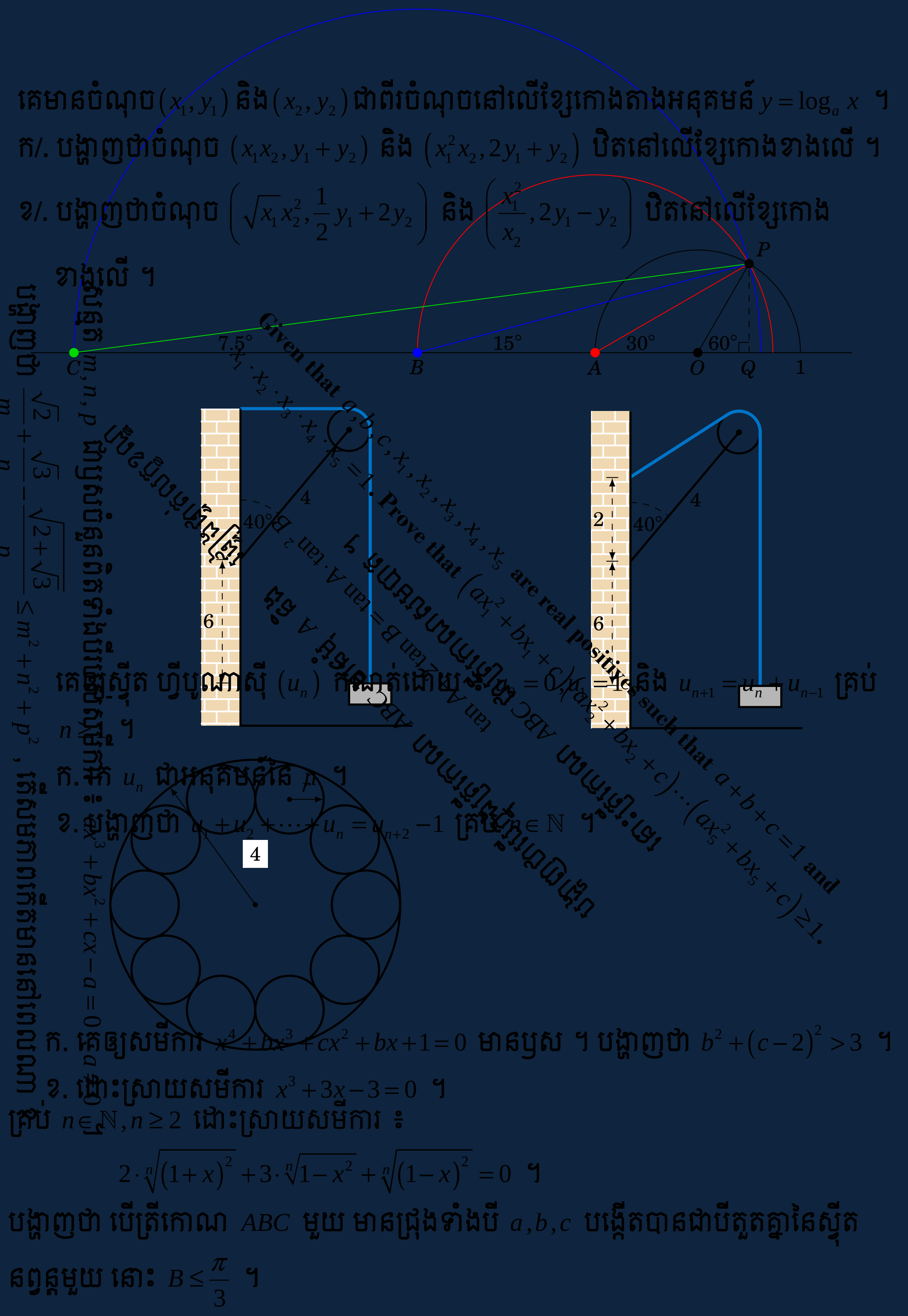
១០០១ លំហាត់គណិតវិទ្យា

Vol 3

Problems and Solutions

ហៃ ប៉ាហ៊ិន	គរុនិស្សិតបរិញ្ញាបូក១គណិតវិទ្យា-រូបវិទ្យាជំនាន់ទី ១៧
ហៃ ចរិយា	សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យាវិទ្យាល័យសុខអានសំរោង
យ៉ត ពន្លក	និស្សិតឆ្នាំទី៤បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា



មិថុនា, ឆ្នាំ ២០១២

១០០១

លំហាត់គណិតវិទ្យា

ភាគ៣ (Vol 3)

រៀបរៀងដោយ

លោក ហែ ប៉ាហ៊ុន

(គ្រូបរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និងរូបវិទ្យា)

(សមាជិកនិពន្ធទស្សនាវដ្ដីគណិតវិទ្យានៃកម្ពុជា និងការអប់រំ)

សហការរៀបរៀងដោយ

កញ្ញា ហែ ចរិយា

(គ្រូគណិតវិទ្យា និងនិស្សិតបរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យាឆ្នាំទី៤)

លោក យ៉ត ពន្លក

(និស្សិតបរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យាឆ្នាំទី៤)

កុំព្យូទ័រដោយ

លោក ហែ ប៉ាហ៊ុន

លោក ឈិត សារី

(និស្សិតបរិញ្ញាបត្រសង្គមវិទ្យាឆ្នាំទី៤)

ភ្នំពេញ , កម្ពុជា ខែ មិថុនា

ព.ស. ២៥៥៦ គ.ស. ២០១២

<u>សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ</u>

សៀវភៅមួយក្បាលនេះ សម្រេចបានជារូបរាងឡើងបានដោយសារតែមានការជ្រោមជ្រែងពីសំណាក់ ៖

លោក **គីម ពន្លក** នាយកវិទ្យាល័យប៊ុនរ៉ានី ហ៊ុនសែនស្លារម

លោក **ម៉ែន រាំង** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

លោកស្រី **ទី ប៉ូលីណេត** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

លោក **ថៃ ហេង** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

លោក **ចាន់ រ៉ាដា** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

លោក **លឹម បូណា** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

លោក **ផាន់ សុតាព** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

លោក **គឹម ចំរើនវុឌ្ឍី** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ

លោក **ឃឹម អាយុវឌ្ឍនៈវិជ្ជា** មន្ត្រីស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យានៃរាជបណ្ឌិតសភាកម្ពុជា

លោក **កៅ មុយសាន** មន្ត្រីស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យានៃរាជបណ្ឌិតសភាកម្ពុជា

លោក **ហេង ប៉ោហ៊ិន** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , សាកលវិទ្យាល័យភូមិន្ទភ្នំពេញ

លោក **ហ៊ិត ស៊ីអាត** អធិការគណិតវិទ្យារាជធានីភ្នំពេញ

លោក **អ៊ុន តាព** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , វិទ្យាល័យសម្តេចឪ

លោក **ប៉ោក ស្រេន** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , មជ្ឈមណ្ឌលគរុកោសល្យភូមភាគតាកែវ

លោក **លី សាម៉ាល់** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , មជ្ឈមណ្ឌលគរុកោសល្យភូមភាគតាកែវ

លោក **ម៉េង រិន** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា , មជ្ឈមណ្ឌលគរុកោសល្យភូមភាគតាកែវ

លោក **ស៊ូ សែន** ប្រធានក្រុមបច្ចេកទេសគណិតវិទ្យា,វិទ្យាល័យប៊ុនរ៉ានី ហ៊ុនសែនស្លារម

លោក **ប៉ែន សំអុល** សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា,វិទ្យាល័យប៊ុនរ៉ានី ហ៊ុនសែនស្លារម

លោក **ហួរហៃ** តក្កី សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា,វិទ្យាល័យប៊ុនរ៉ានី ហ៊ុនសែនស្លារម

លោកស្រី **ឈិត ចាន់** ជាភរិយា និងកូនប្រុស **ហៃហ្ស មុនីសុធា**

មិត្តអ្នកអានទាំងអស់ដែលតែងតែគាំទ្រ យើងខ្ញុំ និងមិត្តរួមជំនាន់ទី ១៧ ទាំងអស់ ។

រាល់កំហុសឆ្គងផ្នែកបច្ចេកទេស និងអក្ខរាវិរុទ្ធក្នុងសៀវភៅនេះ មិនមែនជាកំហុសរបស់លោក លោកស្រីទាំងអស់ខាងលើនេះទេ , វាគឺជាកំហុសឆ្គងរបស់យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀង និងវាយកុំព្យូទ័រតែប៉ុណ្ណោះ ។

ពេលនេះខ្ញុំបាទសូមសម្តែងចេញនូវទឹកចិត្តដឹងគុណចំពោះ ៖

- លោកឪពុក **ហៃ ហួ** និងអ្នកម្តាយ **ហួត ឆៀខ** ដែលបានបង្កើត បិញ្ចឹម អប់រំ ប្រៀនប្រដៅកូន ទំនុកបំរុងកូន ឲ្យកូនមានថ្ងៃនេះ ។
- លោកគ្រូ/អ្នកគ្រូដែលធ្លាប់បានបង្ហាត់បង្រៀនដល់រូបខ្ញុំបាទតាំងពីតូចរហូតដល់សព្វថ្ងៃ ។ លោកគ្រូ មួយចំនួនក៏បានចែកឋានទៅហើយ ។ ការខិតខំរបស់លោកគ្រូ/អ្នកគ្រូដែលបានបង្ហាត់បង្រៀនខ្ញុំ ក៏ដូចជាកូនខ្មែរដទៃទៀត គឺជាគុណូបការៈយ៉ាងធំធេង ។
- បងប្អូនប្រុស/ស្រី ទាំងអស់របស់ខ្ញុំបាទ ដែលធ្លាប់រស់នៅក្រោមដំបូលតែមួយ ។

សូមឲ្យលោកអ្នកមានគុណទាំងអស់ បានជួបតែសេចក្តីសុខ សេចក្តីចម្រើនគ្រប់ៗគ្នា ។

ថ្ងៃទី ១៩ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០១២ , ម៉ោងប្រហែលជា ១៧ ល្ងាច ។ សម្លេងសោយសោកដ៏គួរឲ្យអាណិតអាសូរ ។ បងជីដូនមួយរបស់ភរិយាខ្ញុំម្នាក់ បានលាចាកលោកសន្និវាសនេះ ដែលបន្សល់ទុកនូវសេចក្តីទុក្ខដ៏ក្រៀមក្រំ មិនមានអ្នកណាដែលទ្រាំទប់ទឹកភ្នែកបាន ។ គាត់មានអាយុ ៣២ ឆ្នាំ , គាត់ជាមនុស្សស្លូតបូត មានប្រជាប្រិយ រួសរាយរាក់ទាក់ មនុស្សផងទាំងពួងដែលស្គាល់គាត់ គឺស្រឡាញ់រាប់អានគាត់គ្រប់ៗគ្នា , គាត់ធ្វើតែអំពើល្អ ។ គាត់ស្លាប់ដោយសារជំងឺ ក្រោយពីត្រឡប់មកពីពេទ្យប្រទេសវៀតណាមវិញបាន កន្លះខែ ។ ពេទ្យវៀតណាមវះពោះគាត់ ហើយពិនិត្យមើលជំងឺនៅលើពោះវៀនគាត់ គឺមានពេញដោយ កូនកណ្តុរ ហើយពេទ្យក៏ដេរវិញ ។ គេអត់ហ៊ានព្យាបាលទេ ហើយនិយាយប្រាប់ថាគាត់អាចរស់បានត្រឹមតែ ៦ ខែទៀតប៉ុណ្ណោះ ។ ក្រុមគ្រួសារក៏លាក់រឿងនេះមិនឲ្យសាមីខ្លួន និងប្រពន្ធរបស់គាត់ដឹងទេ , ហើយនាំគាត់មកខ្មែរវិញ ខិតខំមើលគ្រូខ្មែរវិញ ទាំងមិនសូវមានសង្ឃឹម ។ ១៥ ថ្ងៃក្រោយពីមកពីវៀតណាមវិញ គាត់ក៏បានលាចាកលោក ។ គាត់ទើបតែជួបជុំគ្នាជាមួយខ្ញុំនៅថ្ងៃសែន មុនចូលឆ្នាំខ្មែរ គឺមិនមានអីផង គ្រាន់តែឈឺបន្តិចបន្តួចតែនៅដើរ រត់ បើកឡានធម្មតា។ មុនពេលគាត់ស្លាប់ គាត់បានផ្តែផ្តាំប្អូនៗឲ្យជួយថែរក្សាឪពុកម្តាយ ហើយផ្តាំម្តាយឪពុកក្មេក ឲ្យជួយមើលថែរទាំប្រពន្ធ កូនរបស់គាត់ផង ។កូនស្រីច្បងរបស់គាត់អាយុប្រហែលជិត ៤ឆ្នាំ ។ កូនទី២ នៅក្នុងផ្ទៃម្តាយទើបបាន ៦ខែ ។ គាត់និយាយរហូត ខ្សោយទៅៗ ទាល់តែកម្លាំងថយដល់ចំណុចសូន្យ ក៏ផុតដង្ហើមទៅ ។ មនុស្សម្នា អ្នកស្រុកអ្នកភូមិ បងប្អូនមកជួបជុំគ្នាពេញក្រោមផ្ទះ ។ ម្នាក់ៗយំរហូតទាល់តែយំលេងចេញ ។ គាត់ស្លាប់ទៅគេក៏រៀបចំបុណ្យសពទៅតាមប្រពៃណី ។ កូនរបស់គាត់ចេះតែសួរម្តាយថា “ម៉េចក៏ប៉ាដេកយូរម្លេះ” ។ ...

សេចក្តីស្លាប់គឺវាអញ្ចឹង ។ សូមមិត្តអ្នកអានមេត្តាគិតពីអនាគតរបស់យើង និងកូនចៅយើងផង ។ កុំគិតតែអ្វីដែលនៅជិតៗ ។ សម័យនេះទៅហើយ គេមើលឃើញដល់ណាណី ហើយ សូមយើងកុំធ្វើជាកង្កែបក្នុងអណ្តូងទៀត ។

អារម្ភកថា

សៀវភៅ “១០០១ លំហាត់គណិតវិទ្យា Vol 3” ដែលមិត្តអ្នកអានកំពុងកាន់នៅនឹងដៃនេះគឺជាសមិទ្ធកម្ម មួយដែលឆ្លើយតបទៅនឹងតម្រូវការរបស់មិត្តអ្នកសិក្សាស្របតាមការយកចិត្តទុកដាក់របស់ពិភពលោកលើវិស័យអប់រំ ។ គណិតវិទ្យាគឺជាមុខវិជ្ជាមួយយ៉ាងសំខាន់ ហើយមិនសូវជាមានអ្នកដែលរៀនបានពូកែលើមុខវិជ្ជានេះណាស់ ចង់ពូកែគណិតវិទ្យានេះ គឺត្រូវចាប់ផ្តើមតាំងពីថ្នាកបឋមសិក្សាទី១ ទី២... មកម្ល៉េះ ។ កាលណាប្អូនៗពូកែគណិតវិទ្យា នោះប្អូនៗនឹងមានឱកាសច្រើនក្នុងការទទួលបានជោគជ័យលើមុខវិជ្ជាផ្សេងៗទៀត ក៏ដូចជាការងារដែរ ។

សៀវភៅនេះក៏បាននាំមកនូវរឿងទុក្ខសោកមួយនៅខាងដើម តែនេះមិនមែនជាសញ្ញាមិនល្អទេ តែជារឿងមួយឲ្យមិត្តអ្នកអានចេះស្រឡាញ់អាយុជីវិតរបស់ខ្លួន ចេះធ្វើឲ្យជីវិតរបស់ខ្លួនមានន័យ មានកិត្តិយស ។ បើមិត្តអ្នកអានយល់ថាត្រង់ណាមិនល្អ សូមមិត្តអ្នកអានហែកសន្លឹកនោះចោលទៅ ដើម្បីកុំឲ្យជាភាពហ្មងសៅ ហើយទូរសព្ទមកខ្ញុំដើម្បីឲ្យខ្ញុំមានការកែសម្រួលនៅស្នាដៃលើកក្រោយៗទៀត ។

ឆ្នាំ ២០១២ កន្លងទៅនេះ សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាទូទាំងប្រទេសថ្នាក់ទី១២ ត្រូវបានសិស្សតាមខេត្តនានា ដណ្តើមយកទាំងអស់ ដែលរាល់ឆ្នាំមានច្រើនតែភ្នំពេញ តែឆ្នាំនេះវាផ្សេង ។ នេះមិនមែនមានន័យថា សិស្សនៅភ្នំពេញខ្សោយនោះទេ តែគឺមានន័យថាសិស្សតាមបណ្តាខេត្តនានាក៏មិនអាចមើលស្រាលបានដែរ ។ នេះហើយគឺជាការរីកចម្រើនខាងវិស័យអប់រំស្រុកយើងលើសិស្សពូកែ ។

សូមឲ្យមិត្តអ្នកសិក្សាខិតខំបន្ថែមទៀត ដើម្បីជាទំពាំងស្នងឫស្សី ដ៏រឹងមាំ ។ យើងខ្ញុំសូមរង់ចាំទទួលនូវការរិះគន់គ្រប់មជ្ឈដ្ឋានអ្នកសិក្សា ។

ភ្នំពេញ , ថ្ងៃទី ៣១ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០១២

អ្នករៀបរៀង

ហៃ ប៉ាហ៊ិន

ទូរសព្ទ ០១២ ៣៤៧ ៦២៤

អ៊ីម៉ែល **pahen_hay@yahoo.com**

ផ្នែកលំហាត់

201. ដោយមិនប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខ , ចូរបង្ហាញថា ៖ $\sqrt[3]{43}<\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{44}$ ។

202. គេឲ្យ ΔABC មានក្រឡាផ្ទៃ $S=1$ ។ បង្ហាញថា ៖ $a^4+b^4+c^4\geq 16$ ។

203. រកតម្លៃអតិបរមារបស់កន្សោម ៖ $A=\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_{2013}$, បើគេដឹងថា ៖
$\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2\cdot\ldots\cdot\tan\alpha_{2013}=1$ ។

204. សុខជ្រើសរើសបួនចំនួនផ្សេងគ្នាចេញអំពីសំណុំ $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ដែលមានផលបូកស្មើនឹង 11 ។ បើ L គឺជាចំនួនដែលធំបំផុតក្នុងចំណោមចំនួនទាំងបួននោះ ។ ចូរកំណត់តម្លៃនៃ L ។

205. ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក. $\left(2\cos 3x+6\cos x+1\right)^3=162\cos x-27$

ខ. $3^{2013x+3\cos x}-3^{2013x+4\cos^3 x}-3\cos 3x=0$

គ. $\left(\sin x\right)\sqrt[2012]{\sin^2 x+2012}-\left(\cos x+1\right)\sqrt[2012]{\cos^2 x+2\cos x+2013}=\cos x-\sin x+1$

ឃ. $\tan x=\cos^2\left(2x+\dfrac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(2x+\dfrac{5\pi}{12}\right)+\sin x\sin\left(3x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$ ។

206. x,y និង z គឺជាចំនួនពិតធំជាង 1 ហើយ w គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមានមួយ ។
បើ $\log_x w=24,\log_y w=40$ និង $\log_{xyz} w=12$ ។ រកតម្លៃនៃ $\log_z w$ ។

207. ឧបមាថាពន្លាតកន្សោម ៖

$\left(1-3x+4x^2\right)^{502}\left(1+3x-4x^2\right)^{504}=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ។

ក. តើ n ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

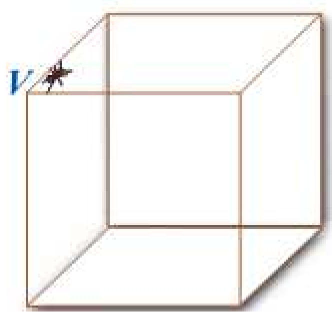
ខ. គណនាផលបូក $S=a_{2012}+a_{2011}+\cdots+a_1+a_0$ ។

208. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases}\lfloor x\rfloor+3\{y\}=3.9\\ \{x\}+3\lfloor y\rfloor=3.4\end{cases}$$

209. យើងមាន ABC ជាត្រីកោណសមបាតដែល $AB=AC$ ។ សន្មតថាកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ $\angle B$ កាត់ជ្រុង AC ត្រង់ D និង $BC=BD+AD$ ។ កំណត់តម្លៃ $\angle A$ ។

210. ស្រមោចមួយស្ថិតនៅត្រង់កំពូល V នៃគូបមួយដែលមានរង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗ $1m$ ។ ស្រមោចនោះត្រូវផ្លាស់ទីតាមជ្រុងនីមួយៗរបស់គូប និងត្រឡប់មកកំពូល V វិញ ដោយមិនឆ្លងកាត់តាមចំណុចណាមួយពីរដងឡើយ ។
រកប្រវែងវែងបំផុតនៃគន្លង ។

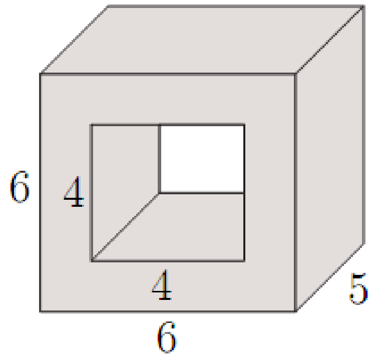


211. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$

ខ. $\sqrt{1-x}=\sqrt{6-x}-\sqrt{-5-2x}$ ។

212. គណនាមាឌនៃសូលីតខាងក្រោម គិតជា cm^3 ។ សូលីតនេះគឺជាប្រអប់ដែលមានប្រហោងខាងក្នុងគឺជាការ៉េ ។ រង្វាស់នៅក្នុងរូបគិតជា cm ។



213. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេបាន ៖

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc} \text{ ។}$$

214. រង្វង់ $C:x^2+y^2+kx+(1+k)y-(k+1)=0$ កាត់តាមពីរចំណុចជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ k ។

១. រកកូអរដោនេនៃពីរចំណុចនោះ ។

២. រកតម្លៃអប្បបរមានៃកាំរបស់រង្វង់នោះ ។

215. តាង $x>0$, $y>0$, $xy=8$ និង $P=2(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2$ ។

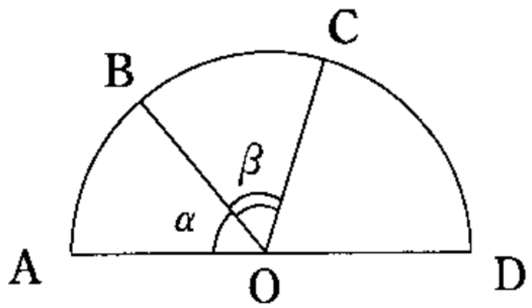
១. តាង $X=\log_2 x$ ។ សរសេរកន្សោម P ទៅជាអនុគមន៍នៃ X ។

២. រកតម្លៃអប្បបរមានៃ P ។

216. គេមានបួនចំណុច A,B,C និង D ឋិតនៅលើកន្លះរង្វង់មួយដូចរូប ។ កាំនៃកន្លះរង្វង់នេះគឺ 1 ឯកតា ហើយផ្ចិតរបស់វាគឺ O ។ CD គឺជាអង្កត់ផ្ចិត និងសមាមាត្រនៃក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណគឺ ៖ $S_{\Delta OAB}:S_{\Delta OBC}:S_{\Delta OCD}=1:2:2$ ។

១. តាង $\alpha=\angle AOB$ និង $\beta=\angle BOC$ ។ រក $\sin\alpha:\sin\beta$ ។

២. រកក្រឡាផ្ទៃនៃចតុកោណ $ABCD$ ។



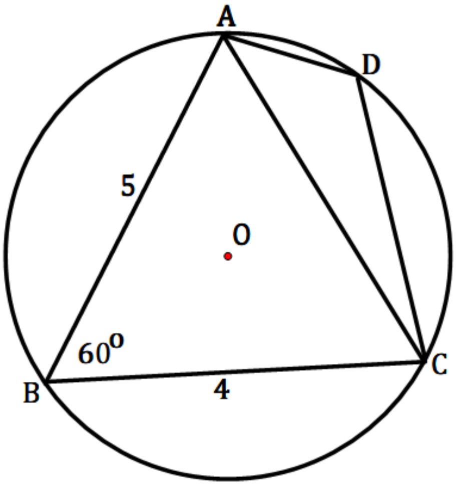
217. មានចំណុច A មួយនៅលើខ្សែកោង $C:x^2+y^2-2x-4=0$ ។ បើបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ត្រង់ A កាត់តាមចំណុច $P(4,3)$ ។ ចូរគណនាប្រវែង AP ។

218. គេមាន ABC គឺជាត្រីកោណមួយដែលមាន $AB=5, BC=4$ និង $\angle B=60^o$ ។

១. រកប្រវែងនៃអង្កត់ធ្នូ AC ។

២. គណនាប្រវែងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

៣. D គឺជាចំណុចមួយនៅលើធ្នូតូច AC ។ រកតម្លៃអតិបរមានៃផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណ $ABCD$ ។



219. ដោះស្រាយសមីការ $3x^3-10x^2+10x-4=0$ ។

220. គេមាន α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $2x^2-5x+1=0$ ហើយ $\frac{1}{\alpha}$ និង $\frac{1}{\beta}$ ជាឫសរបស់សមីការ $x^2+ax+b=0$ ។ រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ a និង b ។

221. តាង $\alpha=2, \beta=\sqrt{3}+i$ និង $\gamma=1+i$, $\left(i^2=-1\right)$ ។ រកតម្លៃដាច់ខាត r (ម៉ូឌុល) និងអាគុយម៉ង់ θ នៃ $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$, $(-\pi<\theta\le\pi)$ ។

222. សន្មតថា $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{kx}\right)^x=\sqrt{e}$ ។ រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ k ។

223. សន្មតថា α និង 3α គឺជាចម្លើយនៃសមីការត្រីជាដឺក្រេទី២ $3x^2+8x+k=0$ ដែល k គឺជាចំនួនពិត ថេរ ។ រកតម្លៃនៃ k ។

224. គេមាន a គឺជាផ្នែកគត់ នៃ $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ និង b គឺជាផ្នែកទសភាគ ($0<b<1$) ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $a-b+\frac{2}{b}$ ។

225. សន្មតថា $\log_{10}A=a$ និង $\log_{10}B=b$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន A,B ខុសពី 1 ។ ឧបមាថា $a+b=0$ ។ រកតម្លៃនៃ $A^{\frac{1}{b}}B^{\frac{1}{a}}$ ។

226. បង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n នីមួយៗ , នោះមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន m មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{m}+\sqrt{m+1}$ ។

227. តាង $x,y,z\ge 0$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=3$ ។ បង្ហាញថា ៖

$$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}\ge\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\cdot(xy+yz+zx) ~ ។$$

តើសញ្ញាសមភាពកើតមាននៅពេលណា ?

