វិសមភាព

វិ ស ម ភ ា ព

360°

មូលដ្ឋានគ្រឹះនៃវិសមភាព

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

$$\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Augustin Louis Cauchy

ចាក់គ្រឹះលើផ្នែកវិសមភាព

មេរៀន លំហាត់ និង គន្លឹះ

រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

វិសមភាពជាផ្នែកមួយដ៏សំខាន់ក្នុងគណិតវិទ្យា ។ មិនត្រឹមតែប៉ុណ្ណោះទេ ដោយសារតែលក្ខណៈពិសេសជាច្រើននៃវិសមភាពបានធ្វើឲ្យលំហាត់ប្រភេទនេះលេចរូបរាងឡើងជាញឹកញាប់នៅក្នុងការប្រឡងប្រជែងនានាពិសេសនោះ គឺ ការប្រឡងសិស្សពូកែកម្រិតជាតិ និង អន្តរជាតិជាដើម ។ ហេតុនេះការយល់ដឹងពីវិសមភាពពិតជាមានសារៈសំខាន់ណាស់សម្រាប់ប្អូនៗដែលចង់ក្លាយជាសិស្សពូកែមួយរូប ។

សៀវភៅវិសមភាព 360° នេះត្រូវបានរៀបរៀងឡើងសម្រាប់ផ្តល់ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះលើផ្នែកវិសមភាពទៅដល់មិត្តអ្នកអាន ។ សៀវភៅនេះត្រូវបានរៀបរៀងឡើងជាលក្ខណៈមេរៀននៃវិសមភាពដែលក្នុងនោះខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងផ្តោតសំខាន់ទៅលើវិសមភាពជាមូលដ្ឋានមួយចំនួនដែលពេញនិយមនៅក្នុងការប្រឡងប្រជែងដូចជាវិសមភាពនៃមធ្យម (QM-AM-GM-HM), វិសមភាព Cauchy-Schwarz, វិសមភាពនៃតម្រៀប (Rearrangement), វិសមភាព Jensen និង វិសមភាពជាច្រើនទៀត ។ លើសពីនេះទៅទៀតខ្ញុំបាទបានបញ្ចូលនូវតិចនិចមួយចំនួនដូចជា ការតាងបែបពីជគណិត ការតាងបែបត្រីកោណមាត្រ និង ការតាងបែប Ravi ជាដើម ។

គួរកត់សម្គាល់ផងដែរថា ដើម្បីទាញយកប្រយោជន៍ឲ្យបានច្រើនពីលំហាត់មួយ រឺ ក៏សៀវភៅមួយការសង្កេតលើលក្ខណៈទូទៅរបស់លំហាត់ទាំងនោះពិតជាមានសារៈសំខាន់ខ្លាំងណាស់ ។ ការយល់ពីលក្ខណៈទូទៅនេះប្រៀបដូចជាគន្លឹះ រឺ កូនសោរមួយដែលជួយអ្នកឲ្យចាក់សោរបើកទ្វារចេញទៅរកភាពរីកចម្រើន ។

ទោះបីជាមានការត្រួតពិនិត្យយ៉ាងម៉ត់ចត់យ៉ាងណាក៏ដោយកំហុសឆ្គងដោយអចេតនាមួយចំនួនប្រាកដជាកើតមានឡើង ។ ហេតុនេះ យើងខ្ញុំសូមអរគុណាទុកជាមុនរាល់មតិរិះគន់ពីគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានអ្នកសិក្សាទាំងអស់ដើម្បីកែលំអឲ្យសៀវភៅមួយក្បាលនេះក្លាយជាសៀវភៅវិសមភាពដ៏ល្អប្រសើរ ។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី ១៦ ខែ សីហា ឆ្នាំ ២០១៤
រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

មាតិកា

1. ការរេជាចំនួនវិជ្ជមាន………………………………………………………. ទំព័រ ១

2. វិសមភាពងាយ……………………………………………………………….. ទំព័រ ១០

3. ទម្រង់ Engel នៃវិសមភាព Cauchy-Schwarz……………….... ទំព័រ ១៦

4. វិសមភាពនៃមធ្យម………………………………………………………... ទំព័រ ២៦

5. វិសមភាព Cauchy-Schwarz……………………………………………. ទំព័រ ៥៣

6. វិសមភាពនៃតម្រៀប……………………………………………………... ទំព័រ ៥៩

7. វិសមភាព Jensen……………………………………………………... ទំព័រ ៧៤

8. វិសមភាពស៊ីមេទ្រី……………………………………………………….. ទំព័រ ៩០

9. វិធីសាស្ត្រជំនួស…………………………………………………………. ទំព័រ ៩៨

10. ភាពអ៊ូម៉ូសែន………………………………………………………….. ទំព័រ ១៣២

ការរោះចំនួនវិជ្ជមាន

ចំពោះ x ជាចំនួនពិត គេបាន $x^2 \geq 0$ សមភាព លុះត្រាតែ $x = 0$ ។

វិសមភាពត្រីកោណ (Triangle Inequality)

បើ a , b ជាពីរចំនួនពិត គេបាន $|a+b| \leq |a| + |b|$ សមភាពពេល $ab \geq 0$ ។

សម្រាយ

ដើម្បីបង្ហាញថាសំណើខាងលើពិតយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$$

យើងមាន $|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$

$$\leq (|a|+|b|)^2$$

សមភាពកើតឡើងពេល $|ab| = ab \Leftrightarrow ab \geq 0$រឺ a , b មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

ឧទ្រដ័ទូទៅនៃវិសមភាពត្រីកោណ

ចំពោះ x_1 , x_2 , … , x_n ជាចំនួនពិត យើងបាន

$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ សមភាពកើតឡើងពេល

x_i , $i = \overline{1,n}$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

លំហាត់ ១

គេឲ្យ a , b , c , d ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+d=b+c$ ។

បង្ហាញថា $(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)\geq 0$ ។

(Czech and Slovak Republics,2004)

ចម្លើយ

យើងមាន $a+d=b+c\Rightarrow a-b=c-d$

គេបាន $(a-b)(c-d)+(a-c)(b-d)+(d-a)(b-c)$

$$=ac-ad-bc+bd+ab-ad-bc+cd+bd-cd-ab+ac$$

$$=2ac-2ad-2bc+2bd=2a(c-d)-2b(c-d)$$

$$=2(a-b)(c-d)=2(a-b)^2\geq 0$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a=b=c=d$

លំហាត់ ២

គេឲ្យ $f(a,b,c,d)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2$ ។

ចំពោះ $a<b<c<d$ បង្ហាញថា

$$f(a,c,b,d)>f(a,b,c,d)>f(a,b,d,c)$$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $f(a,c,b,d)-f(a,b,c,d)$

$$=(a-c)^2-(a-b)^2+(b-d)^2-(c-d)^2$$

$$=(b-c)(2a-b-c)+(b-c)(b+c-2d)$$

$$=2(b-c)(a-d)>0$$

គេបាន $f(a,c,b,d) > f(a,b,c,d)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $f(a,b,c,d) - f(a,b,d,c)$

$$= (b-c)^2 - (b-d)^2 + (d-a)^2 - (c-a)^2$$

$$= (d-c)(2b-c-d) + (d-c)(c+d-2a)$$

$$= 2(d-c)(b-a) > 0$$

គេបាន $f(a,b,c,d) > f(a,b,d,c)$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $f(a,c,b,d) > f(a,b,c,d) > f(a,b,d,c)$

លំហាត់ ៣

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc = 1$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le 1$$ ។

(IMO Shortlist,1996)

ចម្លើយ

យើងមាន $(a^3-b^3)(a^2-b^2) \ge 0 \Rightarrow a^5+b^5 \ge a^2b^2(a+b)$

គេបាន $\frac{ab}{a^5+b^5+ab} \le \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab} = \frac{abc^2}{a^2b^2c^2(a+b)+abc^2}$

$$= \frac{c}{a+b+c}$$ ព្រោះ $abc = 1$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន $\frac{bc}{b^5+c^5+bc} \le \frac{a}{a+b+c}$

$$\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le \frac{b}{a+b+c}$$

ហេតុនេះ $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$

លំហាត់ ៤

បង្ហាញថា $|a|+|b|+|c|-|a+b|-|b+c|-|c+a|+|a+b+c|\ge 0\ (*)$ ។

ចម្លើយ

បើ a, b រឺ $c=0$ គេបាន $(*)$ ពិត

ក្រៅពីនេះ WLOG[1] សន្មតថា $|a|\ge|b|\ge|c|>0$ គេបាន $\left|\frac{b}{a}\right|\le 1,\ \left|\frac{c}{a}\right|\le 1$

យើងបាន $(*)$ សមមូល

$$1+\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|-\left|1+\frac{b}{a}\right|-\left|\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|-\left|1+\frac{c}{a}\right|+\left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1+\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|-1-\frac{b}{a}-\left|\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|-1-\frac{c}{a}+\left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|-\left|\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|-\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|\ge 0 \text{ ពិត}$$

ព្រោះ $\left|\frac{b}{a}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\ge\left|\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|,\ \left|1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right|\ge 1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$

លំហាត់ ៥

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $\sum_{i=1}^{100}|x-i|$ ចំពោះ x ជាចំនួនពិត ។

ចម្លើយ

ចំពោះ $k=\overline{1,50}$ យើងបាន $|x-k|+|x-(101-k)|\ge|101-2k|$

[1] Without Loss of Generality

ព្រោះ $|a|+|b|\ge|a-b|$

សមភាពពេល $(x-k)[x-(101-k)]\le 0 \Leftrightarrow x\in[k,101-k]$

គេបាន $|x-1|+|x-100|\ge 99$

$|x-2|+|x-99|\ge 97$

……………………………

$|x-50|+|x-51|\ge 1$

បូកអង្គ និង អង្គគេបាន $\sum_{i=1}^{100}|x-i|\ge 1+3+\ldots+97+99=50^2=2500$

សមភាពពេល $x\in\bigcap_{k=1}^{50}[k,101-k]=[50,51]$

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\sum_{i=1}^{100}|x-i|$ គឺ 2500 សមភាពលុះត្រាតែ $x\in[50,51]$

លំហាត់ ៦

ដោះស្រាយវិសមីការ $\dfrac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$ ។

(IMO,1960)

ចម្លើយ

$\dfrac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$ មានន័យ កាលណា $\begin{cases}1+2x\ge 0\\ 1-\sqrt{1+2x}\ne 0\end{cases}$

$\Rightarrow x\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$

យើងមាន $\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}{\left(1-1-2x\right)^2}<2x+9 \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2<2x+9$$

$$\Leftrightarrow 1+2\sqrt{1+2x}+1+2x<2x+9 \Leftrightarrow \sqrt{1+2x}<\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+2x<\frac{49}{4} \Leftrightarrow x<\frac{45}{8}$$

ដូចនេះ $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{45}{8}\right)$

លំហាត់ ៧

បង្ហាញថា $\left\{\sqrt{4n^2+n}\right\}<\frac{1}{4}$, $\forall n\in \mathrm{IN}$ ។ $\{x\}$ តាងឲ្យផ្នែកទសភាគនៃ x ។

ចម្លើយ

យើងមាន $4n^2<4n^2+n<4n^2+4n+1$

$$\Rightarrow 2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+1$$

គេបាន $\left\lfloor\sqrt{4n^2+n}\right\rfloor=2n$

យើងបាន $\sqrt{4n^2+n}-\left\lfloor\sqrt{4n^2+n}\right\rfloor=\sqrt{4n^2+n}-2n$

$$\Rightarrow \left\{\sqrt{4n^2+n}\right\}=\sqrt{4n^2+n}-2n$$

បង្ហាញថា $\sqrt{4n^2+n}-2n<\frac{1}{4}$

យើងមាន $\sqrt{4n^2+n}-2n<\frac{1}{4}\Leftrightarrow\sqrt{4n^2+n}<2n+\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow 4n^2+n<4n^2+n+\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{1}{16}$$ ពិត

ដូចនេះ $\left\{\sqrt{4n^2+n}\right\}<\frac{1}{4}$

លំហាត់ ៨

ចំពោះ a , b , $c>0$ និង p , q ផ្ទៀងផ្ទាត់ $p+q=1$ ។ បង្ហាញថា a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ កាលណា $pa^2+qb^2>pqc^2$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $p+q=1\Rightarrow q=1-p$

យើងបាន $Q=pa^2+qb^2-pqc^2$

$$=pa^2+(1-p)b^2-p(1-p)c^2$$

$$=c^2p^2+\left(a^2-b^2-c^2\right)p+b^2$$

គេបាន $\Delta=\left(a^2-b^2-c^2\right)^2-4b^2c^2$

$$=\left(a^2-b^2-c^2-2bc\right)\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right)$$

$$=\left[a^2-(b+c)^2\right]\left[a^2-(b-c)^2\right]$$

$$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$$

$Q>0$ កាលណា $\Delta<0$ (ព្រោះ $c^2>0$)

$\Leftrightarrow(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)>0$

$\Leftrightarrow (b+c-a)(a+b-c)(c+a-b)>0$ (*)

បើពីរក្នុងចំណោម $b+c-a$, $a+b-c$, $c+a-b$ អវិជ្ជមាន

$\Rightarrow a<0$, $b<0$ រឺ $c<0$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

ហេតុនេះ (*) ពិត កាលណា

$b+c-a>0$, $a+b-c>0$ និង $c+a-b>0$

$\Leftrightarrow b+c>a$, $a+b>c$ និង $c+a>b$

ដូចនេះ a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ កាលណា

$$pa^2+qb^2>pqc^2$$

លំហាត់ ៩

គេឲ្យ $a\ge b\ge c>0$ និង $a+b+c\le 1$ ។ បង្ហាញថា $a^2+3b^2+5c^2\le 1$ ។

(កម្ពុជា,2014)

ចម្លើយ

ដោយ $a\ge b\ge c>0$ និង $a+b+c\le 1$

យើងបាន $a^2+3b^2+5c^2=a^2+b^2+c^2+2b^2+2c^2+2c^2$

$$\le a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$=(a+b+c)^2\le 1^2=1$$

ដូចនេះ $a^2+3b^2+5c^2\le 1$

លំហាត់ ១០

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ មានមេគុណ a_i បំពេញលក្ខខណ្ឌ $0\le a_i\le a_0$ ចំពោះ $i=\overline{1,n}$ ។

យក $\left[f(x)\right]^2 = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots + b_{2n} x^{2n}$ ។

បង្ហាញថា $b_{n+1} \le \frac{1}{2}\left[f(1)\right]^2$ ។

(កម្ពុជា,2008)

ចម្លើយ

យើងមាន $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \Rightarrow \left[f(x)\right]^2 = \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)^2$

ដោយ $\left[f(x)\right]^2 = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots + b_{2n} x^{2n}$

ប្រៀបធៀបមេគុណនៃ x^{n+1} យើងបាន

$$b_{n+1} = a_1 a_n + a_2 a_{n-1} + \ldots + a_n a_1 \le a_1 a_0 + a_2 a_0 + \ldots + a_n a_0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2b_{n+1} &\le a_1\left(a_0 + a_n\right) + a_2\left(a_0 + a_{n-1}\right) + \ldots + a_n\left(a_0 + a_1\right) \\
&\le a_1\left(a_0 + \ldots + a_n\right) + a_2\left(a_0 + \ldots + a_n\right) + \ldots + a_n\left(a_0 + \ldots + a_n\right) \\
&= \left(a_0 + a_1 + \ldots + a_n\right)\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) \\
&\le \left(a_0 + a_1 + \ldots + a_n\right)^2 = \left[f(1)\right]^2
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $b_{n+1} \le \frac{1}{2}\left[f(1)\right]^2$

វិសមភាពងាយ

ដើម្បីឈានទៅដល់វិសមភាពងាយនេះ យើងសង្កេតមើលសមភាពពីជគណិត ដ៏មានសារៈសំខាន់មួយជាមុនសិន គឺ

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \quad (*)$$

សម្រាយ

របៀបទី ១

យើងមាន $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\left[(a+b)^2-c(a+b)+c^2\right]-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

របៀបទី ២

យក $P(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទី ៣ ដែលមានរឹស a,b,c យើងបាន

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$
$$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

ជំនួស a,b,c ក្នុង $P(x)$គេបាន

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0$$

$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0$$

$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0$$

បូក អង្គ និង អង្គ $a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

$$+(ab+bc+ca)(a+b+c)-3abc=0$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

របៀបទី ៣

ប្រើដេទែមីណង់លំដាប់ ៣ $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=a^3+b^3+c^3-3abc$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $D=\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}=(a+b+c)D=\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \qquad (2)$$

តាម (1),(2) យើងបាន

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

សង្កេតលើសមភាព (*)

បើ $a+b+c=0$ គេបាន $a^3+b^3+c^3=3abc$ (i)

បើ a, b, $c>0$ គេបាន $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ [1]

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a=b=c$

លំហាត់ ១

ដាក់ $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ ជាផលគុណកត្តា ។

ចម្លើយ

បើយក $a=x-y$, $b=y-z$, $c=z-x$ គេបាន $a+b+c=0$

តាម (i) យើងបាន

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$$

លំហាត់ ២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ ជាចំនួនសនិទាន ។

ចម្លើយ

យក $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\in \text{IR}\Rightarrow x-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=0$

បើយក $a=x$, $b=-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $c=-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

គេបាន $a+b+c=0$

តាម (i) យើងបាន $x^3-2-\sqrt{5}-2+\sqrt{5}=3x\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}$

$$x^3+3x-4=0$$

$$(x-1)\left(x^2+x+4\right)=0$$

យើងបាន $x=1$ ជាចំនួនសនិទាន

[1] វិសមភាព Cauchy រឺ AM-GM ចំពោះបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន

លំហាត់ ៣

ឧបមាថា a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}} \geq \max(a,b,c)$$ ។

ចម្លើយ

ដោយ វិសមភាពមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹងអថេរ a , b , c

WLOG ឧបមាថា $a \geq b \geq c$

យើងបាន $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}} \geq \max(a,b,c)$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{2}} \geq a \Leftrightarrow -a^3+b^3+c^3+3abc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (-a)^3+b^3+c^3-3(-a)bc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(-a+b+c)\left[(a+b)^2+(a+c)^2+(b-c)^2\right] \geq 0$$ ពិត

