀងគ្នា ។

ខ-យក C ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (α) និង (β) ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរកប្រភេទនៃ ΔABC

គ-កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ) ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយថា $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេត្រូវស្រាយឲ្យឃើញថា $\tan^2\frac{\beta}{2}=\tan\frac{\theta+\alpha}{2}.\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$ ។

គេមាន $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}=\dfrac{\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}$

និង $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}=\dfrac{\tan\frac{\theta}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}$

គេបាន $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}\tan\frac{\theta-\alpha}{2}=\dfrac{\tan^2\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

ដោយ $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$$

(ព្រោះ $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$)

គេបាន $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}\tan\frac{\theta-\alpha}{2}=\frac{\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}-\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{1-\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}\times\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

តាង $a=\cos\alpha$ និង $b=\cos\beta$ គេបាន ៖

$$\tan\frac{\theta+\alpha}{2}\tan\frac{\theta-\alpha}{2}=\frac{\frac{1-ab}{1+ab}-\frac{1-a}{1+a}}{1-\frac{1-ab}{1+ab}\times\frac{1-a}{1+a}}$$

$$=\frac{(1-ab)(1+a)-(1+ab)(1-a)}{(1+ab)(1+a)-(1-ab)(1-a)}$$

$$=\frac{1+a-ab-a^2b-1+a-ab+a^2b}{1+a+ab+a^2b-1+a+ab-a^2b}$$

$$=\frac{2a-2ab}{2a+2ab}=\frac{1-b}{1+b}=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}=\tan^2\frac{\beta}{2}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

II-ស្រាយថា $na^{n-1}(b-a) \le b^n - a^n \le nb^{n-1}(b-a)$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = x^n$ ដែល $x \in [0,+\infty)$

គេបាន $f'(x) = nx^{n-1}$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $x \in [0,+\infty)$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម នោះមាន $c \in (a,b)$ ដែល៖

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{b^n - a^n}{b-a} \quad (1)$$

ហើយចំពោះ $x \in [a,b]$ ដែល $0 \le a < b$

គេមាន $a^{n-1} < x^{n-1} < b^{n-1}$ នោះគេទាញ $na^{n-1} < f'(x) < nb^{n-1}$

យក $x = c$ គេបាន $na^{n-1} < f'(c) < nb^{n-1}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញ $na^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b-a} < nb^{n-1}$

ដូចនេះ $na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$ ។

III-ក) ស្រាយថា $S_n = -1 + \int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx$

គេមាន $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n.dx = \int_0^1 [(x+1)-1](1+x)^n.dx$

$$I_n = \int_0^1 (x+1)^{n+1}.dx - \int_0^1 (x+1)^n.dx$$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}(I_k) = \sum_{k=0}^{n}\left[\int_0^1 (1+x)^{k+1}.dx - \int_0^1 (1+x)^k.dx\right]$

$$=\int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx-\int_0^1 dx$$ ដោយ $$\int_0^1 dx=1$$

ដូចនេះ $S_n=-1+\int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx$ ។

ខ)គណនា S_n រួចទាញរក I_n ៖

គេមាន $S_n=-1+\int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx$

$$=-1+\left[\frac{1}{n+2}(1+x)^{n+2}\right]_0^1=-1+\frac{2^{n+2}-1}{n+2}$$

ដូចនេះ $S_n=-1+\dfrac{2^{n+2}-1}{n+2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $S_n=I_0+I_1+...+I_n=S_{n-1}+I_n$ នោះ $I_n=S_n-S_{n-1}$

$$I_n=(-1+\frac{2^{n+2}-1}{n+2})-(-1+\frac{2^{n+1}-1}{n+1})=\frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ $I_n=\dfrac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$ ។

គ)ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញថា៖

$$\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+....+\frac{1}{n+2}C_n^n=\frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$

តាមទ្វេធាញូតុន $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+....+C_n^nx^n$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង x គេបាន ៖

$$x(1+x)^n=C_n^0x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+....+C_n^nx^{n+1}$$

ធ្វើអាំងតេក្រាលកំណត់ពី 0 ទៅ 1 លើសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\int_0^1 x(1+x)^n.dx = \int_0^1 (C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + ... + C_n^n x^{n+1}).dx$$

$$I_n = \left[\frac{1}{2}C_n^0 x^2 + \frac{1}{3}C_n^1 x^3 + \frac{1}{4}C_n^2 x^4 + ... + \frac{1}{n+2}C_n^n x^{n+2}\right]_0^1$$

$$I_n = \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+2}C_n^n$$

ដោយ $I_n = \frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $\frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+2}C_n^n = \frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$

IV-ក)គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ **A** និង **B** ៖

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុងសមីការ (α) គេបាន៖

$$(3+t)+2(6-4t)+2(7-t)-11=0$$

$$3+t+12-8t+14-2t-11=0$$

$$-9t+18=0 \Rightarrow t=2$$

យក $t=2$ ជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=5, y=-2, z=5$ ។

ដូចនេះ $A(5\,,-2\,,5)$ ។

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុងសមីការ (β) គេបាន៖

$$2(3+t)-2(6-4t)+(7-t)-1=0$$

$$6+2t-12+8t+7-t-1=0$$

$$9t=0 \Rightarrow t=0$$

យក $t=0$ ជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=3, y=6, z=7$ ។

ដូចនេះ $B(3\,,6\,,7)$ ។

ខ-រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរកប្រភេទនៃ ΔABC

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $\begin{cases} 1+2y+2z-11=0 \\ 2-2y+z-1=0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} 2y+2z-10=0 \\ -2y+z+1=0 \end{cases}$

គេទាញបាន $y=2$, $z=3$ ។ ដូចនេះ $C(1,2,3)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{CA}=(4,-4,2)\,;\,\overrightarrow{CB}=(2,4,4)$

គេបាន $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=8-16+8=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$

ហើយ $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{16+16+4}=6\,;\,|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{4+16+16}=6$

គេទាញ $CA=CB=6$ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត

គ-កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) ៖

តាង $I(a,b,c)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ)

ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

គេបាន $\begin{cases} a=3+t \\ b=6-4t \quad (1) \\ c=7-t \end{cases}$ ហើយ $R=d(I,\alpha)=d(I,\beta)$

$$\frac{|(3+t)+2(6-4t)+2(7-t)-11|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|2(3+t)-2(6-4t)+(7-t)-1|}{\sqrt{4+4+1}}$$

ឬ $\dfrac{|-9t+18|}{3}=\dfrac{|9t|}{3} \Rightarrow t=1$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ c=6 \end{cases}$

ហើយ $R=\dfrac{9}{3}=3$ ។ ដូចនេះសមីការស្តង់ដានៃសមីការស្វ៊ែសរសេរ

$(S):(x-4)^2+(y-2)^2+(z-6)^2=9$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១៣

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

ꕥꕥꕥ☆ꕤꕤꕤ

I-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ ; \ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_{n+1} - \dfrac{n+2}{2} \ ; \ n = 0 \ ; 1 \ ; 2 \ ; \ldots \end{cases}$$

ក.តាង $v_n = u_{n+1} - u_n + n$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

II-គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ដែល $x \neq 1$

ក. គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $f(x)$ តាងដោយ $f^{(n)}(x)$ ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរជារាង៖

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(x) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

ដែល $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ គ្រប់ $x \neq 1$ ។

III-គេឲ្យ $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$

1/គ្រប់ a វិជ្ជមាន គណនា $F(a) = \displaystyle\int_1^a f(x).dx$

2/គ្រប់ $n \in IN$ គេតាង $S_n = F(1) + F(2) + ... + F(n)$ ។

គណនា S_n រួចរកលីមីតរបស់ស្វ៊ីត (S_n) កាលណា $n \to +\infty$

IV-ចូរស្រាយថាបើគេមានសមភាព

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\theta)}{b} = \frac{\cos(x+2\theta)}{c} = \frac{\cos(x+3\theta)}{d}$$

នោះគេបាន $\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $v_n = u_{n+1} - u_n + n$

គេបាន $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} + n + 1$

ដោយ $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - \frac{n+2}{2}$

នោះ $v_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - \frac{n+2}{2} - u_{n+1} + n + 1$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n + n) = \frac{1}{2}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \frac{1}{2}$ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $v_0 = u_1 - u_0 = 1$

ដូចនេះ $v_n = \frac{1}{2^n}$ ។

ដោយ $v_n = u_{n+1} - u_n + n$

គេទាញ

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2^k} - k\right)$$

$$u_n - u_0 = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$u_n - 1 = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 3 - \frac{(n-1)n}{2}$$

$$u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{(n+2)(n-3)}{2}$$

ដូចនេះ $u_n = -\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{(n+2)(n-3)}{2}$ ។

II-ក. គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

គេមាន $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$

គេបាន $f'(x)=-(1-x)'(1-x)^{-2}=(1-x)^{-2}=1!(1-x)^{-2}$

$$f''(x)=2(1-x)^{-3}=2!(1-x)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x)=6(1-x)^{-4}=3!(1-x)^{-4}$$

ឧបមាថា $f^{(n)}(x)=n!(1-x)^{-n-1}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $f^{(n+1)}(x)=(n+1)!(1-x)^{-n-2}$ ពិត

គេមាន

$$f^{(n+1)}(x)=[f^{(n)}(x)]'=[n!(1-x)^{-n-1}]'=(n+1)!(1-x)^{-n-2}$$

ពិត

ដូចនេះ $f^{(n)}(x)=n!(1-x)^{-n-1}=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ ។

ខ.ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរជារាង៖

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(x)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n(x)$$

គេមាន $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ នោះ $f^{(n)}(0)=n!$ និង $f(0)=1$

ហើយ $R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ នោះគេបាន៖

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(x)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n(x)$$

$$= 1 + x + x^2 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x+x^2+....+x^n) + x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$ ពិត

III-1/គ្រប់ a វិជ្ជមាន គណនា $F(a) = \int_1^a f(x).dx$

គេមាន $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

គេបាន $F(a) = \int_1^a (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}).dx$

$$= [\ln|x| - \ln|x+1|]_1^a = \left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^a$$

$$= \ln(\frac{a}{a+1}) - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{2a}{a+1} \quad , \ a > 0$$

2/គណនា S_n រួចរកលីមីតរបស់ស្វីត (S_n) កាលណា $n \to +\infty$

គេមាន $S_n = F(1) + F(2) + ... + F(n) = \sum_{k=1}^{n} F(k)$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{2k}{k+1}) = \ln[\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{k+1}] = \ln\frac{2^n}{n+1}$

ដូចនេះ $S_n = \ln\frac{2^n}{n+1}$ ហើយ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{2^n}{n+1} = +\infty$

(ព្រោះ $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n+1} = +\infty$)។

IV-ស្រាយថា $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$

តាង $\dfrac{\cos x}{a}=\dfrac{\cos(x+\theta)}{b}=\dfrac{\cos(x+2\theta)}{c}=\dfrac{\cos(x+3\theta)}{d}=\dfrac{1}{t}$

គេទាញ $\begin{cases} a=t\cos x \\ b=t\cos(x+\theta) \\ c=t\cos(x+2\theta) \\ d=t\cos(x+3\theta) \end{cases}$

$$a+c=t\left[\cos x+\cos(x+2\theta)\right]=2t\cos\theta\cos(x+\theta)=2b\cos\theta$$

$$b+d=t\left[\cos(x+\theta)+\cos(x+3\theta)\right]$$

$$=2t\cos\theta\cos(x+2\theta)=2c\cos\theta$$

គេបាន $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2b\cos\theta}{2c\cos\theta}=\dfrac{b}{c}$ សមមូល $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$ ។

ដូចនេះ: $\dfrac{a+c}{b}=\dfrac{b+d}{c}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១៨

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

I-ក) ចូរស្រាយថា $1+\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$

ខ) គណនាផលគុណ

$$P=(1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)...(1+\tan 45^o)$$

II-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n\in N$ ដោយ ៖

$u_0=-1$ និង $u_{n+1}=\frac{(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}$ ។

ក.តាង $v_n=\frac{2u_n+1}{u_n+n}$ ចំពោះ $n=0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ ...$ ។

បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

III-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$

កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\ \geq\ f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

IV-គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx \quad \text{និង} \quad J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$$

ក)ចូរស្រាយថា/ក $I_n = J_n$ ។

ខ)គណនា /I_n និង J_n ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក) ស្រាយថា $1+\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$

គេមាន ៖

$$\cos(45^o-\alpha) = \cos 45^o \cos\alpha + \sin 45^o \sin\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha(1+\tan\alpha)$$

នាំឲ្យ $\dfrac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha} = 1+\tan\alpha$ ។

ដូចនេះ$1+\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$ ។

ខ) គណនា

$$P=(1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)...(1+\tan 45^o)$$

តាមសមភាព $1+\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} 1+\tan 1^o=\dfrac{\sqrt{2}\cos 44^0}{\cos 1^o} \\ 1+\tan 2^o=\dfrac{\sqrt{2}\cos 43^o}{\cos 2^o} \\ 1+\tan 3^o=\dfrac{\sqrt{2}\cos 42^o}{\cos 3^o} \\ -------------- \\ 1+\tan 45^o=\dfrac{\sqrt{2}\cos 0^o}{\cos 45^o} \end{cases}$$