228. យើងមាន $ABCD$ គឺជាចតុកោណប៉ោងមួយ តាង $\alpha=\angle DAB,\beta=\angle ADB,\gamma=\angle ACB$ $\delta=\angle DBC$ និង $\varepsilon=\angle DBA$ ។ សន្មតថា $\alpha<\frac{\pi}{2},\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ និង $\delta+2\varepsilon=\pi$ ។

បង្ហាញថា $(DB+BC)^2=AD^2+AC^2$ ។

229. រកពហុធាដឺក្រេទី៥ $p(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $p(x)+1$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^3$ និង $p(x)-1$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^3$ ។

230. ពហុធា $P(x)$ មានដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $P(k)=2^k$ បំពោះ $k=0,1,2,\ldots,n$ ។ រកតម្លៃនៃ $P(n+1)$ ។

231. សន្មតថា $\frac{3}{2}\le x\le 5$ ។ បង្ហាញថា $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$ ។

232. តាង θ ជាមុំស្រួចមួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការអញ្ញាត x , $x^2+4x\cos\theta+\cot\theta=0$ មានឫសឌុប ។ ចូររកតម្លៃនៃ θ ។

233. រកគ្រប់ចំនួនគត់ x ដែល $(4-x)^{4-x}+(5-x)^{5-x}+10=4^x+5^x$ ។

234. គេមាន O ជាចំណុចមួយនៅខាងក្នុងត្រីកោណ ABC ដែល $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ ។ ចូររកផលធៀបនៃក្រឡាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ ABC ជាមួយក្រឡាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ AOC ។

235. ស្ត្រីម្នាក់ បានកើត និងរស់នៅក្នុងសតវត្សទី ២០ ។ ដោយដឹងថាការ៉េនៃអាយុរបស់គាត់ស្មើនឹងឆ្នាំដែលគាត់រស់នៅ ។ ចូររកអាយុរបស់គាត់នៅឆ្នាំ ១៩៨៨ ។

236. ដោះស្រាយសមីការ ៖ $2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{x^3+8}$ ។

237. ដោះស្រាយសមីការ ៖ $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$ ។

238. គេឲ្យ A,B,C ជាមុំទាំងបីរបស់ត្រីកោណមួយ ។

១. បង្ហាញថា $\dfrac{\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}=1$ ។

២. សន្មតថា $\cos C\cdot(\sin A+\sin B)=\sin C\cdot\cos(A-B)$ ។ ចូរកំណត់ $\cos A+\cos B$ ។

239. រកគ្រប់ពហុធា $f(x)$ ដែលមានមេគុណជាចំនួនពិត ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$$f(x)\cdot f(x+1)=f\left(x^2+x+1\right)$$ ។

240. អនុគមន៍ $f(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

(i) បំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទាន x , $f(x)$ គឺជាចំនួនពិត

(ii) $f(2013)\neq f(2012)$

(iii) $f(x+y)=f(x)f(y)-f(xy)+1$ បំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទាន x និង y

បង្ហាញថា $f\left(-\frac{2012}{2013}\right)=\frac{1}{2013}$ ។

241. រកគ្រប់អនុគមន៍ f ដែល ៖

(i) យកតម្លៃជាចំនួនពិត

(ii) កំណត់បានគ្រប់ចំនួន $x\neq\frac{2}{3}$, និង

(iii) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$503x-f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ x លើកលែង $\frac{2}{3}$ ។

242. ចំពោះអនុគមន៍ f ដែលកំណត់លើគ្រប់ចំនួនពិត និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$f(xy)=x\cdot f(y)+f(x)\cdot y$ និង $f(x+y)=f\left(x^{2013}\right)+f\left(y^{2013}\right)$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $f\left(\sqrt{2556}\right)$ ។

243. គេឲ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ ។ សន្មត M,N គឺជាចំណុចកណ្តាលនៃ AB,CD ។

បង្ហាញថា ៖

ក. $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ ។

ខ. $MN\leq\max(AD,BC)$ ។

244. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ ៖ $\begin{cases}4^{x+y-1}+3\cdot4^{2y-1}\leq2\\ x+3y\geq2-\log_4 3\end{cases}$ ។

245. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ ៖ $\begin{cases}\log_{\frac{1}{5}}\sqrt{5-x}<\log_{\frac{1}{5}}(3-x)\\ \left(x+\frac{1}{3}\right)\in\mathbb{N}\end{cases}$ ។

246. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $2222^{5555}+5555^{2222}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ខ. $2010^{2011}+2012^{2013}+2014^{2015}+3$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

247. គេឲ្យចំនួនពិត m និង n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $11m+10n=9$ ។

ចូរគណនាតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ពីរអថេរ $f(m,n)=(m+9)(n+6)(10m+9n)$ ។

248. បើ a,b,c,d ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2+d^2=2013^2$ ។

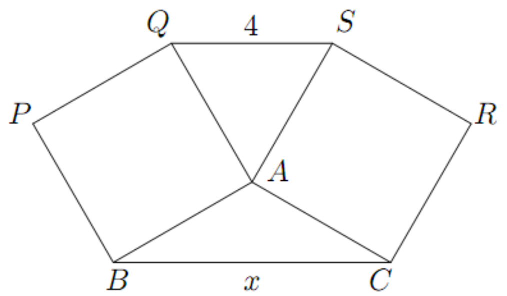
បង្ហាញថា $a^3+b^3+c^3+d^3\leq2013^3$ ។

249. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f\left(xf(y)+x\right)=xy+f(x)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង y ។

250. នៅក្នុងរូប, $AQPB$ និង $ASRC$ គឺជាការ៉េ ហើយ AQS គឺជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

បើ $QS=4$ និង $BC=x$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ x ។



251. $ABCD-EFGH$ គឺជាគូបមួយដែលមាន $ABCD$ ជាមុខលើ , តាមកំពូល H,G,F និង E គូសបន្ទាត់ដោយផ្ទាល់ភ្ជាប់ទៅកំពូល A,B,C និង D រៀងគ្នា ។ ចំនួនពិតមួយត្រូវបានដាក់នៅតាមកំពូលនីមួយៗ ។ ត្រង់កំពូលនីមួយៗ , មធ្យមនៃចំនួនក្នុងកំពូលជាប់គ្នាបី ។ មធ្យមដែលបិតនៅត្រង់ A,B,C,D,E,F,G,H គឺ $1,2,3,4,5,6,7,8$ រៀងគ្នា ។ រកចំនួនដែលបិតនៅត្រង់កំពូល F ។

252. គេឲ្យស្វ៊ីត ហ្វីបូណាស៊ី (u_n) កំណត់ដោយ ៖ $u_0=0, u_1=1$ និង $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ គ្រប់ $n\ge 1$ ។

ក. រក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. បង្ហាញថា $u_1+u_2+\cdots+u_n=u_{n+2}-1$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

253. ក. បង្ហាញថា $A=11^{10}-1$ ចែកដាច់នឹង 600 ។

ខ. រកគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $B=2^n+1$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

254. ដោះស្រាយសមីការ $8x^3+24x^2+6x-1=0$ ។

255. ក. គេឲ្យសមីការ $x^4+bx^3+cx^2+bx+1=0$ មានឫស ។ បង្ហាញថា $b^2+(c-2)^2>3$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $x^3+3x-3=0$ ។

256. សន្មត m,n,p ជាឫសចំនួនពិតទាំងបីរបស់សមីការ ៖ $ax^3+bx^2+cx-a=0$, $a\neq 0$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{\sqrt{2}}{m}+\dfrac{\sqrt{3}}{n}-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{p}\le m^2+n^2+p^2$, តើសមភាពកើតមាននៅពេលណា ?

257. គេឲ្យកន្សោម ៖

$$S=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$$

តើ S ជាចំនួនសនិទាន ឬទេ ?

258. គេមាន ABC ជាត្រីកោណដែលមានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច , បង្ហាញថា ៖

១. $\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}$

២. $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\ge 3\sqrt{3}$

៣. $\tan^n A+\tan^n B+\tan^n C\ge 3\cdot\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^n}$ ។

259. បង្ហាញថាបើសមីការ $(x+a)^2+(y+b)^2+(x+y)^2=c^2$ មានឫស

នោះ $(a+b)^2\le 3c^2$ ។

260. រក $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\frac{e^{-x}}{1+e^{-\frac{x}{n}}}dx$ ។

261. រក $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

(i) $f(x+y)\le f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

262. សន្មតថាសមីការ $x^3-45x^2+6x-a=0$ មានឫសបី x_1,x_2,x_3 ។

បង្ហាញថាផលបូក $\Sigma=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ មិនជាអនុគមន៍នៃ a ។

263. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases}(x+3y+4z+t)^2=27\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)\\ x^3+y^3+z^3+t^3=93\end{cases}$$

264. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សា សមីការខាងក្រោម ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត a ៖

$\left|2|x|-a\right|=x-a$ ។

265. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ដែលមានមុំផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$$\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$$

នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

266. គេមាន $\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha=1$ ។

រកតម្លៃអប្បបរមារបស់កន្សោម $M=\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\cos^4\gamma$ ។

267. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC មួយមានមុំទាំងបីផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\sin A+\sin B+\sin C$$

នោះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

268. គេមានត្រីកោណ ABC មួយ មានផ្ទៃក្រឡា S និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ R ។

បើ $3S=2R^2\left(\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C\right)$

បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

269. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18\\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2\end{cases}$$

សមមូល ៖

$$\begin{cases}x-4=0\\ 4-y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=4$$

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ $x=y=4$ ត្រូវបានដោះស្រាយ ។

270. គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=4$ ។

បង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a)\ge a^3b^3c^3$ ។

271. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (អញ្ញាត្តិ x,y,z) ៖

$$\frac{xy}{ay+bx}=\frac{yz}{bz+cy}=\frac{zx}{cx+az}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}\ ។$$

272. គេឲ្យ a និង b ជាពីរចំនួនវិជ្ជមានផ្សេងពីគ្នា ។

បង្ហាញថា $\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$ ។

273. គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនសូន្យ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$$

បង្ហាញថា $(ax+by+cz)^2=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$ ។

274. គេឲ្យសមីការពហុធាដឺក្រេទី២ ៖ $x^2-6x+m=0$ ។
កំណត់តម្លៃរបស់ប៉ារ៉ាម៉ែត m ដើម្បីឲ្យសមីការខាងលើ មានឫសពីរ x_1,x_2 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់រិឡាស្យុង(ទំនាក់ទំនង) $x_1^3+x_2^3=72$ ។

275. គេឲ្យសមីការពហុធាដឺក្រេទី២ ៖ $ax^2+bx+c=0$ និង $px^2+qx+r=0$ មានឫសរួមមួយ ។ បង្ហាញថាយើងមានសមភាព $(pc-ar)^2=(pb-aq)(cq-rb)$ ។

276. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ ៖

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4<0 \\ (x_1+x_2)(x_3+x_4)-x_1x_2-x_3x_4<0 \\ (x_1+x_2)x_3x_4-(x_3+x_4)x_1x_2<0 \\ x_1>0, x_2>0, x_3>0, x_4>0 \end{cases} \text{ ។}$$

277. គេឲ្យ n ចំនួនគត់ $a_1,a_2,a_3,\dots,a_n$ មានផលបូក $a_1+a_2+\cdots+a_n$ ចែកដាច់នឹង 6 ។
បង្ហាញថាផលបូក $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

278. គេឲ្យ $x=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ ។ រកតម្លៃនៃ $x^6-2\sqrt{3}x^5-x^4+x^3-4x^2+2x-\sqrt{3}$ ។

279. រកគ្រប់អនុគមន៍នៃចំនួនពិត $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់
$f(x^3-y)+2y(3f^2(x)+y^2)=f(y+f(x))$ គ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ ។

280. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c បើ $(a+c)(a+b+c)<0$ នោះ
$(b-c)^2>4a(a+b+c)$ ។

281. គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $x_0,x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$ កំណត់ដោយ ៖

$$x_0=2014 \text{ និង } x_n=-\frac{2014}{n}\sum_{k=0}^{n-1}x_k \quad ,(n\ge 1) \text{ ។}$$

កំណត់តម្លៃនៃផលបូក $A=\sum\limits_{n=0}^{2014}2^n\cdot x_n$ ។

282. គេមានត្រីកោណមួយមានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c ហើយ p និង S គឺជាកន្លះបរិមាត្រ និងផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនោះរៀងគ្នា ។
បើ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះ , បង្ហាញថា $S=pr$ ។

283. h_a,h_b,h_c ជារង្វាស់កម្ពស់ទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC មួយ ដែលមានកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង r ។
បង្ហាញថា $\dfrac{h_b}{h_a^2}+\dfrac{h_c}{h_b^2}+\dfrac{h_a}{h_c^2}\ge\dfrac{1}{r}$ ។

284. ពន្លាតនៃអនុគមន៍ពហុធា $P(x)=(1+2x)^{12}$ ប្រែក្លាយជារាង

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12} \text{ ។}$$

រក $\max\{a_1,a_2,\dots,a_{12}\}$ ។

285. ក. បង្ហាញថា បើ x ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស នោះ តម្លៃរបស់កន្សោម $A=x^2+4x-5$ ជាពហុគុណនៃ 8 ។
ខ. រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ x ដែល $65+x^2$ ជាការ៉េប្រាកដនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយ ។

286. បង្ហាញថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

287. បង្ហាញថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

288. ដោះស្រាយសមីការ $\tan^2 x-\tan x\tan 3x=2$ ។

289. ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{\sin y+\sin 2y+\sin 3y}{\cos y+\cos 2y+\cos 3y}=\sqrt{3}$ ។

290. គេឲ្យ $f(x)=ax+b$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ និង $a^2+b^2>0$ ។

បង្ហាញថា $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx\right)^2+\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx\right)^2>0$ ។

291. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{N}$ សមីការ ៖ $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\cdots+2^nC_n^n=81$ ។

292. ពិនិត្យស្វ៊ីត ហ្វីបូណាស៊ី ៖

$$a_1=a_2=1 \text{ និង } a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\ ,\ n\geq 2$$

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k,n ប្រភាគ ៖ $\dfrac{ka_{n+2}+a_n}{ka_{n+3}+a_{n+1}}$ មិនអាចសម្រួលបាន ។

293. គេមានត្រីកោណ ABC មួយមានមុំទាំងបីស្រួច ។ បង្ហាញថា ៖

$$\left(\sqrt{\tan A}-\sqrt{\cot\frac{A}{2}}\right)+\left(\sqrt{\tan B}-\sqrt{\cot\frac{B}{2}}\right)+\left(\sqrt{\tan C}-\sqrt{\cot\frac{C}{2}}\right)\geq\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}-\tan A\tan B\tan C \text{ ។}$$

294. គេឲ្យសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ មានឫសពីរ x_1 និង x_2 ដែល $x_1=x_2^2$ ។

បង្ហាញថា $b^3+a^2c+ac^2=3abc$ ។

295. គេឲ្យ m និង n ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sqrt{7}-\dfrac{m}{n}>0$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{7}-\dfrac{m}{n}>\dfrac{1}{mn}$ ។

296. គេឲ្យ៥ ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1 \text{ ។}$$

រកតម្លៃអតិបរមារបស់កន្សោម $A=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5$ ។

297. គេឲ្យស្វ៊ីត $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n,\ldots$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$u_1=1, u_2=3$$
$$u_n=2u_{n-1}+u_{n-2}$$

បង្ហាញថា $u_n=1+2C_n^2+2^2C_n^4+2^3C_n^6+\cdots$ ។

298. គ្រប់ $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$2\cdot\sqrt[n]{(1+x)^2}+3\cdot\sqrt[n]{1-x^2}+\sqrt[n]{(1-x)^2}=0 \text{ ។}$$

299. បង្ហាញថា បើត្រីកោណ ABC មួយ មានជ្រុងទាំងបី a,b,c បង្កើតបានជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ នោះ $B\leq\dfrac{\pi}{3}$ ។

300. គេសន្មតថាសមីការ $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ មានឫសពីរ គឺ x_1 និង x_2 ។
បង្ហាញថា x_1^3 និង x_2^3 ជាឫសរបស់សមីការ ៖

$$X^2-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)X+\left(ad-bc\right)^3=0$$ ៕

យើងខ្ញុំមានទទួលបង្រៀនគួរដល់ផ្ទះរបស់លោកអ្នក លើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា ជីវវិទ្យា ភាសារខ្មែរ ពីមិនទាន់ចេះសោះ ដល់ថ្នាក់ទី ១២ និងថ្នាក់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែ, ប្រឡងអាហារូបករណ៍ ។
បើមានចំណាប់អារម្មណ៍សូមទាក់ទងតាមរយៈទូរសព្ទ ០១២ ៣៤៧ ៦២៤ ឬ អ៊ីម៉ែល ៖ pahen_hay@yahoo.com ។ សូមអរគុណ ។

ស្នើមិត្តអ្នកអានរកជាវនូវសៀវភៅ ៖

- *ទស្សនាវដ្ដីគណិតវិទ្យានៃកម្ពុជា និងការអប់រំ ចេញដល់លេខ ៩*
- *ក្បួនដោះទ័លក្រ ដោយ ហាក់ ឆៃហុក (១៩៧៩)*
- *ខ្ញុំមានជំងឺមហារីក តើលោកគ្រូពេទ្យអាចជួយខ្ញុំបានទេ? សៀវភៅនៃក្ដីសង្ឃឹម (អាង ផេង ជាន)*
- *និងសៀវភៅផ្សេងៗទៀត ។*

ដើម្បីជាអំណានបន្ថែម ។

លោកគ្រូ ស៊ិន ទូច ជាចាងហ្វាងទស្សនាវដ្ដីគណិតវិទ្យានៃកម្ពុជា និងការអប់រំ ,បានមានប្រសាសន៍ថា “ខ្ញុំត្រូវចំណាយប្រាក់យ៉ាងតិច ២០ ដុលារ ក្នុងមួយខែសម្រាប់ការទិញសៀវភៅផ្សេងៗមកជាអំណានបន្ថែម ហើយគិតជាមធ្យមក្នុងមួយថ្ងៃ ខ្ញុំសរសេរកំណាព្យបែបកំប្លែង ឬបែបគំនិតពិចារណា បានមួយទំព័រ អា៤ ដែលវាយជាកុំព្យូទ័ររួចជាស្រេច ” ។

សម្រាប់ខ្ញុំអ្នករៀបរៀងវិញ , គិតជាមធ្យមក្នុងមួយអាទិត្យ ត្រូវតែមានសៀវភៅថ្មី ១ក្បាល (អាចទិញពីផ្សារ ឬកូពី ឬ ព្រីនពីកុំព្យូទ័រ ឯកសារដែលដោនឡូតពីអីនធ័រណែត) ។ធ្វើលំហាត់ជាមធ្យម ៥ ក្នុងមួយថ្ងៃ ។ ចូលតាមបណ្ណាគារយ៉ាងតិច ១ កន្លែងក្នុង ១សប្ដាហ៍ ។ ពេលសម្រាកពីការធ្វើលំហាត់ ចូលចិត្ត ដេកអានសៀវភៅផ្សេង និងស្ដាប់ព័ត៌មាន នយោបាយ និង ចម្រៀង ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

Solutions Part

201. ដោយមិនប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខ , ចូរបង្ហាញថា ៖ $\sqrt[3]{43} < \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{44}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖ $\sqrt[3]{43} < \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{44}$

តាង $x = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}$ នាំឲ្យ $x^3 = 12 + 9x$

គេបាន , x គឺជាឫសរបស់សមីការ $f(x) = x^3 - 9x - 12 = 0$

យើងបាន , $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍កំណត់គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ហើយ $f\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}\right) = 0$

គេបាន ៖ $f'(x) = 3x^2 - 9$

សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ គេបាន $f'(x) > 0$ កាលណា $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$

នាំឲ្យ អនុគមន៍ $f(x)$ កើនកាលណា $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$

ម្យ៉ាងទៀត $\sqrt[3]{44} > \sqrt[3]{43} > 3 > \sqrt{3}$

ហើយ $f\left(\sqrt[3]{43}\right) = 43 - 9\sqrt[3]{43} - 12 = 31 - 9\sqrt[3]{43} < 0$

$$f\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}\right) = 0$$

$$f\left(\sqrt[3]{44}\right) > 0$$

ដូចនេះវិសមភាព $\sqrt[3]{43} < \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{44}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

202. គេឲ្យ ΔABC មានក្រឡាផ្ទៃ $S = 1$ ។ បង្ហាញថា ៖ $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖ $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង , គេបាន ៖

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = 1$$

$$\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{c+a-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}=1$$

$$\left((a+b)+c\right)\left((a+b)-c\right)\left(c-(a-b)\right)\left(c+(a-b)\right)=16$$

$$\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)=16$$

ដោយ $(a-b)^2>0$ **និង** $c^2-(a-b)^2<c^2$

$$a+b>c \quad \Rightarrow (a+b)^2>c^2 \qquad \Rightarrow (a+b)^2-c^2>0$$

គេបាន ៖

$$16\le\left((a+b)^2-c^2\right)c^2=\left(a^2+b^2+2ab-c^2\right)c^2$$

$$16\le\left(2a^2+2b^2-c^2\right)c^2$$

$$16\le 2a^2c^2+2b^2c^2-c^4$$

$$16\le\left(a^4+c^4\right)+\left(b^4+c^4\right)-c^4=a^4+b^4+c^4$$

នាំឲ្យ $a^4+b^4+c^4\ge 16$

សញ្ញាសមភាពកើតមានកាលណា ៖ $\begin{cases}a^2=b^2=c^2\\ a=b=c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c$

ដូចនេះវិសមភាព $a^4+b^4+c^4\ge 16$ **ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។**

203. **រកតម្លៃអតិបរមារបស់កន្សោម ៖** $A=\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_{2013}$ **, បើគេដឹងថា ៖** $\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2\cdot\ldots\cdot\tan\alpha_{2013}=1$ **។**

<u>*ដំណោះស្រាយ*</u>

រកតម្លៃអតិបរមារបស់កន្សោម ៖ $A=\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin\alpha_{2013}$

យើងមាន ៖ $\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2\cdot\ldots\cdot\tan\alpha_{2013}=1$ **គេបាន ៖**

$$1\ge\sin 2\alpha_1\cdot\sin 2\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin 2\alpha_{2013}=2^{2013}\sin^2\alpha_1\cdot\sin^2\alpha_2\cdot\ldots\cdot\sin^2\alpha_{2013}$$

$$1\ge 2^{2013}A^2$$

$\Rightarrow A\le\sqrt{\dfrac{1}{2^{2013}}}$ **សញ្ញាសមភាពកើតមានកាលណា** $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{2013}=\dfrac{\pi}{4}$

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមារបស់កន្សោម A **គឺ** $\max A=\sqrt{\dfrac{1}{2^{2013}}}$ **កាលណា**

$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{2013}=\dfrac{\pi}{4}$ **។**

204. សុខជ្រើសរើសបួនចំនួនផ្សេងគ្នាចេញអំពីសំណុំ $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ដែលមានផលបូកស្មើនឹង 11 ។ បើ L គឺជាចំនួនដែលធំបំផុតក្នុងចំណោមចំនួនទាំងបួននោះ ។ ចូរកំណត់តម្លៃនៃ L ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី ១

កំណត់តម្លៃនៃ L

យើងសម្គាល់ថា ផលបូកនៃបួនចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតនៅក្នុងសំណុំខាងលើគឺ ៖

$$1+2+3+4=10$$

គេទាញបាន, $1+2+3+5=11$ ។ ចំនួនគត់វិជ្ជមានធំបំផុតនៅក្នុងផលបូកនេះគឺ 5 ។

ដូច្នេះ $L=5$ ត្រូវបានកំណត់ ។

របៀបទី ២

កំណត់តម្លៃនៃ L

ដោយ L គឺជាចំនួនដែលធំបំផុតនៃបួនចំនួនដែលជ្រើសចេញពី$\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $L\geq 4$ ។

ដូច្នេះ, L គឺអាចស្មើនឹងចំនួនមួយ ក្នុងចំណោមចំនួន $4,5,6$ និង 7 ។

បើ $L=7$ នោះផលបូកតូចបំផុតដែលអាចមាននៃបួនចំនួននោះគឺ $1+2+3+4=13>11$,

ដូច្នេះ $L\neq 7$ ។

ដូចគ្នាដែរ, បើ $L=6$ នៅតម្លៃតូចបំផុតនៃផលបូកចំនួនទាំងបួននោះគឺ

$1+2+3+6=12>11$ ។ ដូច្នេះ $L\neq 6$ ។

ដូចគ្នាដែរ, បើ $L=5$ នៅតម្លៃតូចបំផុតនៃផលបូកចំនួនទាំងបួននោះគឺ

$1+2+3+5=11$ (យកបាន)

ដូចនេះ $L=5$ ត្រូវបានកំណត់ ។

205. ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក. $\left(2\cos 3x+6\cos x+1\right)^3=162\cos x-27$

ខ. $3^{2013x+3\cos x}-3^{2013x+4\cos^3 x}-3\cos 3x=0$

គ. $(\sin x)\sqrt[2012]{\sin^2 x+2012}-(\cos x+1)\sqrt[2012]{\cos^2 x+2\cos x+2013}=\cos x-\sin x+1$

ឃ. $\tan x=\cos^2\left(2x+\dfrac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(2x+\dfrac{5\pi}{12}\right)+\sin x\sin\left(3x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក. $\left(2\cos 3x+6\cos x+1\right)^3=162\cos x-27$

តាង $t=2\cos x$, $-2\leq t\leq 2$

នោះសមីការក្លាយទៅជា ៖ $t^3+1=3\sqrt[3]{3t-1}$

តាង $u=\sqrt[3]{3t-1}$ គេបាន ប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} t^3 = 3u - 1 & (1) \\ u^3 = 3t - 1 & (2) \end{cases}$$

យក $(1)-(2)$ **គេបាន ៖**

$$t^3 - u^3 = 3(u-t)$$
$$(t-u)(t^2+tu+u^2)+3(t-u)=0$$
$$(t-u)(t^2+tu+u^2+3)=0$$

ដោយ $t^2+tu+u^2+3>0$ **, នោះ គេបាន ៖**

$$t-u=0 \Rightarrow t=u$$
$$t^3-3t+1=0$$
$$(2\cos x)^3-3(2\cos x)+1=0$$
$$8\cos^3 x-6\cos x+1=0$$
$$2\cos 3x+1=0$$
$$\cos 3x=-\frac{1}{2}$$
$$3x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad , k\in\mathbb{Z}$$
$$x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \quad , k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \quad , k\in\mathbb{Z}$ **។**

ខ. $3^{2013x+3\cos x}-3^{2013x+4\cos^3 x}-3\cos 3x=0$

សមីការដែលឲ្យសមមូល ៖

$$3^{2013x+3\cos x}-3^{2013x+4\cos^3 x}=3(4\cos^3 x-3\cos x)$$
$$3^{2013x+3\cos x}+3(2013x+3\cos x)=3^{2013x+4\cos^3 x}+3(2013x+4\cos^3 x)$$

តាង $f(t)=3^t+3t \quad , t\in\mathbb{R}$ **គេបាន ៖**

$$f'(t)=3^t\ln 3+3>0$$

នោះ $f(t)$ **ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច មានន័យថា** $f(t)$ **ជាអនុគមន៍ប្រកាន់**

គេបាន ៖

$$3^{2013x+3\cos x}+3(2013x+3\cos x)=3^{2013x+4\cos^3 x}+3(2013x+4\cos^3 x)$$
$$f(2013x+3\cos x)=f(2013x+4\cos^3 x)$$
$$2013x+3\cos x=2013x+4\cos^3 x$$
$$3\cos x-4\cos^3 x=0$$
$$\cos 3x=0$$
$$3x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad , k\in\mathbb{Z}$$
$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \quad , k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \quad , k\in\mathbb{Z}$ **។**

គ. $(\sin x)\sqrt[2012]{\sin^2 x+2012}-(\cos x+1)\sqrt[2012]{\cos^2 x+2\cos x+2013}=\cos x-\sin x+1$

សមីការដែលឲ្យសមមូល ៖

$$(\sin x)\sqrt[2012]{\sin^2 x+2012}+\sin x=(\cos x+1)\sqrt[2012]{\cos^2 x+2\cos x+2013}+\cos x+1$$

$$(\sin x)\sqrt[2012]{\sin^2 x+2012}+\sin x=(\cos x+1)\sqrt[2012]{(\cos x+1)^2+2012}+\cos x+1$$

តាង $f(t)=t+t\sqrt[2012]{t^2+2012}$, $t\in\mathbb{R}$ **គេបាន ៖**

$$f'(t)=1+\sqrt[2012]{t^2+2012}+\left(\frac{t^2}{1006}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[2012]{(t^2+2012)^{2011}}}\right)>0$$

នោះ $f(t)$ **ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច មានន័យថា** $f(t)$ **ជាអនុគមន៍ប្រកាន់**

គេបាន ៖

$$(\sin x)\sqrt[2012]{\sin^2 x+2012}+\sin x=(\cos x+1)\sqrt[2012]{(\cos x+1)^2+2012}+\cos x+1$$

$$f(\sin x)=f(\cos x+1)$$

$$\sin x=\cos x+1$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\pi+2k\pi \end{array}\right. , k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=\pi+2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$ **។**

ឃ. $\tan x=\cos^2\left(2x+\dfrac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(2x+\dfrac{5\pi}{12}\right)+\sin x\sin\left(3x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$

យើងមាន ៖

$$\begin{aligned}\sin(a+b)\sin(a-b)&=(\sin a\cos b+\sin b\cos a)(\sin a\cos b-\sin b\cos a)\\&=\sin^2 a\cos^2 b-\sin^2 b\cos^2 a\\&=(1-\cos^2 a)(1-\sin^2 b)-\sin^2 b\cos^2 a\\&=1-\sin^2 b-\cos^2 a+\cos^2 a\sin^2 b-\sin^2 b\cos^2 a\\&=1-\sin^2 b-\cos^2 a\end{aligned}$$

នាំឲ្យគេបាន ៖ $\sin^2 b\cos^2 a+\sin(a+b)\sin(a-b)=1 \qquad (1)$

តាង $a=2x+\dfrac{5\pi}{12}$ **និង** $b=x+\dfrac{5\pi}{12}$

គេបាន សមីការ (1) **ទៅជា ៖**

$$\sin^2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+\cos^2\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin x\sin\left(3x+\frac{5\pi}{6}\right)=1$$