ព្រោះ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ

លំហាត់

1. គេឲ្យ x, y, z ជាបីចំនួនគត់បំពេញលក្ខខណ្ឌ
   $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=xyz$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា
   $x^3+y^3+z^3$ ចែកដាច់នឹង $x+y+z+6$ ។
2. យក a,b,c ជាបីចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ ។
   បង្ហាញថា $a=b=c=0$ ។
3. រកសំណុំចំណុច (x,y) ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^3+y^3+3xy=1$ ។
4. តាង S ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ x ដែល $x=a^3+b^3+c^3-3abc$
   (a,b,c ជាចំនួនគត់) ។ បង្ហាញថា បើ $x,y\in S$ គេបាន $xy\in S$ ។
5. គេអោយ a,b,c ជាបីចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នា និង k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។
   បង្ហាញថា បើ $ab+bc+ca\geq 3k^2-1$ គេបាន
   $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}-abc\geq 3k$ ។
6. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y, z បង្ហាញថា $x^2+y^2+z^2\geq |xy+yz+zx|$ ។
7. បើ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}\geq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ ។
8. (Romania,2007)
   ចំពោះគ្រប់ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ស្រាយបញ្ជាក់ថា
   $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq xyz+\dfrac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$ ។
9. (UK,2008)
   រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $x^2+y^2+z^2$ បើគេដឹងថា x, y, z ជាបីចំនួនពិត

បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ ។

10. ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} = 0$ ។

11. គេឲ្យ r ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\sqrt[3]{r} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{r}} = 3$ ។

គណនា $r^3 + \dfrac{1}{r^3}$ ។

ទម្រង់ Engel នៃវិសមភាព Cauchy-Schwarz

(Arthur Engel′s Minima Principle)

ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះ $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ ជាចំនួនពិត និង $x_1,\ x_2\ ,\ldots,\ x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន $\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$, $n\geq 2$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $n=2$ យើងបាន

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}\geq\frac{(a_1+a_2)^2}{x_1+x_2}$$

$$\Leftrightarrow a_1^2x_2(x_1+x_2)+a_2^2x_1(x_1+x_2)\geq(a_1+a_2)^2x_1x_2$$

$\Leftrightarrow (a_1x_2-a_2x_1)^2\geq 0$ សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n=k$ គឺ $\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_k^2}{x_k}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_k}$

សិក្សាករណី $n=k+1$

យើងមាន $\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_k^2}{x_k}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_k}$

$$\Rightarrow\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{a_k^2}{x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_k}+\frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}$$

$$\geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1})^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1}}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = ... = \frac{a_{k+1}}{x_{k+1}}$

លំហាត់ ១

ចំពោះ $a_1, a_2, \dots, a_n$ និង $b_1, b_2, \dots, b_n$ ជាចំនួនពិត

បង្ហាញថា $(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$

$$\leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$ ។

(វិសមភាព Cauchy-Schwarz)

ចម្លើយ

យើងមាន $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = \frac{(a_1b_1)^2}{b_1^2} + \frac{(a_2b_2)^2}{b_2^2} + ... + \frac{(a_nb_n)^2}{b_n^2}$

$$\geq \frac{(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$$

គេបាន $(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$

$$\leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$

លំហាត់ ២

ចំពោះ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ ។

(វិសមភាព Nesbitt)

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

ដោយ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 0 \Rightarrow (a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$

គេបាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}$

លំហាត់ ៣

យក $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ b_1, b_2,\ \dots,\ b_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geq \frac{1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$$ ។

(APMO,1991)

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}$

$$\geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n+b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

$$=\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}$$

លំហាត់ ៤

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc = 1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ ។

(IMO,1995)

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac}+\frac{\frac{1}{b^2}}{ab+bc}+\frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

$$\geq \frac{ab+bc+ca}{2(abc)^2}$$

$$\geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{(abc)^2} = \frac{3}{2}$$

លំហាត់ ៥

ចំពោះ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geq 1 \text{ ។}$$

(Czech and Slovak Republics,1999)

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{ab+2ac}+\frac{b^2}{bc+2ab}+\frac{c^2}{ac+2bc}$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} = 1$$

ព្រោះ $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

លំហាត់ ៦

គេឲ្យ w, x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា

$$\frac{w}{x+2y+3z} + \frac{x}{y+2z+3w} + \frac{y}{z+2w+3x} + \frac{z}{w+2x+3y} \geq \frac{2}{3}$$ ។

(Moldova,2007)

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{w}{x+2y+3z} + \frac{x}{y+2z+3w} + \frac{y}{z+2w+3x} + \frac{z}{w+2x+3y}$

$$= \frac{w^2}{wx+2wy+3wz} + \frac{x^2}{xy+2xz+3wx} + \frac{y^2}{yz+2wy+3xy}$$

$$+ \frac{z^2}{wz+2xz+3yz}$$

$$\geq \frac{(w+x+y+z)^2}{4(wx+xy+yz+zw+wy+xz)}$$

បង្ហាញថា $\frac{(w+x+y+z)^2}{4(wx+xy+yz+zw+wy+xz)} \geq \frac{2}{3}$

យើងមាន $\frac{(w+x+y+z)^2}{4(wx+xy+yz+zw+wy+xz)} \geq \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow 3(w^2+x^2+y^2+z^2) \geq 2(wx+xy+yz+zw+wy+xz)$$ ពិត

ព្រោះ តាម AM-GM គេបាន $w^2+x^2 \geq 2wx$, $x^2+y^2 \geq 2xy$

$$y^2+z^2\geq 2yz\,,\ z^2+w^2\geq 2zw$$

$$w^2+y^2\geq 2wy\,,\ x^2+z^2\geq 2xz$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$3\left(w^2+x^2+y^2+z^2\right)\geq 2\left(wx+xy+yz+zw+wy+xz\right)$$

លំហាត់ ៧

យក x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\geq\frac{3}{4}$$ ។

(Croatia,2004)

ចម្លើយ

យើងមាន $\dfrac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{z^2}{(z+x)(z+y)}$

$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}$$

បង្ហាញថា $\dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}\geq\dfrac{3}{4}$

យើងមាន $\dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}\geq\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ ពិត

លំហាត់ ៨

ចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{10b+11c}+\frac{b}{10c+11a}+\frac{c}{10a+11b}\geq\frac{1}{7}$$ ។

(ភ្នំពេញ,2009)

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{a}{10b+11c}+\frac{b}{10c+11a}+\frac{c}{10a+11b}$

$$=\frac{a^2}{10ab+11ac}+\frac{b^2}{10bc+11ab}+\frac{c^2}{10ac+11bc}$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{21(ab+bc+ca)}$$

ដោយ $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$

យើងបាន $\frac{a}{10b+11c}+\frac{b}{10c+11a}+\frac{c}{10a+11b}$

$$\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{21(ab+bc+ca)}=\frac{1}{7}$$

លំហាត់

i. (វិសមភាព QM-AM)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1,\ x_2,\ \dots,x_n$ បង្ហាញថា

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}\geq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$ ។

ii. (Hungry,1996)

គេឲ្យ $a,\ b$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b=1$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{b^2}{b+1}\geq\dfrac{1}{3}$ ។

iii. (MOSP,2000)

យក a,b,x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq\frac{3}{a+b}$$ ។

iv. (South Africa,1995)

យក $a,\ b,\ c,\ d$ ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$$ ។

v. ចំពោះ a,b,c,d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា

ក/ $8\left(a^4+b^4\right)\geq(a+b)^4$

ខ/ 1. $\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}\geq\dfrac{9}{a+b+c}$

2. $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ (Ireland,1998) ។

គ/ $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq a+b+c$

ឃ/ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$

ង/ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+a}+\frac{e}{a+b}\geq \frac{5}{2}$ ។

vi. (Belarus 1999)

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a^2+b^2+c^2=3$ ។ បង្ហាញថា

$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq \frac{3}{2}$ ។

vii. (IMO Shortlist,1990)

គេឲ្យ a, b, c, d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+cd+da=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq \frac{1}{3}$ ។

viii. (Thailand,2006)

យក a, b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង $k\in[0,\pi]$ ។ កំណត់ M ធំបំផុត

បើគេដឹងថា $\frac{1}{ka+b}+\frac{1}{kb+a}\geq \frac{M}{a+b}$ ។

ix. (Greece,2007)

គេឲ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\geq ab+bc+ca$ ។

x. (Korea,2007)

កំណត់តម្លៃវិជ្ជមាន k ទាំងអស់ដែលអាចមានបើគេដឹងថា

$\dfrac{a}{c+kb}+\dfrac{b}{a+kc}+\dfrac{c}{b+ka}\geq\dfrac{1}{2007}$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ។

xi. (Greece,2008)

គេឲ្យ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}\right)^{\frac{kn}{t}}\geq x_1x_2\ldots x_n$$ ដែល $k=\max\{x_1, x_2,\ldots,x_n\}$

និង $t=\min\{x_1, x_2,\ldots,x_n\}$ ។ តើសមភាពកើតឡើងនៅពេលណា ?

វិសមភាពនៃមធ្យម

(Mean Inequalities)

ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះ $a_1\,,\ a_2\,,\ \dots\,,a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន គេយក

$$QM=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}\ ,\ AM=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ ,$$

$$GM=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\ \text{ និង }\ HM=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

យើងបាន $QM\geq AM\geq GM\geq HM$ សមភាពលុះត្រាតែ

$a_1=a_2=\ldots=a_n$ ។

QM ហៅថា មធ្យមរឹសការេ (Quadratic Mean)

AM ហៅថា មធ្យមនព្វន្ត (Arithmetic Mean)

GM ហៅថា មធ្យមធរណីមាត្រ (Geometric Mean)

HM ហៅថា មធ្យមអាម៉ូនិច (Harmonic Mean) ។

សម្រាយ

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ AM-GM ដោយប្រើវិចារកំណើនបែបកូស៊ី (Cauchy) សម្រាប់ផ្នែកនៅសល់(QM-AM និងGM-HM)សូមមិត្តអ្នកអានសាកល្បងស្រាយដោយខ្លួនឯង។

ទម្រង់នៃវិចារកំណើនបែបកូស៊ី

ក/ បង្ហាញថា $p(2)$ ពិត

ខ/ ឧបមាថា $p(n)$ ពិត រួច ទាញថា $p(2n)$ ពិត និង $p(n-1)$ ពិត

គេបាន $p(n)$ ពិត ចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ ។

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន វិសមភាពឲ្យ $\Leftrightarrow a_1 + a_2 \ge 2\sqrt{a_1 a_2}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \ge 0 \text{ ពិត}$$

សមភាពលុះត្រាតែ $a_1 = a_2$

ឧបមាថា ពិតដល់ $n = k$ គឺ $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \ge k\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$

- ❖ បង្ហាញថា $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots + a_{2k} \ge 2k\sqrt[2k]{a_1 a_2 \ldots a_{2k}}$

  យើងមាន $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{2k}$

$$\ge k\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} + k\sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}$$

$$= k\left(\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k}}\right)$$

$$\ge 2k\sqrt[2k]{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots a_{2k}} \text{ ពិត}$$

- ❖ បង្ហាញថា $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} \ge (k-1)\sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$

  ចំពោះ $a_1,\ a_2, \ldots, a_{k-1} \ge 0$ តាង $a_k = \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$

  យើងបាន $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \ge k\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_k \ge k\sqrt[k]{a_k^{k-1} a_k}$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_k \ge k a_k$$

  គេបាន $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} \ge (k-1)\sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}}$ ពិត

ដូចនេះ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

សមភាពលុះត្រាតែ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

លំហាត់ ១

គេឲ្យ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ជាចម្លាស់មួយនៃ $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset \mathrm{IR}^+$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{b_n} \geq n$

$\dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_2}{a_2} + \ldots + \dfrac{b_n}{a_n} \geq n$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ជាចម្លាស់មួយនៃ $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

យើងបាន $\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} b_i$

តាម AM-GM យើងបាន $\dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{b_n} \geq n \sqrt[n]{\dfrac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{n} b_i}} = n$

និង $\dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{b_n} \geq n \sqrt[n]{\dfrac{\prod_{i=1}^{n} b_i}{\prod_{i=1}^{n} a_i}} = n$

លំហាត់ ២

គេឲ្យ a , b , $c > 0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc = 1$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{1+ab}{1+a} + \dfrac{1+bc}{1+b} + \dfrac{1+ca}{1+c} \geq 3$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c}=\frac{1+ab}{abc+a}+\frac{1+bc}{abc+b}+\frac{1+ca}{abc+c}$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{1+ab}{1+bc}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{1+bc}{1+ca}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{1+ca}{1+ab}\right)$$

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c}$

$$\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1+ab}{1+bc}\right)\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1+bc}{1+ca}\right)\left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1+ca}{1+ab}\right)}$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=3$$

ដូចនេះ $\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c}\geq 3$

លំហាត់ ៣

គេឲ្យ a , b , $c>0$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{9}{a+b+c}$ ។

ចម្លើយ

តាម AM-HM យើងបាន $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geq\frac{2}{a+b}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{4}{b+c}$ (2)

$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\geq\frac{4}{c+a}$ (3)

បូក (1),(2),(3) គេបាន $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \quad (*)$$

ម៉្យាងទៀត $\dfrac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}{3} \geq \dfrac{3}{2(a+b+c)}$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c} \quad (**)$$

តាម (*),(* *) យើងបាន

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}$$

លំហាត់ ៤

យក a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា ក/ $\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right) \geq 64$

ខ/ $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geq 8$ ។

ចម្លើយ

ក/

របៀបទី ១

យើងមាន $\frac{1}{a}+1=\frac{a+b+c}{a}+1=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+1+1$

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{1}{a}+1 \geq 4\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $\frac{1}{b}+1\geq 4\sqrt[4]{\frac{ca}{b^2}}$, $\frac{1}{c}+1\geq 4\sqrt[4]{\frac{ab}{c^2}}$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right)\geq 64\sqrt[4]{\frac{(bc)(ca)(ab)}{a^2b^2c^2}}=64$$

របៀបទី ២

$$\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{abc}$$

តាម AM-GM យើងបាន

$$\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right)\geq 1+\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^2}}+\frac{1}{abc}$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3$$

ម្យ៉ាងទៀត $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3$

ដូចនេះ $\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right)\geq 4^3=64$

ខ/

យើងមាន $\frac{1}{a}-1=\frac{a+b+c}{a}-1=1+\frac{b+c}{a}-1=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{1}{a}-1\geq\frac{2\sqrt{bc}}{a}$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $\frac{1}{b}-1\geq\frac{2\sqrt{ca}}{b}$, $\frac{1}{c}-1\geq\frac{2\sqrt{ab}}{c}$

ដូចនេះ $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geq\frac{8\sqrt{(bc)(ca)(ab)}}{abc}=8$

លំហាត់ ៥

ចំពោះគ្រប់ a , b , $c>0$ បង្ហាញថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ (*)។

(វិសមភាព Nesbitt)

ចម្លើយ

តាង $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$

យើងបាន $x+y+z=2(a+b+c)\Rightarrow a+b+c=\frac{x+y+z}{2}$

គេបាន $a=\frac{y+z-x}{2}$, $b=\frac{z+x-y}{2}$, $c=\frac{x+y-z}{2}$

(*) $\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{y+z-x}{x}+\frac{z+x-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\right)\geq\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\geq 6$ ពិត តាម AM-GM

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

របៀបទី ២

តាម AM-GM យើងបាន

$$(b+c)+(c+a)+(a+b)\geq 3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c)\geq 3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)} \qquad (1)$$

ហើយ $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{b+c}\right)\left(\frac{1}{c+a}\right)\left(\frac{1}{a+b}\right)}$ (2)

គុណ (1),(2) យើងបាន $2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9$

$$\Rightarrow 1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

លំហាត់ ៦

គេឲ្យ $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_n+1}=1$ ។ បង្ហាញថា $x_1x_2\ldots x_n\geq(n-1)^n$ ។

ចម្លើយ

តាង $y_i=\frac{1}{x_i+1}$ ចំពោះ $i=\overline{1,n}\Rightarrow x_i=\frac{1}{y_i}-1=\frac{1-y_i}{y_i}$

ហើយ $\sum_i y_i=1\Rightarrow 1-y_i=\sum_{j\neq i}y_j$

តាម AM-GM យើងបាន $1-y_i\geq(n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i}y_j}$

គេបាន $\prod_i x_i=\prod_i\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right)=\frac{\prod_i(1-y_i)}{\prod_i y_i}$

$$\geq \frac{\prod_i (n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i} y_j}}{\prod_i y_i} = \frac{(n-1)^n \prod_i y_i}{\prod_i y_i} = (n-1)^n$$

ដូចនេះ $x_1x_2...x_n \geq (n-1)^n$

លំហាត់ ៧

គេឲ្យ $n \geq 2$ និង $x_1, x_2, \dots, x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\frac{1}{x_1+1998} + \frac{1}{x_2+1998} + \dots + \frac{1}{x_3+1998} = \frac{1}{1998}$$ ។

បង្ហាញថា $\frac{\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}}{n-1} \geq 1998$ ។

(Vietnam,1998)

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{1}{x_1+1998} + \frac{1}{x_2+1998} + \dots + \frac{1}{x_3+1998} = \frac{1}{1998}$

$$\Rightarrow \frac{1998}{x_1+1998} + \frac{1998}{x_2+1998} + \dots + \frac{1998}{x_3+1998} = 1$$

តាង $\frac{1998}{x_i+1998} = \frac{1}{1+y_i}$ ចំពោះ $i = \overline{1,n}$

យើងបាន $y_i = \frac{x_i}{1998} > 0$ និង $\sum_i \frac{1}{1+y_i} = 1$

តាមលំហាត់ ១ គេបាន $y_1y_2...y_n \geq (n-1)^n$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1}{1998}\right)\left(\frac{x_2}{1998}\right)...\left(\frac{x_n}{1998}\right) \geq (n-1)^n$$

$$\Rightarrow \frac{x_1x_2\ldots x_n}{1998^n} \ge (n-1)^n$$

ដូចនេះ $\frac{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}{n-1} \ge 1998$

លំហាត់ ៨

គេឲ្យ a_1, a_2, $\ldots$, a_n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a_1a_2\ldots a_n(1-a_1-a_2-\ldots-a_n)}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)} \le \frac{1}{n^{n+1}}$ (*)។

(IMO Shortlist,1998)