គុណសមភាពនេះអង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$P=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{45}\cos 0^o}{\cos 45^o}=\left(\sqrt{2}\right)^{46}=2^{23}$$ (ព្រោះ $\cos 45^o=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$)

ដូចនេះ $P=2^{23}=8388608$ ។

II-ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $v_n=\dfrac{2u_n+1}{u_n+n}$ នោះ $v_{n+1}=\dfrac{2u_{n+1}+1}{u_{n+1}+n+1}$

ដោយ $u_{n+1}=\dfrac{(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}$ គេបាន ៖

$$v_{n+1}=\frac{\frac{2(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}+1}{\frac{(2n-1)(u_n-1)}{4u_n+6n-1}+n+1}$$

$$v_{n+1}=\frac{2(2n-1)u_n-4n+2+4u_n+6n-1}{(2n-1)u_n-2n+1+4(n+1)u_n+(n+1)(6n-1)}$$

$$v_{n+1}=\frac{(4n+2)u_n+2n+1}{(6n+3)u_n+6n^2+3n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(2n+1)(2u_n+1)}{(2n+1)(u_n+n)}$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2u_n+1}{u_n+n}=\frac{1}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួមស្មើ $q=\frac{1}{3}$

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0\times q^n$ ដោយ $v_0=\frac{2u_0+1}{u_0}=1$

ដូចនេះ $v_n=\frac{1}{3^n}$ ។

ហើយដោយ $v_n=\frac{2u_n+1}{u_n+n}$

នោះ $u_n=\frac{nv_n-1}{2-v_n}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{n-3^n}{2\times 3^n-1}$ ។

III-ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$

យើងមាន $f(x)=\frac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x-3)(3x^2-3x+1)-(6x-3)(x^3+3x^2-3x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-6x^3+3x^2}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2} \geq 0\ ,\ \forall x\in IR$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតយើងសន្មតថា $\frac{1+a+b}{2} \geq \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$

គេបាន $\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{2+a+b}{1+a+b+ab}$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$$

ដោយ $\frac{1}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a}$ និង $\frac{1}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+b}$

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

គេទាញ $\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$

នាំឲ្យការសន្មត $\frac{1+a+b}{2} \geq \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$ ពិត។

ដូចនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេទាញ

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

IV-ក)ស្រាយថា $I_n = J_n$

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx \quad \text{និង} \quad J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$$

ចំពោះ $I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$ តាង $x = \frac{\pi}{2} - t$ នោះ

$dx = -dt$

បើ $x = \frac{\pi}{6}$ នោះ $t = \frac{\pi}{3}$ និង $x = \frac{\pi}{3}$ នោះ $t = \frac{\pi}{6}$

គេបាន $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^n(\frac{\pi}{2} - t)}{\sin^n(\frac{\pi}{2} - t) + \cos^n(\frac{\pi}{2} - t)}.(-dt)$

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t + \sin^n t}.dt = J_n$$

ដូចនេះ $I_n = J_n$ ។

ខ)គណនា I_n និង J_n ៖

គេបាន $I_n + J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$

$$I_n + J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$ តែ $I_n = J_n$

នោះ $2I_n = 2J_n = \frac{\pi}{6}$ នាំឲ្យ $I_n = J_n = \frac{\pi}{12}$ ។

ដូចនេះ $I_n = \frac{\pi}{12}$ និង $J_n = \frac{\pi}{12}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១៨

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

I-គេឱ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិតដែល $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$

ចូរស្រាយថា $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$

II-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\ge 0}$ និង $(v_n)_{n\ge 0}$ កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 4 \;\; ; \;\; v_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{13u_n - 3v_n}{5} \\ v_{n+1} = \dfrac{12v_n - 2u_n}{5} \end{cases}$$

ដែល $n = 0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots$ ។

ក.គេតាង $x_n = u_n - v_n$ និង $y_n = 2u_n + 3v_n$ គ្រប់ $n \ge 0$

បង្ហាញថា (x_n) និង (y_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

គណនា x_n និង y_nជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.ចូរគណនា u_n និង v_nជាអនុគមន៍នៃ n ។

III-គេមានអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}.dx$

ដែល $n=0,1,2,...$

ក)ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនា $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}$ ។

ខ)គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

IV-គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (d_1) និង (d_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា ៖

$(d_1): x-2=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$ និង $(d_2): \frac{x-3}{-1}=y=\frac{z-4}{4}$

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2)

ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយថា $\frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b}$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ដែល $x\in[0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $x\in[0,\frac{\pi}{2})$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម នោះមាន $c\in(a,b)$ ដែល៖

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\tan b-\tan a}{b-a} \quad (1)$$

ហើយចំពោះ $x \in [a, b]$ ដែល $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$

គេមាន $\cos b \le \cos x \le \cos a$

នោះគេទាញ $\frac{1}{\cos^2 a} < f'(x) < \frac{1}{\cos^2 b}$

យក $x = c$ គេបាន $\frac{1}{\cos^2 a} < f'(c) < \frac{1}{\cos^2 b}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញ

$\frac{b-a}{\cos^2 a} \le \tan b - \tan a \le \frac{b-a}{\cos^2 b}$ ។

II-ក.បង្ហាញថា (x_n) និង (y_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $x_n = u_n - v_n$ នាំឱ្យ $x_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$

ដោយ $u_{n+1} = \frac{13u_n - 3v_n}{5}$ និង $v_{n+1} = \frac{12v_n - 2u_n}{5}$

គេបាន $x_{n+1} = \frac{13u_n - 3v_n}{5} - \frac{12v_n - 2u_n}{5}$

$x_{n+1} = 3(u_n - v_n) = 3\, x_n$

ដូចនេះ (x_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 3$

និងតួ $x_0 = u_0 - v_0 = 4 + 1 = 5$ ដូចនេះ $x_n = 5 \times 3^n$ ។

ម៉្យាងទៀត $y_n = 2u_n + 3v_n$ នាំឱ្យ $y_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1}$

$$y_{n+1} = 2\left(\frac{13u_n - 3v_n}{5}\right) + 3\left(\frac{12v_n - 2u_n}{5}\right)$$

$$y_{n+1} = \frac{26u_n - 6v_n + 36v_n - 6u_n}{5}$$

$$y_{n+1} = 4u_n + 6v_n = 2y_n$$

ដូចនេះ (y_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 2$

និងតួ $y_0 = 2u_0 + 3v_0 = 4 - 3 = 1$ ដូចនេះ $y_n = 2^n$ ។

ខ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើគេទាញ $\begin{cases} u_n - v_n = 5\times 3^n \\ 2u_n + 3v_n = 2^n \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបាន ៖

$$u_n = \frac{5\times 3^{n+1} + 2^n}{5} \quad ; \quad v_n = \frac{2^n - 10\times 3^n}{5}$$ ។

III-ក)ស្រាយថា (I_n) ជាស្វីតចុះ

គេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + x + 1}.dx$ និង $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2 + x + 1}.dx$

ចំពោះគ្រប់ $x \in [0,1]$ និង $n \in IN$ គេមាន $x^n \geq x^{n+1}$

នាំឲ្យ $\frac{x^n}{x^2 + x + 1} \geq \frac{x^{n+1}}{x^2 + x + 1}$ នោះ $I_n \geq I_{n+1}$ ។

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វីតចុះ ។

គណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ ៖

គេបាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + x^{n+2}}{x^2 + x + 1}.dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(1+x+x^2)}{x^2+x+1}.dx$$

$$= \int_0^1 x^n.dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

ខ) គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ៖

គេមាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ (1)

គេបាន $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n-1}$ (2) គ្រប់ $n \ge 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ គេមាន

$I_{n+2} \le I_{n+1} \le I_n \le I_{n-1} \le I_{n-2}$

នាំឲ្យ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$ (3)

តាម (1), (2) និង (3)គេទាញបាន $\frac{1}{n+1} \le 3I_n \le \frac{1}{n-1}$

នាំឲ្យ $\frac{n}{3(n+1)} \le nI_n \le \frac{n}{3(n-1)}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3(n-1)}=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}(nI_n)=\frac{1}{3}$ ។

IV-រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2)

តាង $A(x_A,y_A,z_A)\in(d_1)$ និង $B(x_B,y_B,z_B)\in(d_2)$

គេបាន $\begin{cases} x_A-2=\frac{y_A-4}{2}=\frac{z_A-5}{2}=p \\ \frac{x_B-3}{-1}=y_B=\frac{z_B-4}{4}=q \end{cases}$

នោះ $\begin{cases} x_A=p+2 \\ y_A=2p+4 \\ z_A=2p+5 \end{cases}$ (1) និង $\begin{cases} x_B=-q+3 \\ y_B=q \\ z_B=4q+4 \end{cases}$ (2)

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(-q-p+1\,,\,q-2p-4\,,\,4q-2p-1)$

តាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

គេបាន $\vec{u}=(1\,,2\,,2)$ និង $\vec{v}=(-1\,,1\,,4)$ ។

ដើម្បីឲ្យ (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់(d_1) និង (d_2)

លុះត្រាតែ $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\vec{u} \\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{v} \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{v}=0 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} -q-p+1+2q-4p-8+8q-4p-2=0 \\ q+p-1+q-2p-4+16q-8p-4=0 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} 9q-9p-9=0 \\ 18q-9p-9=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $p=-1 , q=0$ ។

យក $p=-1 , q=0$ ជួសក្នុង (1) និង (2) គេបាន ៖

$A(1,2,3)$ និង $B(3 ,0 , 4)$ ហើយគេបាន $\overrightarrow{AB}=(2 , -2 , 1)$

ដូចនេះ $(AB):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \quad ; t\in IR \\ z=3+t \end{cases}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១៦

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

ឆឆឆ☆ឈឈឈ

I-ក) ចូរស្រាយថា $1+\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$

ខ) គណនា

$$P = (1+\cot 1^o)(1+\cot 2^o)(1+\cot 3^o)...(1+\cot 134^o)$$

II-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 3 \ ; \ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{8}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{7}{3}v_n \end{cases}$$ ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...$ ។

ក.កំនត់គ្រប់គូ $(r ; \theta)$ ដើម្បីបាន $u_{n+1} + \theta v_{n+1} = r\ (u_n + \theta v_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^n \dfrac{dx}{8x^2+6x+1}$ ដែល $n > 0$

គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ។

IV-ចូរគណនា y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y បើគេដឹងថា៖

$x^3 + y^3 + 4 = 3xy$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក) ស្រាយថា $1 + \cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o - \alpha)}{\sin\alpha}$

គេមាន $1 + \cot\alpha = 1 + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

ដោយ $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(45^o + \alpha) = \sqrt{2}\sin(135^o - \alpha)$

ដូចនេះ៖ $1 + \cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o - \alpha)}{\sin\alpha}$ ។

ខ) គណនា

$P = (1 + \cot 1^o)(1 + \cot 2^o)(1 + \cot 3^o)...(1 + \cot 134^o)$

ដោយប្រើសមភាព $1 + \cot\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o - \alpha)}{\sin\alpha}$ គេបាន ៖

$P = \left(\sqrt{2}\right)^{134} = 2^{67} = 147573952589676412928$ ។

II-ក. កំនត់គ្រប់គូ $(r\,;\,\theta)$ ៖

គេមាន $u_{n+1} + \theta v_{n+1} = r\,(u_n + \theta v_n)$ $(*)$

ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{8}{3}u_n + \dfrac{2}{3}v_n$ និង $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{7}{3}v_n$

គេបានសមីការ ៖

$$\frac{8}{3}u_n+\frac{2}{3}v_n+\theta\left(\frac{1}{3}u_n+\frac{7}{3}v_n\right)=r\ (u_n+\theta v_n)$$

$$\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\theta\right)u_n+\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\theta\right)v_n=r\,u_n+r\,\theta\,v_n$$

សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ $n\geq 0$ លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases}\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\theta=r & (1)\\ \frac{2}{3}+\frac{7}{3}\theta=r\,\theta & (2)\end{cases}$$

យកសមីការ (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\theta=\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\theta\right)\theta$$ ឬ $2+7\theta=8\theta+\theta^2$

ឬ $\theta^2+\theta-2=0$ គេទាញ $\theta_1=1\ \vee\ \theta_2=-2$

ចំពោះ $\theta=1$ នោះ $r=3$

ចំពោះ $\theta=-2$ នោះ $r=2$

ដូចនេះ $(r\,;\,\theta)=\{\,(3\,;\,1)\,;\ (2\,;\,-2)\,\}$

ខ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៈ

ដោយយក $(r\,;\,\theta)=\{\,(3\,;\,1)\,;\ (2\,;\,-2)\,\}$ ជួសក្នុង $(*)$

គេបាន $\begin{cases}u_{n+1}+v_{n+1}=3(u_n+v_n) & (i)\\ u_{n+1}-2v_{n+1}=2(u_n-2v_n) & (ii)\end{cases}$