នោះសមីការដែលត្រូវដោះស្រាយក្លាយទៅជា ៖

$$\tan x=1$$

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ , k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះឫសរបស់សមីការគឺ $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ **។**

206. x, y **និង** z **គឺជាចំនួនពិតធំជាង** 1 **ហើយ** w **គឺជាចំនួនពិតវិជ្ជមានមួយ ។**

បើ $\log_x w = 24, \log_y w = 40$ **និង** $\log_{xyz} w = 12$ **។ រកតម្លៃនៃ** $\log_z w$ **។**

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃនៃ $\log_z w$

យើងមាន $\log_x w = 24, \log_y w = 40$ **និង** $\log_{xyz} w = 12$ **គេបាន ៖**

$$\begin{aligned}
12 &= \log_{xyz} w \\
&= \frac{\log w}{\log xyz} \\
&= \frac{\log w}{\log x + \log y + \log z} \\
&= \frac{1}{\frac{\log x + \log y + \log z}{\log w}} \\
&= \frac{1}{\frac{\log x}{\log w} + \frac{\log y}{\log w} + \frac{\log y}{\log w}} \\
&= \frac{1}{\log_w x + \log_w y + \log_w z} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\log_x w} + \frac{1}{\log_y w} + \frac{1}{\log_z w}}
\end{aligned}$$

$$12 = \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \frac{1}{\log_z w}}$$

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \frac{1}{\log_z w} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{\log_z w} = \frac{1}{12} - \frac{1}{24} - \frac{1}{40}$$

$$\frac{1}{\log_z w} = \frac{1}{24} - \frac{1}{40} = \frac{5-3}{120}$$

$$\frac{1}{\log_z w} = \frac{1}{60}$$

$$\log_z w = 60$$

ដូចនេះ $\log_z w = 60$ **ត្រូវបានគណនា ។**

207. **ឧបមាថាពន្លាតកន្សោម ៖**

$\left(1 - 3x + 4x^2\right)^{502}\left(1 + 3x - 4x^2\right)^{504} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ **។**

ក. តើ n **ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?**

ខ. គណនាផលបូក $S = a_{2012} + a_{2011} + \cdots + a_1 + a_0$ **។**

ដំណោះស្រាយ

ក. តើ n ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

យើងមាន $\left(1-3x+4x^2\right)^{502}\left(1+3x-4x^2\right)^{504}=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ **គេបាន ៖**

ដឺក្រេរបស់ពហុធា $\left(1-3x+4x^2\right)^{502}\left(1+3x-4x^2\right)^{504}$ **គឺ ៖** $2\times502+2\times504=2012$

ដូចនេះ $n=2012$ **ត្រូវបានកំណត់ ។**

ខ. គណនាផលបូក $S=a_{2012}+a_{2011}+\cdots+a_1+a_0$

ដោយ $n=2012$ **គេបាន ៖**

$$\left(1-3x+4x^2\right)^{502}\left(1+3x-4x^2\right)^{504}=a_{2012}x^{2012}+a_{2011}x^{2011}+\cdots+a_1x+a_0$$

យក $n=1$ **គេបាន ៖**

$$a_{2012}1^{2012}+a_{2011}1^{2011}+\cdots+a_11+a_0=(1-3+4)^{502}(1+3-4)^{504}$$
$$S=a_{2012}+a_{2011}+\cdots+a_1+a_0=\left(2^{502}\right)\left(0^{504}\right)$$
$$S=0$$

ដូចនេះ $S=a_{2012}+a_{2011}+\cdots+a_1+a_0=0$ **ត្រូវបានគណនា ។**

208. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\lfloor x\rfloor+3\{y\}=3.9$$
$$\{x\}+3\lfloor y\rfloor=3.4$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

យើងមានប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\lfloor x\rfloor+3\{y\}=3.9$$
$$\{x\}+3\lfloor y\rfloor=3.4$$

តាង $x=a+u$ **និង** $y=b+v$ **ដែល** a **និង** b **ជាចំនួនគត់ និង** $0\le u,v<1$

នោះប្រព័ន្ធសមីការក្លាយទៅជា ៖

$$a+3v=3.9$$
$$u+3b=3.4$$

បូកអង្គ និងអង្គនៃសមីការទាំងពីរ , គេបាន ៖

$$(a+u)+3(b+v)=7.3$$
$$x+3y=7.3$$

ម្យ៉ាងទៀត ៖

$$3b \le 3.4 = u + 3b < 3b + 1$$
$$\Rightarrow 0.8 < b < 1.2$$

ដោយ b ជាចំនួនគត់ នោះ $b = 1$ គេបាន $u = 0.4$

ស្រដៀងគ្នាដែរ ៖

$$a \le 3.9 = a + 3v < a + 3$$
$$\Rightarrow 0.9 < a < 3.9$$

ដោយ a ជាចំនួនគត់ នោះ $a = 1, 2, 3$ គេបាន $3v = 3.9 - a$ នាំឲ្យ $v = \frac{29}{30}, \frac{19}{30}, 0.3$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការខាងលើមានគូចម្លើយ $\left(\frac{7}{5}, \frac{59}{30}\right), \left(\frac{12}{5}, \frac{49}{30}\right)$ និង $\left(\frac{17}{5}, \frac{39}{30}\right) = (3.4, 1.3)$ ។

209. យើងមាន ABC ជាត្រីកោណសមបាតដែល $AB = AC$ ។ សន្មតថាកន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ $\angle B$ កាត់ជ្រុង AC ត្រង់ D និង $BC = BD + AD$ ។ កំណត់តម្លៃ $\angle A$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ $\angle A$

តាង $\alpha = \angle A, \beta = \frac{\pi - \alpha}{4}$ និងសន្មតថា $AB = 1$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស , គេបាន ៖

$$BC = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\beta}, \ BD = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\beta}, \ AD = \frac{\sin\beta}{\sin 3\beta}$$

ដូច្នេះយើងនឹងត្រូវដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\sin(\pi - 4\beta)\sin 3\beta = \left(\sin(\pi - 4\beta) + \sin\beta\right)\sin 2\beta$$

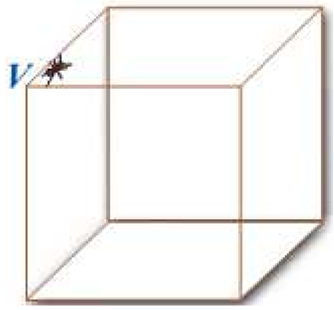
ដោយប្រើរូបមន្តផលបូក ទៅផលគុណ , យើងបាន ៖

$$\cos\beta - \cos 7\beta = \cos 2\beta - \cos 6\beta + \cos\beta - \cos 3\beta$$
$$\cos 3\beta - \cos 7\beta = \cos 2\beta - \cos 6\beta$$
$$\sin 2\beta \sin 5\beta = \sin 2\beta \sin 4\beta$$
$$\sin 5\beta = \sin 4\beta$$
$$9\beta = \pi$$
$$\beta = \frac{\pi}{9}$$

គេបាន $\angle A = \alpha = \pi - 4\beta = \pi - 4 \cdot \frac{\pi}{9} = \frac{5\pi}{9}$

ដូចនេះ $\angle A = \frac{5\pi}{9}$ ត្រូវបានគណនា ។

210. ស្រមោចមួយស្ថិតនៅត្រង់កំពូល V នៃគូបមួយដែលមានរង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗ $1m$ ។ ស្រមោចនោះត្រូវផ្លាស់ទីតាមជ្រុងនីមួយៗរបស់គូប និងត្រឡប់មកកំពូល V វិញ ដោយមិនឆ្លងកាត់តាមចំណុចណាមួយពីរដងឡើយ ។ រកប្រវែងវែងបំផុតនៃគន្លង ។



<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ប្រវែងវែងបំផុតនៃគន្លងគឺ $8m$ ។(សាកដោះស្រាយដោយខ្លួនឯង)

211. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

ក. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$

ខ. $\sqrt{1-x}=\sqrt{6-x}-\sqrt{-5-2x}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$

លក្ខខណ្ឌ , សមីការខាងលើមានន័យកាលណា ៖

$$\begin{cases} x-1\geq 0 & (1) \\ x-2\sqrt{x-1}\geq 0 & (2) \\ x+3-4\sqrt{x-1}\geq 9 & (3) \end{cases}$$

តាម $(1)\Leftrightarrow x\geq 1$ នោះគេបាន $(2)\Leftrightarrow x-2\sqrt{x-1}\geq 1-2\cdot 0>0$ ពិត

និង $(3)\Leftrightarrow x+3-4\sqrt{x-1}\geq 1+3-4\cdot 0>0$ ពិត

ដូច្នេះ គេបានលក្ខខណ្ឌ $x\geq 1$ ។

គេបាន , សមីការក្លាយទៅជា ៖

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}=1$$

$$\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}-2\right|=1 \qquad (*)$$

- បើ $\sqrt{x-1}<1$ នោះសមីការ $(*)\Leftrightarrow -\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\left(\sqrt{x-1}-2\right)=1$

$$-2\sqrt{x-1}+3=1$$

$\sqrt{x-1}=1$ មិនពិត

- បើ $1\le\sqrt{x-1}\le 2\Leftrightarrow 2\le x\le 5$ នោះសមីការ $(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)-\left(\sqrt{x-1}-2\right)=1$
  $\Leftrightarrow 1=1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ច
- បើ $2<\sqrt{x-1}$ នោះសមីការ $(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(\sqrt{x-1}-2\right)=1$
  $$2\sqrt{x-1}-3=1$$
  $\sqrt{x-1}=2$ មិនពិត

ដូចនេះសរុបមកចម្លើយរបស់សមីការគឺ $x\in[2,5]$ ។

ខ. $\sqrt{1-x}=\sqrt{6-x}-\sqrt{-5-2x}$

លក្ខខណ្ឌ , សមីការខាងលើមានន័យកាលណា ៖

$$\begin{cases}1-x\ge 0\\ 6-x\ge 0\\ -5-2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1\\ x\le 6\\ x\le-\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\le-\frac{5}{2}$$

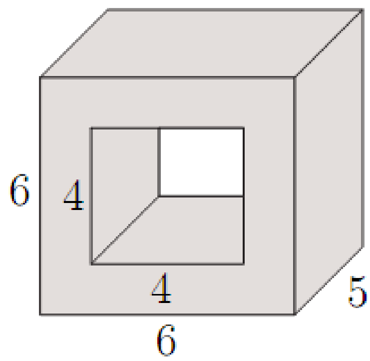
គេបាន , សមីការក្លាយទៅជា ៖

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{-5-2x}=\sqrt{6-x}$$
$$1-x+(-5-2x)+2\sqrt{(1-x)(-5-2x)}=6-x$$
$$\sqrt{(1-x)(-5-2x)}=x+5$$
$$(1-x)(-5-2x)=x^2+10x+25$$
$$-5-2x+5x+2x^2=x^2+10x+25$$
$$x^2-7x-30=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(-30)}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm 13}{2}=\left[\begin{array}{l}10\\-3\end{array}\right.$$

តែតាមលក្ខខណ្ឌ $x\le-\dfrac{5}{2}$ ដូច្នេះ $x=10$ មិនយក

ដូចនេះចម្លើយរបស់សមីការគឺ $x=-3$ ត្រូវបានដោះស្រាយ ។

212. គណនាមាឌនៃសូលីតខាងក្រោម គិតជា cm^3 ។ សូលីតនេះគឺជាប្រអប់ដែលមានប្រហោងខាងក្នុងគឺជាការ៉េ ។ រង្វាស់នៅក្នុងរូបគិតជា cm ។



ដំណោះស្រាយ

គណនាមាឌនៃសូលីត

មាឌនៃសូលីតត្រូវយកមាឌប្រលេពីប៉ែតកែងធំដកនឹងមាឌប្រលេពីប៉ែតកែងតូច(ប្រហោង)

មាឌនៃប្រលេពីប៉ែតកែងធំគឺ ៖ $V_1=(6cm)(6cm)(5cm)=180\,cm^3$

មាឌនៃប្រលេពីប៉ែតកែងតូចគឺ ៖ $V_2=(4cm)(4cm)(5cm)=80\,cm^3$

គេបាន , មាឌនៃសូលីត គឺ ៖ $V=V_1-V_2=180\,cm^3-80\,cm^3=100\,cm^3$ ។

ដូចនេះ មាឌនៃសូលីត គឺ $100\,cm^3$ ត្រូវបានកំណត់ ។

213. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេបាន ៖

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញវិសមភាព $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c យើងមាន ៖

$$a^2+b^2\ge 2ab\Rightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)$$

នាំឲ្យ $\frac{abc}{a^3+b^3+abc}\le\frac{abc}{ab(a+b)+abc}=\frac{c}{a+b+c}$ (១)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{abc}{b^3+c^3+abc}\le\frac{abc}{bc(b+c)+abc}=\frac{a}{a+b+c}$ (២)

និង $\frac{abc}{c^3+a^3+abc}\le\frac{abc}{ca(c+a)+abc}=\frac{b}{a+b+c}$ (៣)

បូកអង្គ និងអង្គ នៃ (១) , (២) និង (៣) គេបាន ៖

$$\frac{abc}{a^3+b^3+abc}+\frac{abc}{b^3+c^3+abc}+\frac{abc}{c^3+a^3+abc}\le\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}$$

$$\frac{abc}{a^3+b^3+abc}+\frac{abc}{b^3+c^3+abc}+\frac{abc}{c^3+a^3+abc}\le 1$$

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

សមភាពកើតមានកាលណា ៖ $a=b=c$

ដូចនេះ វិសមភាព $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

214. រង្វង់ $C: x^2+y^2+kx+(1+k)y-(k+1)=0$ កាត់តាមពីរចំណុចជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ k ។

១. រកកូអរដោនេនៃពីរចំណុចនោះ ។

២. រកតម្លៃអប្បបរមានៃកាំរបស់រង្វង់នោះ ។

ដំណោះស្រាយ

១. រកកូអរដោនេនៃពីរចំណុច

យើងមានសមីការរង្វង់ $C: x^2+y^2+kx+(1+k)y-(k+1)=0$ គេបាន ៖

$\left(x^2+y^2+y-1\right)+k\left(x+y-1\right)=0$ គ្រប់តម្លៃ k , យើងបាន

$$\begin{cases} x^2+y^2+y-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+y-1=0 & (1) \\ y=1-x & (2) \end{cases}$$

ជួសសមីការ (2) ក្នុងសមីការ (1) គេបាន ៖

$$x^2+(1-x)^2-x=0$$

$$x^2+1-2x+x^2-x=0$$

$$2x^2-3x+1=0$$

$$x_1=1, x_2=\frac{1}{2}$$

បើ $x=1$ នោះ $(2): y=0$

បើ $x=\frac{1}{2}$ នោះ $(2): y=\frac{1}{2}$

ដូចនេះកូអរដោនេនៃពីរចំណុចនោះគឺ $(1,0)$ និង $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ។

២. រកតម្លៃអប្បបរមានៃកាំរបស់រង្វង់នោះ

សមីការរង្វង់ $C: x^2+y^2+kx+(1+k)y-(k+1)=0$ សមមូល

$$\left(x^2+kx\right)+\left(y^2+(1+k)y\right)-(k+1)=0$$

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1+k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}-\frac{(1+k)^2}{4}-(k+1)=0$$

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1+k}{2}\right)^2=\frac{k^2+1+2k+k^2+4k+4}{4}$$

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1+k}{2}\right)^2=\frac{2k^2+6k+5}{4}$$

កាំនៃរង្វង់ គឺ $r=\sqrt{\frac{2k^2+6k+5}{4}}$ គេបាន ៖

$$r=\sqrt{\frac{2k^2+6k+5}{4}}=\frac{\sqrt{2\left(k^2+3k\right)+5}}{2}$$

$$r=\frac{\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+5-\frac{9}{4}}}{2}=\frac{\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}}{2}$$

$$r\geq\frac{\sqrt{\frac{11}{4}}}{2}=\frac{\sqrt{11}}{4}$$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃកាំរបស់រង្វង់នោះ គឺ $\frac{\sqrt{11}}{4}$ (ឯកតាប្រវែង) កាលណា $k=-\frac{3}{2}$ ។

215. តាង $x>0$, $y>0$, $xy=8$ និង $P=2\left(\log_2 x\right)^2+\left(\log_2 y\right)^2$ ។

១. តាង $X=\log_2 x$ ។ សរសេរកន្សោម P ទៅជាអនុគមន៍នៃ X ។

២. រកតម្លៃអប្បបរមានៃ P ។

ដំណោះស្រាយ

១. សរសេរកន្សោម P ទៅជាអនុគមន៍នៃ X

យើងមាន $P=2\left(\log_2 x\right)^2+\left(\log_2 y\right)^2$ និង $X=\log_2 x$ គ្រប់ $x>0$, $y>0$, $xy=8$

គេបាន ៖

$$X=\log_2 x=\log_2\left(\frac{8}{y}\right)=\log_2 8-\log_2 y=3-\log_2 y$$

$$\Rightarrow \log_2 y=3-X$$

យើងបាន ៖

$$P=2X^2+\left(3-X\right)^2=2X^2+9-6X+X^2$$

$$P=3X^2-6X+9$$

ដូចនេះ $P=3X^2-6X+9$ ត្រូវបានសរសេរទៅជាអនុគមន៍នៃ X ។

២. រកតម្លៃអប្បបរមានៃ P

យើងមាន $P=3X^2-6X+9$ គេបាន ៖

$$P=3\left(X^2-2X+3\right)=3\left(\left(X-1\right)^2+2\right)\geq 3\cdot 2=6$$

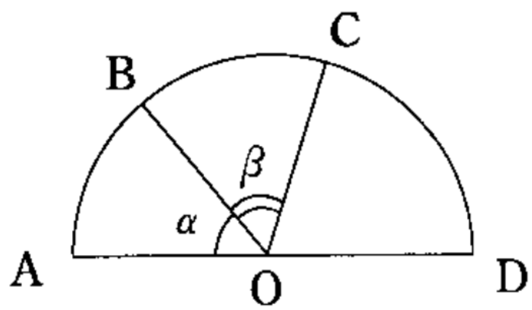
សមភាពកើតមានកាលណា $X-1=0\Leftrightarrow X=1\Leftrightarrow \log_2 x=1\Leftrightarrow x=2$ និង $y=\frac{8}{x}=4$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ P គឺ $P_{\min}=6$ កាលណា $x=2$ និង $y=4$ ។

216. គេមានបួនចំណុច A,B,C និង D ឋិតនៅលើកន្លះរង្វង់មួយដូចរូប ។ កាំនៃកន្លះរង្វង់នេះគឺ 1 ឯកតា ហើយផ្ចិតរបស់វាគឺ O ។ CD គឺជាអង្កត់ផ្ចិត និងសមាមាត្រនៃក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណគឺ ៖ $S_{\Delta OAB}:S_{\Delta OBC}:S_{\Delta OCD}=1:2:2$ ។

១. តាង $\alpha=\angle AOB$ និង $\beta=\angle BOC$ ។ រក $\sin\alpha:\sin\beta$ ។

២. រកក្រឡាផ្ទៃនៃចតុកោណ $ABCD$ ។



ដំណោះស្រាយ

១. រក $\sin\alpha:\sin\beta$

ដោយអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស , គេបាន ៖

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}(OA\cdot OB)\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha$$ (ព្រោះកាំរង្វង់ $OA=OB=1$)

$$S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}(OB\cdot OC)\sin\beta=\frac{1}{2}\sin\beta$$ (ព្រោះកាំរង្វង់ $OB=OC=1$)

ហើយតាមបំរាប់ , $S_{\Delta AOB}:S_{\Delta BOC}=1:2$ គេបាន ៖

$$\frac{1}{2}\sin\alpha:\frac{1}{2}\sin\beta=1:2$$

$$\sin\alpha:\sin\beta=1:2$$

ដូចនេះ $\sin\alpha:\sin\beta=1:2$ ត្រូវបានរក ។

២. រកក្រឡាផ្ទៃនៃចតុកោណ $ABCD$

គេបាន ៖ $S_{ABCD}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta COD}$

តែ $S_{\Delta AOB}:S_{\Delta BOC}:S_{\Delta COD}=1:2:2\Rightarrow 2S_{\Delta AOB}=S_{\Delta BOC}=S_{\Delta COD}$

យើងបាន ៖ $S_{ABCD}=5S_{\Delta AOB}=5\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=\frac{5}{2}\sin\alpha$

យើងមាន $S_{\Delta COD}=\frac{1}{2}(OC\cdot OD)\sin\left(180^o-(\alpha+\beta)\right)=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$

ដោយ $S_{\Delta BOC}=S_{\Delta COD}$ គេបាន $\frac{1}{2}\sin\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$

$$\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

$$\beta=180^o-(\alpha+\beta)\quad,\alpha\neq 0$$

$$\beta=\frac{180^o-\alpha}{2}$$

ហើយ $\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{\sin\beta}{2}\Leftrightarrow\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{\sin\left(90^o-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\quad,\ \cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}\ ,\ 0^o<\frac{\alpha}{2}<90^o$$

នាំឲ្យ $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{8}$

គេបាន ៖ $S_{ABCD}=\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)=\frac{5\sqrt{15}}{16}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ដូចនេះផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABCD$ គឺ $\frac{5\sqrt{15}}{16}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

217. មានចំណុច A មួយនៅលើខ្សែកោង $C: x^2+y^2-2x-4=0$ ។ បើបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ត្រង់ A កាត់តាមចំណុច $P(4,3)$ ។ ចូរគណនាប្រវែង AP ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាប្រវែងនៃ AP

យើងមានសមីការខ្សែកោង $C: x^2+y^2-2x-4=0$ គេបាន ៖

$$(x^2-2x)+y^2=4$$

$$(x-1)^2+y^2=5$$

គេបាន C គឺជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(1,0)$ និងកាំ $r=\sqrt{5}$ ឯកតា ។

គេបាន បន្ទាត់ AP កែងនឹងកាំរង្វង់ , មានន័យថាត្រីកោណ IAP ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ហើយមាន $P(3,4)$ និង $I(1,0)$ ។

គេបាន ៖ $PI^2=(1-3)^2+(0-4)^2=4+16=20$ និង $AI^2=r^2=5$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ , យើងបាន ៖

$$PA^2=IP^2-IA^2=20-5=15$$

$$PA=\sqrt{15}$$

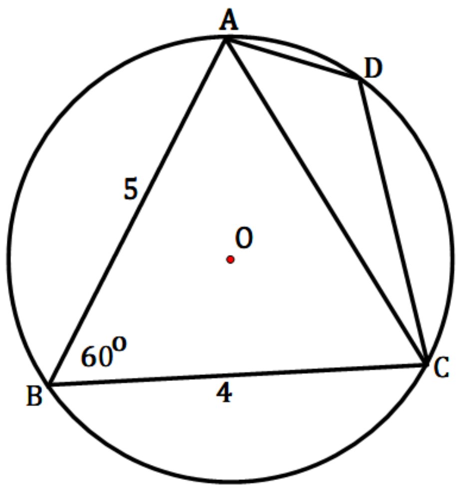
ដូចនេះ ប្រវែង $AP=\sqrt{15}$ (ឯកតាប្រវែង) ត្រូវបានគណនា ។

218. គេមាន ABC គឺជាត្រីកោណមួយដែលមាន $AB=5, BC=4$ និង $\angle B=60^o$ ។

១. រកប្រវែងនៃអង្កត់ធ្នូ AC ។

២. គណនាប្រវែងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

៣. D គឺជាចំណុចមួយនៅលើធ្នូតូច AC ។ រកតម្លៃអតិបរមានៃផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណ $ABCD$ ។



ដំណោះស្រាយ

១. រកប្រវែងនៃអង្កត់ធ្នូ AC

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស , គេបាន ៖ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB \cdot BC)\cos B$

ដោយ $AB = 5, BC = 4$ និង $\angle B = 60^o$ យើងបាន ៖

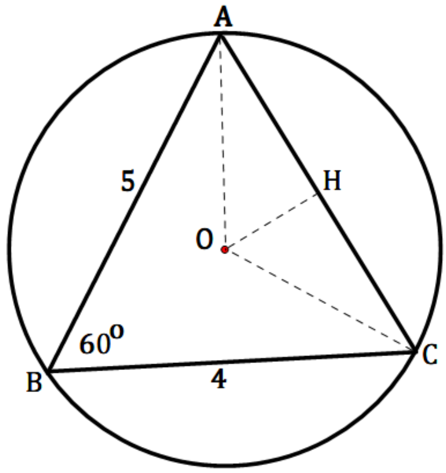
$$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5 \cdot 4)\cos 60^o$$

$$AC^2 = 41 - 20$$

$$AC = \sqrt{21}$$

ដូចនេះប្រវែងនៃអង្កត់ធ្នូ $AC = \sqrt{21}$ (ឯកតា) ត្រូវបានកំណត់ ។

២. គណនាប្រវែងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC



គេបាន $\angle AOC = 2\angle B = 120^o \Rightarrow \angle AOH = \frac{1}{2}\angle AOC = 60^o$

ក្នុងត្រីកោណកែង AOH គេបាន ៖ $\sin \angle AOH = \frac{AH}{AO} \Rightarrow OA = \frac{AH}{\sin \angle AOH}$

$$OA = \frac{\frac{\sqrt{21}}{2}}{\sin 60^o} = \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{7} \text{ ឯកតាប្រវែង}$$

ដូចនេះរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់កាំ $\sqrt{7}$ ឯកតាប្រវែង ។

៣. រកតម្លៃអតិបរមានៃផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណ $ABCD$

ផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណ $ABCD$ គឺ ៖ $S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}$

ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ ៖ $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(BA \cdot BC)\sin 60^o = 5\sqrt{3}$ ឯកតាផ្ទៃ (ថេរ)

ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ACD គឺ ៖ $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}(DA \cdot DC)\sin D$ (អថេរ)

គេបាន , ផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណ $ABCD$ អតិបរមាកាលណាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ACD អតិបរមា ។

ដោយ $\angle D = 180^o - \angle B = 120^o$ (មុំឈមនៃចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់)

នោះផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ACD អតិបរមា កាលណាផលគុណ $DA \cdot DC$ អតិបរមា

យើងដឹងថា ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b មានផលគុណអតិបរមា កាលណា $a = b$

នោះ ផលគុណ $DA \cdot DC$ អតិបរមា កាលណា $DA = DC$

មានន័យថា DAC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល D

នោះ $\angle DAC = \angle DCA = \frac{180^o - 120^o}{2} = 30^o$, គេបាន ៖

$$\frac{AD}{\sin 30^o} = \frac{AC}{\sin 120^o} \text{ (ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស)}$$

នាំឲ្យ $AD = CD = \frac{\sqrt{21} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{7}$ ឯកតាប្រវែង

គេបាន $S_{\max \Delta ACD} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{7}\right)^2 \sin 120^o = \frac{7}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះផ្ទៃក្រឡាអតិបរមានៃចតុកោណ $ABCD$ គឺ $S_{\max ABCD} = 5\sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}}{4}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ណែនាំ ៖ ***ហេតុអ្វីបានជា $a \cdot b$ អតិបរមា កាលណា $a = b$?***

យើងមាន $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

និង $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ***គេបាន ៖***

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right) \le \frac{1}{4}(a+b)^2$$

សញ្ញាស្មើ(តម្លៃអតិបរមា)កើតមានកាលណា $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ ***។***

219. ដោះស្រាយសមីការ $3x^3 - 10x^2 + 10x - 4 = 0$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយសមីការ

យើងមានសមីការ $3x^3 - 10x^2 + 10x - 4 = 0$ គេបាន ៖

$$\left(3x^3 - 6x^2\right) - \left(4x^2 + 8x\right) + (2x - 4) = 0$$

$$3x^2(x-2) - 4x(x-2) + 2(x-2) = 0$$

$$(x-2)\left(3x^2 - 4x + 2\right) = 0$$

បើ $x - 2 = 0$ នោះ $x_1 = 2$

បើ $3x^2 - 4x + 2 = 0$ នោះ $x_{2,3} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 6}}{3} = \frac{2 \pm i\sqrt{2}}{3}$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x_1 = 2, x_2 = \frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{3}$ និង $x_3 = \frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$ ។

220. គេមាន α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $2x^2-5x+1=0$ ហើយ $\frac{1}{\alpha}$ និង $\frac{1}{\beta}$ ជាឫសរបស់សមីការ $x^2+ax+b=0$ ។ រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ a និង b ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ a និង b