ចម្លើយ

តាង $a_{n+1} = 1-a_1-a_2-\ldots-a_n \Rightarrow 1-a_i = \sum_{j\ne i} a_j$ និង $\sum_i a_i = 1$

យក $a_i = \frac{1}{x_i+1}$ ចំពោះ $i = \overline{1, n+1} \Rightarrow x_i = \frac{1-a_i}{a_i}$

គេបាន $\sum_i \frac{1}{x_i+1} = 1$

តាម លំហាត់ ១ យើងបាន $x_1x_2\ldots x_nx_{n+1} \ge n^{n+1}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-a_1}{a_1}\right)\left(\frac{1-a_2}{a_2}\right)\ldots\left(\frac{1-a_{n+1}}{a_{n+1}}\right) \ge n^{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1}{1-a_1}\right)\left(\frac{a_2}{1-a_2}\right)\ldots\left(\frac{a_n}{1-a_n}\right)\left(\frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}\right) \le \frac{1}{n^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1a_2\ldots a_n(1-a_1-a_2-\ldots-a_n)}{(a_1+a_2+\ldots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)} \le \frac{1}{n^{n+1}}$$

លំហាត់ ៩

គេឲ្យ $x, \ y > 1$។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8$ ។

(Russia,1992)

ចម្លើយ

របៀបទី ១

តាង $a = x-1, \ b = y-1 > 0 \Rightarrow x = a+1, \ y = b+1$

គេបាន $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}=\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}$

តាម AM-GM យើងបាន $a^2+1\geq 2a \Rightarrow (a+1)^2 \geq 4a$

ដូចគ្នាដែរ $b^2+1\geq 2b \Rightarrow (b+1)^2 \geq 4b$

យើងបាន $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4(2)=8$

របៀបទី ២

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 2\left(\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{y-1}}\right)$ (*)

ចំពោះ $\forall \ a > 1$ យើងបាន $\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a-1}}\geq 2$

ហេតុនេះ (*) $\Rightarrow \frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 2(2)(2)=8$

លំហាត់ ១០

គេឲ្យ $x, \ y, \ z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=3$។

បង្ហាញថា $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge xy+yz+zx$ ។

(Russia,1994)

ចម្លើយ

តាម AM-GM យើងបាន $x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x}\ge 3x$

$$y^2+\sqrt{y}+\sqrt{y}\ge 3y$$

$$z^2+\sqrt{z}+\sqrt{z}\ge 3z$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$x^2+y^2+z^2+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\ge 3(x+y+z)$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\ge (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge xy+yz+zx$$

លំហាត់ ១១

គេឲ្យ x មិនមែនជាចំនួនគត់ ហើយ $x>1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\frac{x+\{x\}}{[x]}-\frac{[x]}{x+\{x\}}\right)+\left(\frac{x+[x]}{\{x\}}-\frac{\{x\}}{x+[x]}\right)>\frac{9}{2}\quad (*)$$ ។

(Mediterranean,2007)

ចម្លើយ

តាង $a=[x], r=\{x\}$

យើងបាន (*) សមមូល $\left(\frac{a+2r}{a}-\frac{a}{a+2r}\right)+\left(\frac{2a+r}{r}-\frac{r}{2a+r}\right)>\frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{r}{a}+\frac{a}{r}\right)-\left(\frac{a}{a+2r}+\frac{r}{2a+r}\right)>\frac{5}{2}$$

ដោយ $\frac{r}{a}+\frac{a}{r}\geq 2$

ហើយ $a+2r\geq a+r$, $2a+r\geq a+r$

សមភាពកើតឡើងព្រមគ្នា កាលណា $a=r=0$ (ជាករណីមិនអាច)

គេបាន $\frac{a}{a+2r}+\frac{r}{2a+r}<\frac{a}{a+r}+\frac{r}{a+r}=1<\frac{3}{2}$

យើងបាន $2\left(\frac{r}{a}+\frac{a}{r}\right)-\left(\frac{a}{a+2r}+\frac{r}{2a+r}\right)>4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ ពិត

ដូចនេះ $\left(\frac{x+\{x\}}{[x]}-\frac{[x]}{x+\{x\}}\right)+\left(\frac{x+[x]}{\{x\}}-\frac{\{x\}}{x+[x]}\right)>\frac{9}{2}$

លំហាត់ ១២

គេឲ្យ a , b , $c>0$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$ ។

(USAMO,1997)

ចម្លើយ

យើងមាន $(a-b)^2(a+b)\geq 0$ ចំពោះ a , b , $c>0$

$$\Rightarrow (a^2-b^2)(a-b)\geq 0$$

$$\Rightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)$$

គេបាន $\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leq\frac{1}{ab(a+b+c)}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ យើងបាន $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\leq\frac{1}{bc(a+b+c)}$ (2)

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{ca(a+b+c)} \qquad (3)$$

បូក (1),(2),(3)យើងបាន

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}$$

$$\le \frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}$$

$$=\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}$

លំហាត់ ១៣

គេឲ្យ $x_i > 0$ ចំពោះ $i=\overline{1,n}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$(x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right) \ge n^2$ ។

ចម្លើយ

តាម AM-GM យើងបាន

$$x_1+x_2+...+x_n \ge n\sqrt{x_1x_2...x_n}$$

និង $$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n} \ge \frac{n}{\sqrt{x_1x_2...x_n}}$$

គេបាន $(x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)$

$$\geq \left(n\sqrt{x_1x_2\ldots x_n}\right)\left(\frac{n}{\sqrt{x_1x_2\ldots x_n}}\right)=n^2$$

លំហាត់ ១៤

គេឲ្យ $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_n>0$ និង $s=a_1+a_2+\ldots+a_n$ ។

បង្ហាញថា ក/ $\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\geq\frac{n^2}{n-1}$

ខ/ $\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{a_i}\geq n(n-1)$

គ/ $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geq\frac{n}{n-1}$ ។

(Australia,1993)

ចម្លើយ

ក/ យើងមាន $\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\geq\frac{n^2}{n-1}$

$$\Leftrightarrow (n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\geq n^2\ (\ *\ )\ \text{ដោយ}\ s=\sum_{i=1}^{n}a_i$$

គេបាន $n-1=n-\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{s}=\frac{s-a_1}{s}+\frac{s-a_2}{s}+\ldots+\frac{s-a_n}{s}=\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s}$

យើងបាន (*) សមមូល $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{s}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\right)\geq n^2$ ពិត

តាម លំហាត់ ១០

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\geq\frac{n^2}{n-1}$

ខ/ យើងមាន $\sum_{i=1}^{n}\frac{s-a_i}{a_i}\geq n(n-1)$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s}{a_i}-1\right)\geq n^2-n\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}\geq n^2 \qquad (*)$$

ដោយ $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s}=1$ ព្រោះ $s=\sum_{i=1}^{n}a_i$

គេបាន (*) សមមូល $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{a_i}\right)\geq n^2$ ពិត តាម លំហាត់ ១០

គ/ តាម ក យើងបាន $\sum_{i=1}^{n}\frac{s}{s-a_i}\geq\frac{n^2}{n-1}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{s-a_i}+1\right)\geq\frac{n^2}{n-1}$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{s-a_i}\right)+n\geq\frac{n^2}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{s-a_i}\right)\geq\frac{n^2}{n-1}-n$$

$$=\frac{n}{n-1}$$

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geq\frac{n}{n-1}$

លំហាត់ ១៥

ចំពោះ $n\geq1$ជាចំនួនគត់ បង្ហាញថា $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}>\frac{2}{3}$ ។

ចម្លើយ

តាម AM-HM យើងបាន $\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}}{n+1}>\dfrac{n+1}{n+(n+1)+\ldots+2n}$

$$=\frac{n+1}{\frac{(n+1)(n+2n)}{2}}=\frac{2}{3n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$ ដោយ $1+\frac{1}{n}>1$

ដូចនេះ $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{2}{3}$

លំហាត់ ១៦

គេឲ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\dfrac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\dfrac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\dfrac{3}{4}$ ។

(IMO Shortlist.1998)

ចម្លើយ

តាម AM-GM យើងបាន $\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\dfrac{1+y}{8}+\dfrac{1+z}{8}\geq\dfrac{3x}{4}$

គេបាន $\sum\limits_{cyc}\dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{cyc}(1+x)\geq\dfrac{3}{4}\sum\limits_{cyc}\dfrac{3x}{4}$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}\geq\frac{1}{4}\sum_{cyc}(2x-1)\geq\frac{3}{4}$$

សមភាពលុះត្រាតែ $x=y=z=1$

លំហាត់ ១៧

គេឲ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$ ។

(APMO,1998)

ចម្លើយ

យើងមាន $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$ ពិត

ព្រោះ តាម AM-GM យើងបាន

$$\begin{aligned}\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}&=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\&=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3\\&\geq\frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}-3\\&=\frac{2(x+y+z)+\left(x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}\right)}{\sqrt[3]{xyz}}\\&\geq\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$

សមភាពលុះត្រាតែ $x=y=z$

លំហាត់ ១៨

គេឲ្យ $a\,,\ b\,,\ c\,,d\geq 0$ ។ បង្ហាញថា

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\geq\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+abd}{4}}$$ ។

ចម្លើយ

តាម AM-GM យើងបាន

$$\begin{aligned}abc+bcd+cda+abd&=bc(a+d)+ad(b+c)\\&\leq\left(\frac{b+c}{2}\right)^2(a+d)+\left(\frac{a+d}{2}\right)^2(b+c)\\&=(b+c)(a+d)\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)\\&\leq\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)\\&=\frac{(a+b+c+d)^3}{16}\end{aligned}$$

គេបាន $\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+abd}{4}}\leq\frac{a+b+c+d}{4}$

ម៉្យាងទៀត តាម AM-QM គេបាន $\frac{a+b+c+d}{4}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$

ដូចនេះ $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\dfrac{abc+bcd+cda+abd}{4}}$

សមភាពលុះត្រាតែ $a=b=c=d$

លំហាត់ ១៩

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^5+y^5+z^5=3$។

បង្ហាញថា $\dfrac{x^4}{y^3}+\dfrac{y^4}{z^3}+\dfrac{z^4}{x^3} \geq 3$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $(x^5+y^5+z^5)^2 = x^{10}+2x^5y^5+y^{10}+2y^5z^5+z^{10}+2z^5x^5$

$$=9$$

តាម AM-GM យើងបាន $10\dfrac{x^4}{y^3}+6x^5y^5+3x^{10} \geq 19x^{\frac{100}{19}}$

$$10\frac{y^4}{z^3}+6y^5z^5+3y^{10} \geq 19y^{\frac{100}{19}}$$

$$10\frac{z^4}{x^3}+6z^5x^5+3z^{10} \geq 19z^{\frac{100}{19}}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$10\left(\frac{x^4}{y^3}+\frac{y^4}{z^3}+\frac{z^4}{x^3}\right)+3(x^5+y^5+z^5)^2 \geq 19\left(x^{\frac{100}{19}}+y^{\frac{100}{19}}+z^{\frac{100}{19}}\right)$$

$$\Rightarrow 10\left(\frac{x^4}{y^3}+\frac{y^4}{z^3}+\frac{z^4}{x^3}\right)+27 \geq 19\left(x^{\frac{100}{19}}+y^{\frac{100}{19}}+z^{\frac{100}{19}}\right)$$

បង្ហាញថា $x^{\frac{100}{19}}+y^{\frac{100}{19}}+z^{\frac{100}{19}} \geq 3$

តាម AM-GM យើងមាន

$$1+19x^{\frac{100}{19}}=1+\underbrace{x^{\frac{100}{19}}+x^{\frac{100}{19}}+\ldots+x^{\frac{100}{19}}}_{19\text{តួ}}\geq 20x^5$$

យើងបាន $\sum_{cyc}\left(1+19x^{\frac{100}{19}}\right)\geq 20\sum_{cyc}x^5 \Leftrightarrow 19\sum_{cyc}x^{\frac{100}{19}}\geq 20(3)-3=57$

គេបាន $x^{\frac{100}{19}}+y^{\frac{100}{19}}+z^{\frac{100}{19}}\geq 3$

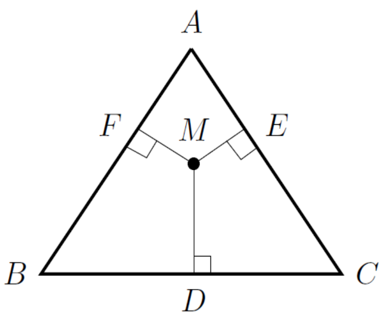
ដូចនេះ $\frac{x^4}{y^3}+\frac{y^4}{z^3}+\frac{z^4}{x^3}\geq 3$ សមភាពលុះត្រាតែ $x=y=z=1$

លំហាត់ ២០

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្សមានរង្វាស់ជ្រុង a ។ យក M ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ ហើយ D , E , F ជាចំណោលកែងនៃ M លើជ្រុង BC , CA និង AB រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា

ក/ $\frac{1}{MD}+\frac{1}{ME}+\frac{1}{MF}\geq\frac{6\sqrt{3}}{a}$

ខ/ $\frac{1}{MD+ME}+\frac{1}{ME+MF}+\frac{1}{MF+MD}\geq\frac{3\sqrt{3}}{a}$ ។



សម្រាយ

ក/

តាង $x = MD$, $y = ME$, $z = MF$

យើងមាន $(ABC) = (BCM) + (CAM) + (ABM)$

$\Rightarrow ah = ax + ay + az$ ដែល $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ (កម្ពស់ត្រីកោណ ABC)

$\Rightarrow h = x + y + z$ [1]

តាម AM-GM យើងបាន $h\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = (x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$

$$\geq 9\sqrt[3]{\frac{xyz}{xyz}} = 9$$

គេបាន $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{h} = \dfrac{6\sqrt{3}}{a}$

សរុបមក $\dfrac{1}{MD} + \dfrac{1}{ME} + \dfrac{1}{MF} \geq \dfrac{6\sqrt{3}}{a}$

ខ/

តាម AM-GM យើងបាន

$$(x + y + y + z + z + x)\left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{y + z} + \frac{1}{z + x}\right)$$

$$\geq 9\sqrt[3]{\frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{(x + y)(y + z)(z + x)}} = 9$$

1 Viviani's lemma

គេបាន $2h\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)\geq 9$

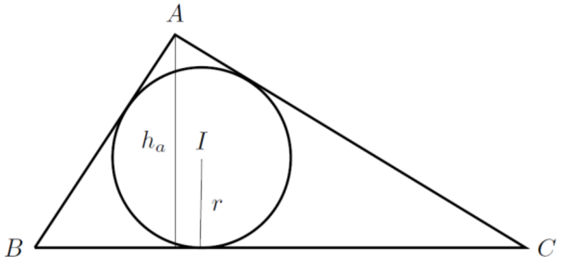
$$\Rightarrow \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq \frac{9}{2h}=\frac{3\sqrt{3}}{a}$$

លំហាត់ ២១

យក h_a, h_b, h_c ជាកម្ពស់គូសចេញពីកំពូល A, B, C រៀងគ្នានៃត្រីកោណ ABC ដែលចារឹកក្រៅរង្វង់ដែលមានផ្ចិត I កាំ r ។

បង្ហាញថា ក/ $\frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}=1$

ខ/ $h_a+h_b+h_c\geq 9r$ ។



សម្រាយ

ក/

យើងមាន $\frac{(IBC)}{(ABC)}=\frac{ra}{h_a a}=\frac{r}{h_a}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{(ICA)}{(ABC)}=\frac{r}{h_b}$, $\frac{(IAB)}{(ABC)}=\frac{r}{h_c}$

យើងបាន $\frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}=\frac{(IBC)}{(ABC)}+\frac{(ICA)}{(ABC)}+\frac{(IAB)}{(ABC)}=\frac{(ABC)}{(ABC)}=1$

ខ/

តាម AM-GM យើងបាន $(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\geq 9$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}(h_a+h_b+h_c)\geq 9$$

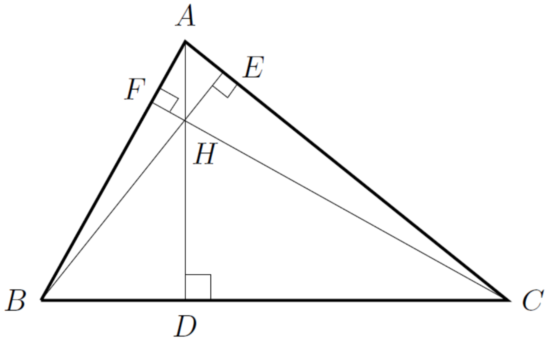
ដូចនេះ $h_a+h_b+h_c\geq 9r$

លំហាត់ ២២

គេឲ្យ ABC មួយមានកម្ពស់ AD, BE, CF ហើយ H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ

នេះ ។ បង្ហាញថា ក/ $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\geq 9$

ខ/ $\frac{HD}{HA}+\frac{HE}{HB}+\frac{HF}{HC}\geq \frac{3}{2}$ ។



សម្រាយ

ក/

តាង $S=(ABC)$, $S_1=(HBC)$, $S_2=(HCA)$ និង $S_3=(HAB)$

ABC និង HBC ជាត្រីកោណដែលមានបាតរួម

យើងបាន $\frac{S_1}{S}=\frac{HD}{AD}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{S_2}{S}=\frac{HE}{BE}$, $\frac{S_3}{S}=\frac{HF}{CF}$

គេបាន $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=\frac{S_1+S_2+S_3}{S}=\frac{S}{S}=1$

តាម AM-GM យើងបាន $\left(\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}\right)\left(\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\right)\geq 9$

សរុបមក $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\geq 9$

ខ/

យើងមាន $\frac{HD}{HA}=\frac{HD}{AD-HD}=\frac{S_1}{S-S_1}=\frac{S_1}{S_2+S_3}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{HE}{HB}=\frac{S_2}{S_3+S_1}$, $\frac{HF}{HC}=\frac{S_3}{S_1+S_2}$

យើងបាន $\frac{HD}{HA}+\frac{HE}{HB}+\frac{HF}{HC}=\frac{S_1}{S_2+S_3}+\frac{S_2}{S_3+S_1}+\frac{S_3}{S_1+S_2}$

តាមវិសមភាព Nesbitt $\frac{S_1}{S_2+S_3}+\frac{S_2}{S_3+S_1}+\frac{S_3}{S_1+S_2}\geq\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\frac{HD}{HA}+\frac{HE}{HB}+\frac{HF}{HC}\geq\frac{3}{2}$