តាងស្វ៊ីត $\begin{cases}x_n=u_n+v_n\\ y_n=u_n-2v_n\end{cases}$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $\begin{cases} x_{n+1} = 3\ x_n \\ y_{n+1} = 2\ y_n \end{cases}$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (x_n) និង (y_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ មានផលធៀបរួមរៀងគ្នា $q_1 = 3$ និង $q_2 = 2$ និងតួដំបូង

$x_0 = u_0 + v_0 = 4$ និង $y_0 = u_0 - 2v_0 = 1$

តាមរូបមន្តគេបាន $x_n = 4\times 3^n$ និង $y_n = 2^n$

គេទាញបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} u_n + v_n = 4\times 3^n \\ u_n - 2v_n = 2^n \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបាន ៖

$u_n = \dfrac{8\times 3^n + 2^n}{3}$ និង $v_n = \dfrac{4\times 3^n - 2^n}{3}$ ។

III-គណនា $\mathrm{I_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I_n}$

គេមាន $\mathrm{I_n} = \displaystyle\int_0^n \frac{dx}{8x^2 + 6x + 1}$ ដែល $n > 0$

តាង $f(x) = \dfrac{1}{8x^2 + 6x + 1} = \dfrac{1}{(2x+1)(4x+1)}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច $f(x) = \dfrac{a}{2x+1} + \dfrac{b}{4x+1}$

គេបាន $\dfrac{a}{2x+1} + \dfrac{b}{4x+1} = \dfrac{1}{8x^2 + 6x + 1}$

នាំឲ្យ $a(4x+1) + b(2x+1) = 1$

ឬ $(4a+2b)x+(a+b)=1$

គេទាញ $\begin{cases} 4a+2b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-1\ ,\ b=2$

គេបាន $f(x)=-\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{4x+1}$

$$I_n=\int_0^n f(x).dx=\int_0^n\left(\frac{2}{4x+1}-\frac{1}{2x+1}\right).dx$$

$$=\int_0^n\frac{2dx}{4x+1}-\int_0^n\frac{dx}{2x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|4x+1|\right]_0^n-\frac{1}{2}\left[\ln|2x+1|\right]_0^n$$

$$=\frac{1}{2}\ln(4n+1)-\frac{1}{2}\ln(2n+1)=\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}$$

ដូចនេះ $I_n=\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}$ និង

$$\lim_{n\to\infty} I_n=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}=\ln\sqrt{2}$$ ។

IV-គណនា y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

គេមាន $x^3+y^3+2=3xy$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះគេបាន៖

$3x^2 + 3y'y^2 = 3y + 3xy'$

$x^2 + y'y^2 = y + xy'$

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

ហើយ $y'' = \frac{(y' - 2x)(y^2 - x) - (2yy' - 1)(y - x^2)}{(y^2 - x)^2}$

$$= \frac{(x^2 - 2xy^2 + y) - (y^2 - 2x^2y + x)y'}{(y^2 - x)^2}$$

ជំនួស $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$ រួចបង្រួមគេទទួលបាន៖

$y'' = \frac{2xy(3xy - x^3 - y^3 - 1)}{(y^2 - x)^3}$ ដោយ $x^3 + y^3 + 2 = 3xy$

ដូចនេះ $y'' = \frac{2xy}{(y^2 - x)^3}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១៧

សម្រាប់រយះពេល ២ម៉ោង

ឆឆឆ☆ឈឈឈ

I-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $0\le a<b\le\frac{\pi}{2}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$(b-a)\cos b<\sin b-\sin a<(b-a)\cos a$ ។

II-ក) ចូរស្រាយថា $\sin 3a-\sin a=2\sin a\cos 2a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin x\cos 2x+\sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}+...+\sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n}$$

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1\frac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n=0,1,2,...$

ចូរគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

IV-គេឲ្យប្លង់(P)កាត់តាមចំណុច $A(4,-2,2)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(1,2,2)$ ហើយបន្ទាត់ $(L):\frac{x-1}{-1}=\frac{y-4}{4}=z-2$ ។

ក-កំណត់សមីការនៃប្លង់(P) រួចគណនាកូអរដោនេចំណុច M ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់(P) ។

ខ-យកB,C,Dជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P)ជាមួយអក្ស $(ox),(oy),(oz)$ រៀងគ្នា ។ ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

រួចគណនាផ្ទៃក្រលារបស់វា ។

គ-គេឲ្យ $S(2,-6,-2)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA)អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ (ABCD) ។ គណនារង្វាស់ SA រួចទាញរកមាឌនៃពីរ៉ាមីត SABCD ។

ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយថា $(b-a)\cos b \le \sin b - \sin a \le (b-a)\cos a$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\sin x$ ដែល $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

គេបាន $f'(x)=\cos x$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម នោះមាន $c\in(a,b)$ ដែល៖

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\sin b-\sin a}{b-a} \quad (1)$$

ហើយចំពោះ $x\in[a,b]$ ដែល $0\le a<b\le\frac{\pi}{2}$

គេមាន $\cos b<\cos x<\cos a$

នោះគេទាញ $\cos b<f'(x)<\cos a$

យក $x=c$ គេបាន $\cos b<f'(c)<\cos a \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញ $\cos b<\frac{\sin b-\sin a}{b-a}<\cos a$

ដូចនេះ $(b-a)\cos b<\sin b-\sin a<(b-a)\cos a$ ។

II-ក) ស្រាយថា $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$

តាមរូបមន្ត $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

គេបាន $\sin 3a - \sin a = 2\sin\frac{3a-a}{2}\cos\frac{3a+a}{2} = 2\sin a\cos 2a$

ដូចនេះ $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin x\cos 2x + \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} + \ldots + \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$

យក $a = \frac{x}{2^k}$ គេបាន $\sin\frac{x}{3^{k-1}} - \sin\frac{x}{3^k} = 2\sin\frac{x}{3^k}\cos\frac{2x}{3^k}$

ឬ $\sin\frac{x}{3^k}\cos\frac{2x}{3^k} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{3^{k-1}} - \sin\frac{x}{3^k}\right)$

ចំពោះ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ គេបាន ៖

$$\begin{cases} \sin x\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) \\ \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} = \frac{1}{2}(\sin x - \sin\frac{x}{3}) \\ ------------------ \\ \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n} = \frac{1}{2}(\sin\frac{x}{3^{n-1}} - \sin\frac{x}{3^n}) \end{cases}$$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គគេបាន $S = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin\frac{x}{3^n})$ ។

III-គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$

គេមាន $I_n=\int_0^1\frac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n=0,1,2,...$

គេបាន $I_{n+1}=\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$

$$I_n+I_{n+1}=\int_0^1\frac{t^{3n}+t^{3n+3}}{1+t^3}.dt=\int_0^1 t^{3n}.dt=\left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^1=\frac{1}{3n+1}$$

$I_n+I_{n+1}=\frac{1}{3n+1}$ (1) និង $I_{n-1}+I_n=\frac{1}{3n-2}$ (2)

គ្រប់ $t\in[0\,,1]$ គេមាន $t^{3n}\geq t^{3n+3}$ នាំឲ្យ $\frac{t^{3n}}{1+t^3}\geq\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}$

គេទាញ $\int_0^1\frac{t^{3n}}{1+t^3}dt\geq\int_0^1\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$ ឬ $I_n\geq I_{n+1}$ គ្រប់ $n=0,1,2,...$

នាំឲ្យ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណះនៃស្វ៊ីតចុះគេបាន ៖

$I_{n+1}\leq I_n\leq I_{n-1}$ នាំឲ្យ $\frac{I_{n+1}+I_n}{2}\leq I_n\leq\frac{I_n+I_{n-1}}{2}$ (3)

យកទំនាក់ទំនង(1)និង(2)ជំនួសក្នុង(3)គេបាន ៖

$\frac{1}{6n+2}\leq I_n\leq\frac{1}{6n-4}$ នាំឲ្យ $\frac{n}{6n+2}\leq nI_n\leq\frac{n}{6n-4}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{6n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{6n-4}=\frac{1}{6}$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)=\frac{1}{6}$ ។

IV-ក)កំណត់សមីការនៃប្លង់(P)៖

តាមរូបមន្ត $(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

ដោយ $A(4,-2,2)$ និង $\vec{n}=(1,2,2)$

គេបាន $1.(x-4)+2(y+2)+2(z-2)=0$

$$x-4+2y+4+2z-4=0$$

ដូចនេះ $(P): x+2y+2z-4=0$ ។

គណនាកូអរដោនេចំណុច M ៖

តាង $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-4}{4}=z-2=t$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=4t+4 \\ z=t+2 \end{cases}$ (1)

យកសមីការ(1)ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$(-t+1)+2(4t+4)+2(t+2)-4=0$

$$9t+9=0 \Rightarrow t=-1$$

យកតម្លៃ $t=-1$ ជួសក្នុង(1) គេបាន $\begin{cases} x=-(-1)+1=2 \\ y=4(-1)+4=0 \\ z=-1+2=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $M(2,0,1)$ ។

ខ-ស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ៖

គេមាន $(P): x+2y+2z-4=0$

-បើ $y=0, z=0$ គេបាន $x-4=0$ នោះ $x=4$

-បើ $x=0, z=0$ គេបាន $2y-4=0$ នោះ $y=2$

-បើ $x=0, y=0$ គេបាន $2z-4=0$ នោះ $z=2$

គេបាន $B(4,0,0), C(0,2,0), D(0,0,2)$ ។

ដោយ $A(4,-2,2)$ នោះ $\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$ និង $\overrightarrow{DC}=(0,2,-2)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ នោះ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

គណនាផ្ទៃក្រលានៃ $ABCD$ ៖

តាមរូបមន្ត $S_{ABCD}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=(0,2,-2)$, $\overrightarrow{AD}=(-4,2,0)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -2\\ -4 & 2 & 0\end{vmatrix}=4\vec{i}+8\vec{j}+8\vec{k}$

$S_{ABCD}=\sqrt{4^2+8^2+8^2}=12$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

គ-បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA)អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ $(ABCD)$ ៖

គេមាន $S(2,-6,-2)$ និង $A(4,-2,2), B(4,0,0), C(0,2,0)$

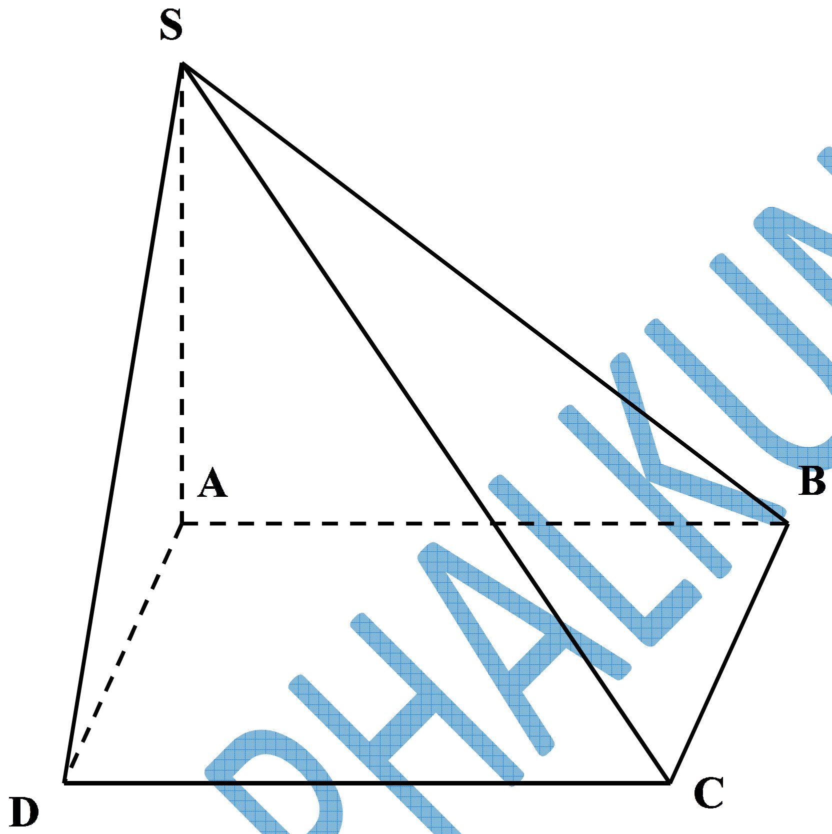
នោះ $\overrightarrow{SA}=(2,4,4)$, $\overrightarrow{AB}=(0,2,-2); \overrightarrow{AC}=(-4,4,-2)$

គេបាន $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}=0+8-8=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{AB}$

ហើយ $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}=-8+16-8=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{AC}$