យើងមាន α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $2x^2-5x+1=0$, តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបាន៖

$$\alpha+\beta=\frac{5}{2}$$

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}$$

ហើយ $\frac{1}{\alpha}$ និង $\frac{1}{\beta}$ ជាឫសរបស់សមីការ $x^2+ax+b=0$, គេបាន ៖

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-a$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=b$$

យើងបាន ៖

$$-a=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5\Rightarrow a=-5$$

$$b=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

ដូចនេះ $a=-5$ និង $b=2$ ជាចំនួនដែល ត្រូវបានកំណត់ ។

221. តាង $\alpha=2,\beta=\sqrt{3}+i$ និង $\gamma=1+i$, $(i^2=-1)$ ។ រកតម្លៃដាច់ខាត r (ម៉ូឌុល) និងអាគុយម៉ង់ θ នៃ $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$, $(-\pi<\theta\leq\pi)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃដាច់ខាត r (ម៉ូឌុល) និងអាគុយម៉ង់ θ នៃ $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$, $(-\pi<\theta\leq\pi)$

យើងមាន $\alpha=2,\beta=\sqrt{3}+i$ និង $\gamma=1+i$ គេបាន ៖

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{1+i}=\frac{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}=\frac{2\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{2\left(2\cos^2\frac{\pi}{12}+2i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{4\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\left(2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

ដូចនេះ , គេបាន តម្លៃដាច់ខាតនៃ $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ គឺ ៖ $r=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=1+\sqrt{3}$

និងអាគុយម៉ង់ ៖ $\theta=-\frac{\pi}{6}$ (ព្រោះ $-\pi<\theta\le\pi$) ។

222. សន្មតថា $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{kx}\right)^x=\sqrt{e}$ ។ រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ k ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកតម្លៃនៃចំនួនថេរ k

តាមរូបមន្ត , $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$

គេបាន ៖ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{kx}\right)^x=\lim\limits_{kx\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{kx}\right)^{kx}\right)^{\frac{1}{k}}=e^{\frac{1}{k}}$

តែតាមបំរាប់ , $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{kx}\right)^x=\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$ នាំឲ្យគេបាន ៖ $e^{\frac{1}{k}}=e^{\frac{1}{2}}\Rightarrow k=2$

ដូចនេះ $k=2$ ត្រូវបានកំណត់ ។

223. សន្មតថា α និង 3α គឺជាចម្លើយនៃសមីការត្រីជាដឺក្រេទី២ $3x^2+8x+k=0$ ដែល k គឺជាចំនួនពិត ថេរ ។ រកតម្លៃនៃ k ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកតម្លៃនៃ k

យើងមាន α និង 3α ជាចម្លើយនៃសមីការ $3x^2+8x+k=0$ គេបាន ៖

$$\begin{cases}\alpha+3\alpha=-\dfrac{8}{3}\\ \alpha\cdot 3\alpha=\dfrac{k}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{2}{3}\\ k=9\alpha^2\end{cases}\Rightarrow k=9\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2=4$$

ដូចនេះចំនួនពិត បើនោះគឺ $k=4$ ត្រូវបានកំណត់ ។

224. គេមាន a គឺជាផ្នែកគត់ នៃ $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ និង b គឺជាផ្នែកទសភាគ ($0<b<1$) ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $a-b+\dfrac{2}{b}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $a-b+\dfrac{2}{b}$

យើងមាន a ជាផ្នែកគត់ និង b ជាផ្នែកទសភាគ ($0<b<1$)នៃ $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

គេបាន ៖ $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=2+\sqrt{3}=3+\left(\sqrt{3}-1\right)$

នាំឲ្យគេបាន $a=3,b=\sqrt{3}-1$ ព្រោះ $0<b<1$

យើងបាន ៖ $a-b+\dfrac{2}{b}=3-\left(\sqrt{3}-1\right)+\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=2-\sqrt{3}+\dfrac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}$

$$a-b+\frac{2}{b}=2-\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}+1\right)=3$$

ដូចនេះ $a-b+\dfrac{2}{b}=3$ ត្រូវបានគណនា ។

225. សន្មតថា $\log_{10}A=a$ និង $\log_{10}B=b$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន A,B ខុសពី 1 ។

ឧបមាថា $a+b=0$ ។ រកតម្លៃនៃ $A^{\frac{1}{b}}B^{\frac{1}{a}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃនៃ $A^{\frac{1}{b}}B^{\frac{1}{a}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន A,B ខុសពី 1 យើងមាន ៖

$\log_{10}A=a$ និង $\log_{10}B=b$ គេបាន ៖

$$\log_{10}\left(A^{\frac{1}{b}}B^{\frac{1}{a}}\right)=\frac{1}{b}\log_{10}A+\frac{1}{a}\log_{10}B$$

$$=\frac{1}{b}\cdot a+\frac{1}{a}\cdot b=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

នាំឲ្យ $A^{\frac{1}{b}}B^{\frac{1}{a}}=10^{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)}$ តែ $a+b=0\Rightarrow\frac{a}{b}=-1$ និង $\frac{b}{a}=-1$

នាំឲ្យ $A^{\frac{1}{b}}B^{\frac{1}{a}}=10^{(-1-1)}=\frac{1}{100}$

ដូចនេះ $A^{\frac{1}{b}}B^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{100}$ ត្រូវបានគណនា ។

226. បង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n នីមួយៗ , នោះមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន m មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{m}+\sqrt{m+1}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន m មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{m}+\sqrt{m+1}$

ដោយអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា លើទ្វេធា $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ យើងឃើញថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ដែល $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a+\sqrt{2}b$ និង $\left(1-\sqrt{2}\right)^n=a-\sqrt{2}b$

គុណរវាងគ្នានៃអង្គទាំងសងខាងរបស់សមភាព , យើងបាន ៖

$$\left(a+\sqrt{2}b\right)\left(a-\sqrt{2}b\right)=\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\right)^n$$

$$a^2-2b^2=\left(-1\right)^n$$

$$a^2-2b^2=\pm1$$

យើងកំណត់យក $m=\min\left(a^2,2b^2\right)$ យើងបាន ,

$$\sqrt{m}+\sqrt{m+1}=\sqrt{a^2}+\sqrt{2b^2}=a+\sqrt{2}b=\left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

ដូចនេះ បំណោទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

227. តាង $x,y,z\ge0$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=3$ ។ បង្ហាញថា ៖

$$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}\ge\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\cdot\left(xy+yz+zx\right)$$ ។

តើសញ្ញាសមភាពកើតមាននៅពេលណា ?

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}\ge\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\cdot\left(xy+yz+zx\right)$

ចំពោះ $x,y,z\ge0$, តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត - មធ្យមធរណីមាត្រ , គេបាន ៖

$$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y+2}{27}+\frac{y^2-2y+4}{27}\ge3\cdot\sqrt[3]{\frac{x^3}{27^2}}=\frac{x}{3}$$

ស្រដៀងគ្នានេះដែរ , គេក៏បាន ៖ $\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z+2}{27}+\frac{z^2-2z+4}{27}\ge\frac{y}{3}$

និង $\frac{z^3}{x^3+8}+\frac{x+2}{27}+\frac{x^2-2x+4}{27}\geq\frac{z}{3}$

ដោយ $x+y+z=3$, បូកអង្គ និងអង្គនៃវិសមភាពទាំង ៣ ខាងលើ គេបាន ៖

$$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y+2}{27}+\frac{y^2-2y+4}{27}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z+2}{27}+\frac{z^2-2z+4}{27}+\frac{z^3}{x^3+8}+\frac{x+2}{27}$$
$$+\frac{x^2-2x+4}{27}\geq\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}$$

$$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}\geq\frac{x+y+z}{3}+\frac{x+y+z}{27}-\frac{6}{9}-\frac{x^2+y^2+z^2}{27}$$
$$=\frac{4}{9}-\frac{(x+y+z)^2-2xy-2yz-2zx}{27}$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\cdot(xy+yz+zx)$$

សញ្ញាសមភាពកើតមានកាលណា ៖

$$\frac{y+2}{27}=\frac{y^2-2y+4}{27}\Rightarrow y^2-3y+2=0\Rightarrow y=1, y=2$$

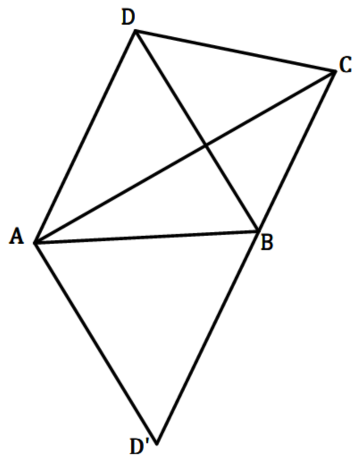
ស្រដៀងគ្នាដែរ , គេបាន ៖ $x=1, x=2$ និង $z=1, z=2$

តែតាមលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=3$ នោះនាំឲ្យ $x=y=z=1$

ដូចនេះ វិសមភាព $\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}\geq\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\cdot(xy+yz+zx)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ហើយសញ្ញាស្មើកើតមានកាលណា $x=y=z=1$ ។

228. យើងមាន $ABCD$ គឺជាចតុកោណប៉ោងមួយ តាង $\alpha=\angle DAB, \beta=\angle ADB, \gamma=\angle ACB$ $\delta=\angle DBC$ និង $\varepsilon=\angle DBA$ ។ សន្មតថា $\alpha<\frac{\pi}{2}, \beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ និង $\delta+2\varepsilon=\pi$ ។

បង្ហាញថា $(DB+BC)^2=AD^2+AC^2$ ។



<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $(DB+BC)^2=AD^2+AC^2$

តាង D' ជាចំណុចឆ្លុះនៃ D ធៀបនឹងបន្ទាត់ AB ។

យើងបាន ៖ $\angle D'BA=\angle DBA=\varepsilon$

នោះ $\angle D'BC=\angle D'BA+\angle ABD+\angle DBC=2\varepsilon+\delta=\pi$

ដូច្នេះ D', B និង C ជាបីចំណុចបិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ម្យ៉ាងទៀត , $\angle AD'C+\angle ACD'=\angle ADB+\angle ACB=\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$

ដូច្នេះ $\angle D'AC=\frac{\pi}{2}$ នោះ $D'AC$ ជាត្រីកោណកែង ។

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ , គេបាន ៖

$$D'C^2=D'A^2+AC^2$$

នាំឲ្យគេបាន ៖

$$(DB+DC)^2=(D'B+BC)^2=D'C^2=D'A^2+AC^2=AD^2+AC^2$$

ដូចនេះសមភាព $(DB+BC)^2=AD^2+AC^2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

229. រកពហុធាដឺក្រេទី៥ $p(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $p(x)+1$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^3$ និង $p(x)-1$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកពហុធាដឺក្រេទី៥ $p(x)$

តាមបំរាប់ , $p(x)+1$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^3$ និង $p(x)-1$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^3$

គេបាន ៖ $p(-x)+1$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^3$ (ជំនួស x ដោយ $-x$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌទី១)

ហើយ $p(-x)-1$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^3$ (ជំនួស x ដោយ $-x$ ក្នុងលក្ខខណ្ឌទី២)

ដោយ $p(x)+1$ និង $p(-x)-1$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^3$ ដូចគ្នា

នោះផលបូក $(p(x)+1)+(p(-x)-1)=p(x)+p(-x)$ ក៏ចែកដាច់នឹង $(x-1)^3$ ដែរ

ដូចគ្នាដែរ , ដោយ $p(x)-1$ និង $p(-x)+1$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^3$ ដូចគ្នា

នោះផលបូក $(p(x)-1)+(p(-x)+1)=p(x)+p(-x)$ ក៏ចែកដាច់នឹង $(x+1)^3$ ដែរ

គេបាន $p(x)+p(-x)$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^3$ ផង និង $(x+1)^3$ ផង

តែដោយកន្សោម $(x-1)^3$ និង $(x+1)^3$ គ្មានកត្តារួម ហើយផលគុណ $(x-1)^3\cdot(x+1)^3$ ជាពហុធាដឺក្រេទី ៦ ហើយ $p(x)+p(-x)$ ជាពហុធាដឺក្រេយ៉ាងច្រើនត្រឹមទី៥

នាំឲ្យ $p(x)+p(-x)=0 \Leftrightarrow p(-x)=-p(x)$

នេះមានន័យថា , $p(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាសេស

គេបាន , មេគុណនៃតួដែលមានដឺក្រេគូក្នុងពហុធា $p(x)$ ត្រូវតែស្មើសូន្យ

តាមសម្រាយខាងលើ , $p(x)-1$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^3$

គេបាន $p(x)-1=(x+1)^3(Ax^2+Bx+C)$ (ជាពហុធាដឺក្រេទី៥)

នោះ ៖

$$p(x)-1=(x+1)^3(Ax^2+Bx+C)$$

$$p(x)=(x^3+3x^2+3x+1)(Ax^2+Bx+C)+1$$

$$p(x)=Ax^5+(B+3A)x^4+(C+3B+3A)x^3+(3C+3B+A)x^2+(3C+B)x+(C+1)$$

ដោយ ឲ្យមេគុណនៃតួដែលមានដឺក្រេគូស្មើសូន្យ , គេបាន ៖

$$\begin{cases} B+3A=0 \\ 3C+3B+A=0 \\ C+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{3}{8} \\ B=\dfrac{9}{8} \\ C=-1 \end{cases}$$

គេបាន $p(x)=-\frac{3}{8}x^5+\left(-1+3\left(\frac{9}{8}\right)+3\left(-\frac{3}{8}\right)\right)x^3+\left(3(-1)+\frac{9}{8}\right)x$

ដូចនេះពហុធានោះគឺ $p(x)=-\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{4}x^3-\frac{15}{8}x$ ត្រូវបានកំណត់ ។

230. ពហុធា $P(x)$ មានដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $P(k)=2^k$ ចំពោះ $k=0,1,2,\ldots,n$ ។ រកតម្លៃនៃ $P(n+1)$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកតម្លៃនៃ $P(n+1)$

ចំពោះ $0\le r\le n$, ពហុធា $\binom{x}{r}=\frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}$ គឺជាពហុធាដឺក្រេ r ។

អញ្ចឹង ពហុធាដឺក្រេ n គឺ $Q(x)=\binom{x}{0}+\binom{x}{1}+\cdots+\binom{x}{n}$

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទទ្វេធា $Q(k)=(1+1)^k=2^k$ ចំពោះ $k=0,1,2,\ldots,n$

ដូច្នេះ $P(x)=Q(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

គេបាន , $P(n+1)=Q(n+1)=\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+1}{n}=2^{n+1}-1$

ដូចនេះ $P(n+1)=2^{n+1}-1$ ត្រូវបានគណនា ។

231. សន្មតថា $\frac{3}{2}\le x\le 5$ ។ បង្ហាញថា $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$

គ្រប់ $\frac{3}{2}\le x\le 5$ យើងអនុវត្តន៍តាមវិសមភាព កូស៊ី , គេបាន ៖

$$\begin{aligned}2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}&=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}\\&\le\sqrt{\left((x+1)+(x+1)+(2x-3)+(15-3x)\right)\left(1^2+1^2+1^2+1^2\right)}\\&=2\sqrt{x+14}\le 2\sqrt{5+14}=2\sqrt{19}\end{aligned}$$

សញ្ញាសមភាពកើតមានកាលណា $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}=\sqrt{15-3x}$ និង $x=5$

តែកាលណា $x=5$ នោះ $\sqrt{x+1}\ne\sqrt{2x-3}\ne\sqrt{15-3x}$ (សញ្ញាសមភាពមិនអាចកើតមាន)

ដូចនេះវិសមភាព $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

232. តាង θ ជាមុំស្រួចមួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការអញ្ញាត x , $x^2+4x\cos\theta+\cot\theta=0$ មានឫសឌុប ។ ចូររកតម្លៃនៃ θ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃនៃ θ

យើងមាន θ ជាមុំស្រួច ($0<\theta<\frac{\pi}{2}$) និង សមីការ $x^2+4x\cos\theta+\cot\theta=0$ មានឫសឌុប

គេបាន , $\Delta'=(2\cos\theta)^2-\cot\theta=4\cos^2\theta-\cot\theta=0$

$$\Leftrightarrow \cos\theta\left(4\cos\theta-\frac{1}{\sin\theta}\right)=0$$

ដោយ $\cos\theta\neq 0$ និង $\sin\theta\neq 0$ គេបាន ៖

$$4\cos\theta\sin\theta-1=0$$

$$2\sin 2\theta=1$$

$$\sin 2\theta=\frac{1}{2}$$

$$\sin 2\theta=\sin\frac{\pi}{6}$$

នាំឲ្យ $2\theta=\frac{\pi}{6},2\theta=\pi-\frac{\pi}{6}$

សមមូល $\theta=\frac{\pi}{12},\theta=\frac{5\pi}{12}$

ដូចនេះតម្លៃនៃ θ គឺ $\frac{\pi}{12}$ និង $\frac{5\pi}{12}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

233. រកគ្រប់ចំនួនគត់ x ដែល $(4-x)^{4-x}+(5-x)^{5-x}+10=4^x+5^x$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់ចំនួនគត់ x

យើងមានសមីការ $(4-x)^{4-x}+(5-x)^{5-x}+10=4^x+5^x$

បើ $x<0$ នោះអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការជាចំនួនគត់ប៉ុន្តែអង្គខាងស្តាំវិញ $0<\frac{1}{4^x}+\frac{1}{5^x}<1$

បើ $x>5$ នោះអង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ តូចជាង $\frac{1}{4}$ ខណៈដែលអង្គខាងស្តាំជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដូច្នេះ , ចម្លើយរបស់សមីការដែលអាចមានគឺជាចំនួនគត់នៅចន្លោះ ពី 0 ដល់ 5

ឲ្យ $x=1$ គេបាន , $(4-1)^{4-1}+(5-1)^{5-1}+10=4^1+5^1$

$$3^3+4^4+10=4+5$$

$$27+256+10=9$$

$219=9$ មិនពិត

ឲ្យ $x=2$ គេបាន , $(4-2)^{4-2}+(5-2)^{5-2}+10=4^2+5^2$

$$2^2+3^3+10=16+25$$

$$4+27+10=41$$

$41=41$ ពិត

ឲ្យ $x=3$ គេបាន , $(4-3)^{4-3}+(5-3)^{5-3}+10=4^3+5^3$

$$1^1+2^2+10=64+125$$

$$1+4+10=189$$

$$15=189$$ មិនពិត

ឲ្យ $x=4$ គេបាន , $(4-4)^{4-4}+(5-4)^{5-4}+10=4^4+5^4$

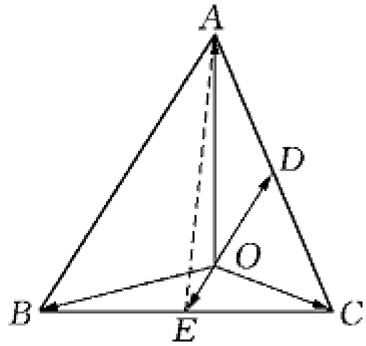
$0^0+1^1+10=256+625$ មិនអាចគណនា 0^0

ដូចនេះសរុបមកចំនួនគត់ដែល ត្រូវរកគឺ $x=2$ ។

234. គេមាន O ជាចំណុចមួយនៅខាងក្នុងត្រីកោណ ABC ដែល $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ ។ ចូររកផលធៀបនៃក្រឡាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ ABC ជាមួយក្រឡាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ AOC ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកផលធៀបនៃក្រឡាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ ABC ជាមួយក្រឡាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ AOC



ដូចបង្ហាញក្នុងរូប , យក D និង E ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង AC និង BC រៀងគ្នា ។ នោះយើងបាន ៖

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD} \qquad (1)$$

និង $2\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=4\overrightarrow{OE} \qquad (2)$

តាមសមីការ (1) និង (2) យើងបាន ៖

$$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=2\left(\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{OE}\right)=\vec{0}$$

នេះមានន័យថា $\overrightarrow{OD}$ និង $\overrightarrow{OE}$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា ហើយ $\left|\overrightarrow{OD}\right|=2\left|\overrightarrow{OE}\right|$ ។

យើងសន្និដ្ឋានបានថា ៖

$$\frac{S_{\Delta AEC}}{S_{\Delta AOC}}=\frac{3}{2}$$ និង $$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AOC}}=\frac{3\cdot 2}{2}=3$$

ដូចនេះផលធៀបនៃក្រឡាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ ABC ជាមួយក្រឡាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណ AOC គឺស្មើនឹង 3 ។

235. ស្ត្រីម្នាក់ បានកើត និងរស់នៅក្នុងសតវត្សទី ២០ ។ ដោយដឹងថាការ៉េនៃអាយុរបស់គាត់ ស្មើនឹងឆ្នាំដែលគាត់រស់នៅ ។ ចូររកអាយុរបស់គាត់នៅឆ្នាំ ១៩៨៨ ។

ដំណោះស្រាយ

រកអាយុរបស់គាត់នៅឆ្នាំ ១៩៨៨

យើងដឹងថា , សតវត្សទី ២០ គឺស្ថិតនៅចន្លោះពីឆ្នាំ 1900 ដល់ឆ្នាំ 1999

សន្មតថា x ($x\in\mathbb{N}$)ជាអាយុរបស់គាត់ដែល x^2 ស្មើនឹងឆ្នាំដែលគាត់រស់នៅ

គេបាន ៖

$$(x-1)^2<x^2<(x+1)^2$$

ដោយ $43^2=1849<1900$

និង $45^2=2025>1999$

នាំឲ្យ $x=44$ ព្រោះ $x^2=44^2=1936\in[1900,1999]$

មានន័យថា នៅឆ្នាំ 1936 គាត់មានអាយុ 44 ឆ្នាំ

នោះនៅឆ្នាំ ១៩៨៨ គាត់មានអាយុ ៖ $44+(1988-1936)=96$ ឆ្នាំ

ដូចនេះនៅឆ្នាំ ១៩៨៨ ស្ត្រីម្នាក់នោះមានអាយុ ៩៦ ឆ្នាំ ។

236. ដោះស្រាយសមីការ ៖ $2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{x^3+8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

យើងមានសមីការ $2\left(x^2-3x+2\right)=3\sqrt{x^3+8}$ (១)

លក្ខខណ្ឌ , សមីការ(១)មានន័យកាលណា ៖

$$\begin{cases}x^3+8\ge 0\\ x^2-3x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le 1\vee x\ge 2 \qquad (២)$$

តាង $\begin{cases}u=\sqrt{x^2-2x+4}\\ v=\sqrt{x+2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2=x^2-2x+4\\ v^2=x+2\end{cases}$

នោះ $u^2-v^2=x^2-3x+2$ និង $uv=\sqrt{\left(x^2-2x+4\right)\left(x+2\right)}=x^3+8$

នាំឲ្យ(១)សមមូលនឹង ៖

$$2\left(u^2-v^2\right)=3uv$$

$$2u^2-3uv-2v^2=0$$

$$\left(u-\frac{3}{4}v\right)^2-\left(\frac{5}{4}v\right)^2=0$$

$$\left(u-\frac{3}{4}v-\frac{5}{4}v\right)\left(u-\frac{3}{4}v+\frac{5}{4}v\right)=0$$

$$(u-2v)\left(u+\frac{1}{2}v\right)=0$$

តែតាម(២) នាំឲ្យគេបាន $u+\frac{1}{2}v>0$

នាំឲ្យគេបាន $u-2v=0$ នោះ $u=2v$

$$\Leftrightarrow u^2=4v^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+4=4x+8$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-4=0$$

$$\Delta'=9+4=13$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{13}}{1}=3\pm\sqrt{13} \quad (៣)$$

តាម (២) និង (៣) នាំឲ្យគេបាន $x_{1,2}=3\pm\sqrt{13}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (១) ។

237. ដោះស្រាយសមីការ ៖ $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយសមីការ

យើងមានសមីការ $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$ (១)

ដោយប្រើប្រាស់រូបមន្ត ៖ $\cos 2a=1-2\sin^2 a\Rightarrow \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$

នោះសមីការ(១)ទៅជា ៖

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0$$

$$2\cos 4x\cos 2x+\cos 4x=0$$

$$\cos 4x(2\cos 2x+1)=0$$

បើ $\cos 4x=0\Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$

បើ $2\cos 2x+1=0\Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k'\pi\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k'\pi$, $k'\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះសមីការ(១)មានចម្លើយ $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k'\pi$ ដែល $k,k'\in\mathbb{Z}$ ។

238. គេឲ្យ A,B,C ជាមុំទាំងបីរបស់ត្រីកោណមួយ ។

១. បង្ហាញថា $\dfrac{\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}=1$ ។

២. សន្មតថា $\cos C\cdot(\sin A+\sin B)=\sin C\cdot\cos(A-B)$ ។ ចូរកំណត់ $\cos A+\cos B$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

១. បង្ហាញថា $\dfrac{\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}=1$ (១)

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ , គេមាន ៖

$$A+B+C=\pi$$

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}\left(\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}\right)=1$$

$$\tan\frac{C}{2}\cdot\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

$$\frac{1}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}+\frac{1}{\cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}}=1$$

$$\frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}=1$$

$$\frac{\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}=1$$

ដូចនេះសមភាព(១)ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

២. កំណត់ $\cos A+\cos B$

យើងមាន $\cos C\cdot(\sin A+\sin B)=\sin C\cdot\cos(A-B)$ គេបាន ៖

$$2\cos C\cdot\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\left(2\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-1\right)$$

$$\cos C\cdot\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}\left(2\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-1\right)$$

$$\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}\cdot\left(2\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-1\right)$$

$$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin\frac{C}{2}=2\sin^2\frac{C}{2}\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin\frac{C}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\left(\sin\frac{C}{2}+\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right)$$

ដោយ $\sin\frac{C}{2}+\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\neq 0$ នោះគេបាន ៖

$$2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=1$$

$$2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=1$$

$$\cos A+\cos B=1$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B=1$ ត្រូវបានកំណត់ ។

239. រកគ្រប់ពហុធា $f(x)$ ដែលមានមេគុណជាចំនួនពិត ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$$f(x)\cdot f(x+1)=f\left(x^2+x+1\right)$$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់ពហុធា $f(x)$

យើងមាន $f(x)\cdot f(x+1)=f\left(x^2+x+1\right)$ (១)

(i)បើ $f(x)$ ជាពហុធាថេរ , នោះយើងតាង $f(x)=k$ គេបាន ៖

$$f(x+1)=k\ ,\ f\left(x^2+x+1\right)=k$$

នោះ(១)ក្លាយទៅជា ៖

$$k^2=k$$

$$k(k-1)=0$$

$$k=0\ ,\ k=1$$

ដូច្នេះ $f(x)$ ត្រូវតែស្មើនឹង 0 ឬ 1 ។

(ii)សន្មតថា $f(x)$ មិនមែនជាពហុធាថេរ , ឧបមាថា x_0 គឺជាឫសចំនួនពិតមួយនៃ $f(x)$

នោះ $x_1=x_0^2+x_0+1$ ក៏គឺជាឫសមួយនៃ $f(x)$ ដែរ , ដូច្នេះ

$$f(x_1)=f\left(x_0^2+x_0+1\right)=f(x_0)\cdot f(x_0+1)=0$$

តាមវិចារកំណើនគណិតវិទ្យា , នោះ បើ x_n គឺជាឫសមួយនោះ $x_{n+1}=x_n^2+x_n+1$ ក៏ជាឫសមួយទៀតដែរ ។

ដូច្នេះ , គេបាន $x_{n+1}-x_n=x_n^2+1>0$ នោះស្វ៊ីត $x_0,x_1,x_2,...$ គឺជាស្វ៊ីតកើន និងមិនកំណត់ តែចំនួននៃឫសរបស់ពហុធា $f(x)$ ត្រូវតែជាចំនួនកំណត់ ,

នេះគឺមានន័យថា សមីការ $f(x)=0$ មិនមានឫស ។

ដូច្នេះ $f(x)$ ត្រូវតែជាពហុធាដែលមានដឺក្រេគូ ។

ដោយប្រៀបធៀបមេគុណនៅក្នុងសមីការ(១) ហើយធ្វើការវិភាគ , គេបានលទ្ធផលថា តួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេនៃ $f(x)$ ត្រូវតែមានមេគុណស្មើនឹង 1 ដាច់ខាត ។

យក $f(x)=x^2+c$ (២)

នោះតាម(១) គេបាន ,

$$(x^2+c)\left((x+1)^2+c\right)=(x^2+x+1)^2+c$$

$$x^4+2x^3+(2c+1)x^2+2cx+c(c+1)=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$$

ដោយធ្វើការផ្ទឹមមេគុណ នៃសមភាពខាងលើ គេទាញបានថា $c=1$

ដូច្នេះ ពហុធា $f(x)=x^2+1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ

យក $f(x)=x^4+cx^3+dx^2+ex+f$ (៣)