លំហាត់

1. កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $x\left(1-x^3\right)$ បើ $0\le x\le 1$ ។
2. យក a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=1$ ។
   រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។
3. យក a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា
   $$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{c+a-b}}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$$ ។
4. គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$ ។
   បង្ហាញថា $\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+1}}\ge 3$ ។
5. ឧបមាថា a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។
   បង្ហាញថា $(a+b-c)^a(b+c-a)^b(c+a-b)^c\le a^ab^bc^c$ ។
6. គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a+b+c=2$ ។
   បង្ហាញថា $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 2$ ។
7. គេឲ្យ a, b, c, d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា
   $$\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+cd}+\frac{1}{d^2+da}\ge\frac{4}{ac+bd}$$ ។
8. គេឲ្យ a, b, c, d ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ
   $a+b+c+d+e=5$ ។ បង្ហាញថា
   $abc+bcd+cde+dea+eab\le 5$ ។
9. គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=3$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$ ។

វិសមភាព Cauchy-Schwarz

ទ្រឹស្តីបទ

ចំពោះ $a_1,\ a_2,\dots,a_n,\ b_1,\ b_2,\dots,b_n$ ជាចំនួនពិត គេបាន

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$ ។

សម្រាយ

យក $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_ix-b_i)^2=x^2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)-2x\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$

នោះ $f(x)\ge 0$ ដោយ $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\ge 0$

យើងបាន $\Delta'\le 0\Leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2\le 0$

$$\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

សមភាពពេល $a_ix-b_i=0\Leftrightarrow a_ix=b_i$ ចំពោះ $i=\overline{1,n}$

ពោល គឺ $\vec{u}=(a_1,a_2,\dots,a_n),\ \vec{v}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ កូលីនេអ៊ែគ្នា

លំហាត់ ១

គេឲ្យ $a,\ b,\ c>0$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\ge 0$$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\geq 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\leq 3$$ ពិត

ព្រោះ តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz គេបាន

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\leq \frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}$$

យើងបាន $\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\leq \sum_{cyc}\frac{a^2}{a^2+c^2}+\sum_{cyc}\frac{b^2}{b^2+c^2}=3$

លំហាត់ ២

គេឲ្យ x, y, $z\geq 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ ។ បង្ហាញថា

$\sqrt{x+y+z}\geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$ ។

(Iran MO,1998)

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2\Rightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=1$

តាម វិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sum_{cyc}x=\left(\sum_{cyc}x\right)\left(\sum_{cyc}\frac{x-1}{x}\right)\geq \left(\sum_{cyc}\sqrt{x-1}\right)^2$$

ដូចនេះ $\sqrt{x+y+z}\geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$

លំហាត់ ៣

គេឲ្យ a , b , $c>0$ ។ កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}$ ។

ចម្លើយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\frac{3a}{b+c}+3+\frac{4b}{c+a}+4+\frac{5c}{a+b}+5$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)$$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)^2$$

គេបាន $\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)^2-12$

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}$ គឺ

$\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)^2-12$ សមភាពលុះត្រាតែ $\frac{b+c}{\sqrt{3}}=\frac{c+a}{2}=\frac{a+b}{\sqrt{5}}$

លំហាត់ ៤

យក a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$ ។

(APMO,1996)

ចម្លើយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\le\sqrt{2(a+b-c+b+c-a)}=2\sqrt{b}$$

ស្រាយដូចគ្នាយើងបាន $\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{c}$

$$\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}\le 2\sqrt{a}$$

បូកអង្គ និង អង្គគេបាន

$$2\left(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\right)\le 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

ដូចនេះ $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

សមភាពលុះត្រាតែ $a=b=c$

លំហាត់ ៥

គេឲ្យ $a\,,b\,,\,c$ ជាចំនួនពិត ។

គេយក $x=\sqrt{b^2-bc+c^2}$, $y=\sqrt{c^2-ca+a^2}$ និង

$z=\sqrt{a^2-ab+b^2}$ ។

បង្ហាញថា $xy+yz+zx\ge a^2+b^2+c^2$

(VMEO,2006)

ចម្លើយ

យើងមាន $x=\sqrt{b^2-bc+c^2}=\sqrt{\frac{3c^2}{4}+\left(b-\frac{c}{2}\right)^2}$

ហើយ $y=\sqrt{c^2-ca+a^2}=\sqrt{\frac{3c^2}{4}+\left(a-\frac{c}{2}\right)^2}$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$xy=\sqrt{\left[\frac{3c^2}{4}+\left(b-\frac{c}{2}\right)^2\right]\left[\frac{3c^2}{4}+\left(a-\frac{c}{2}\right)^2\right]}$$

$$\geq \frac{3c^2}{4}+\frac{1}{4}(2b-c)(2a-c)$$

គេបាន $\sum_{cyc} xy \geq \frac{3}{4}\sum_{cyc} c^2+\frac{1}{4}\sum_{cyc}(2b-c)(2a-c)=\sum_{cyc} a^2$

ដូចនេះ៖ $xy+yz+zx\geq a^2+b^2+c^2$

លំហាត់ ៦

បើសមីការ $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ មានរឹសជាចំនួនពិតយ៉ាងហោចណាស់មួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2\geq 8$ ។

(Tournament of the Towns,1993)

ចម្លើយ

បើ x ជារឹសនៃសមីការ យើងបាន $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$

$$\Rightarrow ax^3+bx=-x^4-2x^2-1$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz គេបាន

$$\left(x^6+x^2\right)\left(a^2+b^2\right)\geq\left(ax^3+bx\right)^2=\left(x^4+2x^2+1\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2\geq\frac{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}{x^6+x^3}$$

បង្ហាញថា $\frac{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}{x^6+x^2}\geq 8$

យើងមាន $\frac{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}{x^6+x^2}\geq 8\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)^2\geq 0$ ពិត

ដូចនេះ $a^2+b^2\geq 8$

វិសមភាពនៃតម្រៀប

(Rearrangement Inequalities)

វិសមភាពនៃតម្រៀបនេះអាចត្រូវបានហៅថា វិសមភាពនៃចម្លាស់ ។

ទ្រឹស្តីបទ

គេមាន $2n$ ចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$

និង $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ ។ ចំពោះគ្រប់ចម្លាស់ $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ នៃ

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ គេបានវិសមភាព $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ge \sum_{i=1}^{n} a'_i b_i$ (1)

$$\sum_{i=1}^{n} a'_i b_i \ge \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i} b_i \qquad (2)$$

ចំពោះ (1) សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a'_i = a_i \ , i = \overline{1,n}$

ចំណែក (2) សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a'_i = a_{n+1-i} \ , i = \overline{1,n}$

សម្រាយ

ចំពោះ $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ និង $a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n$ ជាចំនួនពិត

តាង $S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_r b_r + \ldots + a_s b_s + \ldots + a_n b_n$

និង $S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_s b_r + \ldots + a_r b_s + \ldots + a_n b_n$

(S' ជាផលបូក S ដែលប្តូរទីតាំងរវាង a_r និង a_s)

យើងបាន $S - S' = a_r b_r + a_s b_s - a_s b_r - a_r b_s$

$$= (b_s - b_r)(a_s - a_r)$$

គេបាន $S \ge S'$ កាលណា $a_s \ge a_r$

តាមលក្ខណៈនេះ គេបាន S មានតម្លៃធំបំផុត ពេល $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$

និង មានតម្លៃតូចបំផុតពេល $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$

ដូចនេះ ទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

កូរ៉ូលែ ១ (Corollary)

ចំពោះគ្រប់ចម្លាស់ $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ នៃ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ គេបាន

$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \ge a_1 a_1' + a_2 a_2' + \ldots + a_n a_n'$ ។

កូរ៉ូលែ ២ (Corollary)

ចំពោះគ្រប់ចម្លាស់ $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ នៃ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ គេបាន

$\frac{a_1'}{a_1} + \frac{a_2'}{a_2} + \ldots + \frac{a_n'}{a_n} \ge n$ ។

លំហាត់ ១

យក a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$$ ។

(IMO,1964)

ចម្លើយ

ដោយ វិសមភាពមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a , b , c

WLOG ឧបមាថា $c\le b\le a$

គេបាន $a(b+c-a)\le b(a+c-b)\le c(a+b-c)$

(ការស្រាយទុកជាលំហាត់)

តាមវិសមភាពនៃតម្រៀប យើងបាន

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$$
$$\le ba(b+c-a)+cb(c+a-b)+ac(a+b-c) \quad (1)$$

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$$
$$\le ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c) \quad (2)$$

បូក (1) និង (2) យើងបាន

$$2\left[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\right]\le 6abc$$

ដូចនេះ $a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$

លំហាត់ ២

ចំពោះ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$ ។

(វិសមភាព Nesbitt)

ចម្លើយ

របៀបទី ១

ដោយ វិសមភាពមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a , b , c

WLOG សន្មតថា $a \le b \le c$

យើងបាន $a+b \le c+a \le b+c \Rightarrow \frac{1}{b+c} \le \frac{1}{c+a} \le \frac{1}{a+b}$

តាមវិសមភាពនៃតម្រៀបគេបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b} \qquad (1)$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b} \qquad (2)$$

បូក (1),(2) យើងបាន $2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \ge 3$

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

របៀបទី ២

តាមកូរ៉ូលែ ២ នៃវិសមភាពតម្រៀបគេបាន

$$\frac{c+a}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b} \ge 3 \qquad (1)$$

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b} \ge 3 \qquad (2)$$

បូក (1) និង (2) យើងបាន

$$1+\frac{2a}{b+c}+1+\frac{2b}{c+a}+1+\frac{2c}{a+b} \ge 6$$

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

លំហាត់ ៣

បើ $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$ និង $b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n$ បង្ហាញថា

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}\geq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$$ ។

(Tchebyshev's Inequality)

ចម្លើយ

តាមវិសមភាពនៃតម្រៀបយើងមាន

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\geq a_1b_2+a_2b_3+\ldots+a_nb_1$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\geq a_1b_3+a_2b_4+\ldots+a_nb_2$$

…………………………………………………………………….

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_{n-1}$$

បូកអង្គ និង អង្គគេបាន

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\geq(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$$

ដូចនេះ $\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}\geq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $a_1=a_2=\ldots=a_n$ រឺ $b_1=b_2=\ldots=b_n$

លំហាត់ ៤

គេឲ្យចំនួនពិត $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$ និង $y_1\leq y_2\leq\ldots\leq y_n$ ។

បើ $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ជាចម្លាស់នៃ $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$។ បង្ហាញថា

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$ ។

(IMO,1975)

ចម្លើយ

ដោយ $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ជាចម្លាស់នៃ $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ គេបាន $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$

យើងបាន $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ge \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$ ពិត តាមវិសមភាពនៃតម្រៀប

លំហាត់ ៥

គេឲ្យ $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ ជា n ចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្សេងគ្នា ។ បង្ហាញថា

$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{n^2} \ge \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ ។

(IMO,1978)

ចម្លើយ

យក $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ជាចម្លាស់នៃ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ដែល $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n-1)^2}, \ldots, \frac{1}{1^2}\right)$$

ចំពោះ $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ ជាចម្លាស់នៃ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ដែល $a'_i = x_{n+1-i}$,

$i=\overline{1,n}$

តាមវិសមភាពនៃតម្រៀបយើងបាន

$$\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\ldots+\frac{x_n}{n^2}=a_1'b_1+a_2'b_2+\ldots+a_n'b_n$$

$$\geq a_nb_1+a_{n-1}b_2+\ldots+a_1b_n$$

$$\geq \frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{n^2}$$

ដោយ $1\leq a_1,\ 2\leq a_2,\ \ldots,\ n\leq a_n$ យើងបាន

$$\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\ldots+\frac{x_n}{n^2}\geq\frac{1}{1^2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

លំហាត់ ៦

យក a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$ ។

(IMO,1983)

ចម្លើយ

សិក្សាករណី $c\leq b\leq a$ (ករណីផ្សេងទៀតស្រាយដូចគ្នា)

គេបាន $a(b+c-a)\leq b(c+a-b)\leq c(a+b-c)$

និង $\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{c}$

តាមវិសមភាពនៃតម្រៀបគេបាន

$$\frac{a(b+c-a)}{a}+\frac{b(c+a-b)}{b}+\frac{c(a+b-c)}{c}$$

$$\geq \frac{a(b+c-a)}{c}+\frac{b(c+a-b)}{a}+\frac{c(a+b-c)}{b}$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq \frac{a(b-a)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b}+a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a(b-a)}{c}+\frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b} \leq 0$$

ដូចនេះ $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$

លំហាត់ ៧

ចំពោះចំនួនពិត $x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n$ និង $y_1,y_2,\ldots,y_n$ ។ បង្ហាញថា

$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$ សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $\exists\lambda \in \mathrm{IR}$

ដែល $x_i=\lambda y_i$, $i=\overline{1,n}$ ។

(វិសមភាព Cauchy-Schwarz)

ចម្លើយ

បើ $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ រឺ $y_1=y_2=\ldots=y_n=0$ គេបាន $0\leq 0$ ពិត

ករណីផ្សេងពីនេះ តាង $S=\sqrt{\sum_{i}^{n}x_i}$ និង $T=\sqrt{\sum_{i}^{n}y_i}$

យក $a_i=\dfrac{x_i}{S}$ និង $a_{n+i}=\dfrac{y_i}{T}$ ចំពោះ $i=\overline{1,n}$

តាមក្សូរ៉ូលែ ១ នៃវិសមភាពតម្រៀបយើងបាន

$$2=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{S^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{T^2}=\sum_{i=1}^{2n}a_i^2$$

$$\ge a_1a_{n+1}+a_2a_{n+2}+\ldots+a_na_{2n}+a_{n+1}a_1+\ldots+a_{2n}a_n \ge 2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{ST}\right)$$

ដូចនេះ $\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$ សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ

$$a_i=a_{n+i} \Leftrightarrow x_i=\lambda y_i,\ i=\overline{1,n} \text{ ដែល } \lambda=\frac{S}{T}$$

សម្គាល់

វិសមភាព Cauchy-Schwarz ក៏អាចធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់តាមសមភាព Lagrane (Lagrane′s Identity) បានផងដែរ គឺ

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_iy_j-x_jy_i\right)^2$$

គេបាន $\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$ ព្រោះ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_iy_j-x_jy_i\right)^2 \ge 0$$

លំហាត់ ៨

យក a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)} \ge \dfrac{3}{2}$ ។

(IMO,1995)

ចម្លើយ

ដោយវិសមភាពមានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a , b , c

WLOG សន្មតថា $c \le b \le a$

តាង $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow x \le y \le z$ និង $xyz = 1$

យើងបាន $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}$

$$= \frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} + \frac{y^3}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}} + \frac{z^3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

$$= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

ដោយ $x+y \le z+x \le y+z \Rightarrow \frac{x}{y+z} \le \frac{y}{z+x} \le \frac{z}{x+y}$

តាមវិសមភាពនៃតម្រៀបគេបាន

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{z+x} + \frac{zx}{x+y} \qquad (1)$$

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{xz}{y+z} + \frac{yx}{z+x} + \frac{zy}{x+y} \qquad (2)$$

បូក (1) និង (2) យើងបាន $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{x+y+z}{2}$

តាម AM-GM គេបាន $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$ ពិត

លំហាត់ ៩

យក a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$ ។

(APMO,1998)

ចម្លើយ

យើងមាន $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} \qquad (*)$$

តាង $a = x^3,\ b = y^3,\ c = z^3$

(ព្រោះ • ជាប្រមាណវិធីក្នុងនៃ IR)

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3} \geq \frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$$

បើយក $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{y}, \frac{y}{x}\right)$

$$(a_1', a_2', a_3', a_4', a_5', a_6') = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}, \frac{z}{y}, \frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$$

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) = \left(\frac{x^2}{y^2}, \frac{y^2}{z^2}, \frac{z^2}{x^2}, \frac{x^2}{z^2}, \frac{z^2}{y^2}, \frac{y^2}{x^2}\right)$$

យើងបាន $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ និង $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$

មានលំដាប់ដូចគ្នា

(បើកើន កើនដូចគ្នា បើចុះ ចុះដូចគ្នា)

ហើយ $(a_1', a_2', a_3', a_4', a_5', a_6')$ ជាចម្លាស់មួយនៃ $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ តាមវិសមភាពនៃតម្រៀបគេបាន

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3} \geq \frac{x^2y}{y^2z}+\frac{y^2z}{z^2x}+\frac{z^2x}{x^2y}$$

$$+\frac{x^2z}{z^2y}+\frac{z^2y}{y^2x}+\frac{y^2x}{x^2z}$$

$$\geq \frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}+\frac{x^2}{zy}+\frac{z^2}{yx}+\frac{y^2}{xz}$$

$$=\frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$$ ពិត

🕊🕊🕊🕊🕊

លំហាត់

i. ចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា

$a^3+b^3+c^3 \ge a^2b+b^2c+c^2a$ ។

ii. គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក/ $a^3+b^3+c^3+(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3 \ge 2(a^2b+b^2c+c^2a)$

ខ/ $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge a+b+c$ ។

iii. ចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានមិនសូន្យ បង្ហាញថា

ក/ $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \ge \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$

ខ/ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{a+b+c}{abc}$ ។

iv. យក a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \ge 3 \quad ។$$

v. បើ $a_1,a_2,...,a_n \in \mathrm{IR}^+$ និង $S=a_1+a_2+...+a_n$ ។

បង្ហាញថា ក/ $\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+...+\frac{a_n}{s-a_n} \ge \frac{n}{n-1}$

ខ/ $\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+...+\frac{s}{s-a_n} \ge \frac{n^2}{n-1}$ ។

vi. បើ $a_1,a_2,...,a_n \in \mathrm{IR}^+$ និង $a_1+a_2+...+a_n=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+...+\frac{a_n}{2-a_n}\geq\frac{n}{2n-1}$

vii. (វិសមភាព QM-AM)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1,\ x_2,\ \dots,x_n$ បង្ហាញថា

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}\geq\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$ ។

viii. (វិសមភាព AM-GM-HM)

យក $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathrm{IR}^+$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}\leq\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\leq\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