ដូចនេះ(SA)អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ $(ABCD)$ ។

គណនារង្វាស់ SA រួចទាញរកមាឌនៃពីរ៉ាមីត SABCD ៖



គេបាន $SA = |\overrightarrow{SA}| = \sqrt{4+16+16} = 6$ ។

តាមរូបមន្ត $V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times SA$ ដោយ $\begin{cases} SA = 6 \\ S_{ABCD} = 12 \end{cases}$

ដូចនេះ $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 6 \times 12 = 24$ (ឯកតាមាឌ) ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១៨

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

☆

I-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 4 \ ; \ v_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^{\ 2} + 2v_n^{\ 2} \\ v_{n+1} = 2u_n v_n + v_n^{\ 2} \end{cases}$$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $u_n > v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន ៖

$$u_{n+1} + r\,v_{n+1} = (u_n + r\,v_n)^2$$

គ. ចូរគណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

II-គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x)$ កំនត់ និង មានដេរីវេលើ IR ដោយ ៖

$$\begin{cases} f'(x).f^2(x) = x(x-2) \\ f(0) = 2 \end{cases}$$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ ។

III-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3 + a^3} \, , a > 0$

ក. ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ $\mathbf{n}$ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង $\mathbf{a}$ ។

ខ. គណនា $\mathbf{I_n}$ ចំពោះតម្លៃ $\mathbf{n}$ ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

IV-ក) ចូរស្រាយថា $\sin a\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{4}(2\sin a-\sin 2a)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin a\sin^2\frac{a}{2}+2\sin\frac{a}{2}\sin^2\frac{a}{4}+....+2^n\sin\frac{a}{2^n}\sin^2\frac{a}{2^{n+1}}$$

ដំណោះស្រាយ

I-ក. ស្រាយថា $u_n>v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$

យើងមាន $u_0=4>v_0=2$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $u_k>v_k$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$ គឺ $u_{k+1}>v_{k+1}$ ពិត

គេមាន $u_{k+1}-v_{k+1}=\left(u_k{}^2+2v_k{}^2\right)-\left(2u_kv_k+v_k{}^2\right)$

$$u_{k+1}-v_{k+1}=(u_k-v_k)^2>0 \text{ ព្រោះ } u_k>v_k$$

គេទាញ $u_{k+1}>v_{k+1}$ ពិត

ដូចនេះ $u_n>v_n$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត r ៖

គេមាន $u_{n+1}+r\,v_{n+1}=(u_n+r\,v_n)^2$ (*)

ដោយ $u_{n+1}=u_n{}^2+2v_n{}^2$ និង $v_{n+1}=2u_nv_n+v_n{}^2$

គេបាន $\left(u_n{}^2+2v_n{}^2\right)+r\left(2u_nv_n+v_n{}^2\right)=(u_n+r\,v_n)^2$

$$u_n^{\ 2} + 2r\,u_n v_n + (2+r)v_n^{\ 2} = u_n^{\ 2} + 2r u_n v_n + r^2 v_n^{\ 2}$$

គេទាញ $2+r=r^2$ ឬ $r^2-r-2=0$

ដូចនេះ៖ $r_1=-1$ ឬ $r_2=2$ ។

គ. គណនា u_n និង v_n ជាអុគមន៍នៃ n ៖

យកតម្លៃ $r=-1$; $r=2$ ជំនួសក្នុង $(*)$ គេបាន ៖

$$\begin{cases} u_{n+1} - v_{n+1} = (u_n - v_n)^2 \\ u_{n+1} + 2v_{n+1} = (u_n + 2v_n)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(u_{n+1} - v_{n+1}) = 2\ln(u_n - v_n) & (i) \\ \ln(u_{n+1} + 2v_{n+1}) = 2\ln(u_n + 2v_n) & (ii) \end{cases}$$

តាង $x_n = \ln(u_n - v_n)$ និង $v_n = \ln(u_n + 2v_n)$

តាម (i) & (ii) គេបាន $x_{n+1} = 2x_n$ និង $y_{n+1} = 2y_n$

នាំឱ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុងរៀងគ្នា

$q_1 = 2$ និង $q_2 = 2$ និងតួ $x_0 = \ln 2$ និង $y_0 = \ln 8$

គេបាន $x_n = 2^n \ln 2$ និង $y_n = 2^n \ln 8$

ដោយ $x_n = \ln(u_n - v_n)$ និង $v_n = \ln(u_n + 2v_n)$

គេទាញ $\begin{cases} \ln(u_n - v_n) = 2^n \ln 2 \\ \ln(u_n + 2v_n) = 2^n \ln 8 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} u_n - v_n = 2^{2^n} \\ u_n + 2v_n = 8^{2^n} \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធ័នេះគេទទួលបាន ៖

$$u_n = \frac{2^{2^n+1} + 8^{2^n}}{3} \quad \text{និង} \quad v_n \frac{8^{2^n} - 2^{2^n}}{3}$$

II-កំនត់រកអនុគមន៍ $y=f(x)$ ៖

គេមាន $f'(x).f^2(x)=x(x-2)\quad (1)$

តាង $g(x)=f^3(x)$ គេបាន $g'(x)=3f'(x).f^2(x)$

ឬ $\frac{1}{3}g'(x)=f'(x).f^2(x)$

ទំនាក់ទំនង (1) ទៅជា $\frac{1}{3}g'(x)=x(x-2)$

$$g'(x)=3x^2-6x$$

$$g(x)=x^3-3x^2+k$$

បើ $x=0$ នោះ $g(0)=k$

ដោយ $g(0)=f^3(0)=(2)^3=8$

គេបាន $g(x)=x^3-3x^2+8$ តែ $g(x)=f^3(x)$

គេទាញ $f^3(x)=x^3-3x^2+8$ នាំឲ្យ $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$

ដូចនេះ $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$ ។

III-ក. កំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a

យើងមាន $I_n=\int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3+a^3}$, $a>0$

យើងតាង $x=a.t$ នាំឱ្យ $dx=a.dt$

ហើយចំពោះ $x\in[0,a]$ នាំឱ្យ $t\in[0,1]$

គេបាន $I_n=\int_0^1 \frac{(a.t)^n.a.dt}{(at)^3+a^3}=a^{n-2}.\int_0^1 \frac{t^n.dt}{t^3+1}$

តាមទំនាក់ទំនងនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a លុះត្រាតែ $n-2=0$ ឬ $n=2$ ។

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a គេត្រូវឱ្យ $n=2$ ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ

ចំពោះ $n=2$ គេបាន $I_2=\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1}$

តាង $U=x^3+1$ នាំឱ្យ $dU=3x^2.dx$

ហើយចំពោះ $x\in[0,1]$ នាំឱ្យ $U\in[1\ ,\ 2]$

យើងបាន $I_2=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{dU}{U}=\frac{1}{3}[\ln|U|]_1^2=\frac{1}{3}\ln 2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I_2=\frac{1}{3}\ln 2}$ ។

IV-ក) ស្រាយថា $\sin a\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{4}(2\sin a-\sin 2a)$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a=2\sin a\cos a$

គេបាន $2\sin a-\sin 2a=2\sin a-2\sin a\cos a$

$$=2\sin a(1-\cos a)$$

$$=2\sin a(2\sin^2\frac{a}{2})$$

$$=4\sin a\sin^2\frac{a}{2}$$

ដូចនេះ $\sin a\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{4}(2\sin a-\sin 2a)$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin a\cos^2\frac{a}{2}+2\sin\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{4}+....+2^n\sin\frac{a}{2^n}\cos^2\frac{a}{2^{n+1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(2^k\sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}}\right)$$

គេមាន $\sin a\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{4}(2\sin a-\sin 2a)$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{2^k}$ គេបាន ៖

$$\sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}}=\frac{1}{4}\left(2\sin\frac{a}{2^k}-\sin\frac{a}{2^{k-1}}\right)$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 2^k ៖

$$2^k\sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}}=\frac{1}{4}(2^{k+1}\sin\frac{a}{2^k}-2^k\sin\frac{a}{2^{k-1}})$$

គេបាន

$$S=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(2^{k+1}\sin\frac{a}{2^k}-2^k\sin\frac{a}{2^{k-1}})=\frac{1}{4}(2^{n+1}\sin\frac{a}{2^n}-\sin 2a)$$

ដូចនេះ $S=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{a}{2^{n+1}}-\sin 2a\right)$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១៩

សម្រាប់រយះពេល ២ម៉ោង

I-ក) ចូរស្រាយថា $\cos^2 a - \cos^2 2a = \sin a \sin 3a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a \sin 3a + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2} + \dots + \sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n}$$

II-គេឲ្យអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុបពីការលក់សម្ភារះ x គ្រឿងនិងអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយសរុបលើការផលិតសម្ភារះ x កំណត់រៀងគ្នាដោយ $R(x) = 300x$

និង $C(x) = 1000 - 72x^2 + x^3$ ។

ក)កំណត់អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប ។

ខ)កំណត់បរិមាណសម្ភារះដែលត្រូវលក់ដើម្បីឲ្យគេទទួលបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមារួចរកប្រាក់ចំណេញអតិបរមានោះ ។

III-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ និង $(v_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ v_0 = 2 \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n^3 - 6u_nv_n^2 - 6v_n^3 \\ v_{n+1} = 3u_n^2v_n + 9u_nv_n^2 + 7v_n^3 \end{cases}$$

ដែល $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ចូរស្រាយថា $u_n + v_n > 0$

និង $u_n + 2v_n > 0$ ។

ខ. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន ៖

$$u_{n+1} + r\,v_{n+1} = (u_n + r\,v_n)^3$$

គ. ចូរគណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

IV-ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ ៖ ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

ដំណោះស្រាយ

I-ក) ស្រាយថា $\cos^2 a - \cos^2 2a = \sin a \sin 3a$

គេមាន $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ និង $\cos^2 2a = \dfrac{1+\cos 4a}{2}$

$$\cos^2 a - \cos^2 2a = \frac{1+\cos 2a}{2} - \frac{1+\cos 4a}{2}$$

$$= \frac{\cos 2a - \cos 4a}{2}$$

$$= -\sin\frac{2a-4a}{2}\sin\frac{2a+4a}{2} = \sin a \sin 3a$$

ដូចនេះ $\cos^2 a - \cos^2 2a = \sin a \sin 3a$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a \sin 3a + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2} + ... + \sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\cos^2 a - \cos^2 2a = \sin a \sin 3a$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{2^k}$ គេបាន

$$\cos^2\frac{a}{2^k} - \cos^2\frac{a}{2^{k-1}} = \sin\frac{a}{2^k}\sin\frac{3a}{2^k}$$

ចំពោះ $k = 0 : \sin a \sin 3a = \cos^2 a - \cos^2 2a$

ចំពោះ $k = 1 : \sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2} = \cos^2\frac{a}{2} - \cos^2 a$

ចំពោះ $k = 3 : \sin\frac{a}{2^2}\sin\frac{3a}{2^2} = \cos^2\frac{a}{2^2} - \cos^2\frac{a}{2}$

ចំពោះ $k = n : \sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n} = \cos^2\frac{a}{2^n} - \cos^2\frac{a}{2^{n-1}}$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $S = \cos\frac{a}{2^n} - \cos 2a$ ។

ដូចនេះ $S = \cos\frac{a}{2^n} - \cos 2a$ ។

II-ក/កំណត់អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប

តាង $P(x)$ ជាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណេញសរុបពីការលក់សម្ភារះ

គេបាន $P(x) = R(x) - C(x) = 300x - 1000 + 72x^2 - x^3$

ដូចនេះ $P(x) = -x^3 + 72x^2 + 300x - 1000$ ។

ខ/កំណត់បរិមាណសម្ភារៈដែលត្រូវលក់ដើម្បីឲ្យគេទទួលបាន
ប្រាក់ចំណេញអតិបរមា រួចកំណត់រកប្រាក់ចំណេញអតិបរមានោះ

គេមាន $P'(x) = -3x^2 + 144x + 300 = -3(x-50)(x+2)$

បើ $P'(x) = 0$ នោះ $x_1 = 50$, $x_2 = -2$(មិនយក)

គេមាន $P''(x) = -6x + 144$ នោះ $P''(50) = -300 + 144 < 0$

នោះមានន័យថា $P(x)$ មានអតិបរមាត្រង់ $x = 50$ ។

ដូចនេះដើម្បីបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមាគេត្រូវលក់សម្ភារៈ 50 ឯកតាហើយប្រាក់ចំណេញអតិបរមានោះគឺ ៖

$P_{max} = P(50) = 69,000$ ឯកតារូបិយវត្ថុ ។

III-ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ស្រាយថា $u_n + v_n > 0$

គេមាន $u_0 + v_0 = 4 + 2 = 6 > 0$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k + v_k > 0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ គឺ $u_{k+1} + v_{k+1} > 0$ ពិត

គេមាន $u_{k+1} + v_{k+1} = u_n^{\ 3} + 3u_n^{\ 2}v_n + 3u_n v_n^{\ 2} + v_n^{\ 3}$

$$u_{k+1} + v_{k+1} > (u_k + v_k)^3 > 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $u_n + v_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ស្រាយថា $u_n + 2v_n > 0$ ៖