ជំនួស សមីការ (៣) ទៅក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃសមីការ (១) រួចធ្វើការផ្ទឹមមេគុណ គេបាន ,

$$c=0,d=2,e=0,f=1$$

ដូច្នេះ ពហុធា $f(x)=x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ

យើងអាចបង្ហាញថា $f(x)=(x^2+1)^n$ ដែល $n=1,2,3,...$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ

យើងបាន ,

$$f(x)\cdot f(x+1)=(x^2+1)^n\left((x+1)^2+1\right)^n=\left(x^4+2x^3+4x^2+2x+3\right)^n$$

និង $f(x)\cdot f(x^2+x+1)=\left((x^2+x+1)^2+1\right)^n=\left(x^4+2x^3+4x^2+2x+3\right)^n$

យើងនឹងបង្ហាញថា , មានចម្លើយតែមួយបែបនេះគត់ ។

តាងពហុធា $g(x)$ ដែល $g(x)=f(x)-(x^2+1)^n$

បើ $g(x)=0$ នោះសម្រាយបញ្ជាក់នឹងត្រូវបានបញ្ចប់ ។

ឧបមាថា $g(x)\neq 0$ និងដឺក្រេនៃ $g(x)$ គឺ $s<2n$,

តាម (១) និង $f(x)=(x^2+1)^n+g(x)$, យើងបាន ៖

$$(x^2+1)^n g(x+1)+\left((x+1)^2+1\right)g(x)=g(x^2+x+1)-g(x)\cdot g(x+1) \quad (៤)$$

ដឺក្រេនៃ (៤) លើអង្គខាងឆ្វេងគឺ $2n+s$ និងនៅលើអង្គខាងស្តាំគឺតិចជាង ឬស្មើនឹង $2s$ នេះគឺមានលក្ខណៈខុសគ្នា ។

គេទាញបាន $g(x)=0$ និង $f(x)=(x^2+1)^n$ ។

ដូចនេះសរុបមកវិញ ពហុធាដែលត្រូវរកគឺ $0,1,(x^2+1)^n$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

240. អនុគមន៍ $f(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖
(i) បំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទាន x , $f(x)$ គឺជាចំនួនពិត
(ii) $f(2013) \neq f(2012)$
(iii) $f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1$ បំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទាន x និង y
បង្ហាញថា $f\left(-\frac{2012}{2013}\right) = \frac{1}{2013}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $f\left(-\frac{2012}{2013}\right) = \frac{1}{2013}$

តាមលក្ខខណ្ឌ $f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1$ (១)

យើងជំនួសលើកដំបូង $x = y = 0$ ទៅក្នុង(១) គេបាន ៖

$$f(0) = f(0)f(0) - f(0) + 1$$

$$\left(f(0) - 1\right)^2 = 0$$

នាំឲ្យ $f(0) = 1$ (២)

ជាបន្ទាប់ , ជំនួស $x = 1, y = -1$ ទៅក្នុង(១) គេបាន ៖

$$f(0) = f(1)f(-1) - f(-1) + 1$$

តាម(២) នាំឲ្យគេបាន $f(-1)\left(f(1) - 1\right) = 0$

ដូច្នេះ វាមានពីរករណីកើតឡើងជាចាំបាច់ គឺ $f(1) = 1$ ឬ $f(-1) = 0$

ករណីទី១ ៖ $f(1) = 1$, យើងជំនួស $y = 1$ ទៅក្នុង (១) គេបាន ៖

$$f(x+1) = f(x)f(1) - f(x) + 1$$

$$f(x+1) = f(x) - f(x) + 1$$

$f(x+1) = 1$ បំពោះគ្រប់តម្លៃនៃចំនួនសនិទាន x

ក៏ប៉ុន្តែ តាមលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ $f(2012) \neq f(2013)$ ដូច្នេះយើងត្រូវការលក្ខខណ្ឌតែមួយគត់ គឺ ៖

ករណីទី២ ៖ $f(-1) = 0$, ក្នុង(១) យើងយក $x = y = -1$ នោះ ៖

$$f(-2) = f(-1)f(-1) - f(1) + 1$$

នោះ $f(-2) = 1 - f(1)$ (៣)

បន្ទាប់មក យើងជំនួស $x = -2$ និង $y = 1$ ក្នុង (១) គេបាន ៖

$$f(-1) = f(-2)f(1) - f(-2) + 1$$

$$0 = f(-2)f(1) - f(-2) + 1$$

$0 = f(-2)f(1) - f(1)$ តាម(៣)

$$0 = \left(f(-2) - 1\right)f(1)$$

ជាថ្មីម្តងទៀត , វាមានពីរករណីដែលអាចកើតមានឡើង គឺ $f(1) = 0$ ឬ $f(-2) = -1$

ករណីទី១ ៖ $f(1)=0$, ជំនួស $y=1$ ទៅក្នុង(១) គេបាន ៖

$$f(x+1)=f(x)f(1)-f(x)+1=1-f(x)$$

នោះ $f(x+2)=f(x)$ (៤)

តាម(១) យើងយក $x=2, y=\frac{1}{2}$ គេបាន ៖

$$f\left(2+\frac{1}{2}\right)=f(2)f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)+1=f\left(\frac{1}{2}\right)+1$$

ប៉ុន្តែ , តាម(៤) យើងមាន $f\left(\frac{1}{2}+2\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ នេះវាមានភាពផ្ទុយគ្នាស្រឡះ

ដូច្នេះយើងនូវសល់តែមួយករណីប៉ុណ្ណោះដែលអាចទៅរួច គឺ ៖

ករណីទី២ ៖ $f(-2)=-1$, តាម(៣) គេបាន ៖

$f(-2)=1-f(1)$ នោះយើងទាញបាន $f(1)=2$

តាម(១) គេបាន ,

$$f(x+1)=f(x)f(1)-f(x)+1=2f(x)-f(x)+1$$

$$f(x+1)=f(x)+1 \quad (៥)$$

ដូច្នេះ $f(0)=1$ តាម(២) , នេះផ្ទៀងផ្ទាត់តាមវិចារកំណើន ថា $f(x)+1$ បើ x ជាចំនួនគត់ ។

ជាបន្ត , បើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានស្រេចនឹងចិត្ត នោះពី(១) ៖

$$f\left(1+\frac{1}{n}\right)=f(n)f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)+1$$

គេទាញបាន $n+f\left(\frac{1}{n}\right)=(n+1)f\left(\frac{1}{n}\right)-1$

តាម(៥) និង $nf\left(\frac{1}{n}\right)=n+1$ មានន័យថា $f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{n}$ ។

បើ k គឺជាចំនួនគត់មួយ នោះពី(១) ៖

$$f\left(k+\frac{1}{n}\right)=f(k)f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)+1$$

នេះមានន័យថា ,

$$\frac{1}{n}+k+1=(k+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)+1$$

និង $$f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{k}{n}+1$$

សរុបមកវិញ , ចំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទាន x , យើងបាន $f(x)=x+1$

ដូច្នេះ $f\left(-\frac{2012}{2013}\right)=1-\frac{2012}{2013}=\frac{1}{2013}$

ដូចនេះ $f\left(-\frac{2012}{2013}\right)=\frac{1}{2013}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

241. រកគ្រប់អនុគមន៍ f ដែល ៖

(i) យកតម្លៃជាចំនួនពិត

(ii) កំណត់បានគ្រប់ចំនួន $x \neq \frac{2}{3}$, និង

(iii) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$503x - f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃ x លើកលែង $\frac{2}{3}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកគ្រប់អនុគមន៍ f

យើងមាន $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ ដែល $503x - f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)$ (១)

តាង $u = \frac{2x}{3x-2}$, $x \neq \frac{2}{3}$

នោះ $x = \frac{2u}{3u-2}$, $u \neq \frac{2}{3}$

ជំនួស x ក្នុង(១)ដោយ u យើងបាន ៖

$$503u - f(u) = \frac{1}{2} f\left(\frac{2u}{3u-2}\right)$$

មានន័យថា $\frac{1006x}{3x-2} - f\left(\frac{2x}{3x-2}\right) = \frac{1}{2} f(x)$ (២)

ហើយសមីការ(១)អាចសរសេរជា $1006x - f\left(\frac{2x}{3x-2}\right) = 2f(x)$ (៣)

ដកអង្គ និងអង្គនៃ (៣) និង(២) , គេបាន ៖

$$1006x - \frac{1006x}{3x-2} = \frac{3}{2} f(x)$$

$$\frac{1006x(3x-2-1)}{3x-2} = \frac{3}{2} f(x)$$

$$\frac{2012x(x-1)}{3x-2} = f(x)$$

ដូចនេះអនុគមន៍ដែលត្រូវរកនោះគឺ $f(x) = \frac{2012x(x-1)}{3x-2}$ ដែល $x \neq \frac{2}{3}$ ។

242. ចំពោះអនុគមន៍ f ដែលកំណត់លើគ្រប់ចំនួនពិត និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$f(xy) = x \cdot f(y) + f(x) \cdot y$ និង $f(x+y) = f\left(x^{2013}\right) + f\left(y^{2013}\right)$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $f\left(\sqrt{2556}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃនៃ $f\left(\sqrt{2556}\right)$

យើងមាន $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ហើយ , $f(xy)=x\cdot f(y)+f(x)\cdot y$ (១)

និង $f(x+y)=f\left(x^{2013}\right)+f\left(y^{2013}\right)$ (២)

យក $x=y=0$ ជំនួសក្នុង(២) យើងនឹងបាន ៖

$$f(0)=2f(0)$$

នាំឲ្យ $f(0)=0$

ក្នុង(១) យក $x=y=1$ នោះ ,

$$f(1)=2f(1)$$

នាំឲ្យ $f(1)=0$

ក្នុង(២) យក $x=a$ និង $y=0$, នោះ $f(a)=f\left(a^{2013}\right)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។

គេក៏ទាញបានថា $f\left(x^{2013}\right)=f(x)$ និង $f\left(y^{2013}\right)=f(y)$

នោះគេទាញបាន (២) ៖ $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (៣)

យក $y=1$ ជំនួសក្នុងសមីការ(៣) , គេបាន ៖

$$f(x+1)=f(x)+f(1)=f(x)+0=f(x)$$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

តែដោយ $f(0)=0$ នោះតាមវិចារកំណើនគណិតវិទ្យា , យើងអាចបង្ហាញបានថា $f(n)=0$ ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។

យើងនឹងប្រើលទ្ធផលនេះដើម្បីនឹងរក $f\left(\sqrt{2556}\right)$ ។

យក $x=y=\sqrt{2556}$ ជំនួសក្នុង(១) គេបាន ៖

$$f\left(\sqrt{2556}\cdot\sqrt{2556}\right)=\sqrt{2556}\cdot f\left(\sqrt{2556}\right)+f\left(\sqrt{2556}\right)\cdot\sqrt{2556}$$

$$f(2556)=2\sqrt{2556}\,f\left(\sqrt{2556}\right)$$

$$0=2\sqrt{2556}\,f\left(\sqrt{2556}\right)$$

$$f\left(\sqrt{2556}\right)=0$$

ដូចនេះ $f\left(\sqrt{2556}\right)=0$ ត្រូវបានគណនា ។

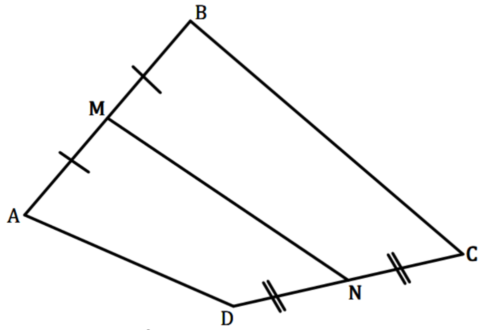
243. គេឲ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ ។ សន្មត M,N គឺជាចំណុចកណ្ដាលនៃ AB,CD ។ បង្ហាញថា ៖

ក. $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ ។

ខ. $MN\le\max(AD,BC)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$



តាមទំនាក់ទំនងសាល , យើងបាន ៖

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN} \qquad (១)$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN} \qquad (២)$$

បូកអង្គ និងអង្គនៃ (១) និង (២) គេបាន ៖

$$2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\left(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}\right) \qquad (៣)$$

ដោយ M និង N ជាចំណុចកណ្តាលនៃ AB និង CD , គេបាន ៖

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0} \text{ និង } \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

នោះ(៣) គេបាន ៖ $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

ដូចនេះ $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. បង្ហាញថា $MN\le\max\left(AD,BC\right)$

តាង $m=\max\left(AD,BC\right)$, គេបាន ៖

$$\begin{aligned}2\left|\overrightarrow{MN}\right|&=\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right|\\&\le\left|\overrightarrow{AD}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|\\&=AD+BC\\2\left|\overrightarrow{MN}\right|&\le m+m=2m\end{aligned}$$

នាំឲ្យ $MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|\le\max\left(AD,BC\right)$

ដូចនេះ $MN\le\max\left(AD,BC\right)$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

244. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ ៖ $\begin{cases}4^{x+y-1}+3\cdot4^{2y-1}\le2\\x+3y\ge2-\log_4 3\end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ ៖ $\begin{cases}4^{x+y-1}+3\cdot4^{2y-1}\le2\\x+3y\ge2-\log_4 3\end{cases}$

តាង $\begin{cases}a=4^{x+y-1}>0\\b=3\cdot4^{2y-1}>0\end{cases}$ នោះប្រព័ន្ធសមីការក្លាយទៅជា ,

$$\begin{cases} 0 < a+b \le 2 \\ ab = 3\cdot 4^{x+3y-2} \ge 3\cdot 4^{-\log_4 3} = 3\cdot\dfrac{1}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < a+b \le 2 \\ ab \ge 1 \end{cases}$$

ម្យ៉ាងទៀត , គេបាន ៖

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \le 4-4 = 0$$

នាំឲ្យ $a-b=0 \Rightarrow a=b$

នោះគេបាន $a=b=1$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2y-1 = \log_4\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(1+\log_4 3) \\ y = \dfrac{1}{2}(1-\log_4 3) \end{cases}$$

ដូចនេះចម្លើយរបស់វិសមីការគឺ $x = \dfrac{1}{2}(1+\log_4 3)$ និង $y = \dfrac{1}{2}(1-\log_4 3)$ ។

245. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ ៖ $\begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}\sqrt{5-x} < \log_{\frac{1}{5}}(3-x) \\ \left(x+\dfrac{1}{3}\right) \in \mathbb{N} \end{cases}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ ៖ $\begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}\sqrt{5-x} < \log_{\frac{1}{5}}(3-x) & (1) \\ \left(x+\dfrac{1}{3}\right) \in \mathbb{N} & (2) \end{cases}$

តាម (1) គេបាន ៖

$$\sqrt{5-x} > 3-x > 0$$

$$\begin{cases} 5-x > (3-x)^2 \\ 3-x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5-x > 9-6x+x^2 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x+4 < 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < x < 4 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow \dfrac{4}{3} < x+\dfrac{1}{3} < \dfrac{10}{3}$$

តែតាម (2) ៖ $x+\frac{1}{3}\in\mathbb{N}$ នាំឲ្យគេបាន $x+\frac{1}{3}\in\{2,3\}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right\}$

ដូចនេះប្រព័ន្ធវិសមីការមានចម្លើយ $x=\frac{5}{3}$ ឬ $x=\frac{8}{3}$ ។

246. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $2222^{5555}+5555^{2222}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ខ. $2010^{2011}+2012^{2013}+2014^{2015}+3$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2222^{5555}+5555^{2222}$ ចែកដាច់នឹង 7

យើងមាន ៖ $2222=7\times 317+3=7k+3$ ដែល $k=317$

$5555=7\times 793+4=7l+4$ ដែល $k=793$

គេបាន ,

$$\begin{aligned}2222^{5555}+5555^{2222}&=(7k+3)^{5555}+(7l+4)^{2222}\\&=7m+3^{5555}+7n+4^{2222}\end{aligned}$$

ដែល $m,n\in\mathbb{N}$

សមមូល ,

$$\begin{aligned}2222^{5555}+5555^{2222}&=7(m+n)+\left(3^5\right)^{1111}+\left(4^2\right)^{1111}\\&=7q+243^{1111}+16^{1111}\\&=7q+(243+16)r\\&=7q+7\cdot 37r\\&=7s\end{aligned}$$

ដូចនេះ $2222^{5555}+5555^{2222}$ ចែកដាច់នឹង 7 ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2010^{2011}+2012^{2013}+2014^{2015}+3$ ចែកដាច់នឹង 7

យើងមាន ៖ $2010=7\cdot 287+1=7m+1$ ដែល $m=287$

$2012=7\cdot 287+3=7m+3$ ដែល $m=287$

$2014=7\cdot 288-2=7n-2$ ដែល $n=288$

គេបាន ,

$$\begin{aligned}2010^{2011}+2012^{2013}+2014^{2015}+2&=(7m+1)^{2011}+(7m+3)^{2013}+(7n-2)^{2015}+3\\&=7p+1+7q+3^{2013}+7r+2^{2015}+3\\&=7(p+q+r)+3^{2013}+2^{2015}+4\\&=7s+3^{2013}+2^{2015}+4\end{aligned}$$

យើងមាន ៖

$$
\begin{aligned}
3^{2013} &\equiv 3\left(3^2\right)^{1006} \pmod 7 \\
&\equiv 3\cdot 2^{1006} \pmod 7 \\
&\equiv 3\cdot 4^{503} \pmod 7 \\
&\equiv 3\cdot 4\cdot 4^{502} \pmod 7 \\
&\equiv 12\cdot 4^{502} \pmod 7 \\
&\equiv 5\cdot 16^{251} \pmod 7 \\
&\equiv 5\cdot 2^{251} \pmod 7 \\
&\equiv 10\cdot 2^{250} \pmod 7 \\
&\equiv 3\cdot 32^{50} \pmod 7 \\
&\equiv 3\cdot 4^{50} \pmod 7 \\
&\equiv 3\cdot 16^{25} \pmod 7 \\
&\equiv 3\cdot \left(2^5\right)^5 \pmod 7 \\
&\equiv 3\cdot 4^{5} \pmod 7 \\
&\equiv 3\cdot 32^{2} \pmod 7 \\
&\equiv 3\cdot 4^{2} \pmod 7 \\
&\equiv 3\cdot 2 \pmod 7 \\
&\equiv 6 \pmod 7
\end{aligned}
$$

ហើយ

$$
\begin{aligned}
2^{2015} &\equiv 4^{403} \pmod 7 \\
&\equiv 4\cdot \left(4^2\right)^{201} \pmod 7 \\
&\equiv 4\cdot 2^{201} \pmod 7 \\
&\equiv 8\cdot 2^{200} \pmod 7 \\
&\equiv 32^{40} \pmod 7 \\
&\equiv \left(4^2\right)^{20} \pmod 7 \\
&\equiv 2^{20} \pmod 7 \\
&\equiv 32^{4} \pmod 7 \\
&\equiv 4^{4} \pmod 7 \\
&\equiv 16^{2} \pmod 7 \\
&\equiv 2^{2} \pmod 7 \\
&\equiv 4 \pmod 7
\end{aligned}
$$

គេបាន ៖ $3^{2013}+2^{2015}+4\equiv 6\pmod 7+4\pmod 7+4\pmod 7\equiv (6+4+4)\pmod 7$

នាំឲ្យ $3^{2013}+2^{2015}+4\equiv 14\pmod 7\equiv 0\pmod 7$

ដូចនេះ $2010^{2011}+2012^{2013}+2014^{2015}+3$ ចែកដាច់នឹង 7 ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

247. គេឲ្យចំនួនពិត m និង n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $11m+10n=9$ ។
ចូរគណនាតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ពីរអថេរ $f(m,n)=(m+9)(n+6)(10m+9n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ពីរអថេរ $f(m,n)=(m+9)(n+6)(10m+9n)$
យើងមាន $11m+10n=9$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត m និង n
តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រ , គេបាន ៖

$$\frac{(m+9)+(n+6)+(10m+9n)}{3}\ge\sqrt[3]{(m+9)(n+6)(10m+9n)}$$

$$\frac{11m+10n+15}{3}\ge\sqrt[3]{(m+9)(n+6)(10m+9n)}$$

$$\frac{9+15}{3}\ge\sqrt[3]{f(m,n)}$$

$$f(m,n)\le 8^3$$

$$f(m,n)\le 512$$

គេមាន $\max f(m,n)=512$ កាលណា $m+9=n+6=10m+9n\Rightarrow m=-1,n=2$
ដូចនេះតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ f គឺ 512 កាលណា $m=-1,n=2$ ។

248. បើ a,b,c,d ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2+d^2=2013^2$ ។
បង្ហាញថា $a^3+b^3+c^3+d^3\le 2013^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^3+b^3+c^3+d^3\le 2013^3$
យើងមាន $a^2+b^2+c^2+d^2=2013^2$ ដែល a,b,c,d ជាចំនួនពិត
គេបាន , $a^2=2013^2-\left(b^2+c^2+d^2\right)\le 2013^2$
នោះយើងបាន $a\le 2013\Rightarrow a-2013\le 0$
នាំឲ្យគេបាន ,

$$a^2(a-2013)\le 0$$

$$a^3-2013a^2\le 0$$

$$a^3\le 2013a^2 \qquad (1)$$

ស្រដៀងគ្នានេះដែរ , គេបាន ៖

$$b^3\le 2013b^2 \qquad (2)$$

$$c^3\le 2013c^2 \qquad (3)$$

និង $$d^3\le 2013d^2 \qquad (4)$$

បូកអង្គ និងអង្គនៃវិសមភាព $(1),(2),(3)$ និង (4) គេបាន ៖

$a^3+b^3+c^3+d^3 \le 2013a^2+2013b^2+2013c^2+2013d^2$

$a^3+b^3+c^3+d^3 \le 2013\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=2013\left(2013^2\right)$

$a^3+b^3+c^3+d^3 \le 2013^3$

សមភាពកើតមានកាលណា មួយក្នុងចំណោម a,b,c និង d ស្មើនឹង 2013 ហើយចំនួនបីផ្សេងទៀតស្មើនឹង សូន្យ ។

ដូចនេះវិសមភាព $a^3+b^3+c^3+d^3 \le 2013^3$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

249. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f\left(xf\left(y\right)+x\right)=xy+f\left(x\right)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង y ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកគ្រប់អនុគមន៍ f

យើងមាន , $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f\left(xf\left(y\right)+x\right)=xy+f\left(x\right)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង y ។

យក $x=1, y=-1-f\left(1\right)$ និងតាង $a=f\left(y\right)+1$ យើងបាន ៖

$$f\left(a\right)=f\left(f\left(y\right)+1\right)=y+f\left(1\right)=-1$$

យក $y=a$ និងតាង $b=f\left(0\right)$ យើងបាន ៖

$$b=f\left(xf\left(a\right)+x\right)=ax+f\left(x\right)$$

នាំឲ្យគេបាន $f\left(x\right)=-ax+b$

ជំនួសអនុគមន៍ $f\left(x\right)=-ax+b$ ទៅក្នុងសមីការខាងលើ , គេបាន ៖

$$a^2xy-abx-ax+b=xy-ax+b$$

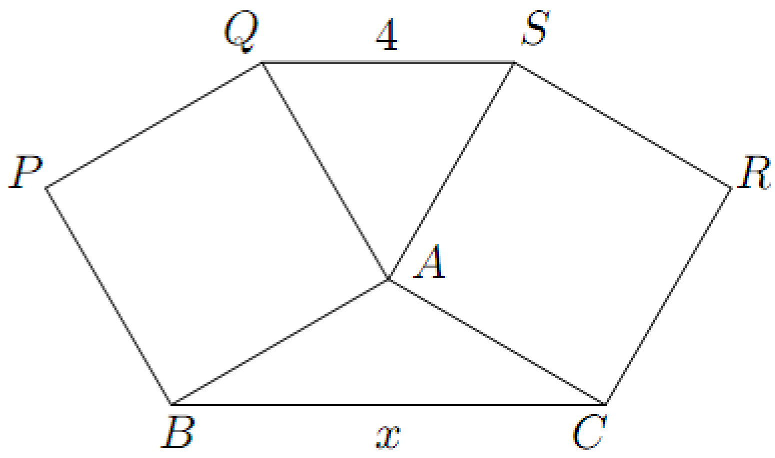
$$a^2xy-\left(ab+a\right)x+b=xy-ax+b$$

$$\begin{cases} a^2=1 \\ -\left(ab+a\right)=-a \\ b=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\pm 1 \\ ab=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 1 \\ b=0 \end{cases}$$

ដូចនេះអនុគមន៍ដែលត្រូវរកនោះគឺ $f\left(x\right)=x$ ឬ $f\left(x\right)=-x$ ។

250. នៅក្នុងរូប, $AQPB$ និង $ASRC$ គឺជាការ៉េ ហើយ AQS គឺជាត្រីកោណសម័ង្ស ។
បើ $QS=4$ និង $BC=x$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ x ។



<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកតម្លៃនៃ x

<u>របៀបទី ១</u>

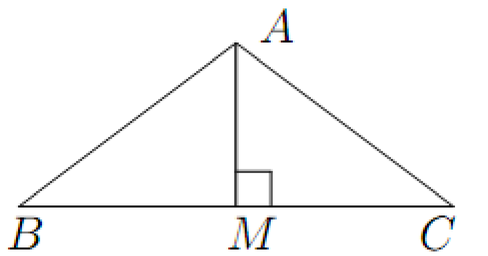
ក្នុងត្រីកោណសម័ង្ស AQS គេបាន ៖ $AQ=QS=SA$

ដោយ $QS=4$ គេបាន $AQ=AS=4$

ដោយ $AQPB$ និង $ASRC$ ជាការ៉េ នោះយើងបាន $AB=AQ=4$ និង $AC=AS=4$

ម្យ៉ាងទៀត , ក្នុងត្រីកោណសម័ង្ស AQS គេបាន ៖ $\angle QAS=60^o$

យើងបាន , $\angle BAC=360^o-90^o-90^o-\angle QAS=120^o$



សង់កម្ពស់ពីកំពូល A ចំពោះបាត BC និងតាងចំណុចជើងកម្ពស់នោះដោយ M
នោះតាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី នាំឲ្យគេបាន M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ BC និង

$$\angle BAM=\angle CAM=\frac{\angle BAC}{2}=\frac{120^o}{2}=60^o$$

គេបាន ABM ជាត្រីកោណកន្លះសម័ង្ស ។ គេបាន , $\frac{BM}{BA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

នាំឲ្យយើងបាន $BM=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ ហើយ $CM=2\sqrt{3}$

ដូច្នេះ $x=BC=BM+MC=4\sqrt{3}$ ត្រូវបានគណនា ។

<u>របៀបទី</u> ២

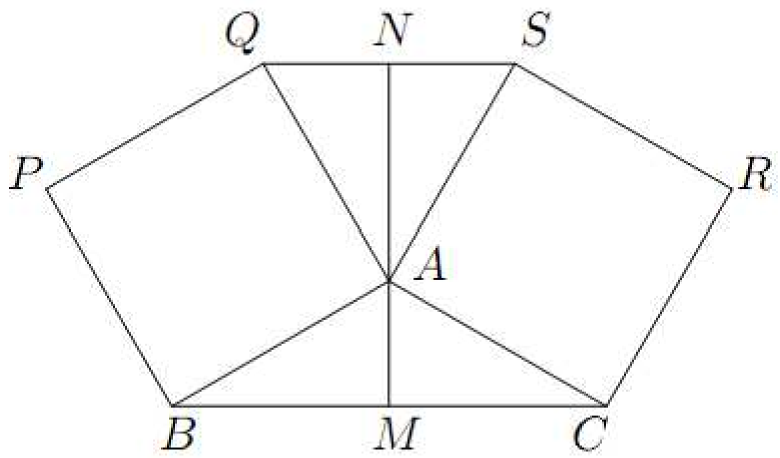
តាមរបៀបទី១ ខាងលើ , គេមាន $AB = AC = 4$ និង $\angle BAC = 120^o$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស , យើងបាន ៖

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$$
$$BC^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cdot\cos 120^o$$
$$BC^2 = 32 - 32\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$BC^2 = 32 + 16 = 48$$
$$BC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $x = BC = 4\sqrt{3}$ ត្រូវបានគណនា ។

<u>របៀបទី</u> ៣



តាង M, N ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ BC និង QS រៀងគ្នា ។ តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី M, A, N ឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ហើយបន្ទាត់ MN កែងជាមួយនឹងបន្ទាត់ QS និង BC