សមភាពកើតឡើងពេល $x_1=x_2=...=x_n$ ។

ix. គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$a_1a_2...a_n=1$ ។

បង្ហាញថា $a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+...+a_n^{n-1}\geq\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$ ។

x. (China,1989)

គេឲ្យ $a_1,a_2,\dots,a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$a_1+a_2+...+a_n=1$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}}+...+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}}\geq\frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}\right)$$ ។

xi. គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា ក/ $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$

ខ/ $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<\sqrt{21}$ ។

xii. (IMO Shortlist,1990)

គេឲ្យ a , b , c , d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+cd+da=1$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{a^3}{b+c+d}+\dfrac{b^3}{c+d+a}+\dfrac{c^3}{d+a+b}+\dfrac{d^3}{a+b+c}\geq\dfrac{1}{3}$ ។

xiii. គេឲ្យ x_1 , x_2 , ... , x_n ($n>2$) ជាចំនួនពិតដែលផលបូកនៃ $n-1$ ក្នុងចំណោម n ចំនួននេះធំជាងចំនួនមួយទៀតដែលនៅសល់ ។

តាង $s=\sum_{k=1}^{n}x_k$ ។ បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x_k^2}{s-2x_k}\geq\dfrac{s}{n-2}$ ។

វិសមភាព យិនសិន

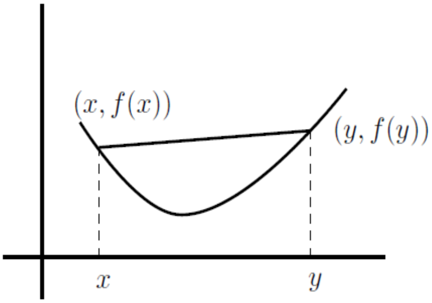
(Jensen′s Inequalities)

និយមន័យ

អនុគមន៍ $f:[a,b]\to \mathrm{IR}$ ហៅថា ផតលើចន្លោះ $I=[a,b]$ បើចំពោះគ្រប់ $t\in[0,1]$ និង $a\le x<y\le b$ គេបាន

$$f[ty+(1-t)x]\le tf(y)+(1-t)f(x)$$ ។

មានន័យថាក្រាបនៃ f ចន្លោះអាប់ស៊ីស x និង y ស្ថិតនៅក្រោមអង្កត់ដែលភ្ជាប់ពីចំណុច $(x,f(x))$ ទៅចំណុច $(y,f(y))$ (ដូចរូប)។



Lemma

បើ f ផតលើ $[a,b]$ គេបាន $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$ ចំពោ $\forall x,y\in[a,b]$។

សម្រាយ

យើងមាន f ផតលើ $[a,b]$

យើងបាន $f[ty+(1-t)x]\le tf(y)+(1-t)f(x)$ ចំពោះ $\forall x,y\in[a,b]$

បើ $t=\frac{1}{2}$ គេបាន $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$

ទ្រឹស្តីបទ (វិសមភាព Jensen)

បើ f ផតលើ $[a,b]$ និង $t_1,t_2,\dots,t_n\in[0,1]$ដែល $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$ គេបាន

$$f(t_1x_1+t_2x_2+\dots+t_nx_n)\le t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\dots+t_nf(x_n)\quad (១)$$

ចំពោះគ្រប់ $x_1,\ x_2,\dots,x_n\in[a,b]$ ។

សម្រាយ

យើងមាន f ផតលើ $[a,b]$

យើងបាន $f(t_1x_1+t_2x_2+\dots+t_nx_n)$

$$=f\left[(1-t_n)\left(\frac{t_1x_1}{1-t_n}+\frac{t_2x_2}{1-t_n}+\dots+\frac{t_{n-1}x_{n-1}}{1-t_n}\right)+t_nx_n\right]$$

$$\le(1-t_n)f\left(\frac{t_1x_1}{1-t_n}+\frac{t_2x_2}{1-t_n}+\dots+\frac{t_{n-1}x_{n-1}}{1-t_n}\right)+t_nx_n$$

....

$$\le(1-t_n)\left[\frac{t_1f(x_1)}{1-t_n}+\frac{t_2f(x_2)}{1-t_n}+\dots+\frac{t_nf(x_n)}{1-t_n}\right]+t_nx_n$$

$$=t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\dots+t_nf(x_n)$$

សម្គាល់

តាម (១) បើយក $t_1=t_2=\dots=t_n$ គេបាន

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}\quad (*)$$

គួរកត់សម្គាល់ផងដែរថា (*) ក៏អាចស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើ Lemma ខាងលើ និង វិចារកំណើនបែបកូស៊ីផងដែរ ។

- អនុគមន៍ប៉ោងក៏មានលក្ខណៈដូចគ្នាដែរ គឺគ្រាន់តែប្តូរទិសដៅ $\leq$ ទៅ $\geq$ ។
- គេអាចប្រើដេរីវេលំដាប់ ២ ដើម្បីបង្ហាញថា អនុគមន៍មួយប៉ោង រឺ ផត គឺ
  បើ $f''(x)<0$ ចំពោះ $\forall x\in I \Rightarrow f$ ប៉ោងលើ I
  បើ $f''(x)>0$ ចំពោះ $\forall x\in I \Rightarrow f$ ផតលើ I ។

លំហាត់ ១

បើ a , b , $c\in \mathrm{IR}^+$ បង្ហាញថា

ក/ $4\left(a^3+b^3\right)\geq (a+b)^3$

ខ/ $9\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq (a+b+c)^3$ ។

ចម្លើយ

អនុគមន៍ $f(x)=x^3$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $[0,+\infty)$

តាមវិសមភាព Jensen យើងបាន

ក/ $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leq \dfrac{f(a)+f(b)}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3\leq \dfrac{a^3+b^3}{2}$

ហេតុនេះ $4\left(a^3+b^3\right)\geq (a+b)^3$

ខ/ $f\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)\leq \dfrac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3\leq \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$

ដូចនេះ $9\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq (a+b+c)^3$

លំហាត់ ២

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ k បើចំពោះ $\forall a,b>0$ យើងបាន

$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\le k\sqrt[3]{a+b}$ ។

ចម្លើយ

អនុគមន៍ $f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow f''(x)=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}<0$

ចំពោះ $\forall x>0$ គេថា f ប៉ោងលើ $(0,+\infty)$

តាមវិសមភាព Jensen យើងបាន

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\le f\left(\frac{a+b}{2}\right)\Rightarrow\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}\le\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\le\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{a+b}$$

ដើម្បីឲ្យ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\le k\sqrt[3]{a+b}$ ចំពោះ $\forall a,b>0$

លុះត្រាតែ $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{a+b}\le k\sqrt[3]{a+b}\Rightarrow k\ge\sqrt[3]{4}$

ហេតុនេះ $k_{\min}=\sqrt[3]{4}$

លំហាត់ ៣

គេឲ្យ x , y , $z\ge 0$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}\ge\sqrt{6(x+y+z)}$ ។

ចម្លើយ

អនុគមន៍ $f(t)=\sqrt{t^2+1}$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $[0,+\infty)$

ព្រោះ $f''(t)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{t^2+1}\right)^3}>0$, $\forall t\ge 0$

តាមវិសមភាព Jensen យើងបាន

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}\ge f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}}{3}\ge\sqrt{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}\ge\sqrt{(x+y+z)^2+9}$$

បង្ហាញថា $(x+y+z)^2+9\ge 6(x+y+z)$

យើងមាន $(x+y+z)^2+9\ge 6(x+y+z)$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2-6(x+y+z)+9\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z-3)^2\ge 0$$ ពិត

ហេតុនេះ $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}\ge\sqrt{6(x+y+z)}$

លំហាត់ ៤

យក f ជាអនុគមន៍ផតលើ $[a,b]$។ ចំពោះគ្រប់ x, y, $z\in[a,b]$ យើងបាន

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$$
$$\ge\frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right]$$ (*)។

(វិសមភាព Popoviciu)

សម្រាយ

(*) ជាវិសមភាពស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង x, y, z

WLOG សន្មតថា $x \le y \le z$

បើ $y \le \frac{x+y+z}{3} \Rightarrow \frac{x+y+z}{3} \le \frac{x+z}{2} \le z$ និង

$\frac{x+y+z}{3} \le \frac{y+z}{2} \le z$

នោះ $\exists s,t \in [0,1]$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{x+z}{2} = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)s + z(1-s)$

និង $\frac{y+z}{2} = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)t + z(1-t)$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $\frac{x+y-2z}{2} = \left(\frac{x+y-2z}{3}\right)(s+t)$

$\Rightarrow s+t = \frac{3}{2}$

ដោយ f ផតលើ $[a,b]$ ហេតុនេះ $\forall x,y,z \in [a,b]$ គេបាន

$$f\left(\frac{x+z}{2}\right) \le sf\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-s)f(z)$$

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) \le tf\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-t)f(z)$$

ហើយ $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$

បូកអង្គ និង អង្គគេបាន $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$

$$\ge \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right]$$

ស្រាយដូចគ្នា ករណី $y > \frac{x+y+z}{3}$

លំហាត់ ៥

ចំពោះ $a, b, c > 0$ បង្ហាញថា

$$\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right) \geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$ ។

ចម្លើយ

អនុគមន៍ $f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$

ចំពោះគ្រប់ $x > 0 \Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $(0, +\infty)$

តាមវិសមភាព Popoviciu យើងបាន

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c} \geq \frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{4}{a+b}$$

ដូចនេះ $\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right) \geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$

លំហាត់ ៦

យក a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)} \quad (*)$$ ។

ចម្លើយ

(*) ជាវិសមភាពអូម៉ូសែន

WLOG សន្មតថា $a+b+c=1$

គេបាន (*) សមមូល $\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{b}{(1-b)^2}+\frac{c}{(1-c)^2} \geq \frac{9}{4}$

ពិនិត្យ $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $[0,+\infty)$

ព្រោះ $f''(x)=\dfrac{4+2x}{(1-x)^4}>0$

តាមវិសមភាព Jensen យើងបាន

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\le\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f\left(\frac{1}{3}\right)$$

ដោយ $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3}{4}$

ហេតុនេះ $\dfrac{a}{(1-a)^2}+\dfrac{b}{(1-b)^2}+\dfrac{c}{(1-c)^2}\ge\dfrac{9}{4}$

ដូចនេះ $\dfrac{a}{(b+c)^2}+\dfrac{b}{(c+a)^2}+\dfrac{c}{(a+b)^2}\ge\dfrac{9}{4(a+b+c)}$

លំហាត់ ៧

ចំពោះ $0\le x,\ y\le 1$ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+xy}}$ (*)។

ចម្លើយ

បើ $x=0$ រឺ $y=0$ គេបាន (*) ពិត

បើ $0<x,\ y\le 1$ គេបាន $x=e^{-u},\ y=e^{-v}$ ចំពោះ $u,\ v>0$

យើងបាន (*) សមមូល $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-2u}}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-2v}}}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+e^{-u-v}}}$

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $[0,+\infty)$

ព្រោះ $f''(x)=\frac{1-e^{2x}}{e^{4x}\sqrt{\left(1-e^{-2x}\right)^5}}<0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

តាមវិសមភាព Jensen យើងបាន $\frac{f(u)+f(v)}{2}\le f\left(\frac{u+v}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2u}}}+\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2v}}}\le\frac{2}{\sqrt{1+e^{-u-v}}}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+xy}}$

លំហាត់ ៨

គេឲ្យ $x_1,\ x_2,\ \dots,x_n,t_1,\ t_2,\ \dots,t_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$។

បង្ហាញថា $x_1^{t_1}x_2^{t_2}\dots x_n^{t_n}\le t_1x_1+t_2x_2+\dots+x_nt_n$ (*)។

(វិសមភាព Weighted AM-GM)

ចម្លើយ

ដោយ $f(x)=e^x$ ជាអនុគមន៍ផត ព្រោះ $f''(x)=e^x>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

តាម វិសមភាព Jensen យើងបាន

$$\begin{aligned}x_1^{t_1}x_2^{t_2}\dots x_n^{t_n}&=e^{t_1\ln x_1}e^{t_2\ln x_2}\dots e^{t_n\ln x_n}=e^{t_1\ln x_1+t_2\ln x_2+\dots+t_n\ln x_n}\\&\le t_1e^{\ln x_1}+t_2e^{\ln x_2}+\dots+t_1e^{\ln x_2}\\&=t_1x_1+t_2x_2+\dots+t_nx_n\end{aligned}$$

សម្គាល់

បើ $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = \frac{1}{n}$ គេបាន (*) ក្លាយជាវិសមភាព AM-GM ។

លំហាត់ ៩

យក a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$(a+b-c)^a(b+c-a)^b(c+a-b)^c \le a^a b^b c^c$ ។

ចម្លើយ

ដោយ a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ

យើងបាន $a+b-c>0$, $b+c-a>0$ និង $c+a-b>0$

តាម Weighted AM-GM យើងបាន

$$\left(\frac{a+b-c}{a}\right)^{\frac{a}{a+b+c}}\left(\frac{b+c-a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b+c}}\left(\frac{c+a-b}{c}\right)^{\frac{c}{a+b+c}}$$

$$\le \frac{1}{a+b+c}\left[\frac{a(a+b-c)}{a}+\frac{b(b+c-a)}{b}+\frac{c(c+a-b)}{c}\right]$$

$$= \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

ដូចនេះ $(a+b-c)^a(b+c-a)^b(c+a-b)^c \le a^a b^b c^c$

លំហាត់ ១០

គេឲ្យ x , y ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បើ a , $b>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ ។

បង្ហាញថា $xy \le \frac{1}{a}x^a + \frac{1}{b}y^b$ ។

(វិសមភាព Young)

សម្រាយ

តាម Weighted AM-GM យើងបាន $xy=\left(x^{a}\right)^{\frac{1}{a}}\left(y^{b}\right)^{\frac{1}{b}}\le\frac{1}{a}x^{a}+\frac{1}{b}y^{b}$

លំហាត់ ១១

យក $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ និង $y_1,\ y_2,\dots,y_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយ a, $b>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ ។ បង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{a}\right)^{\frac{1}{a}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{b}\right)^{\frac{1}{b}}\text{ ។}$$

(វិសមភាព Holder)

ចម្លើយ

បើ $\sum_{i=1}^{n}x_i^{a}=1$ និង $\sum_{i=1}^{n}y_i^{b}=1$ តាម វិសមភាព Young

យើងបាន $x_iy_i\le\frac{1}{a}x_i^{a}+\frac{1}{b}y_i^{b}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\le\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}y_i$

$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

យក $\sum_{i=1}^{n}x_i^{a}=A$, $\sum_{i=1}^{n}y_i^{a}=B$, $x_i'=\frac{x_i}{A^{\frac{1}{a}}}$ និង $y_i'=\frac{y_i}{B^{\frac{1}{b}}}$

គេបាន $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i'\right)^{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{a}}{A}=1,\ \sum_{i=1}^{n}\left(y_i'\right)^{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^{b}}{B}=1$

យើងបាន $1 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i' = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{A^{\frac{1}{a}} B^{\frac{1}{b}}} = \frac{1}{A^{\frac{1}{a}} B^{\frac{1}{b}}} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^a \right)^{\frac{1}{a}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^b \right)^{\frac{1}{b}}$

លំហាត់ ១២

គេឲ្យ $a_1,\ a_2,\dots,a_n,\ b_1,\ b_2,\dots,b_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង $p > 1$។

បង្ហាញថា $\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ។

(វិសមភាព Minkowski)

ចម្លើយ

យើងមាន $(a_k + b_k)^p = a_k (a_k + b_k)^{p-1} + b_k (a_k + b_k)^{p-1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1}$$

ចំពោះ $q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ តាម វិសមភាព Holder យើងបាន

$$\sum_{i=1}^{n} a_k (a_k + b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_k (a_k + b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)} \right]^{\frac{1}{q}}$$

គេបាន

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \le \left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

ចំពោះ $q(p-1)=p$

យើងបាន $\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$

សម្គាល់

បើ $p=1$សមភាពកើតឡើង

បើ $0<p<1$ គេបាន $\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \ge \left(\sum_{i=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$

លំហាត់ ១៣

ចំពោះ $r_i>1,\ i=\overline{1,n}$ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{1+r_1}+\frac{1}{1+r_2}+\ldots+\frac{1}{1+r_n}\ge\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\ldots r_n}+1}$$ ។

(IMO Shortlist,1998)

ចម្លើយ

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ ផតលើ IR^+

ព្រោះ $f'(x)=\dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}\ge 0,\ \forall x\in\mathrm{IR}^+$

ដោយ $r_i>1$ យក $r_i=e^{x_i},x_i>0,\ i=\overline{1,n}$

តាមវិសមភាពJensen យើងបាន

$$\frac{1}{e^{\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)}+1} \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+e^{x_1}}+\frac{1}{1+e^{x_2}}+\ldots+\frac{1}{1+e^{x_n}}\right)$$

ដូចនេះ $\frac{1}{1+r_1}+\frac{1}{1+r_2}+\ldots+\frac{1}{1+r_n} \ge \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n}+1}$

លំហាត់ ១៤

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$ ។

(IMO,2001)

ចម្លើយ

ដោយ $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$ ជាវិសមភាពអូម៉ូសែន

WLOG សន្មត $a+b+c=1$

អនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ជាអនុគមន៍ផតលើ IR^+

តាម វិសមភាព Jensen យើងបាន

$$af\left(a^2+8bc\right)+bf\left(b^2+8ca\right)+cf\left(c^2+8ab\right) \ge f(M)$$

ដែល $M=\sum_{cyc} a\left(a^2+8bc\right)=24abc+\sum_{cyc} a^3$

បង្ហាញថា $f(M)\ge 1$

យើងមាន $f(M)\ge 1 \Leftrightarrow M \le 1$

$$\Leftrightarrow 24abc + \sum_{cyc} a^3 \le \left(\sum_{cyc} a \right)^3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} c(a-b)^2 \ge 0$$ សមភាពពេល $a = b = c$

ដូចនេះ $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$

លំហាត់ ១៥

គេឲ្យ $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ។

បង្ហាញថា $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$ ។

(China,1998)

ចម្លើយ

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $(0,1)$ ព្រោះ $f''(x) > 0$

តាម វិសមភាពJensen

យើងបាន $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ge f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \ge \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

បង្ហាញថា $\sqrt{n} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}$

តាម វិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt{n}$

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$

វិសមភាព ស៊ីមេទ្រី

(Symmetric Inequalities)