គេមាន $u_0 + 2v_0 = 4 + 4 = 8 > 0$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k + 2v_k > 0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n=k+1$ គឺ $u_{k+1}+2v_{k+1}>0$ ពិត

គេមាន $u_{k+1}+2v_{k+1}=u_n^{\ 3}+6u_n^{\ 2}v_n+12u_nv_n^{\ 2}+8v_n^{\ 3}$

$$u_{k+1}+2v_{k+1}>(u_k+2v_k)^3>0$$ ពិត

ដូចនេះ $u_n+2v_n>0$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ខ. កំនត់ចំនួនពិត r ដើម្បីឱ្យបាន ៖

$$u_{n+1}+r\,v_{n+1}=(u_n+r\,v_n)^3 \quad (*)$$

ដោយ $\begin{cases} u_{n+1}=u_n^{\ 3}-6u_nv_n^{\ 2}-6v_n^{\ 3} \\ v_{n+1}=3u_n^{\ 2}v_n+9u_nv_n^{\ 2}+7v_n^{\ 3}\end{cases}$ គេបាន ៖

$$u_{n+1}+r\,v_{n+1}=u_n^{\ 3}+3ru_n^{\ 2}v_n+(9r-6)u_nv_n^{\ 2}+(7r-6)v_n^{\ 3}\,(i)$$

ហើយ $(u_n+r\,v_n)^3=u_n^{\ 3}+3ru_n^{\ 2}v_n+3r^2u_nv_n^{\ 2}+r^3v_n^{\ 3}\ (ii)$

ដោយប្រៀបធៀបទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន ៖

$$\begin{cases} 3r^2=9r-6 \\ r^3=7r-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2-3r+2=0 \\ r^3-7r+6=0\end{cases}$$

ដូចនេះ $r_1=1\ ;\ r_2=2$ ។

គ. គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

យកតម្លៃ $r_1=1\ ;\ r_2=2$ ជួសក្នុង $(*)$ គេបាន ៖

$$\begin{cases} u_{n+1}+v_{n+1}=(u_n+v_n)^3 \\ u_{n+1}+2v_{n+1}=(u_n+2v_n)^3\end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(u_{n+1}+v_{n+1})=3\ln(u_n+v_n) \\ \ln(u_{n+1}+2v_{n+1})=3\ln(u_n+2v_n)\end{cases}$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(u_n+v_n)\}$ និង $\{\ln(u_n+2v_n)\}$ សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q=3$ ដូចគ្នា ។

គេបាន $\begin{cases} \ln(u_n+v_n)=3^n\ln(u_0+v_0)=3^n\ln 6 \\ \ln(u_n+2v_n)=3^n\ln(u_0+2v_0)=3^n\ln 8 \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} u_n+v_n=6^{3^n} \\ u_n+2v_n=8^{3^n} \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេទទួលបាន ៖

$u_n=2\times 6^{3^n}-8^{3^n}$ និង $v_n=8^{3^n}-6^{3^n}$ ។

IV-បង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

តាង $t=a+b-x \Rightarrow dt=-dx$

បើ $x=a\Rightarrow t=b$ និង $x=b\Rightarrow t=a$

យើងបាន

$$\int_a^b f(x).dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=-\int_b^a f(a+b-t).dt=\int_a^b f(a+b-t).dt$$

ដូចនេះ $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$ ។

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

តាមរូបមន្តខាងលើយើងអាចសរសេរ ៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left[1+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)\right].dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\ln 4-\ln(1+\sqrt{3}\tan x)\right].dx$$

$$I=\ln 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{2\pi}{3}\ln 2\ -I$$

$2I=\frac{2\pi}{3}\ln 2$ នាំឱ្យ $I=\frac{\pi}{3}\ln 2$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{\pi}{3}\ln 2}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី២០

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

☙☙☙☆❧❧❧

I-គេឲ្យអនុគមន៍ $f : IN \to IR$ ដោយដឹងថាគ្រប់ $x \in IN$ គេមាន $f(1) = 2013$ និង $f(2x) = 2f(x) - 2013$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ $f(2^{2013})$?

II-គេឱ្យស្វ៊ីត $S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$ ដែល $n \in IN^*$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $S_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ។

ខ-គណនាផលបូក

$$\Sigma_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + ... + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

III-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$?

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$ ។

IV-ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានបីចំណុច

$A(-1,2,3)$, $B(0,-1,1)$ និង $C(2,3,5)$ ។

ក-ចូរកំណត់សមីការប្លង់ **(P)**កាត់តាមចំណុច **A** ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ **(L)** កាត់តាមពីរចំណុច**B ,C**

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ **H** រវាងបន្ទាត់ **(L)** ជាមួយប្លង់ **(P)** ។

គ-រកប្រភេទនៃត្រីកោណ**ABC** រួចគណនាផ្ទៃក្រឡា**ΔABC**។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា $f(2^{2013})$

គេមាន $f(2x)=2f(x)-2013$ គ្រប់ $x\in IN$

ជ្រើសរើស $x=2^{k-1}$ គ្រប់ $k\in IN$ គេបាន ៖

$$f\left(2^k\right)=2f\left(2^{k-1}\right)-2013 \text{ ឬ } \frac{f\left(2^k\right)}{2^k}-\frac{f\left(2^{k-1}\right)}{2^{k-1}}=-\frac{2013}{2^k}$$

គេបាន $$\sum_{k=1}^{2013}\left[\frac{f\left(2^k\right)}{2^k}-\frac{f\left(2^{k-1}\right)}{2^{k-1}}\right]=-\sum_{k=1}^{2013}\frac{2013}{2^k}$$

$$\frac{f(2^{2013})}{2^{2013}}-f(1)=-2013\times\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^{2013}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{f(2^{2013})}{2^{2013}}-2013=-2013+\frac{2013}{2^{2013}}$$

ដូចនេះ $f(2^{2013})=2013$ ។

II-ក)បង្ហាញថា $S_n = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

យើងមាន $S_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ (ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$)

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

គេបាន

$$\Sigma_n = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} = \sum_{k=1}^{n}(S_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = n+1-\frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{n(n+1)} = \frac{n(n+2)}{n+1}$$

ដូចនេះ $\Sigma_n = \frac{n(n+2)}{n+1}$ ។

III-បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

តាង $x = \pi - t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

និង ចំពោះ $x \in [0,\pi]$ នាំឱ្យ $t \in [\pi, 0]$

គេបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t).f[\sin(\pi - t)].dt$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \int_0^{\pi} (\pi - t).f(\sin t).dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t).dt - \int_0^{\pi} t.f(\sin t).dt$$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x).dx - \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

អនុវត្តន៍: គណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$

គេមាន $I = \int_0^{\pi} \frac{x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi} x.\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}$

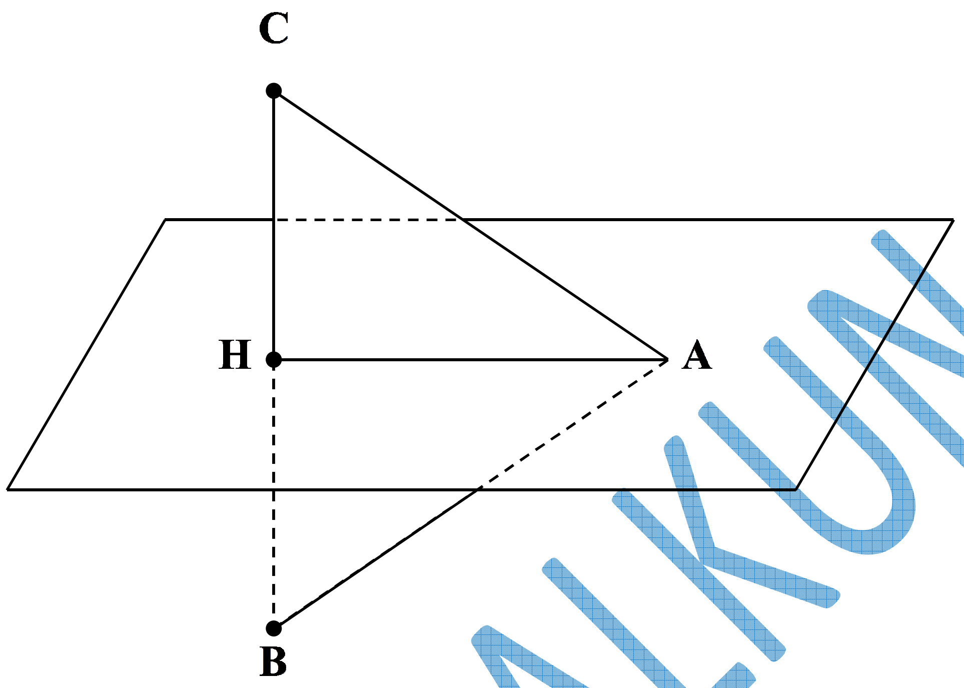
តាង $z = \cos x$ នាំឱ្យ $dz = -\sin x.dx$

ហើយចំពោះ $x \in [0,\pi]$ នោះ $z \in [1,-1]$

គេបាន $I = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2}[\arctan z]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ ។

ដូចនេះ: $\boxed{I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}}$ ។

IV-ក)កំណត់សមីការប្លង់ (P) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) ៖



វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)គឺ $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (2,4,4)$ ។

សមីការប្លង់(P) កាត់តាមចំណុច A អាចសរសេរតាមរូបមន្ត

$$(P): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(P): 2(x+1) + 4(y-2) + 4(z-3) = 0$$

$$(P): 2x + 4y + 4z - 18 = 0$$

$$(P): x + 2y + 2z - 9 = 0$$

ដូចនេះ $(P): x + 2y + 2z - 9 = 0$ ។

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺ $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (2,4,4)$

សមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច B និង C អាចសរសេរ

តាមរូបមន្ត $(L):\begin{cases} x = x_B + at \\ y = y_B + bt \\ z = z_B + ct \quad , t \in IR \end{cases}$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 1 + 4t \quad , t \in IR \end{cases}$

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H ៖

យកសមីការ (L) ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$2t + 2(-1 + 4t) + 2(1 + 4t) - 9 = 0$

$2t - 2 + 8t + 2 + 8t - 9 = 0$

$18t - 9 = 0$ នាំឲ្យ $t = \dfrac{1}{2}$ ។

យកតម្លៃ $t = \dfrac{1}{2}$ ជួសក្នុងសមីការ(L)គេបាន $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2 = 1 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases}$

ដូចនេះ H(1,1,3) ។

គ-រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ ΔABC

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (1, -3, -2)$; $\overrightarrow{BC} = (2, 4, 4)$; $\overrightarrow{CA} = (-3, -1, -2)$

ដោយ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$; $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$

នោះគេទាញ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{14}$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A ។

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AH} = (2, -1, 0)$

គេបាន $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=(2)(2)+(-1)(4)+(0)(4)=0$ សមមូល

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

នោះ AH ជាកម្ពស់នៃ ΔABC ។ គេបាន $S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC$

តែ $AH=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5}$,$BC=\sqrt{4+16+16}=6$

ដូចនេះ $S_{ABC}=3\sqrt{5}$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី២១

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

ឆឆឆ☆ឲឲឲ

I-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$u_n = \frac{(n-1)(3n+1)}{4^n} \text{ ដែល } n = 1 \,;\, 2 \,;\, 3 \,;\, ...$$

ក. ចូរសរសេរ u_n ជារាង $\dfrac{An^2}{4^n} + \dfrac{B(n+1)^2}{4^{n+1}}$ ដែល A និង B ជាពីរចំនួនពិតត្រូវកំនត់ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

II-ចូរបង្ហាញថា $\tan 10^o + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$ ។

III-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a f(x).dx$, $q > 0$, $q \neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $\displaystyle I = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{1+3^x}.dx$

IV-គេឱ្យ $(\alpha): 2x + 2y + z - 9 = 0$ និង $(\Delta): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 - 4t \\ z = 2 + t \quad , t \in IR \end{cases}$

ក-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (Δ)និងប្លង់ (α)។
ខ-កំណត់រង្វាស់មុំស្រួចរវាងបន្ទាត់ (Δ) និង ប្លង់ (α) ។
គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច A ។
ឃ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់(α)និង(β)

ដំណោះស្រាយ

I-ក.សរសេរ u_n ជារាង $\frac{An^2}{4^n}+\frac{B(n+1)^2}{4^{n+1}}$

គេបាន $\frac{An^2}{4^n}+\frac{B(n+1)^2}{4^{n+1}}=\frac{(n-1)(3n+1)}{4^n}$

$$4An^2+B(n+1)^2=4(3n^2-2n-1)$$

$$(4A+B)n^2+2Bn+B=12n^2-8n-4$$

គេទាញ $\begin{cases}4A+B=12\\2B=-8\\B=-4\end{cases}$ នាំឱ្យ $A=4\ ;\ B=-4$ ។

ដូចនេះ $u_n=\frac{4n^2}{4^n}-\frac{4(n+1)^2}{4^{n+1}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}(u_k)=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