តាមរបៀបទី១ , $\angle QAS = 60^o$ និង $\angle BAC = 120^o$ នោះតាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី , គេបាន ៖ $\angle QAN = 30^o$ និង $\angle BAM = 60^o$ ។

ត្រីកោណ AQS ជាត្រីកោណសម័ង្ស , $\angle AQN = 60^o$

និង $\angle ABM = 180^o - \angle BAM - \angle AMB = 180^o - 60^o - 90^o = 30^o$

ហើយ $AB = AG$, ត្រីកោណ ANQ និង BMA ជាត្រីកោណប៉ុនគ្នា ។

យើងបាន , $BM = AN$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ , គេបាន ៖

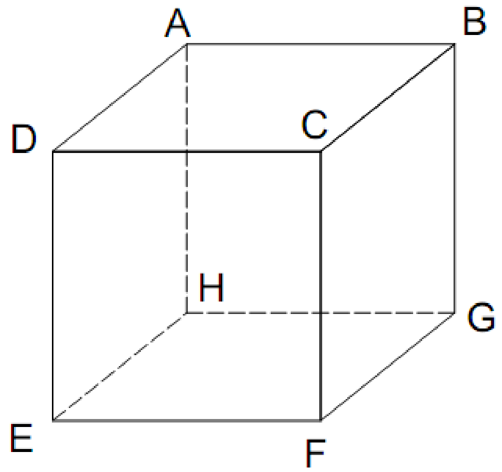
$$BM = AN = \sqrt{AQ^2 - QN^2}$$
$$x = BM = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $x = BC = 4\sqrt{3}$ ត្រូវបានគណនា ។

251. $ABCD-EFGH$ គឺជាគូបមួយដែលមាន $ABCD$ ជាមុខលើ , តាមកំពូល H,G,F និង E គូសបន្ទាត់ដោយផ្ទាល់ភ្ជាប់ទៅកំពូល A,B,C និង D រៀងគ្នា ។ ចំនួនពិតមួយត្រូវបានដាក់នៅតាមកំពូលនីមួយៗ ។ ត្រង់កំពូលនីមួយៗ , មធ្យមនៃចំនួនក្នុងកំពូលជាប់គ្នាបី ។ មធ្យមដែលបិតនៅត្រង់ A,B,C,D,E,F,G,H គឺ $1,2,3,4,5,6,7,8$ រៀងគ្នា ។ រកចំនួនដែលបិតនៅត្រង់កំពូល F ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកចំនួនដែលបិតនៅត្រង់កំពូល F



តាង a,b,c,d,e,f,g,h គឺជាចំនួនដែលត្រូវដាក់នៅត្រង់កំពូល A,B,C,D,E,F,G,H ។ ដំបូងយើងសំគាល់ឃើញថា ៖

$$a+b+c+d+e+f+g+h=1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

គេទាញបាន , $c+f=36-(b+d+h)-(a+e+g)=36-3(A+H)$

ស្រដៀងគ្នាដែរ , យើងបាន ៖

$$e+f=36-3(A+B) \text{ និង } f+g=36-3(A+D)$$

គេបាន ៖

$$\begin{aligned}3f&=(c+f)+(e+f)+(f+g)-(c+e+g)\\&=\big(36-3(1+8)\big)+\big(36-3(1+2)\big)+\big(36-3(1+4)\big)-6\cdot 3\\&=39\end{aligned}$$

ដូចនេះគេបាន $f=13$ ជាចំនួនដែលគេត្រូវដាក់ត្រង់កំពូល F ។

252. គេឲ្យស្វ៊ីត ហ្វីបូណាស៊ី (u_n) កំណត់ដោយ ៖ $u_0=0,u_1=1$ និង $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ គ្រប់ $n\geq 1$ ។

ក. រក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. បង្ហាញថា $u_1+u_2+\cdots+u_n=u_{n+2}-1$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $u_0 = 0, u_1 = 1$ និង គ្រប់ $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ (១)

ទំនាក់ទំនង(១)មានសមីការសម្គាល់ ៖ $r^2 = r + 1$

ដោះស្រាយសមីការសម្គាល់ គេបានចម្លើយ $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

គេបាម(១) ៖

$$u_{n+1} = (r_1 + r_2)u_n - r_1 r_2 u_{n-1}$$

$$u_{n+1} - r_1 u_n = r_2 u_n - r_1 r_2 u_{n-1} \quad (២)$$

យក $v_n = u_n - r_1 u_{n-1}$ គ្រប់ $n \geq 1$

នោះ(២) ៖ $v_{n+1} = r_2 v_n$

ទំនាក់ទំនងនេះ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលសងរួម r_2 និងតួទី១ v_1

គេបាន ៖ $v_n = v_1 r_2^{n-1} \Rightarrow u_n - r_1 u_{n-1} = (u_1 - r_1 u_0) r_2^{n-1}$ (៣)

ម្យ៉ាងទៀត (១) ៖

$$u_{n+1} = (r_1 + r_2)u_n - r_1 r_2 u_{n-1}$$

$$u_{n+1} - r_2 u_n = r_1 u_n - r_1 r_2 u_{n-1} \quad (៤)$$

យក $w_n = u_n - r_2 u_{n-1}$ គ្រប់ $n \geq 1$

នោះ(៤) ៖ $w_{n+1} = r_1 w_n$

ទំនាក់ទំនងនេះ បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលសងរួម r_1 និងតួទី១ w_1

គេបាន ៖ $w_n = w_1 r_1^{n-1} \Rightarrow u_n - r_2 u_{n-1} = (u_1 - r_2 u_0) r_1^{n-1}$ (៥)

តាម (៣) និង (៥) គេបាន ៖

$$\frac{(u_1 - r_1 u_0) r_2^{n-1}}{r_1} - \frac{u_n}{r_1} = \frac{(u_1 - r_2 u_0) r_1^{n-1}}{r_2} - \frac{u_n}{r_2}$$

ដោយ $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ គេបាន ៖

$$\frac{r_2^{n-1}}{r_1} - \frac{u_n}{r_1} = \frac{r_1^{n-1}}{r_2} - \frac{u_n}{r_2}$$

$$u_n\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{r_1^{n-1}}{r_2} - \frac{r_2^{n-1}}{r_1}$$

$$u_n(r_1 - r_2) = r_1^n - r_2^n$$

$$u_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$$

$$u_n = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

ដូចនេះគ្រប់ $n\ge 0, u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ ត្រូវបានកំណត់ ។

ខ. បង្ហាញថា $u_1+u_2+\cdots+u_n=u_{n+2}-1$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

យើងមាន $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ គ្រប់ $n\ge 1$, គេបាន ៖

$$\begin{aligned}u_1&=u_2\\u_1+u_2&=u_3\\u_2+u_3&=u_4\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\u_n+u_{n+1}&=u_{n+2}\end{aligned}$$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃសមីការ ទាំងអស់ខាងលើ , គេបាន ៖

$$u_1+(u_1+u_2+\cdots+u_n)=u_{n+2}$$

នាំឲ្យយើងបាន ៖ $u_1+u_2+\cdots+u_n=u_{n+2}-u_1=u_{n+2}-1$

ដូចនេះ $u_1+u_2+\cdots+u_n=u_{n+2}-1$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

253. ក. បង្ហាញថា $A=11^{10}-1$ ចែកដាច់នឹង 600 ។

ខ. រកគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $B=2^n+1$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. បង្ហាញថា $A=11^{10}-1$ ចែកដាច់នឹង 600

យើងមាន $600=10\cdot 60=10\cdot 12\cdot 5$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}A&=11^{10}-1\\&=(11-1)\left(11^9+11^8+\cdots+11+1\right)\\&=10\left(11^9+11^8+\cdots+11+1\right)\vdots 10\end{aligned}$$

ហើយលើសពីនេះទៅទៀត ,

$$\begin{aligned}11^9+11^8+\cdots+11+1&=11^8(11+1)+11^6(11+1)+11^4(11+1)+11^2(11+1)+(11+1)\\&=12\left(11^8+11^6+11^4+11^2+1\right)\vdots 12\end{aligned}$$

ហើយ 11^k មានលេខខាងចុងជាលេខ 1 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន k

នាំឲ្យ $11^8+11^6+11^4+11^2+1$ មានលេខខាងចុងជាលេខ 5

នាំឲ្យ $11^8+11^6+11^4+11^2+1\vdots 5$

នាំឲ្យ $A\vdots 10\cdot 12\cdot 5=600$

ដូចនេះ $A=11^{10}-1$ ចែកដាច់នឹង 600 ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. រកគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $B=2^n+1$ ចែកដាច់នឹង 3

យើងមាន ៖ $2\equiv -1(\text{mod}\,3)\Rightarrow 2^n\equiv(-1)^n(\text{mod}\,3)$, $n\in\mathbb{N}$

នាំឲ្យ $2^n+1\equiv\left((-1)^n+1\right)(\text{mod}\,3)$

ដោយ $B=2^n+1$ ចែកដាច់នឹង 3 នោះ $(-1)^n+1$ ចែកដាច់នឹង 3

នាំឱ្យ $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$

ដូចនេះបំនួនគត់ធម្មជាតិនោះគឺ $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$ (n ជាបំនួនគត់ធម្មជាតិ) ។

254. ដោះស្រាយសមីការ $8x^3+24x^2+6x-1=0$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយសមីការ $8x^3+24x^2+6x-1=0$

សមីការអាចសរសេរជា $x^3+3x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0$ (១)

តាង $y=x+1$ នោះ $x=y-1$

គេបាន (១) ៖

$$(y-1)^3+3(y-1)^2+\frac{3}{4}(y-1)-\frac{1}{8}=0$$

$$y^3-\frac{9}{4}y+\frac{9}{8}=0 \qquad (២)$$

តាង $z=\dfrac{y}{2\sqrt{-\frac{p}{3}}}$ ដែល $p=-\frac{9}{4}$ នោះ $z=\frac{y}{\sqrt{3}}$ នាំឱ្យ $y=\sqrt{3}z$

គេបាន (២) ៖

$$\left(\sqrt{3}z\right)^3-\frac{9}{4}\left(\sqrt{3}z\right)+\frac{9}{8}=0$$

$$4z^3-3z=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (៣)$$

ដោយ $-1<-\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ គេតាង $z=\cos\alpha$, $0<\alpha<2\pi$

នោះគេបាន (៣) ៖

$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos\frac{5\pi}{6}$$

$$\cos 3\alpha=\cos\frac{5\pi}{6}$$

$$\alpha=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\ ,\ k=0,1,2$$

នាំឱ្យ $\alpha_1=\frac{5\pi}{18},\alpha_2=\frac{17\pi}{18},\alpha_3=\frac{29\pi}{18}$

នោះ $z_1=\cos\frac{5\pi}{18},z_2=\cos\frac{17\pi}{18},z_3=\cos\frac{29\pi}{18}$

នាំឱ្យ $y_1=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{18},y_2=\sqrt{3}\cos\frac{17\pi}{18},y_3=\sqrt{3}\cos\frac{29\pi}{18}$

សមមូល $x_1=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{18}-1,x_2=\sqrt{3}\cos\frac{17\pi}{18}-1,x_3=\sqrt{3}\cos\frac{29\pi}{18}-1$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x_1=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{18}-1, x_2=\sqrt{3}\cos\frac{17\pi}{18}-1$ និង $x_3=\sqrt{3}\cos\frac{29\pi}{18}-1$ ។

255. ក. គេឲ្យសមីការ $x^4+bx^3+cx^2+bx+1=0$ មានឫស ។ បង្ហាញថា $b^2+(c-2)^2>3$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $x^3+3x-3=0$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. បង្ហាញថា $b^2+(c-2)^2>3$

យើងមាន , សមីការ $x^4+bx^3+cx^2+bx+1=0$

សមីការខាងលើអាចសរសេរ ៖

$$x^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0 \qquad (១)$$

តាង $t=x+\frac{1}{x}$ នោះ $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2 \ , |t|\geq 2$

នាំឲ្យ(១) ៖

$$t^2+bt+c-2=0$$

$$t^2=(2-c)-bt$$

តាមវិសមភាព BUNHIACOPSKI គេបាន ,

$$t^4=((2-c)-bt)^2\leq\left((2-c)^2+b^2\right)\left(t^2+1\right)$$

$$\frac{t^4}{t^2+1}\leq(2-c)^2+b^2 \qquad (២)$$

ដោយ $|t|\geq 2$ នោះ $t^4\geq 16$ ហើយ ,

$$t^4-3\left(t^2+1\right)=t^4-3t^2-3\geq 16-3\cdot 4-3>0$$

$$t^4>3\left(t^2+1\right)$$

នោះ $\frac{t^4}{t^2+1}>3 \qquad (៣)$

តាម(២) និង(៣) នាំឲ្យគេបាន ៖ $b^2+(2-c)^2>3$ ។

ដូចនេះវិសមភាព $b^2+(c-2)^2>3$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

យើងមានសមីការ $x^3+3x-3=0 \qquad (១)$

តាង $x=y-\frac{1}{y}$ គេបាន (១) ៖

$$\left(y-\frac{1}{y}\right)^3-3\left(y-\frac{1}{y}\right)-3=0$$

$$y^3-\frac{1}{y^3}-3=0 \qquad (២)$$

តាង $t=y^3$ គេបាន (២) ៖

$$t-\frac{1}{t}-3=0$$
$$t^2-3t-1=0$$
$$\left(t-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$$
$$t-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$$
$$t=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

នាំឲ្យ $y=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3\pm\sqrt{13}\right)}$

ដូចនេះ $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(3\pm\sqrt{13}\right)}-\sqrt[3]{\frac{2}{3\pm\sqrt{13}}}$ ជាឫសរបស់សមីការដែលឲ្យ ។

256. សន្មត m,n,p ជាឫសចំនួនពិតទាំងបីរបស់សមីការ ៖ $ax^3+bx^2+cx-a=0\ ,\ a\neq 0$ ។
បង្ហាញថា $\frac{\sqrt{2}}{m}+\frac{\sqrt{3}}{n}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{p}\le m^2+n^2+p^2$, តើសមភាពកើតមាននៅពេលណា ?

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{\sqrt{2}}{m}+\frac{\sqrt{3}}{n}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{p}\le m^2+n^2+p^2$

យើងមាន m,n,p ជាឫសទាំងបីរបស់សមីការ ៖ $ax^3+bx^2+cx-a=0\ ,\ a\neq 0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត , គេបាន ៖ $mnp=1$

ចំពោះ $\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=-\frac{\pi}{6},\gamma=\frac{11\pi}{12}$ នោះ $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ និង

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

វិសមភាព ៖ $\frac{\sqrt{2}}{m}+\frac{\sqrt{3}}{n}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{p}\le m^2+n^2+p^2$

សមមូល $\sqrt{2}np+\sqrt{3}mp-\sqrt{2+\sqrt{3}}mn\le mnp\left(m^2+n^2+p^2\right)$

សមមូល $2np\cos\alpha+2mp\cos\beta+2mn\cos\gamma\le m^2+n^2+p^2 \qquad (១)$

យើងមាន , ៖

$$\left(p-m\cos\beta-n\cos\alpha\right)^2+\left(m\sin\beta-n\sin\alpha\right)^2\ge 0$$
$$p^2+m^2\left(\cos^2\beta+\sin^2\beta\right)+n^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\ge 2mn\cos\beta+2np\cos\alpha$$
$$-2mn\cos\left(\alpha+\beta\right)$$

$p^2+m^2+n^2 \geq 2mp\cos\beta+2np\cos\alpha+2mn\cos\gamma$ (ព្រោះ $\alpha+\beta+\gamma=\pi$)

នាំឲ្យវិសមភព(១) ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

សមភាពកើតមានកាលណា ៖

$$\begin{cases} m\sin\beta = n\sin\alpha \\ p = m\cos\beta + n\cos\alpha \end{cases}$$

សមមូល $\frac{m}{\sin\alpha}=\frac{n}{\sin\beta}=\frac{p}{\sin\gamma}=k$

គេបាន ៖ $k^3=\frac{mnp}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=-4\left(\sqrt{3}+1\right)$

នាំឲ្យ $k=-\sqrt[3]{4\left(\sqrt{3}+1\right)}$

យើងបាន , ៖

$$m=k\sin\alpha=-\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}$$

$$n=k\sin\beta=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}+3}{2}}$$

$$p=k\sin\gamma=\sqrt[6]{\frac{7-4\sqrt{3}}{2}}$$

ដូចនេះវិសមភាព $\frac{\sqrt{2}}{m}+\frac{\sqrt{3}}{n}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{p}\leq m^2+n^2+p^2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

សញ្ញាសមភាពកើតមានពេលដែល $m=-\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}, n=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}+3}{2}}$

និង $p=\sqrt[6]{\frac{7-4\sqrt{3}}{2}}$ ។

257. គេឲ្យកន្សោម ៖

$$S=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$$

តើ S ជាចំនួនសនិទាន ឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

តើ S ជាចំនួនសនិទាន ឬទេ ?

ចំពោះគ្រប់ $k=1,2,3,\ldots$ យើងមាន ៖

$$\cos\frac{(2k-1)\pi}{11}\cdot\sin\frac{\pi}{11}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2k\pi}{11}-\sin\frac{(2k-2)\pi}{11}\right)$$

គេបាន ៖

$$S=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$$

$$S\sin\frac{\pi}{11}=\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11}+\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}+\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11}+\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{9\pi}{11}$$

$$S\sin\frac{\pi}{11}=\frac{1}{2}\left(\left(\sin\frac{2\pi}{11}-\sin 0\right)+\left(\sin\frac{4\pi}{11}-\sin\frac{2\pi}{11}\right)+\cdots+\left(\sin\frac{10\pi}{11}-\sin\frac{8\pi}{11}\right)\right)$$

$$S\sin\frac{\pi}{11}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{10\pi}{11}-\sin 0\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{11\pi-\pi}{11}-0\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{11}\right)$$

$$S\sin\frac{\pi}{11}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{11}$$

$$S=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $S=\frac{1}{2}$ ជាចំនួនសនិទាន ។

258. គេមាន ABC ជាត្រីកោណដែលមានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច , បង្ហាញថា ៖

១. $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$

២. $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geq 3\sqrt{3}$

៣. $\tan^n A+\tan^n B+\tan^n C\geq 3\cdot\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ABC ជាត្រីកោណដែលមានមុំទាំងបីជាស្រួច , គេបាន ៖

$$\tan A>0,\tan B>0,\tan C>0$$

ហើយ $A+B+C=\pi, 0<A,B,C<\frac{\pi}{2}$

១. បង្ហាញថា $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$

តាង $f(x)=\tan x\ ,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$

នោះ $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}>0$

នាំឲ្យ f ជាអនុគមន៍កើន , នោះតាមវិសមភាព **Jensen** គេបាន ៖

$$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

$$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\tan\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

$$\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\tan\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$$

សមភាពកើតមានកាលណា $A=B=C=\frac{\pi}{3}$

ដូចនេះវិសមភាព $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

សមភាពកើតមានកាលណា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

២. បង្ហាញថា $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geq 3\sqrt{3}$

គេមាន $A+B=\pi-C$

នោះ

$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$$
$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$
$$\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$$
$$\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$$

ដូចនេះវិសមភាព $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C\geq 3\sqrt{3}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

សមភាពកើតមានកាលណា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

៣. បង្ហាញថា $\tan^n A+\tan^n B+\tan^n C\geq 3\cdot\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^n}$

តាមវិសមភាពកូស៊ីប៊ីគួ , គេបាន ៖

$$\tan^n A+\tan^n B+\tan^n C\geq 3\cdot\sqrt[3]{\left(\tan A\tan B\tan C\right)^n}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^n}$$

ដូចនេះវិសមភាព $\tan^n A+\tan^n B+\tan^n C\geq 3\cdot\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)^n}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

សមភាពកើតមានកាលណា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

259. បង្ហាញថាបើសមីការ $(x+a)^2+(y+b)^2+(x+y)^2=c^2$ មានឫស នោះ $(a+b)^2\leq 3c^2$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $(a+b)^2\leq 3c^2$

យើងមានសមីការ $(x+a)^2+(y+b)^2+(x+y)^2=c^2$ (១)

សន្មត (x_0,y_0) ជាគូចម្លើយរបស់សមីការ (១) គេបាន ៖

$$(x_0+a)^2+(y_0+b)^2+(x_0+y_0)^2=c^2$$

តាមវិសមភាព **Bunhiacopski** យើងមាន ៖

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=\left((x_0+a)+(y_0+b)+(-x_0-y_0)\right)^2\\&\leq\left(1^2+1^2+1^2\right)\left((x_0+a)^2+(y_0+b)^2+(-x_0-y_0)^2\right)\\&=3\left((x_0+a)^2+(y_0+b)^2+(x_0+y_0)^2\right)\\&=3c^2\end{aligned}$$

ដូចនេះវិសមភាព $(a+b)^2\leq 3c^2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

260. រក $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{e^{-x}}{1+e^{-\frac{x}{n}}}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

រក $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{e^{-x}}{1+e^{-\frac{x}{n}}}dx$

តាង $t=\frac{x}{n}$ នោះ $dt=\frac{1}{n}dx$ នាំឲ្យ គេបាន ៖

$$I_n=\int_0^n \frac{e^{-x}}{1+e^{-\frac{x}{n}}}dx = n\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+e^{-t}}dt$$

ព្រោះ $0\le x\le n$ នាំឲ្យ $0\le t\le 1$

ពេល $x=0$ នោះ $t=0$

$x=n\ ,(n\to+\infty)$ នោះ $t=1$

គ្រប់ $0\le t\le 1$ យើងបាន $\frac{1}{2}\le\frac{e^t}{1+e^t}\le\frac{e^t}{2}$

សមមូល $\frac{1}{2}ne^{-nt}\le\frac{e^t}{1+e^t}\cdot ne^{-nt}\le\frac{e^t}{2}\cdot ne^{-nt}$

សមមូល $\frac{n}{2}\int_0^1 e^{-nt}dt\le n\int_0^1\frac{e^{-nt}}{1+e^{-t}}dt\le\frac{n}{2}\int_0^1 e^{-(n-1)t}dt$

សមមូល $\frac{n}{2}\int_0^1 e^{-nt}dt\le I_n\le\frac{n}{2}\int_0^1 e^{-(n-1)t}dt$ (១)

$$\int_0^1 e^{-nt}dt=-\frac{1}{n}\left[e^{-nt}\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{n}\left(e^{-n}-1\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(1-e^{-n}\right)$$

និង

$$\int_0^1 e^{-(n-1)t}dt=-\frac{1}{n-1}\left[e^{-(n-1)t}\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{n-1}\left(e^{-n+1}-1\right)$$
$$=\frac{1}{n-1}\left(1-e^{1-n}\right)$$

នាំឲ្យ(១) ៖

$$\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}\left(1-e^{-n}\right)\le I_n\le\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n-1}\left(1-e^{1-n}\right)$$
$$\frac{1}{2}\left(1-e^{-n}\right)\le I_n\le\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\left(1-e\cdot e^{-n}\right)$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-n}=0\ ,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

នាំឲ្យ $\frac{1}{2} \le \lim_{n\to+\infty} I_n \le \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{e^{-x}}{1+e^{-\frac{x}{n}}} dx = \frac{1}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

261. រក $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

(i) $f(x+y) \le f(x)+f(y) \quad , \forall x,y\in\mathbb{R}$

(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ f

តាម (i) $f(x+y)\le f(x)+f(y)$ គ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$

នាំឲ្យ $\forall n\in\mathbb{N}: f(nx)\le nf(x)$ យក x ជំនួសដោយ $\frac{x}{n}$

យើងបាន $f(x)\le nf\left(\frac{x}{n}\right)$, ពេល $x=0$ នាំឲ្យ $f(0)\ge 0$

ឬ $$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \ge \frac{\frac{f(x)}{n}}{\frac{x}{n}} = \frac{f(x)}{x} \qquad (១)$$

គេបាន ៖

$$0\le f(0) = f(x-x)\le f(x)+f(-x)$$
$$f(x)\ge -f(-x)$$
$$\frac{f(x)}{x}\ge\frac{f(-x)}{-x} \quad , x>0 \qquad (២)$$
$$f(-x)\le nf\left(-\frac{x}{n}\right)$$
$$\frac{f(-x)}{-x}\ge\frac{nf\left(-\frac{x}{n}\right)}{-x}$$
$$\frac{f(-x)}{-x}\ge\frac{f\left(-\frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}} \quad , \forall n\in\mathbb{N} \qquad (៣)$$

តាម(១) , (២) និង (៣) នាំឲ្យ ៖

$$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \ge \frac{f(x)}{x} \ge \frac{f(-x)}{-x} \ge \frac{f\left(-\frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}}$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}=\lim\limits_{\frac{x}{n}\to 0}\dfrac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}=1$ តាម (ii)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(-\frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}}=\lim\limits_{-\frac{x}{n}\to 0}\dfrac{f\left(-\frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}}=1$ តាម (ii)

នាំឲ្យ $1\ge\dfrac{f(x)}{x}\ge\dfrac{f(-x)}{-x}\ge 1$

នោះ $f(x)=x$ គ្រប់ $x\neq 0$

គ្រប់ $x\neq 0$ យើងបាន $0\le f(0)\le f(x)+f(-x)=x-x=0$

នាំឲ្យ $f(0)=0$

ដូចនេះសរុបមកអនុគមន៍ f នោះគឺ $f(x)=x$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ត្រូវបានកំណត់ ។

262. សន្មតថាសមីការ $x^3-45x^2+6x-a=0$ មានឫសបី x_1,x_2,x_3 ។
បង្ហាញថាផលបូក $\Sigma=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ មិនជាអនុគមន៍នៃ a ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថាផលបូក $\Sigma=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ មិនជាអនុគមន៍នៃ a

យើងមាន ៖ x_1,x_2,x_3 ជាឫសនៃសមីការ $x^3-45x^2+6x-a=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀត , គេបាន ៖

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=45\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=6\\ x_1x_2x_3=a\end{cases}$$

ម្យ៉ាងទៀត , $\Sigma=x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$$\Sigma=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

$$\Sigma=45^2-2\cdot 6$$

$$\Sigma=2025-12=2013$$

ដូចនេះ $\Sigma=x_1^2+x_2^2+x_3^2=2013$ មិនមែនជាអនុគមន៍នៃ a ។

263. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases}(x+3y+4z+t)^2=27(x^2+y^2+z^2+t^2)\\ x^3+y^3+z^3+t^3=93\end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

យើងមាន ៖ $\begin{cases}(x+3y+4z+t)^2=27(x^2+y^2+z^2+t^2) & (1)\\ x^3+y^3+z^3+t^3=93 & (2)\end{cases}$

តាមវិសមភាព **Bunhacopski** ៖

$$(x+3y+4z+t)^2\le(1+9+16+1)(x^2+y^2+z^2+t^2)$$

$$(x+3y+4z+t)^2\le 27(x^2+y^2+z^2+t^2) \qquad (3)$$

តែ តាម (1) នាំឲ្យ (3) កើតមានកាលណា , នោះ ៖

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{t}{1}$$

នាំឲ្យ $\begin{cases}y=3x\\ z=4x\\ t=x\end{cases}$

នោះ (2) ៖ $x^3+(3x)^3+(4x)^3+x^3=93$

$$(1+27+64+1)x^3=93$$

$$93x^3=93$$

$$x^3=1\Rightarrow x=1$$

គេបាន ៖ $y=3,z=4,t=1$

ដូចនេះចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធសមីការគឺ $x=1,y=3,z=4,t=1$ ត្រូវបានដោះស្រាយ ។

264. ដោះស្រាយ និងពិភាក្សា សមីការខាងក្រោម ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត a ៖

$$\left|2|x|-a\right|=x-a \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយ និងពិភាក្សា សមីការខាងក្រោម ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត a

យើងមានសមីការ $\left|2|x|-a\right|=x-a$ (១)

សមីការ(១) សមមូល ៖

$$\begin{cases}x-a\ge 0\\ (2|x|-a)^2=(x-a)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge a\\ 4x^2-4|x|a+a^2=x^2-2ax+a^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge a\\ 3x^2-2a(2|x|-x)=0\end{cases}$$

ចំពោះសមីការ $3x^2-2a(2|x|-x)=0$ គេបាន ៖

- បើ $x \geq 0$ នោះ $3x^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{2a}{3}$
- បើ $x < 0$ នោះ $3x^2 + 6ax = 0 \Rightarrow x = -2a$

នោះគេបាន ៖

❖ បើ $a \leq 0$ សមីការ(១) មានឫសមួយ $x = 0$

❖ បើ $a > 0$ សមីការ(១) មានគ្មានឫសមួយ

265. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ដែលមានមុំផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$$\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$$

នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត

យើងមាន $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$ យើងបាន ៖

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos^3\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} = \tan\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2}\left(1+\tan^2\frac{A}{2}\right) = \tan\frac{B}{2}\left(1+\tan^2\frac{B}{2}\right)$$

$$\left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right)+\left(\tan^3\frac{A}{2}-\tan^3\frac{B}{2}\right)=0$$

$$\left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right)+\left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan^2\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\right)=0$$

$$\left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\right)=0 \qquad (១)$$

ដោយ $0 < \frac{A}{2}, \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ នាំឲ្យ $\tan\frac{A}{2} > 0, \tan\frac{B}{2} > 0$

នាំឲ្យ $1+\tan^2\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan^2\frac{B}{2} > 1 > 0$

នោះ (១) សមមូល ៖

$$\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}=0$$

$$A = B$$

ដូចនេះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល C ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

266. គេមាន $\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha=1$ ។
រកតម្លៃអប្បបរមារបស់កន្សោម $M=\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\cos^4\gamma$ ។

__ដំណោះស្រាយ__

រកតម្លៃអប្បបរមារបស់កន្សោម $M=\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\cos^4\gamma$

យើងមាន ៖ $\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha=1$

តាមវិសមភាព **Bunhiacopski** , គេបាន ៖

$$1=\left|\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha\right|$$
$$\le\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}\cdot\sqrt{\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\alpha}$$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$1\le\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$$
$$\le\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\cos^4\gamma}$$
$$\le\sqrt{3}\cdot\sqrt{\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\cos^4\gamma}$$

សមមូល ,

$$\sqrt{\cos^4\alpha+\cos^4\beta+\cos^4\gamma}\ge\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$\sqrt{M}\ge\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$M\ge\frac{1}{3}$$

សមភាពកើតមានកាលណា $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមារបស់ M គឺ $\min M=\frac{1}{3}$ កាលណា $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ។

267. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC មួយមានមុំទាំងបីផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\sin A+\sin B+\sin C$$

នោះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

__ដំណោះស្រាយ__

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

យើងមាន ៖ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\sin A+\sin B+\sin C$ (១)

ដោយ A,B,C ជាមុំក្នុងទាំងបីនៃត្រីកោណ នោះ $A+B+C=\pi$

នាំឲ្យ $A+B=\pi-C$ និង $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

ហើយ $\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$ និង $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$

គេបាន ,

$$\begin{aligned}\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C &= 2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C\\ &= 2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C\\ &= 2\sin C(\cos(A-B)+\cos C)\\ &= 2\sin C\cdot 2\cos\left(\frac{A-B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B-C}{2}\right)\\ &= 4\sin A\sin B\sin C \qquad (1)\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត ,

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C &= 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin C\\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\ &= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)\right)\\ &= 2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\\ &= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (2)\end{aligned}$$

តាម (1) និង (2) នាំឲ្យ (១) សមមូល ៖

$$4\sin A\sin B\sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1$$

$$4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\right)=1$$

$$-4\sin^2\frac{A}{2}+4\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)-1=0$$

$$4\sin^2\frac{A}{2}-4\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)+1-\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)=0$$

$$\left(2\sin\frac{A}{2}-\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right)^2+\left(1-\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)\right)=0$$

$$\left(2\sin\frac{A}{2}-\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right)^2+\sin^2\left(\frac{B-C}{2}\right)=0$$

គេបាន ,

$$\begin{cases}2\sin\frac{A}{2}=\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)=0\end{cases}$$

ដោយ $\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)=0$ នាំឲ្យ $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)=\pm 1$ ព្រោះ $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

តែដោយ $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)>0$ គេបាន $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)=1$ នោះ ,

$$\begin{cases} 2\sin\frac{A}{2}=1 \\ \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)=\sin 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A}{2}=\frac{\pi}{6} \\ \frac{B-C}{2}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=\frac{\pi}{3} \\ B=C \end{cases}$$

ដោយ $A+B+C=\pi \Rightarrow B=C=\dfrac{\pi-\frac{\pi}{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$

ដូចនេះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

268. គេមានត្រីកោណ ABC មួយ មានផ្ទៃក្រឡា S និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ R ។

បើ $3S=2R^2\left(\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C\right)$

បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

តាមបំរាប់ , យើងមាន ៖ $3S=2R^2\left(\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C\right)$ (១)

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស ក្នុងត្រីកោណ ABC , គេបាន ៖

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=\frac{abc}{2S}$$

នាំឲ្យ គេបាន ៖ $\begin{cases} \sin A=\frac{a}{2R} \\ \sin B=\frac{b}{2R} \\ \sin C=\frac{c}{2R} \end{cases}$ និង $S=\frac{abc}{4R}$

នោះ(១) សមមូល ៖

$$\frac{3abc}{4R}=2R^2\left(\left(\frac{a}{2R}\right)^3+\left(\frac{b}{2R}\right)^3+\left(\frac{c}{2R}\right)^3\right)$$

$$\frac{3abc}{8}=R^3\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{8R^3}\right)$$

$$3abc=a^3+b^3+c^3 \qquad (1)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី , គេបាន ៖

$$a^3+b^3+c^3\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}$$

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) នាំឲ្យសមភាពកើតមាន , នោះគេបាន $a=b=c$

ដូចនេះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

269. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18\\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2\end{cases}$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

យើងមានប្រព័ន្ធសមីការ ៖ $\begin{cases}\sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18 & (1)\\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2 & (2)\end{cases}$

បូកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) , គេបាន ៖

$$\sqrt{x^2+x+y+1}+\sqrt{y^2+x+y+1}=10 \qquad (3)$$

តាម (1) និង (3) នោះ គេបាន ៖ $x+y=8 \qquad (4)$

តាម (1) និង (4) នោះ គេបាន ៖ $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10 \qquad (5)$

តាង $t=x-4$ សមមូល $x=t+4$ និង $y=4-t$

នោះ (5) សមមូល ៖

$$\sqrt{(t+4)^2+9}+\sqrt{(4-t)^2+9}=10$$

$$\sqrt{t^2+8t+25}+\sqrt{t^2-8t+25}=10$$

$$2\left(t^2+25\right)+2\sqrt{\left(t^2+25\right)^2-(8t)^2}=100$$

$$\sqrt{\left(t^2+25\right)^2-(8t)^2}=25-t^2$$

លក្ខខណ្ឌ $25-t^2\geq 0\Leftrightarrow t^2\leq 25\Leftrightarrow -5\leq t\leq 5$

គេបាន ,

$$t^4+50t^2+625-64t^2=625-50t^2+t^4$$

$$36t^2=0\Rightarrow t=0$$

សម្រួល ៖

$$\begin{cases} x-4=0 \\ 4-y=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=4$$

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ $x=y=4$ ត្រូវបានដោះស្រាយ ។

270. គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=4$ ។
បង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a)\geq a^3b^3c^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a)\geq a^3b^3c^3$

យើងមាន $a+b+c=4$ គ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន a,b,c

គេបាន ៖ $(a+b)^2\geq 4ab$ នោះ,

$$(a+b+c)^2=((a+b)+c)^2\geq 4(a+b)c$$

$$16\geq 4(a+b)c$$

$$16(a+b)\geq 4(a+b)^2c\geq 4(4abc)$$

$$16(a+b)\geq 16abc$$

$$a+b\geq abc$$

ស្រដៀងគ្នានេះដែរ , គេបាន ៖

$$b+c\geq abc$$

$$c+a\geq abc$$

នាំឲ្យយើងបាន , $(a+b)(b+c)(c+a)\geq (abc)^3$

ដូចនេះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $a+b+c=4$, វិសមភាព

$(a+b)(b+c)(c+a)\geq (abc)^3$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

271. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (អញ្ញត្តិ x,y,z) ៖

$$\frac{xy}{ay+bx}=\frac{yz}{bz+cy}=\frac{zx}{cx+az}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (អញ្ញត្តិ x,y,z)

យើងមានសមីការ $\frac{xy}{ay+bx}=\frac{yz}{bz+cy}=\frac{zx}{cx+az}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ (១)

បើមួយក្នុងចំណោមសមីការបីចំនួន x,y,z ស្មើ 0 គេបាន ៖

(១) នាំឲ្យ $x^2+y^2+z^2=0$

នោះ $x=y=z=0$ មិនយក ព្រោះធ្វើឲ្យភាគបែងនៃ(១)ស្មើសូន្យ

បើ $x,y,z\neq 0$ គេបាន ៖

(១)សមមូល ,

$$\frac{ay+bx}{xy}=\frac{bz+cy}{yz}=\frac{cx+az}{zx}=\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}$$

សមមូល ៖

$$\begin{cases}\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2} & (1)\\[2mm] \dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2} & (2)\\[2mm] \dfrac{c}{z}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2} & (3)\end{cases}$$

បូកអង្គ និងអង្គនៃសមីការ $(1),(2)$ និង (3) , គេបាន ៖

$$2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{3}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}\right)\qquad(4)$$

តាម (1) និង (4) , (2) និង (4) , (3) និង (4) , គេបាន ៖

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

តាង $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t \qquad , t\neq 0$

នាំឲ្យ $x=at$, $y=bt$, $z=ct$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$\frac{b}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$\frac{b}{bt}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{t^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\right)$$

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{2t^2}$$

$$2t^2=t$$

ដោយ $t\neq 0$ នាំឲ្យគេបាន , $t=\frac{1}{2}$

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ $x=\frac{a}{2},y=\frac{b}{2},z=\frac{c}{2}$ ។

272. គេឲ្យ a និង b ជាពីរចំនួនវិជ្ជមានផ្សេងពីគ្នា ។

បង្ហាញថា $\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$

យើងមានពីរចំនួន a,b ដែល $a,b>0,a\neq b$ (១)

តាមលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី , សន្មតថា $a>b>0$

នោះ(១)អាចសរសេរជា , $\sqrt{\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}-1}{\ln\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}+1}{2}$ (1)

តាង $x=\sqrt{\frac{a}{b}}>1$

នោះវិសមភាព (1) សមមូល ៖

$$x<\frac{x^2-1}{2\ln x}<\frac{x^2+1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \qquad (2)$$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=x^2-2x\ln x-1$, $x\geq 1$

គេបានអនុគមន៍ដេរីវេនៃ $f(x)$ គឺ ៖

$$f'(x)=2x-2\ln x-2=2(x-\ln x-1)$$

និង $f''(x)=2\left(1-\frac{1}{x}\right)\geq 0$, $\forall x\geq 1$

គេទាញបានថា $f'(x)$ កើនគ្រប់ $x\geq 1$ តែ $f'(1)=0$

នោះ $f'(x)\geq 0$ គ្រប់ $x\geq 1$

គេបាន $f(x)$ កើនគ្រប់ $x\geq 1$ តែ $f(1)=0$

នោះ $f(x)\geq 0$ គ្រប់ $x\geq 1$

ឬ $f(x)>0$ គ្រប់ $x>1$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$x^2-2x\ln x-1>0$$

$$x^2-1>2x\ln x$$

$$x<\frac{x^2-1}{2\ln x} \qquad (២)$$

តាង $g(x)=\ln x+\frac{2}{x^2+1}$ គ្រប់ $x\geq 1$

គេបានអនុគមន៍ដេរីវេរបស់ $g(x)$ គឺ ,

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+1\right)^2-2x^2}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x\left(x^2+1\right)^2}\geq 0 \ , \forall x\geq 1$$

នោះ $g(x)$ កើនគ្រប់ $x \geq 1$

តែ $g(1) = 1 > 0$ នាំឲ្យ $g(x) > 1$ គ្រប់ $x > 1$

សមមូល ,

$$\ln x + \frac{2}{x^2+1} > 1$$

$$\ln x > \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$2\ln x > \frac{2(x^2-1)}{x^2+1}$$

$$\frac{x^2-1}{2\ln x} < \frac{x^2+1}{2} \qquad (៣)$$

តាម (២) និង (៣) នាំឲ្យគេបាន $x < \frac{x^2-1}{2\ln x} < \frac{x^2+1}{2}$ ដែល $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$

ដូចនេះគ្រប់ $a, b > 0, a \neq b$ វិសមភាព $\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

273. គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតមិនសូន្យ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$$

បង្ហាញថា $(ax+by+cz)^2 = (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $(ax+by+cz)^2 = (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$

គ្រប់ចំនួបពិតមិនសូន្យ a, b, c យើងតាង ៖

$$k = \frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a} = \frac{acy-bcx}{c^2} = \frac{bcx-abz}{b^2} = \frac{abz-acy}{a^2}$$

$$= \frac{acy-bcx+bcx-abz+abz-acy}{a^2+b^2+c^2}$$

$$= 0$$

នាំឲ្យគេបាន ,

$$ay-bx = cx-az = bz-cy = 0$$

$$(ay-bx)^2 = (cx-az)^2 = (bz-cy)^2 = 0$$

$$(ay-bx)^2 + (cx-az)^2 + (bz-cy)^2 = 0$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2 = 0$$

ដូចនេះ $(ax+by+cz)^2 = (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

274. គេឲ្យសមីការពហុធាដឺក្រេទី២ ៖ $x^2-6x+m=0$ ។
កំណត់តម្លៃរបស់ប៉ារ៉ាម៉ែត m ដើម្បីឲ្យសមីការខាងលើ មានឫសពីរ x_1, x_2 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់រ៉ឺឡាស្យុង(ទំនាក់ទំនង) $x_1^3+x_2^3=72$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃរបស់ប៉ារ៉ាម៉ែត m

សមីការ $x^2-6x+m=0$ មានឫសពីរ x_1 និង x_2 ,

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត , គេបាន ៖

$$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1x_2=m \end{cases}$$

ដោយ $x_1^3+x_2^3=72$ ហើយ $\Delta'=9-m\geq 0 \Leftrightarrow m\leq 9$

នាំឲ្យគេបាន ,

$$72=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$$
$$72=6^3-3m(6)$$
$$3m=36-12$$
$$m=\frac{24}{3}=8$$

ដូចនេះបំនួននោះគឺ $m=8$ ត្រូវបានកំណត់ ។

275. គេឲ្យសមីការពហុធាដឺក្រេទី២ ៖ $ax^2+bx+c=0$ និង $px^2+qx+r=0$ មានឫសរួមមួយ ។ បង្ហាញថាយើងមានសមភាព $(pc-ar)^2=(pb-aq)(cq-rb)$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាយើងមានសមភាព $(pc-ar)^2=(pb-aq)(cq-rb)$

យើងមានសមីការ $ax^2+bx+c=0$ និង $px^2+qx+r=0$ ($a\neq 0, p\neq 0$) មានឫសរួមមួយ ។

សន្មតថា x_0 ជាឫសរួមនៃសមីការទាំងពីរ , គេបាន ៖

$$\begin{cases} ax_0^2+bx_0+c=0 & (1) \\ px_0^2+qx_0+r=0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} pax_0^2+pbx_0+pc=0 \\ pax_0^2+qax_0+ra=0 \end{cases}$$

នោះ $(pb-qa)x_0+(pc-ra)=0$ (១)

ស្រដៀងគ្នាដែរ , គេបាន ៖

$$\begin{cases} aqx_0^2+bqx_0+cq=0 \\ bpx_0^2+bqx_0+br=0 \end{cases}$$

នោះ $(aq-pb)x_0^2+(cq-br)=0$

សមមូល $(aq-pb)^2x_0^2=(br-cq)(aq-pb)$ (២)

លើកអង្គទាំងសងខាងនៃ(១) ជាការេ , យើងបាន ៖

$$(aq-pb)^2x_0^2=(pc-ra)^2 \quad (៣)$$

តាម (២) និង (៣) នាំឲ្យយើងបាន ៖

$$(br-cq)(aq-pb)=(pc-ra)^2$$

$$(pc-ra)^2=(pb-aq)(cq-rb)$$

ដូចនេះសមភាព $(pc-ra)^2=(pb-aq)(cq-rb)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

276. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ ៖

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4<0 \\ (x_1+x_2)(x_3+x_4)-x_1x_2-x_3x_4<0 \\ (x_1+x_2)x_3x_4-(x_3+x_4)x_1x_2<0 \\ x_1>0,x_2>0,x_3>0,x_4>0 \end{cases} ។$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធវិសមីការ

យើងមានប្រព័ន្ធវិសមីការ $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4<0 \\ (x_1+x_2)(x_3+x_4)-x_1x_2-x_3x_4<0 \\ (x_1+x_2)x_3x_4-(x_3+x_4)x_1x_2<0 \\ x_1>0,x_2>0,x_3>0,x_4>0 \end{cases}$ គេបាន ៖

$$\begin{cases} -x_1-x_2+x_3+x_4>0 \\ x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4-x_2x_3-x_2x_4+x_3x_4>0 \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4-x_1x_3x_4-x_2x_3x_4>0 \\ x_1x_2x_3x_4>0 \end{cases}$$

តាង

$$\alpha=-x_1-x_2+x_3+x_4>0$$
$$\beta=x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4-x_2x_3-x_2x_4+x_3x_4>0$$
$$\gamma=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4-x_1x_3x_4-x_2x_3x_4>0$$
$$\varphi=x_1x_2x_3x_4>0$$

នោះគេទាញបានថា ៖ $-x_1,-x_2,x_3,x_4$ ជាឫសរបស់ពហុធា ៖

$$f(x)=(x+x_1)(x+x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

$$f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\varphi$$

ដោយ $\alpha>0,\beta>0,\gamma>0,\varphi>0$

នាំឲ្យ $f(x)>0$ គ្រប់ x (អាចស្រាយតាមអថេរភាពនៃនុគមន៍)

នោះពហុធា $f(x)=0$ គ្មានឫស

ដូចនេះប្រព័ន្ធវិសមីការដែលឲ្យ គ្មានចម្លើយទេ ។

277. គេឲ្យ n ចំនួនគត់ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ មានផលបូក $a_1+a_2+\cdots+a_n$ ចែកដាច់នឹង 6 ។ បង្ហាញថាផលបូក $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថាផលបូក $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$ ចែកដាច់នឹង 6

គ្រប់ n ចំនួនគត់ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ យើងបាន ៖

$$\left(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3\right)-\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)=\left(a_1^3-a_1\right)+\left(a_2^3-a_2\right)+\cdots+\left(a_n^3-a_n\right) \quad (១)$$

គ្រប់ចំនួនគត់ a យើងមាន ,

$$a^3-a=a\left(a^2-1\right)=a(a-1)(a+1)\vdots 6$$

ព្រោះនេះជាផលគុណនៃបីចំនួនគត់តគ្នា ។

នាំឲ្យ $\left(a_1^3-a_1\right)+\left(a_2^3-a_2\right)+\cdots+\left(a_n^3-a_n\right)\vdots 6$

នោះ(១) នាំឲ្យ $\left(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3\right)-\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\vdots 6$

តែ តាមបំរាប់ , $a_1+a_2+\cdots+a_n\vdots 6$

នាំឲ្យ $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3\vdots 6$

ដូចនេះ ផលបូក $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$ ចែកដាច់នឹង 6 ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

278. គេឲ្យ $x=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ ។ រកតម្លៃនៃ $x^6-2\sqrt{3}x^5-x^4+x^3-4x^2+2x-\sqrt{3}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកតម្លៃនៃ $x^6-2\sqrt{3}x^5-x^4+x^3-4x^2+2x-\sqrt{3}$

យើងមាន $x=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ គេបាន ,

$$x=\frac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=2+\sqrt{3}$$

$$x-2=\sqrt{3} \ , \ x-\sqrt{3}=2$$

$$(x-2)^2=3 \ , \ \left(x-\sqrt{3}\right)^2=4$$

$$x^2-4x+1=0 \ , \ x^2-2\sqrt{3}x-1=0$$

យើងមាន ,

$$x^6-2\sqrt{3}x^5-x^4+x^3-4x^2+2x-\sqrt{3}=x^4\left(x^2-2\sqrt{3}x-1\right)+x\left(x^2-4x+1\right)+\left(x-\sqrt{3}\right)$$

$$=0+0+2=2$$

ដូចនេះ $x^6-2\sqrt{3}x^5-x^4+x^3-4x^2+2x-\sqrt{3}=2$ ត្រូវបានគណនា ។

279. រកគ្រប់អនុគមន៍នៃចំនួនពិត $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់
$f\left(x^3-y\right)+2y\left(3f^2\left(x\right)+y^2\right)=f\left(y+f\left(x\right)\right)$ គ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់អនុគមន៍នៃចំនួនពិត f

គ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ យើងមាន $f\left(x^3-y\right)+2y\left(3f^2\left(x\right)+y^2\right)=f\left(y+f\left(x\right)\right)$ (១)

- យក $y=x^3$ នោះ (១) យើងបាន ៖
  $f\left(0\right)+2x^3\left(3f^2\left(x\right)+x^6\right)=f\left(x^3+f\left(x\right)\right)$ (២)
- យក $y=-f\left(x\right)$ នោះ (១) នាំឲ្យគេបាន ៖
  $f\left(x^3+f\left(x\right)\right)-2f\left(x\right)\left(3f^2\left(x\right)-f^2\left(x\right)\right)=f\left(0\right)$ (៣)

តាម(២) និង(៣) , នាំឲ្យគេបាន ៖

$4f^3\left(x\right)-3f^2\left(x\right)\cdot x^3-x^9=0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

$\left(f\left(x\right)-x^3\right)\left(4f^2\left(x\right)+x^3f\left(x\right)+x^6\right)=0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ (៤)

ដោយ $4f^2\left(x\right)-x^3f\left(x\right)+x^6=\left(2f\left(x\right)-\frac{x^3}{4}\right)^2+\frac{15}{16}x^6>0$ គ្រប់ $x\neq 0$

នោះ (៤) នាំឲ្យ $f\left(x\right)-x^3=0$ នោះ $f\left(x\right)=x^3$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$, អនុគមន៍ $f\left(x\right)=x^3$ ត្រូវបានកំណត់ ។

280. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c បើ $(a+c)(a+b+c)<0$ នោះ
$(b-c)^2>4a(a+b+c)$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(b-c)^2>4a(a+b+c)$

តាងអនុគមន៍ $f\left(x\right)=ax^2+(b-c)x+(a+b+c)$

យើងបាន $f\left(0\right)f\left(-1\right)=2(a+b+c)(a+c)<0$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល នាំឲ្យសមីការ $f\left(x\right)=0$ មានឫស

នោះគេបាន $\Delta>0$ យើងបាន $(b-c)^2-4a(a+b+c)>0$

នាំឲ្យ $(b-c)^2>4a(a+b+c)$

ដូចនេះវិសមភាព $(b-c)^2>4a(a+b+c)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

281. គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ កំណត់ដោយ ៖

$$x_0 = 2014 \text{ និង } x_n = -\frac{2014}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \quad , (n \geq 1) \text{ ។}$$

កំណត់តម្លៃនៃផលបូក $A = \sum_{n=0}^{2014} 2^n \cdot x_n$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំណត់តម្លៃនៃផលបូក $A = \sum_{n=0}^{2014} 2^n \cdot x_n$

យើងមាន ៖ $x_0 = 2014$ និង $x_n = -\frac{2014}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \quad , (n \geq 1)$

គេបាន ,

$$nx_n = -2014\sum_{k=0}^{n-1} x_k \qquad (១)$$

នោះ $$(n-1)x_{n-1} = -2014\sum_{k=0}^{n-2} x_k \qquad (២)$$

ដកអង្គ និងអង្គនៃ (១) និង(២) គេបាន ,

$$nx_n - (n-1)x_{n-1} = -2014\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k - \sum_{k=0}^{n-2} x_k\right)$$

$$nx_n - (n-1)x_{n-1} = -2014x_{n-1}$$

$$x_n = -\frac{(2014-n+1)}{n}\cdot x_{n-1}$$

សមមូល ,

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = \prod_{k=1}^{n}\left(-\frac{2015-k}{k}\cdot x_{k-1}\right)$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n\left(\frac{2014\cdot 2013\cdot\cdots\cdot(2015-n)}{n!}\right)x_0 x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$$

$$x_n = (-1)^n \cdot C_{2014}^n \cdot x_0 \text{ ដែល } 0 \leq n \leq 2014$$

គេបាន ,

$$A = \sum_{n=0}^{2014} 2^n \cdot x_n = x_0 \sum_{n=0}^{2014} 2^n \cdot (-1)^n C_{2014}^n$$

$$= x_0 \sum_{n=0}^{2014} (-2)^n C_{2014}^n$$

$$= x_0 (-2+1)^{2014}$$

$$= x_0 = 2014$$

ដូចនេះ $A = \sum_{n=0}^{2014} 2^n \cdot x_n = 2014$ ត្រូវបានកំណត់ ។

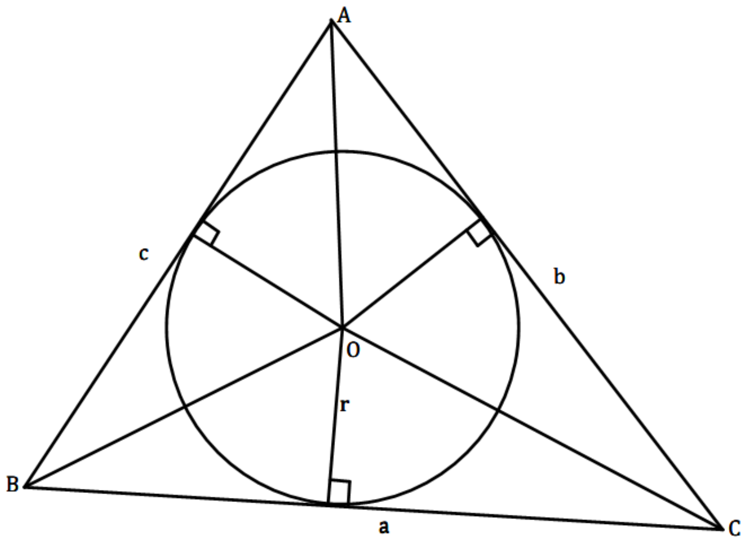
282. គេមានត្រីកោណមួយមានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c ហើយ p និង S គឺជាកន្លះបរិមាត្រ និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណនោះរៀងគ្នា ។

បើ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនោះ , បង្ហាញថា $S = pr$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $S = pr$

តាង A,B,C ជាកំពូលទាំងបីនៃត្រីកោណនោះ ហើយ O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC នោះ ។



គេបាន ,

$$S = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COA}$$

$$S = \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb$$

$$S = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$S = pr$$

ព្រោះ $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

ដូចនេះ $S = pr$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

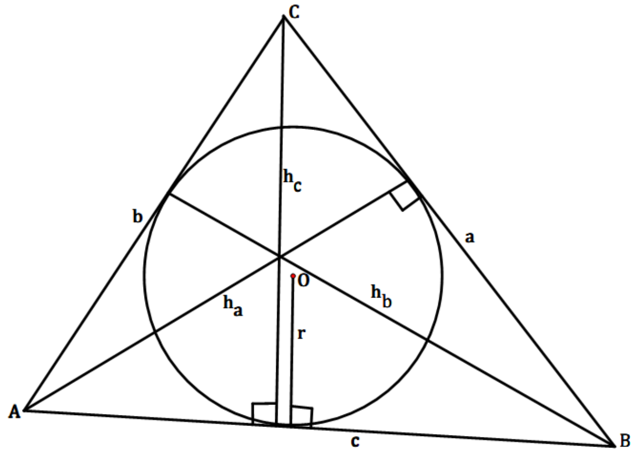
283. h_a, h_b, h_c ជារង្វាស់កម្ពស់ទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC មួយ ដែលមានកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង r ។ បង្ហាញថា $\dfrac{h_b}{h_a^2} + \dfrac{h_c}{h_b^2} + \dfrac{h_a}{h_c^2} \geq \dfrac{1}{r}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\dfrac{h_b}{h_a^2} + \dfrac{h_c}{h_b^2} + \dfrac{h_a}{h_c^2} \geq \dfrac{1}{r}$

យើងមាន h_a, h_b, h_c និង r ជាកម្ពស់ទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC និងកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រី

កោណនោះរៀងគ្នា ។



គេបាន , ផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC គឺ ៖

$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c=pr$ ដែល $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$

នាំឲ្យ $h_a=\frac{2S}{a}$, $h_b=\frac{2S}{b}$, $h_c=\frac{2S}{c}$, $S=pr$

ឧបមាថា $\frac{h_b}{h_a^2}+\frac{h_c}{h_b^2}+\frac{h_a}{h_c^2}\geq\frac{1}{r}$ (១)

សម្មូល ,

$$\frac{\frac{2S}{b}}{\left(\frac{2S}{a}\right)^2}+\frac{\frac{2S}{c}}{\left(\frac{2S}{b}\right)^2}+\frac{\frac{2S}{a}}{\left(\frac{2S}{c}\right)^2}\geq\frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{2S}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\geq\frac{1}{r}$$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{2S}{r}$$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 2p$$