និយមន័យ

អនុគមន៍ n អថេរ $f(a_1,a_2,...,a_n)$ មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី រឺ ឆ្លុះ លុះត្រាតែ $f(a_1,a_2,...,a_n)=f(a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},...,a_{\sigma(n)})$ ចំពោះគ្រប់ចម្លាស់ $(\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n))$ នៃ $(1,2,...,n)$ ។ ហេតុនេះ បើ $f(a_1,a_2,...,a_n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌណាមួយ នោះ $f(a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},...,a_{\sigma(n)})$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនោះដែរ ។ វិសមភាពនៃអនុគមន៍ស៊ីមេទ្រី ហៅថាវិសមភាពស៊ីមេទ្រី ។ ដោយ $\geq$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់គ្រប់លើ IR (មានន័យថាគ្រប់ធាតុទាំងអស់នៃ IR សុទ្ធតែអាចប្រៀបធៀបគ្នាបានដោយទំនាក់ទំនង $\geq$) ហេតុនេះ ដើម្បីស្រាយវិសមភាពស៊ីមេទ្រីយើងអាចរៀបអថេរទាំងអស់នៃវិសមភាពតាមលំដាប់ (ឧទាហរណ៍ $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$) ពោល គឺ ការសន្មតនេះមិននាំអោយបាត់បង់នូវលក្ខណទូទៅរបស់វិសមភាពទេ (WLOG: Without loss of generality) ។

ទ្រឹស្តីបទ (វិសមភាព Schur)

ចំពោះ x , y , $z \geq 0$ និង $r \in$ IR យើងបាន

$$x^r(x-z)(x-y)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(x-y)\geq 0$$

រឺ $\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z)\geq 0$ សមភាពលុះត្រាតែ $x=y=z$ រឺ $x=y$, $z=0$ (និង ចម្លាស់ផ្សេងទៀត) ។

សម្រាយ

ដោយ វិសមភាពស៊ីមេទ្រីចំពោះអថេរ x , y , z

WLOG សន្មតថា $x \ge y \ge z$

ចំពោះ $r > 0$

យើងបាន $z^r(z-x)(z-y) \ge 0$ (1)

ហើយ $x^r(x-z) - y^r(y-z) = (x^{r+1} - y^{r+1}) + z(x^r - y^r) \ge 0$

$\Rightarrow x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) \ge 0$ (2)

តាម (1),(2) គេបាន $\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z) \ge 0$

ចំពោះ $r \le 0$

យើងបាន $x^r(x-y)(x-z) \ge 0$ (3)

និង $z^r(x-z) - y^r(x-y) \ge z^r(x-y) - y^r(x-y)$

$= (z^r - y^r)(x-y) \ge 0$ (4)

តាម (3),(4) យើងបាន $\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z) \ge 0$

ដូចនេះ $\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z) \ge 0$ សមភាពពេល $x = y = z$

រឺ $x = y$, $z = 0$ (និង ចម្លាស់ផ្សេងទៀត)

សម្គាល់

ចំពោះ $r = 1$, វិសមភាព Schur សមមូល

ក/ $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$

ខ/ $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)$

គ/ $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ ។

(សូមសាកល្បងរករាងពិសេសផ្សេងទៀតនៃវិសមភាព Schur)

ដោយវិសមភាព Schur ជាវិសមភាពដែលត្រូវបានទាញចេញពីលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី ដូចនេះ ភាគច្រើននៃវិសមភាពស៊ីមេទ្រី(ដឺក្រេធំជាង រឺ ស្មើនឹង ៣)សុទ្ធតែអាចប្រើ វិសមភាព Schur ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ ១

គេឲ្យ a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$a^3(s-a)+b^3(s-b)+c^3(s-c)\le abcs$ ។

(s ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ)

សម្រាយ

យើងមាន $a^3(s-a)+b^3(s-b)+c^3(s-c)\le abcs$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\ge 0$$ ពិត

តាមវិសមភាព Schur

លំហាត់ ២

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$27+\left(2+\frac{a^2}{bc}\right)\left(2+\frac{b^2}{ca}\right)\left(2+\frac{c^2}{ab}\right)\ge 6(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $27+\left(2+\frac{a^2}{bc}\right)\left(2+\frac{b^2}{ca}\right)\left(2+\frac{c^2}{ab}\right)\ge 6(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$$\Leftrightarrow 2abc\left(a^3+b^3+c^3+3abc-a^2b-a^2c-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b\right)$$
$$+\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+3a^2b^2c^2-a^3bc^2-a^3b^2c-b^3a^2c-b^3ac^2\right.$$
$$\left.-c^3a^2b-c^3ab^2\right)\ge 0$$ ពិត តាមវិសមភាព Schur ចំពោះអថេរ a , b , c និង ab , bc , ca

លំហាត់ ៣

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2+ca}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}$$ ។

សម្រាយ

យើងមាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2+ca}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\geq 0$$

ជាវិសមភាព Schur

លំហាត់ ៤

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{4b^2+bc+4c^2}+\frac{b}{4c^2+ca+4a^2}+\frac{c}{4a^2+ab+4b^2}\geq\frac{1}{a+b+c}$$ ។

សម្រាយ

តាម វិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\frac{a}{4b^2+bc+4c^2}+\frac{b}{4c^2+ca+4a^2}+\frac{c}{4a^2+ab+4b^2}$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{4a(b^2+c^2)+4b(c^2+a^2)+4c(a^2+b^2)+3abc}$$

បង្ហាញថា $\frac{(a+b+c)^2}{4a(b^2+c^2)+4b(c^2+a^2)+4c(a^2+b^2)+3abc}\geq\frac{1}{a+b+c}$

យើងមាន $\frac{(a+b+c)^2}{4a(b^2+c^2)+4b(c^2+a^2)+4c(a^2+b^2)+3abc}\geq\frac{1}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3\geq 4a(b^2+c^2)+4b(c^2+a^2)+4c(a^2+b^2)+3abc$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\geq a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$

ជាវិសមភាព Schur

លំហាត់ ៥

គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិត ។បង្ហាញថា

$$a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2\geq\frac{2}{3}\left[a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)\right]$$ ។

សម្រាយ

តាមវិសមភាព AM-GM និង Schur យើងបាន

$$\begin{aligned}3\sum_{cyc}a^6+3a^2b^2c^2&\geq2\sum_{cyc}a^6+\sum_{cyc}a^4\left(b^2+c^2\right)\\&=\sum_{cyc}\left(a^6+a^4b^2\right)+\sum_{cyc}\left(a^6+a^4c^2\right)\\&\geq2\sum_{cyc}a^5(b+c)\end{aligned}$$

លំហាត់ ៦

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=2$ ។

បង្ហាញថា $a^4+b^4+c^4+abc\geq a^3+b^3+c^3$ ។

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Schur យើងបាន

$$a^r(a-b)(b-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\geq0$$

ចំពោះ $r=2$ យើងបាន

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)$$

$$\Leftrightarrow2\left(a^4+b^4+c^4\right)+abc(a+b+c)\geq\left(a^3+b^3+c^3\right)(a+b+c)$$

ដោយ $a+b+c=2$

ដូចនេះ $a^4+b^4+c^4+abc\geq a^3+b^3+c^3$

លំហាត់ ៧

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a^2}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{b^2}{2c^2-ca+2a^2}+\frac{c^2}{2a^2-ab+2b^2}\geq 1 \qquad (1)។$$

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{2b^2-bc+2c^2}\geq\frac{\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2}{\sum_{cyc}a^2\left(2b^2-bc+2c^2\right)}$$

ដើម្បីបង្ហាញថា(1)ពិតយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2\geq\sum_{cyc}a^2\left(2b^2-bc+2c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^4+abc\sum_{cyc}a\geq 2\sum_{cyc}a^2b^2$$

តាមវិសមភាព Schur ចំពោះ $r=2$ និង AM-GM យើងបាន

$$\sum_{cyc}a^4+abc\sum_{cyc}a\geq\sum_{cyc}ab\left(a^2+b^2\right)\geq 2\sum_{cyc}a^2b^2$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a^2}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{b^2}{2c^2-ca+2a^2}+\frac{c^2}{2a^2-ab+2b^2}\geq 1$

លំហាត់ ៨

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\geq a+b+c \quad (*)។$$

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{b^2-bc+b^2}=\sum_{cyc}\frac{a^4}{a\left(b^2-bc+c^2\right)}\geq\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sum_{cyc}a\left(b^2-bc+c^2\right)}$$

ដើម្បីបង្ហាញថា (*) ពិត យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 \geq \left(\sum_{cyc} a\left(b^2 - bc + c^2\right)\right)\left(\sum_{cyc} a\right)$$

យើងមាន $\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 \geq \left(\sum_{cyc} a\left(b^2 - bc + c^2\right)\right)\left(\sum_{cyc} a\right)$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4 + 2\sum_{cyc} a^2b^2 \geq (a+b+c)\sum_{cyc} a^2(b+c) - 3abc\sum_{cyc} a$$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4 + abc\sum_{cyc} a \geq \sum_{cyc} a^3(b+c)$ ជាវិសមភាព Schur

លំហាត់ ៩

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$a^2\sqrt{b^2 - bc + c^2} + b^2\sqrt{c^2 - ca + a^2} + c^2\sqrt{a^2 - ab + b^2} \leq a^3 + b^3 + c^3$$

(*) ។

សម្រាយ

តាម វិសមភាព AM-GM យើងបាន

$$\sum_{cyc} a^2\sqrt{b^2 - bc + c^2} = \sum_{cyc} a\sqrt{a^2\left(b^2 - bc + c^2\right)}$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{cyc} a\left(a^2 + b^2 + c^2 - bc\right)$$

ដើម្បីបង្ហាញថា (*) ពិតយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc} a\left(a^2 + b^2 + c^2 - bc\right) \leq \sum_{cyc} a^3$$

យើងមាន $\frac{1}{2}\sum_{cyc} a\left(a^2 + b^2 + c^2 - bc\right) \leq \sum_{cyc} a^3$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} a\left(a^2 + b^2 + c^2 - bc\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 3abc - \sum_{cyc} ab(a+b) \geq 0$$ ពិតតាមវិសមភាព Schur

លំហាត់ ១០

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^2-ca+a^2}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \geq a^2+b^2+c^2$$ ។

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}} \geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sum_{cyc} a\sqrt{b^2-bc+c^2}}$$

ហេតុនេះ ដើម្បីបង្ហាញថា វិសមភាពពិតយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\sum_{cyc} a\sqrt{b^2-bc+c^2} \leq a^2+b^2+c^2$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$\left(\sum_{cyc} a\sqrt{b^2-bc+c^2}\right)^2 \leq \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a\left(b^2-bc+c^2\right)\right)$$

តែ តាមវិសមភាព Schur យើងបាន

$$\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 - \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a\left(b^2-bc+c^2\right)\right)$$
$$= \sum_{cyc} a^4 + abc\sum_{cyc} a - \sum_{cyc} a^3(b+c) \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a\left(b^2-bc+c^2\right)\right) \leq \left(\sum_{cyc} a^2\right)^2$$

ដូចនេះ $\sum_{cyc} a\sqrt{b^2-bc+c^2} \leq a^2+b^2+c^2$

វិធីសាស្ត្រជំនួស

(The Substitution Strategy)

វិធីសាស្ត្រជំនួសជាវិធីសាស្ត្រមួយដ៏មានសារៈសំខាន់បំផុតក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់វិសមភាពដែលមានភាពស្មុគស្មាញខ្លាំង ។ ប៉ុន្តែមិនមែនរាល់ការជំនួសទាំងអស់សុទ្ធតែផ្តល់មកវិញនូវភាពងាយស្រួលនោះទេ ។ ក្នុងផ្នែកនេះយើងសូមលើកយកនូវរបៀបនៃការជួសមួយចំនួនសម្រាប់មិនអ្នកអានដើម្បីទុកជាមូលដ្ឋាន ។

i. **ការជំនួសបែបពីជគណិត** (Algebraic Substitution)

លំហាត់ ១

បើ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានតូចជាង 1 ដែល $a+b+c=2$ ។

បង្ហាញថា $\left(\dfrac{a}{1-a}\right)\left(\dfrac{b}{1-b}\right)\left(\dfrac{c}{1-c}\right)\geq 8$ (*) ។

ចម្លើយ

តាង $x=1-a$, $y=1-b$, $z=1-c \Rightarrow x, y, z>0$

យើងបាន $x+y+z=3-(a+b+c)=1$

គេបាន $a=1-x=y+z$, $b=1-y=z+x$, $c=1-z=x+y$

ហេតុនេះ (*) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{y+z}{x}\right)\left(\dfrac{z+x}{y}\right)\left(\dfrac{x+y}{z}\right)\geq 8$

$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$ ពិត តាម AM-GM

លំហាត់ ២

យក a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc = 1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ ។

(IMO,1995)

ចម្លើយ

យក $x = ab, y = bc, z = ca \Rightarrow xyz = (abc)^2 = 1, x, y, z > 0$

យើងបាន $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}$

$$= \frac{y}{xz(x+z)} + \frac{z}{xy(x+y)} + \frac{x}{yz(y+z)}$$

$$= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}$$

តាម វិសមភាព Cauchy-Schwarz និង AM-GM យើងបាន

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right)\left[(y+z)+(x+z)+(x+y)\right] \geq (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ សមភាពលុះត្រាតែ

$$a = b = c = 1$$

លំហាត់ ៣

គេអោយ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$ ។ បង្ហាញថា

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$$ ។

(IMO,2000)

ចម្លើយ

តាង $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z},\ c=\frac{z}{x}$

យើងបាន (*) សមមូល $\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\leq 1$

$$\Leftrightarrow (x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leq xyz \quad (1)$$

បើ $(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)<0 \Rightarrow (1)$ ពិត

បើ $(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)>0$

(1) អាចសរសេរ $(x-y+z)^2(y-z+x)^2(z-x+y)^2\leq x^2y^2z^2$ ពិត

ព្រោះ $(x-y+z)(y-z+x)=x^2-(y-z)^2\leq x^2$

$$(y-z+x)(z-x+y)=y^2-(z-x)^2\leq y^2$$

$$(z-x+y)(x-y+z)=z^2-(x-y)^2\leq z^2$$

ដូចនេះ $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$ សមភាពលុះត្រាតែ

$$a=b=c=1$$

លំហាត់ ៤

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}\quad (*)$$ ។

(India,2002)

ចម្លើយ

តាង $x=\frac{a}{b},\ y=\frac{b}{c},\ z=\frac{c}{a}$ គេបាន $xyz=1$

យើងបាន $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=x+y+z$

ហើយ $\frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}=x+y+z+\frac{1-x}{1+y}+\frac{1-y}{1+z}+\frac{1-z}{1+x}$

គេបាន (*) $\Leftrightarrow \frac{x-1}{1+y}+\frac{y-1}{1+z}+\frac{z-1}{1+x}\geq 0$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(z+1)+(y^2-1)(x+1)+(z^2-1)(y+1)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2z+y^2x+z^2y+x^2+y^2+z^2\geq x+y+z+3\quad (1)$$

តាម AM-GM យើងមាន $x^2z+y^2x+z^2y\geq 3$

ប្រើទម្រង់ Engel នៃវិសមភាព Cauchy-Schwarz និង AM-GM យើងបាន

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{(x+y+z)^2}{3}\geq\frac{3(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}}{3}=x+y+z$$

ហេតុនេះ (1) ពិត

ii. **ការជំនួសបែបត្រីកោណមាត្រ** (Trigonometric Substitution)

❖ សមភាពត្រីកោណមាត្រងាយៗមួយចំនួន ។

បើ α , β , γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ យើងបាន

$$I_1:\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$I_2 : \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$I_3 : \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$I_4 : \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$I_5 : \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1$$

$$I_6 : \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$I_7 : \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

$$I_8 : \cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}$$

❖ វិសមភាពត្រីកោណមាត្រមួយចំនួនជួយក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់ ។

បើ α , β , γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ គេបាន

$$N_1 : \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$N_2 : \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$N_3 : \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$N_4 : \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$$

$$N_5 : \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$$

$$N_6 : \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \frac{1}{8}$$

$$N_7 : \cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3}{2}$$

$$N_8 : \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$N_9 : \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\frac{9}{4}$$

$$N_{10} : \sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\ge\frac{3}{4}$$

$$N_{11} : \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\ge\frac{3}{4}$$

$$N_{12} : \cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\le\frac{9}{4}$$

$$N_{13} : \tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\ge\sqrt{3}$$

$$N_{14} : \cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\ge 3\sqrt{3}$$

$$N_{15} : \cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\ge\sqrt{3}$$

សម្រាយ

N_1 យើងមាន $f(x)=\sin x$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $(0,\pi)$

តាមវិសមភាព Jensen យើងបាន $\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}\le f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$

$$\Rightarrow\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\le\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

N_2 : តាម AM-GM យើងបាន

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3 = \left(\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

N_3 :ដូច N_1 យើងបាន $\dfrac{f\left(\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\frac{\beta}{2}\right)+f\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{3} \le f\left(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right)$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \le 3\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{3}{2}$$

N_4 :ប្រើ N_3 និង AM-GM គេបាន $N_4 : \sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{1}{8}$

$N_5 : \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \dfrac{3}{2}$

យើងមាន $3-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$

$$= 3-2[\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\pi-(\alpha+\beta))]$$

$$= 3-2(\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta))$$

$$= 3-2(\cos\alpha+\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

$$= \sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta+1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta$$

$$-2\cos\alpha-2\cos\beta+2\cos\alpha\cos\beta$$

$$= (\sin\alpha-\sin\beta)^2+(1-\cos\alpha-\cos\beta)^2 \ge 0$$

ដូចនេះ $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \dfrac{3}{2}$

N_6 :

យើងមាន $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos\gamma$

$$= \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma - \frac{1}{2}\cos^2\gamma$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos\gamma - \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\right]^2 + \frac{1}{8}\cos^2(\alpha-\beta)$$

$$\le \frac{1}{8}\cos^2(\alpha-\beta) \le \frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $N_6 : \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \frac{1}{8}$

$N_7 : \cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3}{2}$

យើងមាន $f(x)=\cos x$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

ដោយ $\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2} \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

តាមវិសមភាព Jensen យើងបាន

$$\frac{f\left(\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\frac{\beta}{2}\right)+f\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{3} \le f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} \le 3\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3}{2}$