គេមាន $u_n=\frac{4n^2}{4^n}-\frac{4(n+1)^2}{4^{n+1}}=\frac{n^2}{4^{n-1}}-\frac{(n+1)^2}{4^n}$

គេបាន $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{k^2}{4^{k-1}}-\frac{(k+1)^2}{4^k}\right]$

$$=(0-1)+\left(1-\frac{4}{4}\right)+\left(\frac{4}{4}-\frac{9}{16}\right)+\left(\frac{9}{16}-\frac{16}{64}\right)+\dots$$

$$\dots.+\left(\frac{n^2}{4^{n-1}}-\frac{(n+1)^2}{4^n}\right)$$

$$=-\frac{(n+1)^2}{4^n}$$

ដូចនេះ $S_n=-\dfrac{(n+1)^2}{4^n}$ ហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=0$ ។

II-បង្ហាញថា $\tan 10^o+\dfrac{1}{\sin 40^o}=\sqrt{3}$

ឧបមាថា $\tan 10^o+\dfrac{1}{\sin 40^o}=\sqrt{3}$ ពិត

សមមូល $\dfrac{\sin 10^o}{\cos 10^o}+\dfrac{1}{\sin 40^o}=\sqrt{3}$

សមមូល $\sin 40^o\sin 10^o+\cos 10^o=\sqrt{3}\sin 40^o\cos 10^o$

$$\frac{1}{2}\left(\cos 30^o-\cos 50^o\right)+\cos 10^o=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin 50^o+\sin 30^o\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 50^o\right)+\cos 10^o=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin 50^o+\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\cos 50^o+\cos 10^o=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^o+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos 10^o=\frac{1}{2}\cos 50^o+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^o$$

$$\cos 10^o=\cos 60^o\cos 50^o+\sin 60^o\sin 50^o$$

$\cos 10^o = \cos(60^o - 50^o)$ ពិត

ដូចនេះ $\tan 10^o + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$ ។

III-ក.បង្ហាញថា $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a f(x).dx \ , \ q>0 \ ,q \neq 1$ ។

គេមាន $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_{-a}^{0} \frac{f(x).dx}{1+q^x} + \int_0^a \frac{f(x).dx}{1+q^x} \quad (1)$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ និងចំពោះ $x \in [-a,0]$ នាំឱ្យ $t \in [a,0]$

គេបាន

$$\int_{-a}^{0} \frac{f(x).dx}{1+q^x} = -\int_a^0 \frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}} = \int_0^a \frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t} = \int_0^a \frac{q^x f(-x).dx}{1+q^x}$$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x)=f(x) \ , \forall x \in [-a,a]$

គេទាញបាន $\displaystyle\int_{-a}^{0} \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a \frac{q^x.f(x)}{1+q^x}.dx \quad (2)$

យក (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a \frac{q^x.f(x).dx}{1+q^x} + \int_0^a \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a \frac{(q^x+1)f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a f(x).dx$$

ដូចនេះ $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a f(x).dx \ , \ q>0 \ ,q \neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{1+3^x}.dx$

ដោយ $f(x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេបាន ៖

$$I=\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos 2x}.dx=2\int_0^{\pi}|\cos x|.dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x.dx$$

$$=2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-2[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2(1-0)-2(0-1)=4$$

ដូចនេះ $\boxed{I=4}$ ។

IV-ក)រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (Δ)និងប្លង់ (α)៖

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុង (α) គេបាន ៖

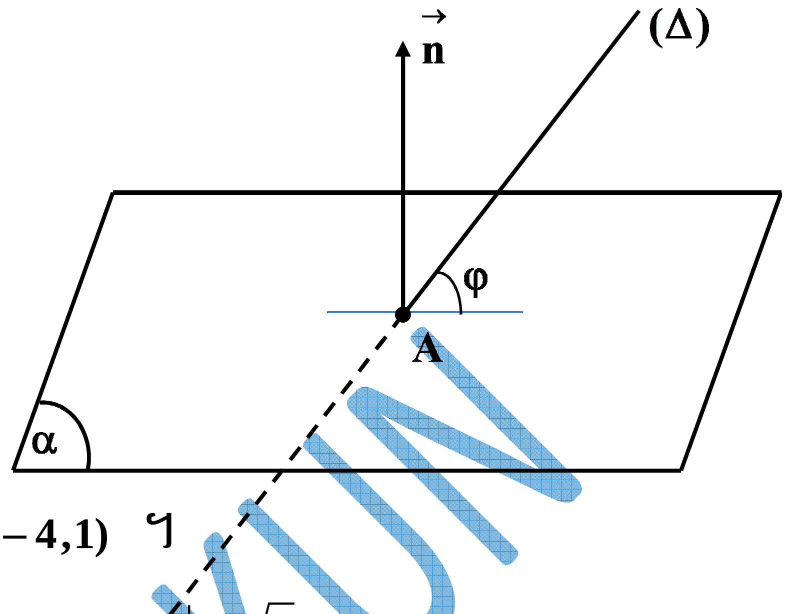
$$2(2-t)+2(6-4t)+(2+t)-9=0$$
$$4-2t+12-8t+2+t-9=0$$
$$-9t+9=0$$

គេទាញបាន $t=1$ យកជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=1,y=2,z=3$

ដូចនេះ $A(1,2,3)$ ។

ខ-កំណត់រង្វាស់មុំស្រួចរវាងបន្ទាត់ (Δ) និង ប្លង់ (α) ៖

តាង $\vec{n}$ និង $\vec{u}$ រៀងគ្នាជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ និងវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស



នៃប្លង់(α) និងបន្ទាត់(Δ)
ហើយ θ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ
$\vec{n}$ និង $\vec{u}$ ហើយ φ ជាមុំរវាង
បន្ទាត់(Δ)និងប្លង់(α) នោះ
គេបាន $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ ។
គេមាន $\vec{n} = (2,2,1)\,;\,\vec{u} = (-1,-4,1)$ ។

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n}.\vec{u}}{|\vec{n}|.|\vec{u}|}\right| = \left|\frac{-2-8+1}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{1+16+1}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ គេបាន $\theta = \frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច A ៖

ដោយ $(\beta)\perp(\Delta)$ នោះ $\vec{u} = (-1,-4,1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(β)

តាមរូបមន្ត $(\beta): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ $A\in(\beta)$ នោះ $(\beta): -(x-1)-4(y-2)+(z-3)=0$

ដូចនេះ $(\beta): -x-4y+z+6=0$ ។

ឃ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់(α)និង(β)

យក $z = t\,,t\in IR$ នោះ $\begin{cases} 2x+2y+t-9=0 \\ -x-4y+t+6=0 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $x = 4-t\;,\; y = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t, z = t\,;t\in\Re$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី២២

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

☆

I-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x^3+y=3x+4 \\ 2y^3+z=6y+6 \\ 3z^3+x=9z+8 \end{cases}$

ដែល $x,y,z\in IR$

II-ក) ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3a}-\frac{1}{\cos a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}+\frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2a}+\frac{\sin^2 3^2a}{\cos 3^3a}+....+\frac{\sin^2 3^na}{\cos 3^{n+1}a}$$

III-ក-គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ $I_n=\int_0^1(1+x)^n.dx \ ,n\in IN$ ។

ខ-ទាញថា $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+.....+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

IV-គេឲ្យប្លង់ $(\alpha):2x-2y+z-1=0$ និងស្វ៊ែ (S)មានសមីការ

$(S):x^2+y^2+z^2+2x-8y-4z+12=0$ ។

ក-បង្ហាញថាប្លង់ (α)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A មួយ ។

ខ-កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ។

គ-កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់(α) ត្រង់ចំណុច **A** ។
ឃ-ក្រៅពីចំណុច **A** បន្ទាត់(Δ) ប្រសព្វស្វ៊ែ **(S)** ត្រង់ចំណុច **B** មួយទៀត ។ ចូរកំណត់កូអរដោនេចំណុច **B** រួចកំណត់សមីការនៃប្លង់ (β) ដែលប៉ះស្វ៊ែ **(S)** ត្រង់ **B** ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំណត់គ្រប់ចម្លើយពិត x,y,z ៖

គេមាន $\begin{cases} x^3+y=3x+4 \\ 2y^3+z=6y+6 \\ 3z^3+x=9z+8 \end{cases}$

តាមសមីការ $x^3+y=3x+4$ គេបាន $x^3-3x-2=2-y$

ដោយ $x^3-3x-2=(x-2)(x+1)^2$

នោះ $(x-2)(x+1)^2=2-y \quad (i)$

តាមសមីការ $2y^3+z=6y+6$ គេបាន $2y^3-6y-4=2-z$

តែ $2y^3-6y-4=2(y-2)(y+1)^2$

នោះ $2(y-2)(y+1)^2=2-z \quad (ii)$

តាម $3z^3+x=9z+8$ គេបាន $3(z-2)(z+1)^2=2-x \quad (iii)$

គុណសមីការ $(i),(ii)\ \&\ (iii)$ គេបាន ៖

$$6(x-2)(y-2)(z-2)(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=-(x-2)(y-2)(z-2)$$

$$(x-2)(y-2)(z-2)\left[(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2+\frac{1}{6}\right]=0$$

ដោយ $\left[(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2+\frac{1}{6}\right]>0$ នោះសមីការសមមូល

$(x-2)(y-2)(z-2)=0$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$

ដូចនេះ $x=y=z=2$ ជាចម្លើយតែមួយគត់របស់ប្រព័ន្ធសមីការ។

II-ក) ស្រាយថា $\dfrac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}\right)$

គេមាន $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a=\cos a(4\cos^2 a-3)$

គេបាន $\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}=\dfrac{1-(4\cos^2 a-3)}{\cos 3a}=\dfrac{4(1-\cos^2 a)}{\cos 3a}$

ដោយ $1-\cos^2 a=\sin^2 a$ នោះ $\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}=\dfrac{4\sin^2 a}{\cos 3a}$

ដូចនេះ $\dfrac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}\right)$ ។

ខ)គណនាផលបូក

$$S_n=\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}+\frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a}+\frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a}+....+\frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1} a}$$

គេមាន $\dfrac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}\right)$ ជំនួស a ដោយ $3^k a$

គេបាន $\dfrac{\sin^2 3^k a}{\cos 3^{k+1} a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3^{k+1} a}-\dfrac{1}{\cos 3^k a}\right)$

$$S_n = \frac{\sin^2 a}{\cos 3a} + \frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a} + \frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a} + ... + \frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1} a}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\cos 3^{k+1}a} - \frac{1}{\cos 3^k a}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3^{n+1}a} - \frac{1}{\cos a}\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3^{n+1}a} - \frac{1}{\cos a}\right)$ ។

III-ក)គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់

$$I_n = \int_0^1 (1+x)^n .dx \quad ,n \in IN$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.2^{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

ខ-ទាញបង្ហាញថា $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

គេមាន $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

ធ្វើអាំងតេក្រាលកំនត់ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ នៃសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\int_0^1 (1+x)^n .dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n\right).dx$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \left[C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

ដូចនេះ $\boxed{C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+.....+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$ ។

IV-ក)បង្ហាញថាប្លង់ (α)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A មួយ ៖

សមីការស្វ៊ែ (S) អាចសរសេរជាទម្រង់ស្តង់ដាដូចខាងក្រោម ៖

$(S):(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9$ នោះគេទាញបាន $I(-1,4,2)$

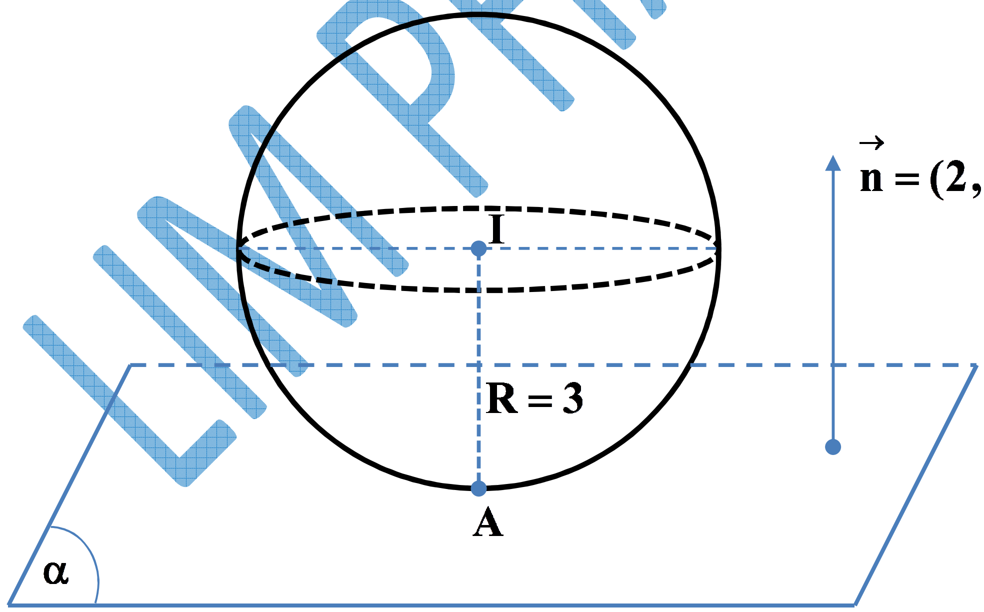
ជាផ្ចិត និង $R=3$ ជារង្វាស់កាំរបស់ស្វ៊ែ ។

ចម្ងាយពីចំណុច I ទៅប្លង់ (α) កំណត់ដោយ ៖

$$d(I,\alpha)=\frac{|2x_I-2y_I+z_I-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|-2-8+2-1|}{3}=3$$

ដោយ $d(I,\alpha)=R=3$ នោះប្លង់ (α)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)ត្រង់ចំណុចមួយ

ខ-កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ៖



តាង $A(x_A,y_A,z_A)$ ជាចំណុចប៉ះដែលត្រូវរក ។

គេមាន $A\in(\alpha)$ នោះ $2x_A-2y_A+z_A-1=0$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{IA} // \vec{n}$ នោះ $\overrightarrow{IA} = t.\vec{n}$

ដោយ $\overrightarrow{IA} = (x_A + 1, y_A - 4, z_A - 2)$ និង $\vec{n} = (2, -2, 1)$

គេបាន $\begin{cases} x_A + 1 = 2t \\ y_A - 4 = -2t \\ z_A - 2 = t \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_A = 2t - 1 \\ y_A = -2t + 4 \\ z_A = t + 2 \end{cases}$ (2)

យកសមីការ (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$2(2t - 1) - 2(-2t + 4) + (t + 2) - 1 = 0$

$4t - 2 + 4t - 8 + t + 2 - 1 = 0$

$9t - 9 = 0$

គេទាញបាន $t = 1$ យកជំនួសក្នុង(2)គេបាន $x_A = 1, y_A = 2, z_A = 3$

ដូចនេះ $A(1,2,3)$ ។

គ-កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់(α) ត្រង់ចំណុច A ៖

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(Δ)ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(α)

នោះគេបាន $\vec{u} = \vec{n} = (2, -2, 1)$ ហើយដោយ $A \in (\Delta)$ នោះ

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ (Δ) អាចសរសេរ ៖

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \ , \ t \in IR \end{cases}$$ ។

ឃ-កំណត់កូអរដោនេចំណុច B ៖

តាង $B(x_B,y_B,z_B)$ ។ ដោយ $B\in(\Delta)$ នោះ $\begin{cases} x_B=1+2t \\ y_B=2-2t \\ z_B=3+t \end{cases}$ (3)

យក (3) ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែរ (S) គេបាន ៖

$(1+2t+1)^2+(2-2t-4)^2+(3+t-2)^2=9$

$(2t+2)^2+(-2t-2)^2+(t+1)^2=9$

$4(t+1)^2+4(t+1)^2+(t+1)^2=9$

$9(t+1)^2=9$

គេទាញបាន $t_1=0\,,\,t_2=-2$ ។

-ចំពោះ $t=0$ នោះតាម(3)គេបាន $x=1,y=2,z=3$ជាចំណុច A

-ចំពោះ $t=-2$ នោះតាម(3)គេបាន $x=-3,y=6,z=1$ ។

ដូចនេះ $B(-3,6,1)$ ។

កំណត់សមីការនៃប្លង់ (β) ដែលប៉ះស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ B ៖

ប្លង់ (β) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,-2,1)$ ។

ដូចនេះ $(\beta):2(x+3)-2(y-6)+(z-1)=0$

ឬ $(\beta):2x-2y+z+17=0$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី២៣

សម្រាប់រយះពេល ២ម៉ោង

I-ចូរកំណត់ផ្នែកគត់នៃចំនួន $\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ ។

II-ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ គេមាន $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(n)=an^3+bn^2+cn+d \\ f(n+1)-f(n)=n^2 \end{cases}$

ក.គណនាតម្លៃលេខនៃ $a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងលើ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ $S_n=1^2+2^2+3^2+....+n^2$ ។

III-គេមានស្វីត $(\mathrm{I_n})$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $\mathrm{n}\geq 1$ ដោយ ៖

$$\mathrm{I_n}=\frac{1}{\mathrm{n!}}.\int_0^1(1-\mathrm{x})^{\mathrm{n}}.\mathrm{e^x}.\mathrm{dx}$$

ក-ចូរគណនាតួ $\mathrm{I_1}$ ។

ខ-បញ្ជាក់ $\mathrm{I_{n+1}}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathrm{I_n}$ រួចទាញ $\mathrm{I_n}=\mathrm{e}-\sum_{\mathrm{p=0}}^{\mathrm{n}}\left(\frac{1}{\mathrm{P!}}\right)$

គ-ចូររកលីមីត $\lim\limits_{\mathrm{n}\to+\infty}\mathrm{I_n}$

រួចទាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right)=e=2.71828$

IV-គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right)=\sin^3 a+\frac{1}{3}\sin^3 3a+...+\frac{1}{3^n}\sin^3 3^n a$$

ដំណោះស្រាយ

I-កំណត់ផ្នែកគត់នៃចំនួន $\sum\limits_{n=1}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

ពិនិត្យ $\left(n+\frac{1}{3}\right)^3=n^3+n^2+\frac{n}{3}+\frac{1}{27}$

និង $\left(n-\frac{1}{3}\right)^3=n^3-n^2+\frac{n}{3}-\frac{1}{27}$

ហេតុនេះគេបាន $\left(n+\frac{1}{3}\right)^3>n^3+n^2$ និង $\left(n-\frac{1}{3}\right)^3>n^3-n^2$

ដោយ $\left(n+\frac{1}{3}\right)^3>n^3+n^2$ សមមូល $n^3(1+\frac{1}{3n})^3>n^3+n^2$

សមមូល $\left(1+\frac{1}{3n}\right)^3>1+\frac{1}{n}$ សមមូល $1+\frac{1}{3n}>\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}$

សមមូល $\frac{1}{n}>3\left[\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1\right]$

សមមូល $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}>3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $1-\dfrac{1}{3n}>\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n}}$

សមមូល $\dfrac{1}{n}<3(1-\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n}})$

សមមូល $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<3(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)<\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<3\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)$$

$$3\sum_{n=2}^{10^9}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)<\sum_{n=2}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<3\sum_{n=2}^{10^9}\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)$$

$$3(\sqrt[3]{10^9+1}-\sqrt[3]{2})<\sum_{n=2}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<3(10^3-1)$$

$$3(\sqrt[3]{10^9+1}-\sqrt[3]{2})+1<\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<3(10^3-1)+1=3\times10^3-2$$

តាង $a=3(\sqrt[3]{10^9+1}-\sqrt[3]{2})+1$ និង $b=3\times10^3-2$

គេបាន $b-a=3.10^3-2-3(\sqrt[3]{10^9+1}-\sqrt[3]{2})-1$

$$b-a=3.10^3-3-3\sqrt[3]{10^9+1}+3\sqrt[3]{2}$$

$$=3(\sqrt[3]{2}-1)+3(10^3-\sqrt[3]{10^9+1})<3\sqrt[3]{2}-3<1$$

នោះផ្នែកគត់នៃ $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ គឺ $b-1=3\times10^3-2-1=2997$ ។

ដូចនេះ $\left\lfloor\displaystyle\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right\rfloor=2997$ ។

II-ក.គណនាតម្លៃលេខនៃ $a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d$

គេមាន $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(n)=an^3+bn^2+cn+d \\ f(n+1)-f(n)=n^2 \end{cases}$

ដោយ $f(n)=an^3+bn^2+cn+d$

នោះ $f(n+1)=a(n+1)^3+b(n+1)^2+c(n+1)+d$

គេបាន $f(n+1)-f(n)=3an^2+(3a+2b)n+a+b+c$

គេទាញ $3an^2+(3a+2b)n+a+b+c=n^2$

នាំឱ្យ $a=\frac{1}{3}\ ;\ b=-\frac{1}{2}\ ;\ c=\frac{1}{6}$

ហើយ $f(1)=a+b+c+d=1$ នោះ $d=1$

ដូចនេះ $a=\frac{1}{3}\ ;\ b=-\frac{1}{2}\ ;\ c=\frac{1}{6}\ ;\ d=1$ ។

ខ.ទាញរកតម្លៃ $S_n=1^2+2^2+3^2+....+n^2$

តាមសម្រាយខាងលើគេបាន ៖

$$f(n)=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+1$$

ដោយ $f(n+1)-f(n)=n^2$

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]$

$=f(n+1)-f(1)$

ដោយ $f(n)=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+1$

នោះ $f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+1=1$

ហើយ $f(n+1)=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)+1$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+1$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+1$$

ដូចនេះ $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ។

III-ក) ចូរគណនាតួ I_1

គេមាន $I_1=\frac{1}{1!}\int_0^1(1-x)e^x.dx=\int_0^1(1-x).e^x.dx$

តាង $\begin{cases}u=1-x\\ dv=e^x dx\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}du=-dx\\ v=e^x\end{cases}$

គេបាន $I=\left[(1-x)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x(-dx)=-1+\left[e^x\right]_0^1=e-2$

ដូចនេះ: $\boxed{I=e-2}$ ។

ខ) បញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n

គេមាន $I_n=\frac{1}{n!}.\int_0^1(1-x)^n.e^x.dx$

នាំឱ្យ $I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}.\int_0^1(1-x)^{n+1}.e^x dx$

តាង $\begin{cases} u=(1-x)^{n+1} \\ dv=e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=-(n+1)(1-x)^n \\ v=e^x \end{cases}$

គេបាន $I_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\left[(1-x)^{n+1}e^x\right]_0^1+\frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^n e^x .dx$

$$I_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx=I_n-\frac{1}{(n+1)!}$$

ដូចនេះ $I_{n+1}=I_n-\frac{1}{(n+1)!}$ ។

ទាញឱ្យបានថា $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$

គេមាន $I_{n+1}=I_n-\frac{1}{(n+1)!}$ ឬ $I_{n+1}-I_n=-\frac{1}{(n+1)!}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}(I_{k+1}-I_k)=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}$

$$I_n-I_1=-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-....-\frac{1}{n!}$$

ដោយ $I_1=e-2=e-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}$

គេបាន $I_n=e-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-....-\frac{1}{n!}$

ដូចនេះ $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$ ។

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$

ចំពោះ $x\in[0,1]$ គេមាន $1\le e^x\le e$ និង $(1-x)^n\ge 0$

គេបាន $(1-x)^n \le e^x(1-x)^n \le e(1-x)^n$

នាំឱ្យ $\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx \le \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx \le \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx$

ដោយ $\int_0^1 (1-x)^n.dx = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

គេទាញបាន $\frac{1}{n!(n+1)} \le I_n \le \frac{e}{n!(n+1)}$ ។

កាលណា $n \to +\infty$ នាំឱ្យ $\frac{1}{n!(n+1)} \to 0$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$ ។

ទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

គេមាន $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$ នាំឱ្យ $\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = e - I_n$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = \lim_{n\to+\infty}(e - I_n) = e$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828}$

IV-គណនាផលបូក ៖

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right) = \sin^3 a + \frac{1}{3}\sin^3 3a + ... + \frac{1}{3^n}\sin^3 3^n a$$

តាមរូបមន្ត $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

នោះគេទាញ $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x))$

គេបាន

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^{k-1}}\sin 3^k a - \frac{1}{3^k}\sin 3^{k+1} a\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{4}\left(3\sin a - \frac{1}{3^n}\sin 3^{n+1} a\right)$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី២៨

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

ឥឥឥ☆៚៚៚

I-គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = (1+2\cos 2a)(1+2\cos\frac{2a}{3})(1+2\cos\frac{2a}{3^2})...(1+2\cos\frac{2a}{3^n})$$

II-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$u_0 = 1 \text{ និង } u_{n+1} = \frac{1}{8}(\frac{1}{4} + 2u_n + \sqrt{1+8u_n})$$

ក. តាង $v_n = \sqrt{1+8u_n}$ ។ បង្ហាញថា $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 2)$

ខ.បង្ហាញថាស្វ៊ីត $w_n = v_n - 2$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា w_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកតួ u_n នៃស្វ៊ីត។

III-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)^n$ ដែល $n \in IN$ និង $x \neq \pm 1$

ក/ចូរស្រាយថា $f'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$ ។

ខ/គេពិនិត្យ $I_n = \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{f(x).dx}{1+x^2}$ និង $J_n = \int_0^{\sqrt{2}-1} f'(x).dx$

ចូរស្រាយថា $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \frac{J_n}{n}$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

គ/បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ រួចចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{5(n+1)2^{n+1}} \leq I_n \leq \dfrac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$ ។