$N_8 : \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ដោយ $\cos\frac{\alpha}{2} > 0, \cos\frac{\beta}{2} > 0, \cos\frac{\gamma}{2} > 0$

ប្រើ N_7 និង AM-GM យើងបាន $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

N_9 :តាម I_4 និង N_6 យើងបាន $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \frac{9}{4}$

N_{10} : តាម I_5 និង N_4 យើងបាន $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \ge \frac{3}{4}$

N_{11} : យើងមាន

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 3 - \left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma\right)$$

តាម $N_9 : \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \frac{9}{4}$

យើងបាន $N_{11} : \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \ge 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

N_{12} : យើងមាន

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} = 3 - \left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

តាម $N_{10} : \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \ge \frac{3}{4}$

យើងបាន $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} \le 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

$N_{13} : \tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2} \ge \sqrt{3}$

យើងមាន $f(x) = \tan x$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

តាមវិសមភាព Jensen យើងបាន

$$\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}}{3}\geq \tan\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\geq\sqrt{3}$

$N_{14}:\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\geq 3\sqrt{3}$

យើងមាន $f(x)=\cot x$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

តាមវិសមភាព Jensen យើងបាន

$$\frac{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}}{3}\geq \cot\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right)=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\geq 3\sqrt{3}$

$N_{15}:\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\geq\sqrt{3}$

យើងមាន $1\geq\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

និង $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $2\sin\alpha\sin\beta\leq 1+\cos\gamma$

$$\Rightarrow 2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\leq(1+\cos\gamma)\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leq(1+\cos\gamma)\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\gamma}{1+\cos\gamma}\leq\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

គេបាន $\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$

$$\geq \frac{2\sin\gamma}{1+\cos\gamma}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4\sin^2\gamma+2\cos^2\gamma+2\cos\gamma}{(1+\cos\gamma)\sin\gamma}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3\sin^2\gamma+(1+\cos\gamma)^2}{(1+\cos\gamma)\sin\gamma}\right]$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3\sin^2\gamma(1+\cos\gamma)^2}}{(1+\cos\gamma)\sin\gamma}\right]=\sqrt{3}$$

សំណើ

បើ α , β , γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមុំស្រួច[1]មួយ គេបាន

$N_{16}:\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geq 3\sqrt{3}$ ។

សម្រាយ

α , β , γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណស្រួច

គេបាន $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

ដោយ $f(x)=\tan x$ ជាអនុគមន៍ផតលើ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

តាមវិសមភាព Jensen យើងបាន

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}{3}\geq\tan\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$$

ហេតុនេះ $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geq 3\sqrt{3}$

[1] ជាត្រីកោណដែលមានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច

ទ្រឹស្តីបទ

បើ $\alpha, \beta, \gamma \in (0,\pi)$ គេបាន α, β, γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ

លុះត្រាតែ $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\beta}{2}=1$ ។

សម្រាយ

$\Rightarrow$ បើ α, β, γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ នោះ $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

យើងបាន $\tan\frac{\gamma}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$

$$=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}-1}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}=\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}$$

ហេតុនេះ $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\beta}{2}=1$

$\Leftarrow$ បើ $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\beta}{2}=1$

បើ $\alpha=\beta=\gamma$ គេបាន $3\tan^2\frac{\alpha}{2}=1\Rightarrow\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ព្រោះ $\tan\frac{\alpha}{2}>0$

នោះ $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=\pi$

យើងបាន α, β, γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ

WLOG សន្មតថា $\alpha\neq\beta$

ដោយ $0<\alpha+\beta<2\pi\Rightarrow\exists\gamma'\in(-\pi,\pi):\alpha+\beta+\gamma'=\pi$

គេបាន $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma'}{2}+\tan\frac{\gamma'}{2}\tan\frac{\beta}{2}=1$

តែ $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\beta}{2}=1$

$\Rightarrow \tan\frac{\gamma}{2}=\tan\frac{\gamma'}{2}$ នោះ $\left|\frac{\gamma-\gamma'}{2}\right|=k\pi$ ចំពោះ $k\in \mathrm{Z}^{+}$

ដោយ $\left|\frac{\gamma-\gamma'}{2}\right|\le\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma'}{2}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi \Leftrightarrow k\pi<\pi\Rightarrow k=0$

យើងបាន $\gamma=\gamma'$ ពោល គឺ $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

ហេតុនេះ α , β , γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ

របៀបជំនួសបែបត្រីកោណមាត្រ

បើបីចំនួនពិត x , y , z ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌមានទម្រង់ដូចសមភាពត្រីកោណមាត្រណាមួយ ហើយមានដែនកំណត់ដូចអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនោះ គេអាចជំនួសចំនួនទាំងនោះដោយអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ។ ការជំនួសនេះមិនធ្វើឲ្យបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅនោះទេ ហើយថែមទាំងធ្វើអោយវិសមភាពដែលស្មុគស្មាញពិបាកដោះស្រាយប្រែជាមានរាងងាយ ។

ហេតុនេះការចងចាំសមភាពត្រីកោណមាត្រពិតជាសំខាន់ណាស់ដើម្បីឈានទៅដល់ការតាងបែបត្រីកោណមាត្រ ។

i. ចំពោះ $\sqrt{k-x^2}$ គេអាចតាង $x=\sqrt{k}\sin\alpha,\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

រឺ $x=\sqrt{k}\cos\alpha$ ចំពោះ $\alpha\in[0,\pi]$

ii. បើ $x^2+y^2=1$ គេអាចតាង $x=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$

iii. បើ x , y , $z>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $xy+yz+zx=1$

គេអាចតាង $x=\tan\frac{\alpha}{2}$, $y=\tan\frac{\beta}{2}$, $z=\tan\frac{\gamma}{2}$ ដែល α , β , γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ រឺ តាង $x=\cot\alpha$, $y=\cot\beta$, $z=\cot\gamma$ ដែល α , β , γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមុំស្រួចមួយ

iv. បើ x , y , $z>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=xyz$ រឺ $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$ គេអាចតាង $x=\cot\frac{\alpha}{2}$, $y=\cot\frac{\beta}{2}$, $z=\cot\frac{\gamma}{2}$ ដែល α , β , γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ រឺ តាង $x=\tan\alpha$, $y=\tan\beta$, $z=\tan\gamma$ ដែល α , β , γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមុំស្រួចមួយ

v. បើ x , y , $z>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ គេអាចតាង $x=\sin\frac{\alpha}{2}$, $y=\sin\frac{\beta}{2}$, $z=\sin\frac{\gamma}{2}$ ដែល α , β , γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ រឺ តាង $x=\cos\alpha$, $y=\cos\beta$, $z=\cos\gamma$ ដែល α , β , γ ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមុំស្រួចមួយ

vi. បើ $k+a^2=k\left[1+\left(\frac{a}{\sqrt{k}}\right)^2\right]$ គេអាចតាង $a=\sqrt{k}\tan\alpha$

vii. បើមានរាង $\frac{2x}{1+x^2}$, $\frac{2x}{1-x^2}$, $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ គេអាចតាង $x=\tan\alpha$

គេបាន $\frac{2x}{1+x^2}=\sin 2\alpha$, $\frac{2x}{1-x^2}=\tan 2\alpha$, $\frac{1+x^2}{1-x^2}=\cos 2\alpha$

លំហាត់ ១

បើ a, b, $c \in (0,1)$ បង្ហាញថា $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$ (1) ។

(Romania,2002)

ចម្លើយ

តាង $a = \cos^2 x$, $b = \cos^2 y$, $c = \cos^2 z$ បំពោះ x, y, $z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

យើងបាន (1) សមមូល $\cos x \cos y \cos z + \sin x \sin y \sin z < 1$ ពិត

ព្រោះ $\cos x \cos y \cos z + \sin x \sin y \sin z$

$$< \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y) \le 1$$

លំហាត់ ២

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា $a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{abc} \le 1$ ។

សម្រាយ

យក $a = xy$, $b = yz$ និង $c = zx$ យើងបាន

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{abc} \le 1 \Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2\sqrt{3}xyz \le 1$$

ដែល x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $xy + yz + zx = 1$ (*)

យើងមាន $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2\sqrt{3}xyz \le 1$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 + 2\sqrt{3}xyz \le 1 + 2xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow x + y + z \ge \sqrt{3} \qquad (1)$$

តាម (*) យើងយក $x = \tan\frac{A}{2}$, $y = \tan\frac{B}{2}$, $z = \tan\frac{C}{2}$

ដែល A, B, C ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ

យើងបាន $(1)\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$ ពិត តាម N_{13}

លំហាត់ ៣

គេឲ្យ a, b, $c\in(0,1)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $ab+bc+ca=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geq\frac{3}{4}\left(\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}\right)$ ។

ចម្លើយ

ដោយ a, b, $c\in(0,1)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $ab+bc+ca=1$

យក $a=\tan\frac{A}{2}$, $b=\tan\frac{B}{2}$, $c=\tan\frac{C}{2}$ ដែល A, B, C ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមុំស្រួច

យើងបាន $\frac{a}{1-a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}\right)=\frac{\tan A}{2}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b}{1-b^2}=\frac{\tan B}{2}$, $\frac{c}{1-c^2}=\frac{\tan C}{2}$

គេបាន $\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geq\frac{3}{4}\left(\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}\right)$

$$\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C\geq 3\left(\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}\right)\ (*)$$

តាម $I_7:\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

យើងបាន $(*)$ សមមូល

$$\left(\tan A+\tan B+\tan C\right)^2 \geq 3\left(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\left(\tan A-\tan B\right)^2+\left(\tan B-\tan C\right)^2+\left(\tan C-\tan A\right)^2\right]\geq 0$$ ពិត

លំហាត់ ៤

គេឲ្យ x , y , $z>0$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}$

$$+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leq 1 \quad (*)$$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\dfrac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\dfrac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}$

$$+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{(x+y)(x+z)}{x^2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{(y+z)(y+x)}{y^2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{(z+x)(z+y)}{z^2}}}\leq 1$$

ជាវិសមភាពអូម៉ូសែន WLOG សន្មតថា $xy+yz+zx=1$

យក $x=\tan\dfrac{A}{2}$, $y=\tan\dfrac{B}{2}$, $z=\tan\dfrac{C}{2}$ ដែល A , B , C ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ

យើងបាន $\dfrac{(x+y)(x+z)}{x^2}=\dfrac{\left(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\right)\left(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\right)}{\tan^2\dfrac{A}{2}}$

$$=\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

ដូចគ្នាដែរ គេបាន $\frac{(y+z)(y+x)}{y^2}=\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}$

យើងបាន (*) សមមូល $\frac{\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}}\le 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}\ge 2$$ ពិត

ព្រោះ តាម AM-HM គេបាន $\frac{1}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\sin\frac{C}{2}}$

$$\ge \frac{9}{3+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}$$

$$\ge \frac{9}{3+\frac{3}{2}}=2$$

តាម $N_3:\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$

លំហាត់ ៥

គេឲ្យ $x,\ y,\ z>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=xyz$ ។

បង្ហាញថា

ក/ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}$ (1)

ខ/ $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2)។

ចម្លើយ

ក/

ដោយ $x, y, z>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=xyz$

តាង $x=\tan A,\ y=\tan B,\ z=\tan C$

ដែល A, B, C ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមុំស្រួច

យើងបាន $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=\cos A$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 B}}=\cos B,\ \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 C}}=\cos C$

គេបាន (1) $\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ ពិត តាម N_5

ហេតុនេះ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}$

ខ/ ដូចគ្នាដែរ (2) $\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ពិត តាម N_1

ហេតុនេះ $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

លំហាត់ ៦

គេឲ្យ $a, b, c, d > 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$ ។

បង្ហាញថា $abcd \geq 3$ ។

(Latvia,2002)

ចម្លើយ

តាង $a^2=\tan A,\ b^2=\tan B,\ c^2=\tan C$ និង $d^2=\tan D$

ចំពោះ $A, B, C, D \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

គេបាន $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$

$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+\cos^2 D=1$

តាម AM-GM យើងបាន

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=\cos^2 B+\cos^2 C+\cos^2 D$$

$$\geq 3\sqrt[3]{(\cos B\cos C\cos D)^2} \qquad (1)$$

ដូចគ្នាដែរ គេបាន $\sin^2 B \geq 3\sqrt[3]{(\cos C\cos D\cos A)^2}$ $\qquad (2)$

$$\sin^2 C \geq 3\sqrt[3]{(\cos D\cos A\cos B)^2} \qquad (3)$$

$$\sin^2 D \geq 3\sqrt[3]{(\cos A\cos B\cos C)^2} \qquad (4)$$

គុណអង្គ និង អង្គនៃ (1),(2),(3),(4)

គេបាន $\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C\sin^2 D \geq 3^4\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C\cos^2 D$

$$\Rightarrow \tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C\tan^2 D \geq 3^4$$

$\Rightarrow (abcd)^4 \geq 3^4$

ហេតុនេះ $abcd \geq 3$

លំហាត់ ៧

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ ។ បង្ហាញថា $0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2$ ។

(USA,2001)

ចម្លើយ

បើ a, b, $c > 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + abc > 4$

ហេតុនេះ ដើម្បីឲ្យ $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ លុះត្រាតែមានយ៉ាងហោច

ណាស់មួយចំនួនតូចជាង រឺ ស្មើនឹង 1

ដោយ $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង a, b, c

WLOG ឧបមថា $a \leq 1$

គេបាន $ab + bc + ca - abc \geq (1-a)bc \geq 0$ (1)

យក $a = 2p$, $b = 2q$, $c = 2r$

គេបាន $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4 \Leftrightarrow p^2 + q^2 + r^2 + 2pqr = 1$ (*)

តាម (*) គេបាន $p = \cos A$, $q = \cos B$, $r = \cos C$

រឺ $a = 2\cos A$, $b = 2\cos B$, $c = 2\cos C$ ចំពោះ $A, B, C \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ

យើងបាន $ab + bc + ca - abc \leq 2$

$$\Leftrightarrow \cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A-2\cos A\cos B\cos C\le \frac{1}{2}$$

យើងមាន $1-2\cos A\ge 0$

យើងបាន $\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A-2\cos A\cos B\cos C$

$$=\cos A(\cos B+\cos C)+\cos B\cos C(1-2\cos A)$$

ដោយ $\cos B+\cos C\le \frac{3}{2}-\cos A$

ហើយ $\cos B\cos C=\frac{1}{2}[\cos(B-C)+\cos(B+C)]\le \frac{1-\cos A}{2}$

យើងបាន

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A-2\cos A\cos B\cos C$$

$$\le \cos A\left(\frac{3}{2}-\cos A\right)+\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)(1-2\cos A)=\frac{1}{2}$$

នោះ $ab+bc+ca-abc\le 2$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $0\le ab+bc+ca-abc\le 2$

លំហាត់ ៨

គេឲ្យ a, b, c បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=1$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{\sqrt{abc}}{c+ab}\le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$ ។

ចម្លើយ

យក $a=xy$, $b=yz$ និង $c=zx$ ដែល x, y, $z>0$

យើងបាន $\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{\sqrt{abc}}{c+ab}\le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{xy+(yz)(zx)}+\frac{yz}{yz+(zx)(xy)}+\frac{xyz}{zx+(xy)(yz)} \le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2} \le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad (**)$$

ដែល $xy+yz+zx=1$

តាង $x=\tan\frac{A}{2}$, $y=\tan\frac{B}{2}$, $z=\tan\frac{C}{2}$ ដែល A , B , C ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ

ហេតុនេះ $(**) \Leftrightarrow \frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{\tan\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{C}{2}} \le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\sin B+\cos^2\frac{C}{2} \le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos C}{2}+\frac{\sin B}{2} \le 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\sin B+\cos C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$ ពិត

ព្រោះ $\cos A+\sin B+\cos C=\cos A+\cos C+\sin\left[\pi-(A+C)\right]$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\cos A\sin C\right)$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{4}+\cos^2 A+\frac{3}{4}+\cos^2 C\right)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(3\sin^2 A+\cos^2 C+\cos^2 A+3\sin^2 C\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos^2 A+\sin^2 A\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos^2 B+\sin^2 B\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

លំហាត់ ៩

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 9\left(ab+bc+ca\right)$ ។

ចម្លើយ

តាង $a=\sqrt{2}\tan A,\ b=\sqrt{2}\tan B$ និង $c=\sqrt{2}\tan C$

ដែល $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

យើងបាន $\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geq 9\left(ab+bc+ca\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}\geq 9\left(2\tan A\tan B+2\tan B\tan C+2\tan C\tan A\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C\left(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C\right.$$

$$\left.+\sin A\sin B\cos C\right)\leq\frac{4}{9}\ (\ *\ )$$

ដោយ $\cos\left(A+B+C\right)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$

$$-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C$$

$$(\ *\ )\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C\left[\cos A\cos B\cos C-\cos\left(A+B+C\right)\right]\leq\frac{4}{9}$$

តាង $\theta=\dfrac{A+B+C}{3}$ ដោយ $\cos A,\cos B,\cos C>0$

និង $f(x)=\cos x$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

តាម AM-GM និង វិសមភាព Jensen យើងបាន

$$\cos A\cos B\cos C \le \left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3 \le \cos^3\theta$$

បង្ហាញថា $\cos^3\theta\left(\cos^3\theta-\cos 3\theta\right)\le\frac{4}{9}$

ដោយ $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\Rightarrow \cos^3\theta-\cos 3\theta = 3\cos\theta-3\cos^3\theta$

គេបាន $\cos^3\theta\left(\cos^3\theta-\cos 3\theta\right)\le\frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^4\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\le\frac{4}{27}$ ពិត

ព្រោះ តាម AM-GM យើងបាន

$$\cos^4\theta\left(1-\cos^2\theta\right)=\left[\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{2}\left(1-\cos^2\theta\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\le\frac{1}{3}\left[\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}+\left(1-\cos^2\theta\right)\right]=\frac{1}{3}$$

សមភាពលុះត្រាតែ $\tan A=\tan B=\tan C=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a=b=c=1$

លំហាត់ ១០

គេឲ្យ x, y, $z>1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$ ។

(Iran 1998)

ចម្លើយ

តាង $a=\sqrt{x-1}$, $b=\sqrt{y-1}$ និង $c=\sqrt{z-1}$

គេបាន $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2b^2c^2=1$

យក $p=ab$, $q=bc$, $r=ca$ នោះ $p^2+q^2+r^2+2pqr=1$

តាង $p=\cos A$, $q=\cos B$, $r=\cos C$ ដែល A, B, C ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមុំស្រួចមួយ