ឃ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\,2^n I_n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = (1+2\cos 2a)(1+2\cos\frac{2a}{3})(1+2\cos\frac{2a}{3^2})\dots(1+2\cos\frac{2a}{3^n})$$

តាមរូបមន្ត $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi = \sin\varphi(3-4\sin^2\varphi)$

ដោយ $3-4\sin^2\varphi = 1+2(1-2\sin^2\varphi) = 1+2\cos 2\varphi$

គេទាញ $1+2\cos 2\varphi = \dfrac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$

គេបាន $P_n = \dfrac{\sin 3a}{\sin a}\times\dfrac{\sin a}{\sin\frac{a}{3}}\times\dfrac{\sin\frac{a}{3}}{\sin\frac{a}{3^2}}\times\dots\times\dfrac{\sin\frac{a}{3^{n-1}}}{\sin\frac{a}{3^n}} = \dfrac{\sin 3a}{\sin\frac{a}{3^n}}$

II-ក. បង្ហាញថា $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(v_n+2)$

គេមាន $v_n = \sqrt{1+8u_n}$

នាំឱ្យ $v_{n+1} = \sqrt{1+8u_{n+1}}$

តែ $u_{n+1} = \dfrac{1}{8}(\dfrac{1}{4}+2u_n+\sqrt{1+8u_n})$

$$v_{n+1}=\sqrt{1+\frac{1}{4}+2u_n+\sqrt{1+8u_n}}$$

$$v_{n+1}=\sqrt{1+2.\frac{\sqrt{1+8u_n}}{2}+\frac{1+8u_n}{4}}$$

$$v_{n+1}=\sqrt{(1+\frac{\sqrt{1+8u_n}}{2})^2}=1+\frac{\sqrt{1+8u_n}}{2}=1+\frac{1}{2}v_n$$

ដូចនេះ $\boxed{v_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+2)}$ ។

ខ.បង្ហាញថាស្វ៊ីត $w_n=v_n-2$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $w_n=v_n-2$ នាំឱ្យ $w_{n+1}=v_{n+1}-2$

តែ $v_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+2)$

គេបាន $w_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+2)-2=\frac{1}{2}(v_n-2)=\frac{1}{2}w_n$ ។

ដូចនេះ (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត $w_n=w_0\times q^n$

តែ $w_0=v_0-2=\sqrt{1+8u_0}-2=1$

ដូចនេះ $\boxed{w_n=\frac{1}{2^n}}$ និង $\boxed{v_n=2+\frac{1}{2^n}}$ ។

គ. ទាញរកតួ u_n នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $v_n=\sqrt{1+8u_n}$ នាំឱ្យ $u_n=\frac{{v_n}^2-1}{8}$

$$u_n = \frac{(2+\frac{1}{2^n})^2 - 1}{8}$$

$$= \frac{4 + 4.\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} - 1}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+3}}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \frac{3}{8} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+3}}}$ ។

III-ក/ស្រាយថា $f'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$

តាមរូបមន្ត $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

គេបាន $f'(x) = n(\frac{x}{1-x^2})'(\frac{x}{1-x^2})^{n-1}$

$$= n\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} \cdot \frac{x^{n-1}}{(1-x^2)^{n-1}} = \frac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$ ។

ខ/ស្រាយថា $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \frac{J_n}{n}$

គេបាន $I_n = \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{x^n dx}{(1-x^2)^n(1+x^2)}$

និង $J_n = \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}.dx$

$$I_{n-1} + 4I_{n+1} = \int_0^{\sqrt{2}-1} [\frac{x^{n-1}}{(1-x^2)^{n-1}(1+x^2)} + \frac{4x^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}(1+x^2)}].dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{x^{n-1}(1-x^2)^2 + 4x^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}(1+x^2)}.dx = \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{x^{n-1}(1+x^2)^2}{(1-x^2)^{n+1}(1+x^2)}.dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{x^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}.dx = \frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{2}-1} f'(x).dx = \frac{1}{n}.J_n$$

ដូចនេះ $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \frac{J_n}{n}$ ។

គ/បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វីតចុះ

គេមាន $I_n = \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{x^n dx}{(1-x^2)^n(1+x^2)}$

តាង $x = \tan\frac{\varphi}{2}$ នាំឲ្យ $d\varphi = \frac{2dx}{1+x^2}$ និង $\tan\varphi = \frac{2x}{1-x^2}$

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $\tan\varphi = 0$ នោះ $\varphi = 0$

ចំពោះ $x = \sqrt{2}-1$ គេបាន $\tan\varphi = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = 1$

នោះ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ។

គេបាន $I_n = \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n\varphi.d\varphi$

ចំពោះ $\varphi \in [0,\frac{\pi}{4}]$ គេមាន $\tan^n \varphi \ge \tan^{n+1}\varphi$

គេបាន $\frac{1}{2^{n+1}}\tan^n \varphi \ge \frac{1}{2^{n+1}}\tan^{n+1}\varphi \ge \frac{1}{2^{n+2}}\tan^{n+1}\varphi$

នោះ $\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n \varphi.d\varphi \ge \frac{1}{2^{n+2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}\varphi.d\varphi$ ឬ $I_n \ge I_{n+1}$ ដូច

នេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{1}{5(n+1)2^{n+1}} \le I_n \le \frac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$

គេមាន $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \frac{J_n}{n}$

ហើយ $J_n = \int_0^{\sqrt{2}-1} f'(x).dx = \left[f(x)\right]_0^{\sqrt{2}-1} = \left[(\frac{x}{1-x^2})^n\right]_0^{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2^n}$

គេបាន $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \frac{1}{n.2^n}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ នោះគេមាន $I_{n+2} \le I_n$ ឬ

$I_n + 4I_{n+2} \le 5I_n$

តែ $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \frac{1}{n.2^n}$ គេទាញ $I_n + 4I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

ហេតុនេះ $5I_n \ge \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ ឬ $I_n \ge \frac{1}{5(n+1).2^{n+1}}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $I_n \le I_{n-2}$ ឬ $5I_n \le I_{n-2} + 4I_n$ តែ

$I_{n-2} + 4I_n = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$

ហេតុនេះ $5I_n \le \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$ ឬ $I_n \le \frac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$ (2)

តាម(1)និង(2)គេបាន $\frac{1}{5(n+1)2^{n+1}} \le I_n \le \frac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$ ។

ឃ/គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n\,2^n I_n)$ ៖

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\frac{1}{5(n+1)2^{n+1}} \le I_n \le \frac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $n.2^n$ គេបាន $\frac{n}{10(n+1)} \le n2^n I_n \le \frac{1}{10(n-1)}$

ហេតុនេះ៖

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10(n+1)} \le \lim_{n\to\infty}(n2^n I_n) \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10(n-1)}$$

$$\frac{1}{10} \le \lim_{n\to\infty}(n2^n I_n) \le \frac{1}{10}$$

ដូចនេះ៖ $\lim_{n\to+\infty}(n\,2^n I_n) = \frac{1}{10}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី២៩

សម្រាប់រយៈពេល ២ម៉ោង

៚៚៚☆៛៛៛

I-គេឲ្យស៊្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$u_0 = 1 \text{ និង } u_{n+1} = \frac{u_n^{\ 4}}{4u_n^{\ 3} + 6u_n^{\ 2} + 4u_n + 1} \text{ គ្រប់ } n \in IN$$

ចូរបង្ហាញថា $1 + \frac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^4$ គ្រប់ $n \in IN$

រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

II-គេឲ្យអនុគមន៍ f និង g កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \arcsin(\sin x - \cos x)$$

$$g(x) = \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x})$$

ក/គណនាដេរីវេនៃ $h(x) = f(x) - g(x)$ ។

ខ/ទាញរកអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}.dx$ ។

III-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(xf(y) + x) = xy + f(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង y ។

IV-ក)ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ចូរស្រាយថា $\ln x > \dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ ។

ខ)ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b} < \dfrac{1}{3}(2\sqrt{ab}+\dfrac{a+b}{2})$

ដែល $a>0, b>0, a\neq b$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-បង្ហាញថា $1+\dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)^4$

យើងមាន $1+\dfrac{1}{u_{n+1}} = 1+\dfrac{4u_n^{\,3}+6u_n^{\,2}+4u_n+1}{u_n^{\,4}}$

$$= \frac{u_n^{\,4}+4u_n^{\,3}+6u_n^{\,2}+4u_n+1}{u_n^{\,4}}$$

$$= \frac{(u_n+1)^4}{u_n^{\,4}} = \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$$

ដូចនេះ $1+\dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)^4$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $1+\dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)^4$

គេបាន $\ln\left(1+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right) = 4\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$

តាង $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$ នាំឲ្យ $v_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

គេបាន $v_{n+1}=4v_n$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង

$q=4$ និងតួ $v_0=\ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)=\ln 2$ (ព្រោះ $u_0=1$) ។

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0.q^n=4^n\ln 2$ ។

ដោយ $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$

គេទាញ $\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)=4^n\ln 2$ នាំឲ្យ $1+\frac{1}{u_n}=2^{4^n}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{2^{4^n}-1}$ ។

II-ក/គណនាដេរីវេនៃ $h(x)=f(x)-g(x)$

គេបាន $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

ដោយ $f'(x)=\frac{(\sin x-\cos x)'}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}=\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}$

ហើយ $g'(x)=\frac{(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})'}{\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}}$

$$g'(x)=\frac{\cos x-\sin x+\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}}{\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}}$$

$$\frac{(\cos x-\sin x)+\dfrac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sqrt{\sin 2x}}}{\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}}$$

$$=\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

គេបាន $h'(x)=\dfrac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}-\dfrac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}$

ដូចនេះ $h'(x)=\sqrt{2}.\sqrt{\tan x}$ ។

ខ/ទាញរកអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}.dx$

គេបាន

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}.\sqrt{\tan x}.dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}h'(x).dx=\frac{1}{\sqrt{2}}[h(\frac{\pi}{4})-h(0)]$$

ដោយ

$$h(\frac{\pi}{4})=f(\frac{\pi}{4})-g(\frac{\pi}{4})=\arcsin(0)-\ln(\sqrt{2}+1)=-\ln(\sqrt{2}+1)$$

និង $h(0)=\arcsin(-1)-\ln(1)=-\dfrac{\pi}{2}$ ។

ដូចនេះ $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[\dfrac{\pi}{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]$

III-កំណត់អនុគមន៍ f :

គេមាន $f(xf(y)+x)=xy+f(x)\ \ (*)$

-យក $x = 1\,,\, y = -1 - f(1)$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$$f(f(-1 - f(-1)) + 1) = -1 - f(1) + f(1) = -1$$

តាង $a = f(-1 - f(-1)) + 1$ នោះ $f(a) = -1$

-យក $y = a$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$$f(xf(a) + x) = ax + f(x)$$ ដោយ $f(a) = -1$

$f(-x + x) = ax + f(x)$ ឬ $f(x) = -ax + b$ ដែល $b = f(0)$

យក $f(x) = -ax + b$ ជំនួសក្នុងសមីការ (*) គេបាន ៖

$$a^2xy - abx - ax + b = xy - ax + b$$

គេទាញ $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \end{cases}$

ដូចនេះ $f(x) = x$ ឬ $f(x) = -x$ ។

IV-ក)ចំពោះគ្រប់ $x > 1$ ស្រាយថា $\ln x > \dfrac{3(x^2 - 1)}{x^2 + 4x + 1}$ ៖

តាង f ជាអនុគមន៍ កំណត់គ្រប់ $x > 1$ ដោយ ៖

$$f(x) = \ln x - \frac{3(x^2 - 1)}{x^2 + 4x + 1}$$

គេបាន

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{6x(x^2 + 4x + 1) - 3(x^2 - 1)(2x + 4)}{(x^2 + 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{(x - 1)^4}{x(x^2 + 4x + 1)^2} > 0$$ គ្រប់ $x > 1$ ។

ដោយ $f(1)=0$ នោះ $f(x)>f(1)=0$ គ្រប់ $x>1$

ដូចនេះ $\ln x>\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ ។

ខ)បង្ហាញថា $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{1}{3}(2\sqrt{ab}+\dfrac{a+b}{2})$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\ln x>\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$

គ្រប់ $a>0\,,b>0$ យើងសន្មត $a>b$ ហើយយក $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}>1$

គេបាន $\ln\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)>\dfrac{3\left(\dfrac{a}{b}-1\right)}{\dfrac{a}{b}+4\sqrt{\dfrac{a}{b}}+1}=\dfrac{3(a-b)}{a+b+4\sqrt{ab}}$

ឬ $\dfrac{1}{2}(\ln a-\ln b)>\dfrac{3(a-b)}{a+b+4\sqrt{ab}}$

ដោយ $a>b$ នោះ $a-b>0$ និង $\ln a-\ln b>0$

គេទាញ $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b+4\sqrt{ab}}{6}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a+b}{2}+2\sqrt{ab}\right)$

ដូចនេះ $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{1}{3}(2\sqrt{ab}+\dfrac{a+b}{2})$ ។