យើងបាន $\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2+3}\geq a+b+c$$

$$\Leftrightarrow p+q+r\leq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$$ ពិត

ហេតុនេះ $\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$

លំហាត់ ១១

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញដែល $xy+yz+zx=1$។ បង្ហាញថា

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)\leq\frac{4\sqrt{3}}{9} \quad (1)$$ ។

(Hong Kong,1994)

ចម្លើយ

ដោយ x, y, $z>0$ ដែល $xy+yz+zx=1$

តាង $x=\tan\frac{A}{2}$, $y=\tan\frac{B}{2}$, $z=\tan\frac{C}{2}$ ដែល A, B, C ជារង្វាស់មុំនៃ

ត្រីកោណមួយ

យើងបាន $x(1-y^2)(1-z^2)=\tan\frac{A}{2}\left(1-\tan^2\frac{B}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{C}{2}\right)$

តាម $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\Rightarrow 1-\tan^2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{\tan 2\alpha}$

គេបាន $x(1-y^2)(1-z^2)=4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(\frac{1}{\tan B\tan C}\right)$

ដូចគ្នាដែរ $y(1-z^2)(1-x^2)=4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(\frac{1}{\tan C\tan A}\right)$

$$z(1-x^2)(1-y^2)=4\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(\frac{1}{\tan A\tan B}\right)$$

នោះ (1)សមមូល $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\left(\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A\tan B\tan C}\right)\le\frac{\sqrt{3}}{9}$ (2)

ដោយ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(A, B, C ជារង្វាស់មុំនៃត្រីកោណមួយ)

ហេតុនេះ (2) សមមូល $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$ ពិត

ព្រោះ តាម AM-GM យើងបាន $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}$

$$\ge 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}$$

ដោយ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

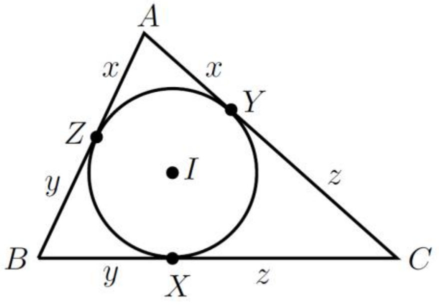
ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$

iii. **ការជំនួសបែប** Ravi (Ravi Transformation)

ការជំនួសបែប Ravi គឺជាការជំនួសដើម្បីបំលែងពីវិសមភាពនៃជ្រុងត្រីកោណឲ្យទៅជាវិសមភាពនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

សង្កេតលើរង្វង់ (I,r) ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ដែលរង្វង់នេះប៉ះទៅនឹងជ្រុង BC , CA និង AB ត្រង់ X , Y និង Z រៀងគ្នា ។

យក $x = AZ = YA$, $y = ZB = BX$, $z = XC = CY$



តាមរូបយើងបាន $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, $x = s - a$,

$y = s - b$ និង $z = s - c$ ដែល $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

សរុបមក បើ a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ $\Rightarrow \exists x, y, z > 0$

បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a = x + y$, $b = z + x$ និង $c = x + y$ ។

លំហាត់ ១

បើ a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le abc$ (*)។

ចម្លើយ

យក $a=x+y$, $b=z+x$ និង $c=x+y$ ចំពោះ x, y, $z>0$

យើងបាន $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=8xyz$

និង $abc=(x+y)(y+z)(z+x)$

(*) $\Leftrightarrow 8xyz\le(x+y)(y+z)(z+x)$ ពិតតាម AM-GM

លំហាត់ ២

គេឲ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ (*)។

(APMO,1996)

ចម្លើយ

យក $a=x+y$, $b=z+x$ និង $c=x+y$ ចំពោះ x, y, $z>0$

(*) $\Leftrightarrow\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\le\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}$ ពិត

ព្រោះ តាម QM-AM យើងបាន $\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}$

$$=\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2}+\frac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2}+\frac{\sqrt{2z}+\sqrt{2x}}{2}$$

$$\le\sqrt{\frac{2x+2y}{2}}+\sqrt{\frac{2y+2z}{2}}+\sqrt{\frac{2z+2x}{2}}$$

$$=\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}$$

សមភាពកើតឡើងលុះត្រាតែ $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$

មិនត្រឹមតែរង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណប៉ុណ្ណោះទេដែលយើងអាចសរសេរជាអនុគមន៍នៃ x, y, $z>0$ តែយើងក៏អាចសរសេរឲ្យជាប់អនុគមន៍ x, y,

$z>0$ ផងដែរនូវ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ និង កន្លះបរិមាត្រ ។

ដោយ $a=x+y$, $b=z+x$ និង $c=x+y$

យើងបាន $s=\dfrac{a+b+c}{2}=x+y+z$

តាមរូបមន្តហេរុង (Heron′s formula)

$$(ABC)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{(x+y+z)xyz}$$

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃ $(ABC)=sr\Rightarrow r=\dfrac{(ABC)}{s}=\sqrt{\dfrac{xyz}{x+y+z}}$

ហើយ តាម $(ABC)=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}}$

លំហាត់ ៣

គេឲ្យ a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC ។ បើគេសង់ត្រីកោណ $A'B'C'$ មួយទៀតដែលមានរង្វាស់ជ្រុង $a+\dfrac{b}{2}$, $b+\dfrac{c}{2}$, $c+\dfrac{d}{2}$ ។

បង្ហាញថា $(A'B'C')\geq\dfrac{9}{4}(ABC)$ ។

(India,2003)

ចម្លើយ

យក $a=x+y$, $b=z+x$ និង $c=x+y$

យើងបានរង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ $A'B'C'$ ត្រូវបានសម្តែងដោយ

$a' = \frac{x+2y+3z}{2}$, $b' = \frac{3x+y+2z}{2}$, $c' = \frac{2x+3y+z}{2}$

យើងបាន $(A'B'C') = \sqrt{\frac{3(x+y+z)(2x+y)(2y+z)(2z+x)}{16}}$

តាម AM-GM យើងបាន $2x+y \geq 3\sqrt[3]{x^2y}$, $2y+z \geq 3\sqrt[3]{y^2z}$

និង $2z+x \geq 3\sqrt[3]{z^2x}$

គេបាន $(A'B'C') \geq \sqrt{\frac{3(x+y+z)27xyz}{16}} = \frac{9}{4}(ABC)$

លំហាត់

1. គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{x^3}{x^3+2y^3}+\frac{y^3}{y^3+2z^3}+\frac{z^3}{z^3+2x^3}\geq 1$$ ។

2. យក x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y}\geq\frac{3}{2}$ ។

(Kazakhstan,2008)

3. បើ $n>3$ និង x_1, x_2, …, x_n ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x_1x_2\ldots x_n=1$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1$$ ។

(Russia,2004)

4. a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $ab+bc+ca=abc$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geq 1$ ។

(Poland,2006)

5. ចំពោះ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន បង្ហាញថា

$$\frac{1}{3}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\frac{a+b+c}{3}$$ ។

(Ireland,2007)

6. គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=8$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}\le 0$ ។

7. គេឲ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

ក/ $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$

ខ/ $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2\le 2(ab+bc+ca)$

គ/ $\frac{3}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$ ។

8. យក a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$ ។

(IMO,1964)

9. គេឲ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\le 3abc$ ។

10. គេឲ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$ ។

(IMO,1983)

11. គេឲ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ បង្ហាញថា

$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<\frac{1}{8}$ ។

12. គេឲ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$ab+bc+ca=3$ ។ បង្ហាញថា $3\le a+b+c\le 2\sqrt{3}$ ។

13. គេឲ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ r ជាកាំរង្វង់

ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះ ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{\sqrt{3}}{2r}$ ។

14. គេឲ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ s ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណនោះ ។ បង្ហាញថា

ក/ $(s-a)(s-b)<ab$

ខ/ $(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)$

$\leq\frac{ab+bc+ca}{4}$ ។

15. យក a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណស្រួចមួយ ។ បង្ហាញថា

$\sum_{cyc}\sqrt{a^2+b^2-c^2}\sqrt{a^2-b^2+c^2}\leq a^2+b^2+c^2$ ។

ភាពអូម៉ូសែន

(The Homogeneity)

និយមន័យ

គេថា អនុគមន៍ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូសែន (homogenous)
បើចំពោះ $t \in \mathrm{IR} - \{1\}$ គេបាន $f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ។

ឧទាហរណ៍ $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x + y}$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូសែន ព្រោះ

$$f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{2tx + ty} = tf(x, y)$$

ចំណែក $f(x, y, z) = x^2 + xy + 3z$ មិនមែនជាអនុគមន៍អូម៉ូសែនទេ ។

សម្គាល់ $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq g(x_1, x_2, ..., x_n)$ ហៅថាវិសមភាពអូម៉ូសែន បើ $h(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - g(x_1, x_2, ..., x_n)$ ជាអនុគមន៍អូម៉ូសែន រឺ អាចនិយាយម៉្យាងទៀតថាតួនីមួយៗនៃ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ និង $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ មានដឺក្រេស្មើគ្នា ។

ឧទាហរណ៍

$x^2 + y^2 + 2xy \geq z^2 + yz$ ជាវិសមភាពអូម៉ូសែន ព្រោះ តួនីមួយៗនៃ $x^2 + y^2 + 2xy$ និង $z^2 + yz$ មានដឺក្រេ 2 ដូចគ្នា។

ដូចគ្នាដែរ $a^2b+b^2a\le a^3+b^3$ ជាវិសមភាពអូម៉ូសែន ។

ចំណែកឯ $b^5+1\ge 5ab(1-ab)$ មិនមែនជាវិសមភាពអូម៉ូសែនទេ ។

បើវិសមភាពមួយជាវិសមភាពអូម៉ូសែន នោះគេអាចបង្កើតលក្ខខណ្ឌបន្ថែម។ លក្ខខណ្ឌបន្ថែមនេះមិនបានធ្វើឲ្យវិសមភាពបាត់បង់លក្ខណៈទូទៅទេ ។ លើសពីនេះទៅ ទៀតការបង្កើតលក្ខខណ្ឌថ្មីនេះអាចជួយឲ្យវិសមភាពមានទម្រង់ងាយជាងមុន ។ ដំណើរការនៃការបន្ថែមលក្ខខណ្ឌ និង ធ្វើឲ្យវិសមភាពមានទម្រង់ងាយជាងមុននេះ ត្រូវបានហៅថា Normalization ។

ចំពោះវិសមភាពនៃបីអថេរ a , b , c អាចត្រូវបាន Normalized (បន្ថែមលក្ខខណ្ឌ) ផ្សេងៗដូចជា $a+b+c=1$ រឺ $abc=1$ រឺ $ab+bc+ca=1$…។ របៀប Normalization ត្រូវបានធ្វើឡើងទៅតាមលំហាត់នីមួយៗ ពោល គឺធ្វើយ៉ាងណាឲ្យលំហាត់វិសមភាពដែលត្រូវដោះស្រាយមានទម្រង់ងាយ(ស្រួលស្រាយបញ្ជាក់) ។

សង្កេតវិសមភាព $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ ជាវិសមភាពអូម៉ូសែន

យើងអាច Normalize ដោយយក $abc=1$ ព្រោះ បើគេយក $abc=k^3$

និង $a=kx$, $b=ky$, $c=kz\Rightarrow xyz=1$

យើងបាន $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$$

មានន័យថា បើ $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ ចំពោះ $xyz=1$

គេបាន $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

លំហាត់ ១

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \text{ ។}$$

ចម្លើយ

WLOG សន្មតថា $ab+bc+ca=3$

តាម AM-GM យើងបាន $a+b+c \ge 3$ និង $abc \le 1$

នោះ $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$

$$= 3(a+b+c) - abc \ge 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} = 1 \le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}$$

ដូចនេះ $\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}$ (*)

ពន្យល់បន្ថែម

ហេតុអ្វីបានជាយើងអាចបន្ថែមនូវលក្ខខណ្ឌ $ab+bc+ca=3$?

ព្រោះ បើ $a=b=c=0$ គេបាន (*) ពិត

ផ្ទុយពីនេះ តាង $a' = \frac{a}{t}$, $b' = \frac{b}{t}$ និង $c' = \frac{c}{t}$ ($t > 0$)

យើងបាន (*) ពិតចំពោះគ្រប់ a , b , c លុះត្រាតែ(*)ពិតចំពោះគ្រប់ a' , b' , c' បើយើងយក $t = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \Rightarrow a'b'+b'c'+c'a' = 3$

តាមសម្រាយខាងលើ (*) ពិតចំពោះគ្រប់ a' , b' , c'

ហេតុនេះ (*) ក៏ពិតចំពោះគ្រប់ a , b , c ដែរ ។

លំហាត់ ២

ចំពោះ $a,\ b\ ,\ c>0$ បង្ហាញថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ ។

ចម្លើយ

ដោយ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ ជាវិសមភាពអូម៉ូសែន

WLOG សន្មតថា $a+b+c=1$

យើងបាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{9}{2}$ ពិត

ព្រោះ តាម AM-HM គេបាន $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{9}{2}$

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

លំហាត់ ៣

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$ ។

(USA,2003)

ចម្លើយ

WLOG ឧបមាថា $a+b+c=3$

យើងបាន $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

$$=\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2}$$

ដោយ $\frac{3(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}=\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}=1+\frac{8a+6}{(a-1)^2+2}$

$$\le 1+\frac{8a+6}{2}=4a+4$$

គេបាន $\sum_{cyc}\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}\le\frac{1}{3}\left(12+4\sum_{cyc}a\right)=8$

លំហាត់ ៤

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}$ ។

(Japan,2002)

ចម្លើយ

WLOG សន្មតថា $a+b+c=3$

យើងបាន $\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(3-2a)^2}{a^2+(3-a)^2}\ge\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{1}{2a^2-6a+9}\le\frac{3}{5}$$

ដោយ $\sum_{cyc}\left(\frac{5}{2a^2-6a+9}-1\right)=\sum_{cyc}\frac{2(a-1)(a-2)}{2a^2-6a+9}$

$$=\sum_{cyc}\left[\frac{-2(a-1)}{5}+\frac{(a-1)^2(2a+1)}{5(2a^2-6a+9)}\right]\geq\sum_{cyc}\frac{-2(a-1)}{5}=0$$

សម្រាប់វិសមភាពភ្ជាប់មកជាមួយនូវលក្ខខណ្ឌវិញ គេក៏អាចបំលែងវិសមភាពនោះឲ្យទៅជាវិសមភាពអូម៉ូសែនដែរ ដោយប្រើការតាងមួយចំនួនដូចជា

បើ $abc=1$ គេតាង $a=\frac{x}{y},\ b=\frac{y}{z},\ c=\frac{z}{x}$

បើ $a+b+c=1$ គេតាង $a=\frac{x}{x+y+z},b=\frac{y}{x+y+z}$ និង

$$c=\frac{z}{x+y+z}$$

បើ $a^2+b^2+c^2=1$ គេតាង $a=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},b=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

និង $c=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

បន្ទាប់ពី អូម៉ូសែន[1] ហើយ យើងអាច Normalize វិសមភាពទាំងនោះឲ្យមានទម្រង់ងាយ ។

លំហាត់ ៥

គេឲ្យ $x,\ y,\ z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=1$។

[1] អូម៉ូសែន គឺជាការបំលែងវិសមភាពមួយឲ្យក្លាយជាវិសមភាពអូម៉ូសែនដោយប្រើលក្ខខណ្ឌដែលគេឲ្យ ។

បង្ហាញថា $xy+yz+zx\geq 9xyz$ ។

ចម្លើយ

យើងអាចអូម៉ូសែនវិសមភាពនេះតាមលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=1$

តាង $x=\dfrac{a}{a+b+c}$, $y=\dfrac{b}{a+b+c}$, $z=\dfrac{c}{a+b+c}$

យើងបាន $xy+yz+zx\geq 9xyz$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{(a+b+c)^2}+\frac{bc}{(a+b+c)^2}+\frac{ca}{(a+b+c)^2}\geq \frac{9abc}{(a+b+c)^3}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 9abc \quad (\ *\ )$$

(*) ជាវិសមភាពអូម៉ូសែន សន្មតថា $abc=1$

(*)សមមូល $(ab+bc+ca)(a+b+c)\geq 9$ ពិត

ព្រោះ តាម AM-GM យើងមាន $(ab+bc+ca)(a+b+c)$

$$=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+3abc$$

$$=\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3\geq 6+3=9$$

ដូចនេះ $xy+yz+zx\geq 9xyz$

លំហាត់

1. គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{(2a+b+c)^3}{4a^3+(b+c)^3}+\frac{(2b+c+a)^3}{4b^3+(c+a)^3}+\frac{(2c+a+b)^3}{4c^3+(a+b)^3}\le\frac{12}{a+b+c}$$ ។

2. គេឲ្យ a , b , c , d ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b}{c^2+d^2+a^2}+\frac{c}{d^2+a^2+b^2}$$

$$+\frac{d}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$ ។

3. គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}\ge 2$$ ។

4. គេឲ្យ a , b , c , d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{abc}{(d+a)(d+b)(d+c)}+\frac{bcd}{(a+b)(a+c)(a+d)}$$

$$+\frac{cda}{(b+a)(b+c)(b+d)}+\frac{dab}{(c+a)(c+b)(c+d)}\ge\frac{1}{2}$$ ។

5. គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

ក/ $$\sqrt{\frac{2a^2+bc}{a^2+2bc}}+\sqrt{\frac{2b^2+ca}{b^2+2ca}}+\sqrt{\frac{2c^2+ab}{c^2+2ab}}\ge 2\sqrt{2}$$

ខ/ $$\sqrt{\frac{a^2+2bc}{2a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b^2+2ca}{2b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c^2+2ab}{2c^2+ab}}\ge 2\sqrt{2}$$ ។

6. គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{ab}{a+4b+4c}+\frac{bc}{b+4c+4a}+\frac{ca}{c+4a+4b}\le\frac{a+b+c}{9}$$ ។

7. គេឲ្យ a_i ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានចំពោះ $i=\overline{1,n}$ ។ បង្ហាញថា

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\ge n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$ ។

8. គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{abc}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}\ge\frac{5}{3}$$ ។