នាំឲ្យ $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$ (២)

យើងមាន ,

$$\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a}\geq 0$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2}{b}+\frac{b^2-2bc+c^2}{c}+\frac{c^2-2ca+a^2}{a}\geq 0$$

$$\frac{a^2}{b}-2a+b+\frac{b^2}{c}-2b+c+\frac{c^2}{b}-2c+a\geq 0$$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$$

នាំឲ្យគេបាន (២) ពិត នោះនាំឲ្យ (១) ក៏ពិត

ដូចនេះ $\frac{h_b}{h_a^2}+\frac{h_c}{h_b^2}+\frac{h_a}{h_c^2}\geq\frac{1}{r}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

284. ពន្លាតនៃអនុគមន៍ពហុធា $P(x)=(1+2x)^{12}$ ប្រែក្លាយជារាង

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12}$$ ។

រក $\max\{a_1,a_2,\ldots,a_{12}\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រក $\max\{a_1,a_2,\ldots,a_{12}\}$

យើងមាន ៖

$$P(x)=(1+2x)^{12}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{12}x^{12}$$

ដែលមេគុណ $a_k=C_{12}^k2^k \quad , 0\le k\le 12$

បើ $a_k<a_{k+1}$ នោះសមមូល ៖

$$C_{12}^k2^k<C_{12}^{k+1}2^{k+1}$$

$$C_{12}^k<2C_{12}^{k+1}$$

$$\frac{12!}{(12-k)!k!}<2\cdot\frac{12!}{(11-k)!(k+1)!}$$

$$\frac{1}{12-k}<\frac{2}{k+1}$$

$$k+1<2(12-k)$$

$$3k<23$$

$$k<\frac{23}{3}$$

ដោយ k ជាចំនួនគត់ គេបាន $k=8$

ដូចនេះ $\max\{a_1,a_2,\ldots,a_{12}\}=C_{12}^8\cdot2^8=126720$ ត្រូវបានគណនា ។

285. ក. បង្ហាញថា បើ x ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស នោះ តម្លៃរបស់កន្សោម $A=x^2+4x-5$ ជាពហុគុណនៃ 8 ។

ខ. រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ x ដែល $65+x^2$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា A ជាពហុគុណនៃ 8

យើងមាន x ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស

នោះ គេបាន $x=2k+1$ ដែល $k\in\mathbb{N}$

នោះកន្សោម $A=x^2+4x-5$ សមមូលនឹង ៖

$$A=(2k+1)^2+4(2k+1)-5$$

$$A=4k^2+4k+1+8k+4-5$$

$$A=4k^2+12k$$

$$A=4k(k+3)$$

$$A = 4k\left(\left(k+1\right)+2\right)$$
$$A = 4k\left(k+1\right)+8k$$

ដោយ $k\left(k+1\right)\vdots 2 \Rightarrow 4k\left(k+1\right)\vdots 8$

នោះ $A\vdots 8$

ដូចនេះ គេបាន A ជាពហុគុណនៃ 8 គ្រប់ x ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស ។

១. រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ x ដែល $65+x^2$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយ

តាមបំរាប់ ៖ $65+x^2$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយ

នាំឲ្យ $65+x^2 = y^2$ ដែល $y\in\mathbb{N}$

សមមូល ,

$$y^2 - x^2 = 65$$
$$\left(y-x\right)\left(y+x\right) = 65 = 5\cdot 13$$

ដោយ $x, y\in\mathbb{N}$ នោះ $x+y > y-x$ គេបាន ៖

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y-x=1\\y+x=65\end{cases}\\\begin{cases}y-x=5\\y+x=13\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=32\\y=33\end{cases}\\\begin{cases}x=4\\y=9\end{cases}\end{array}\right.$$

ដូចនេះសរុបមកចំនួនគត់ធម្មជាតិនោះគឺ $x=4, x=32$ ។

286. បង្ហាញថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន

ឧបមាថា $\sqrt{6}$ ជាចំនួនសនិទាន

នោះមានចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា a និង b ដែល $\sqrt{6}=\dfrac{a}{b}$

គេបាន ,

$$6 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$a^2 = 6b^2$$

ដោយ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា , នោះគេបាន a ជាពហុគុណនៃ 6

គេបាន $a = 6p$ ដែល p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

គេបាន ,

$$\left(6p\right)^2 = 6b^2$$
$$36p^2 = 6b^2$$
$$b^2 = 6p^2$$

នាំឲ្យ b ជាពហុគុណនៃ 6 ដែរ ។(មិនអាច)

ដូចនេះ $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

287. បង្ហាញថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន

ឧបមាថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ មិនមែនជាចំនួនអសនិទាន

នោះវាប្រាកដជាមានចំនួនសនិទាន a មួយដែល $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$

នាំឲ្យគេបាន ៖

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=a^2$$

$$5+2\sqrt{6}=a^2$$

$$\sqrt{6}=\frac{a^2-5}{2}$$

ផ្ទុយពីការពិត ព្រោះ $\frac{a^2-5}{2}$ ជាចំនួនសនិទាន រីឯ $\sqrt{6}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ដូចនេះ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

288. ដោះស្រាយសមីការ $\tan^2 x-\tan x\tan 3x=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $\tan^2 x-\tan x\tan 3x=2$

សមីការមានលក្ខខណ្ឌ ៖ $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 3x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \cos 3x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

សមីការសមមូល ,

$$\tan^2 x-\tan x\tan 3x=2$$

$$\tan^2 x-\tan x\left(\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}\right)=2$$

$$\tan^2 x\left(1-3\tan^2 x\right)-\tan x\left(3\tan x-\tan^3 x\right)=2\left(1-3\tan^2 x\right)$$

$$2\tan^4 x-4\tan^2 x+2=0$$

$$\left(\tan^2 x-1\right)^2=0$$

$$\tan^2 x=1$$

$$\tan x=\pm 1$$

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\quad ,\ k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះចម្លើយរបស់សមីការគឺ $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ ។

289. ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{\sin y+\sin 2y+\sin 3y}{\cos y+\cos 2y+\cos 3y}=\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{\sin y+\sin 2y+\sin 3y}{\cos y+\cos 2y+\cos 3y}=\sqrt{3}$

លក្ខខណ្ឌនៃសមីការគឺ $\cos y+\cos 2y+\cos 3y\neq 0$

សមីការសមមូល ,

$$\frac{(\sin y+\sin 3y)+\sin 2y}{(\cos y+\cos 3y)+\cos 2y}=\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sin 2y\cos y+\sin 2y}{2\cos 2y\cos y+\cos 2y}=\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin 2y(2\cos y+1)}{\cos 2y(2\cos y+1)}=\sqrt{3}$$

$$\begin{cases}\tan 2y=\sqrt{3}\\ \cos 2y\neq 0\\ \cos y\neq -\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}\\ y\neq \pm\dfrac{2\pi}{3}+2k'\pi\end{cases},\ k,k'\in\mathbb{Z}$$

គេបាន ,

$$\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\neq\pm\frac{2\pi}{3}+2k'\pi$$

$$\frac{1}{6}+\frac{k}{2}\neq\pm\frac{2}{3}+2k'$$

$$\left[\begin{array}{l}k\neq 4k'+1\\ k\neq 4k'-\dfrac{5}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow k\neq 4k'+1$$

ដូចនេះចម្លើយរបស់សមីការគឺ $y=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}$ ដែល $k\neq 4k'+1$ ($k,k'\in\mathbb{Z}$) ។

290. គេឲ្យ $f(x)=ax+b$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ និង $a^2+b^2>0$ ។

បង្ហាញថា $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx\right)^2+\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx\right)^2>0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin xdx\right)^2+\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos xdx\right)^2>0$

យើងមាន $f(x)=ax+b$ ដែល $x\in\mathbb{R}$ និង $a^2+b^2>0$

តាង $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin xdx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos xdx$

នោះគេបាន ,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(ax+b)\sin xdx$$

តាង $u=ax+b$ នោះ $du=adx$

និង $dv=\sin xdx$ នោះ $v=-\cos x$

ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក , គេបាន ៖

$$I=\left[-(ax+b)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$$

$$I=-\left(\frac{a\pi}{2}+b\right)\cos\frac{\pi}{2}+b\cos 0+a\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)$$

$$I=b+a$$

ម្យ៉ាងទៀត ,

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos xdx$$

តាង $u=ax+b$ នោះ $du=adx$

និង $dv=\cos xdx$ នោះ $v=\sin x$

ដោយប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក , គេបាន ៖

$$J=\left[(ax+b)\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$$

$$J=\left(\frac{a\pi}{2}+b\right)\sin\frac{\pi}{2}-b\sin 0+a\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)$$

$$J=\frac{a\pi}{2}+b-a$$

$$J=a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+b$$

នាំឲ្យគេបាន $I^2+J^2=(a+b)^2+\left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+b\right)^2\geq 0$

សញ្ញាសមភាពកើតមានកាលណា ,

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+b=0 \end{cases}\Rightarrow a=b=0$$

នោះ $a^2+b^2=0$ តែ $a^2+b^2\neq 0$

នោះសញ្ញាសមភាពមិនអាចកើតឡើងទេ ។

ដូចនេះ $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx\right)^2 + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx\right)^2 > 0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

291. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{N}$ សមីការ ៖ $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n = 81$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{N}$

យើងមានសមីការ $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n = 81$ (១)

យើងមាន $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2 C_n^2 + \cdots + x^n C_n^n$

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន ,

$$(1+2)^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n \qquad (២)$$

តាម (១) និង (២) នាំឲ្យគេបាន ,

$$3^n = 81 \Rightarrow n = 4$$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការគឺ $n = 4$ ត្រូវបានដោះស្រាយ ។

292. ពិនិត្យស្វ៊ីត ហ្វីបូណាស៊ី ៖

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ និង } a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \ , n \ge 2$$

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k, n ប្រភាគ ៖ $\dfrac{ka_{n+2} + a_n}{ka_{n+3} + a_{n+1}}$ មិនអាចសម្រួលបាន ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា ប្រភាគ $\dfrac{ka_{n+2} + a_n}{ka_{n+3} + a_{n+1}}$ មិនអាចសម្រួលបាន

ឧបមាថាប្រភាគ $\dfrac{ka_{n+2} + a_n}{ka_{n+3} + a_{n+1}}$ អាចសម្រួលបានចំពោះចំនួន k, n មួយចំនួន

គេបាន ,

$$ka_{n+2} + a_n \vdots d \qquad (១)$$

និង $\quad ka_{n+3} + a_{n+1} \vdots d \quad$ គ្រប់ $d \in \mathbb{N}$ និង $d > 1$

ដោយ $\quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \ , n \ge 2$

គេបាន ៖

$$a_{n+3} - a_{n+2} = a_{n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = a_{n-1}$$

តាម(១)នាំឲ្យ គេបាន ,

$$(ka_{n+3} + a_{n+1}) - (ka_{n+2} + a_n) \vdots d$$

ស្រដៀងគ្នាដែរ , យើងបាន ៖

$$\left(ka_{n+2}+a_n\right)-\left(ka_{n+1}+a_{n-1}\right)\vdots d$$

នាំឲ្យ $ka_n+a_{n-2}\vdots d$

គេបាន $ka_4+a_2\vdots d$ (២)

$$ka_3+a_1\vdots d$$

គ្រប់ $a_1=a_2=1, a_3=2, a_4=3$

យើងបាន (២) ៖

$$3k+1\vdots d$$

$$2k+1\vdots d$$

នាំឲ្យ $k=(3k+1)-(2k+1)\vdots d$ ផ្ទុយពីការពិត

ដូចនេះប្រភាគ $\dfrac{ka_{n+2}+a_n}{ka_{n+3}+a_{n+1}}$ មិនអាចសម្រួលបានទេ ។

293. គេមានត្រីកោណ ABC មួយមានមុំទាំងបីស្រួច ។ បង្ហាញថា ៖

$$\left(\sqrt{\tan A}-\sqrt{\cot\frac{A}{2}}\right)+\left(\sqrt{\tan B}-\sqrt{\cot\frac{B}{2}}\right)+\left(\sqrt{\tan C}-\sqrt{\cot\frac{C}{2}}\right)\ge\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}-\tan A\tan B\tan C$$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

ដោយ $0<A,B,C<\dfrac{\pi}{2}$, $A+B+C=\pi$

នោះ $\tan A,\tan B,\tan C>0$ និង $\cot\dfrac{A}{2},\cot\dfrac{B}{2},\cot\dfrac{C}{2}>0$

យើងមាន $\cos(A-B)\le 1$

នោះ $\cos(A-B)\cos C\le\cos C$, $(\cos C>0)$

សមមូល ,

$$(\cos A\cos B+\sin A\sin B)\cos C\le-\cos(A+B)$$

$$\cos A\cos B(1+\cos C)\le\sin A\sin B(1-\cos C)$$

$$\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}\ge\frac{1+\cos C}{1-\cos C}=\cot^2\frac{C}{2}$$

នោះ $\tan A\tan B\ge\cot^2\dfrac{C}{2}$ (១)

ស្រដៀងគ្នានេះដែរ , គេបាន ៖

$$\tan B\tan C\ge\cot^2\frac{A}{2} \quad (២)$$

និង $\tan C\tan A\ge\cot^2\dfrac{B}{2}$ (៣)

តាម(១) , (២) និង (៣) គេបាន ,

$$\left(\tan A\tan B\tan C\right)^2 \geq \left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)^2$$

នោះ $$\tan A\tan B\tan C \geq \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត , តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន ៖

$$\sqrt{\tan A}+\sqrt{\tan B} \geq 2\sqrt{\sqrt{\tan A}\cdot\sqrt{\tan B}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\cot^2\frac{C}{2}}}$$

នាំឲ្យ $$\sqrt{\tan A}+\sqrt{\tan B} \geq 2\sqrt{\cot\frac{C}{2}}$$

ស្រាយស្រដៀងគ្នានេះដែរ , យើងបាន ៖

$$\sqrt{\tan B}+\sqrt{\tan C} \geq 2\sqrt{\cot\frac{A}{2}}$$

និង $$\sqrt{\tan C}+\sqrt{\tan A} \geq 2\sqrt{\cot\frac{B}{2}}$$

នាំឲ្យគេបាន ,

$$2\left(\sqrt{\tan A}+\sqrt{\tan B}+\sqrt{\tan C}\right) \geq 2\sqrt{\cot\frac{C}{2}}+2\sqrt{\cot\frac{A}{2}}+2\sqrt{\cot\frac{B}{2}}$$

$$\sqrt{\tan A}+\sqrt{\tan B}+\sqrt{\tan C} \geq \sqrt{\cot\frac{A}{2}}+\sqrt{\cot\frac{B}{2}}+\sqrt{\cot\frac{C}{2}} \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\tan A\tan B\tan C+\sqrt{\tan A}+\sqrt{\tan B}+\sqrt{\tan C} \geq \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}+$$
$$\sqrt{\cot\frac{A}{2}}+\sqrt{\cot\frac{B}{2}}+\sqrt{\cot\frac{C}{2}}$$

ដូចនេះ វិសមភាព $\left(\sqrt{\tan A}-\sqrt{\cot\frac{A}{2}}\right)+\left(\sqrt{\tan B}-\sqrt{\cot\frac{B}{2}}\right)+\left(\sqrt{\tan C}-\sqrt{\cot\frac{C}{2}}\right) \geq$

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}-\tan A\tan B\tan C$$

ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។ សញ្ញាសមភាពកើតមានកាលណា $A=B=C$ (ΔABC សម័ង្ស) ។

294. គេឲ្យសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ មានឫសពីរ x_1 និង x_2 ដែល $x_1=x_2^2$ ។ បង្ហាញថា $b^3+a^2c+ac^2=3abc$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $b^3+a^2c+ac^2=3abc$

យើងមាន , x_1 និង x_2 ជាឫសរបស់សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត , យើងបាន ៖

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

សមមូល ,

$$\begin{cases} \left(x_1^3+x_2^3\right)+3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=-\dfrac{b^3}{a^3} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

ដោយ $x_1=x_2^2$ គេបាន ,

$$\begin{cases} \left(x_2^6+x_2^3\right)+3\cdot\dfrac{c}{a}\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)=-\dfrac{b^3}{a^3} \\ x_2^3=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{c}{a}\right)^2+\dfrac{c}{a}-\dfrac{3cb}{a^2}=-\dfrac{b^3}{a^3} \\ x_2^3=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{c}{a}-\frac{3bc}{a^2}=-\frac{b^3}{a^3}$$

$$ac^2+a^2c-3abc=-b^3$$

ដូចនេះ $b^3+a^2c+ac^2=3abc$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

295. គេឲ្យ m និង n ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sqrt{7}-\dfrac{m}{n}>0$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{7}-\dfrac{m}{n}>\dfrac{1}{mn}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $\sqrt{7}-\dfrac{m}{n}>\dfrac{1}{mn}$

គ្រប់ $m,n\in\mathbb{N}$ យើងមាន $\sqrt{7}-\dfrac{m}{n}>0$

សមមូល ,

$$\sqrt{7}>\frac{m}{n}$$

$$7n^2>m^2$$

ដោយ $7n^2$ និង m^2 ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $7n^2>m^2$

នាំឲ្យគេបាន , $7n^2\geq m^2+1$

- បើ $7n^2=m^2+1$ នោះ $m^2+1\vdots 7$ ជាករណីមិនអាចទៅរួចគ្រប់ $m\in\mathbb{N}$

  នាំឲ្យគេបាន $7n^2>m^2+1$ នោះ $7n^2\geq m^2+2$

- បើ $7n^2 = m^2 + 2$ នោះ $m^2 + 2 \vdots 7$ ជាករណីមិនអាចទៅរួចគ្រប់ $m \in \mathbb{N}$

  នាំឲ្យគេបាន $7n^2 > m^2 + 2$ នោះ $7n^2 \geq m^2 + 3$

  ដោយ $m \in \mathbb{N}$ នាំឲ្យ $m^2 \geq 1$ នោះ $\frac{1}{m^2} \leq 1$

  នាំឲ្យ $m^2 + \frac{1}{m^2} + 2 \leq m^2 + 3 \leq 7n^2$

  សមមូល ,

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)^2 \leq 7n^2$$

$$\sqrt{7}n \geq m + \frac{1}{m}$$

$$\sqrt{7} \geq \frac{m}{n} + \frac{1}{mn} \qquad , n \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} \geq \frac{1}{mn}$$

  សញ្ញាសមភាពកើតមានកាលណា $\begin{cases} 7n^2 = m^2 + 3 \\ m^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7n^2 = 4 \\ m = 1 \end{cases}$ មិនអាចទៅរួច

  នេះមានន័យថាសមភាពមិនអាចកើតមានទេ ។

  ដូចនេះវិសមភាព $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

296. គេឲ្យ៥ បំនួនមិនអវិជ្ជមាន a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \text{ ។}$$

រកតម្លៃអតិបរមារបស់កន្សោម $A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

រកតម្លៃអតិបរមារបស់កន្សោម $A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5$

គ្រប់ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{N}$ ហើយ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$

គេបាន ,

$$A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 \leq (a_1 + a_3 + a_4)(a_2 + a_4) \qquad (១)$$

ម្យ៉ាងទៀត , តាមវិសមភាព កូស៊ី , យើងបាន ៖

$$(a_1 + a_3 + a_5)(a_2 + a_4) \geq 2\sqrt{(a_1 + a_3 + a_5)(a_2 + a_4)}$$

អញ្ចឹង $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq (a_1 + a_3 + a_5)(a_2 + a_4)$ (២)

តាម(១) និង(២) នាំឲ្យយើងបាន , $A \leq \frac{1}{4}$

សមភាពកើតមានកាលណា $a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 = \frac{1}{2}$ ឬ $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = a_4 = a_5 = 0$

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមានៃ A គឺ $\max A = \frac{1}{4}$ ។

297. គេឲ្យស្វ៊ីត $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$u_1 = 1, u_2 = 3$$
$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$$

បង្ហាញថា $u_n = 1 + 2C_n^2 + 2^2 C_n^4 + 2^3 C_n^6 + \cdots$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $u_n = 1 + 2C_n^2 + 2^2 C_n^4 + 2^3 C_n^6 + \cdots$

យើងមាន $u_1 = 1, u_2 = 3, u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$ (១)

ទំនាក់ទំនង(១) មានសមីការសំគាល់ ,

$$r^2 = 2r + 1$$

ឬសរបស់សមីការសម្គាល់គឺ $r = 1 \pm \sqrt{2}$

គេបាន , $u_n = p\left(1+\sqrt{2}\right)^n + q\left(1-\sqrt{2}\right)^n$ ដែល p និង q ជាពីរចំនួនដែលនឹងត្រូវកំណត់

ដោយ $u_1 = 1$, $u_2 = 3$

គេបាន ទំនាក់ទំនងខាងលើសមមូល ,

$$\begin{cases} p\left(1+\sqrt{2}\right) + q\left(1-\sqrt{2}\right) = 1 \\ p\left(3+2\sqrt{2}\right) + q\left(3-2\sqrt{2}\right) = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p = q = \frac{1}{2}$$

នាំឲ្យយើងបាន ,

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)$$

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\left(C_n^0 + \sqrt{2}C_n^1 + 2C_n^2 + 2\sqrt{2}C_n^3 + \cdots\right) + \left(C_n^0 - \sqrt{2}C_n^1 + 2C_n^2 - 2\sqrt{2}C_n^3 + \cdots\right)\right)$$

$$u_n = \frac{1}{2}\left(2\left(1 + 2C_n^2 + 2^2 C_n^4 + 2^3 C_n^6 + \cdots\right)\right)$$

$$u_n = 1 + 2C_n^2 + 2^2 C_n^4 + 2^3 C_n^6 + \cdots$$

ដូចនេះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $u_n = 1 + 2C_n^2 + 2^2 C_n^4 + 2^3 C_n^6 + \cdots$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

298. គ្រប់ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$2 \cdot \sqrt[n]{(1+x)^2} + 3 \cdot \sqrt[n]{1-x^2} + \sqrt[n]{(1-x)^2} = 0$$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយសមីការ

គ្រប់ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ យើងមានសមីការ ,

$$2 \cdot \sqrt[n]{(1+x)^2} + 3 \cdot \sqrt[n]{1-x^2} + \sqrt[n]{(1-x)^2} = 0 \quad (១)$$

- បើ n ជាចំនួនគូ នោះ(១) មានឫសកាលណា ៖

$$\begin{cases}1+x=0\\1-x^2=0\\1-x=0\end{cases}$$ នាំឲ្យ $x\in\varnothing$ (គ្មានចម្លើយ)

ដូចនេះសមីការ(១)គ្មានឫសចំពោះ n ជាចំនួនគូ ។

- បើ n ជាចំនួនសេស នោះ $x=1$ មិនមែនជាឫសរបស់ (១) ទេ , គេបាន ៖

$$\frac{2\cdot\sqrt[n]{(1+x)^2}}{\sqrt[n]{(1-x)^2}}+\frac{3\cdot\sqrt[n]{1-x^2}}{\sqrt[n]{(1-x)^2}}+1=0$$

$$2\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}+3\cdot\sqrt[n]{\frac{1-x^2}{(1-x)^2}}+1=0 \qquad (២)$$

យក $t=\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}$

នោះសមីការ(២) សមមូល ,

$$2t^2+3t+1=0$$

$$t=-1, t=-\frac{1}{2}$$

ករណី $t=\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}=-1$ (n សេស) , គេបាន ៖

$$\frac{1+x}{1-x}=-1$$

$$1+x=x-1$$

$$1=-1$$ មិនពិត

ករណី $t=\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}=-\frac{1}{2}$ (n សេស) , គេបាន ៖

$$\frac{1+x}{1-x}=-\frac{1}{2^n}$$

$$2^n(1+x)=x-1$$

$$x\left(2^n-1\right)=-1-2^n$$

$$x=\frac{2^n+1}{1-2^n}$$

ដូចនេះសរុបមក សមីការមានឫស $x=\frac{1+2^n}{1-2^n}$ ដែល n ជាចំនួនគត់សេសធំជាង ២ ។

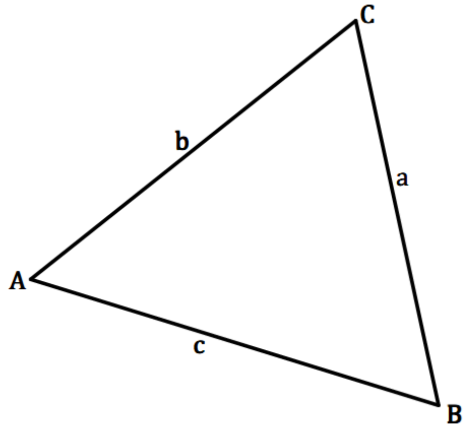
299. បង្ហាញថា បើត្រីកោណ ABC មួយ មានជ្រុងទាំងបី a,b,c បង្កើតបានជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ នោះ $B\le\frac{\pi}{3}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $B\le\frac{\pi}{3}$

ដោយ a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេបាន ,

$$\begin{cases} a=b-d \\ c=b+d \end{cases}$$ (d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត)



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស បំពោះត្រីកោណ ΔABC យើងបាន ,

$$b^2=a^2+b^2-2ac\cos B$$

នាំឲ្យ

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos B=\frac{(b-d)^2+(b+d)^2-b^2}{2(b-d)(b+d)}$$

$$\cos B=\frac{2b^2+2d^2-b^2}{2(b^2-d^2)}$$

$$\cos B=\frac{b^2+2d^2}{2(b^2-d^2)}$$

យើងមាន , $\frac{b^2+2d^2}{b^2-d^2}\ge 1$ ព្រោះ

$$b^2+2d^2\ge b^2-d^2$$

នាំឲ្យ $3d^2\ge 0$ ពិត

នាំឲ្យ $\cos B\ge\frac{1}{2}$ នោះ $B\le\frac{\pi}{3}$

ដូចនេះវិសមភាព $B\le\frac{\pi}{3}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

300. គេសន្មតថាសមីការ $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ មានឫសពីរ គឺ x_1 និង x_2 ។

បង្ហាញថា x_1^3 និង x_2^3 ជាឫសរបស់សមីការ ៖

$$X^2-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)X+(ad-bc)^3=0$$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា x_1^3 និង x_2^3 ជាឬសរបស់

សមីការ $X^2-\left(a^3+d^3+3abc+3bcd\right)X+\left(ad-bc\right)^3=0$

យើងមាន x_1 និង x_2 ជាឬសនៃសមីការ $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត , នាំឲ្យគេបាន ៖

$$\begin{cases} x_1+x_2=a+d \\ x_1x_2=ad-bc \end{cases}$$

នាំឲ្យគេបាន ,

$$\begin{aligned} x_1^3+x_2^3 &= \left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right) \\ &= \left(a+d\right)^3-3\left(ad-bc\right)\left(a+d\right) \\ &= a^3+d^3+3ad\left(a+d\right)-3\left(ad-bc\right)\left(c+d\right) \\ &= a^3+d^3+3\left(a+d\right)\left(ad-ad+bc\right) \\ &= a^3+d^3+3bc\left(a+d\right) \\ &= a^2+b^3+3abc+3bcd \end{aligned}$$

ហើយមួយវិញទៀត , $x_1^3x_2^3=\left(ad-bc\right)^3$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតច្រាស , គេបាន ៖

x_1^3 និង x_2^3 ជាឬសរបស់សមីការ ,

$$X^3-\left(a^3+b^3+3abc+3bcd\right)X+\left(ad-bc\right)^3=0$$

ដូចនេះ អ្វីៗដែលប្រធានចំណោទចង់បាន ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់រួចរាល់ ៕

ថ្ងៃទី ០៣ ឧសភា ឆ្នាំ ២០១២ នេះ ជាថ្ងៃដ៏មានន័យសម្រាប់សម្លាញ់ខ្ញុំគឺ "*វិអ៊ែល សម្បត្តិ*" ដែលបានរៀបអាពាហ៍ពិពាហ៍ នៅឯខេត្តប៉ៃលិន ។ សូមជូនពរសម្លាញ់ឲ្យជួបតែសេចក្តីសុខ សុភមង្គលគ្រប់ពេលវេលា ហើយសូមឲ្យសម្រេចតាមបំណងប្រាថ្នារបស់មិត្ត ។ គួរឲ្យសោកស្តាយដែលថ្ងៃដ៏មានន័យនេះមិនមានវត្តមានខ្ញុំបាទ , ដោយសារតែជាប់ធុរៈ ។
ពេលខ្លះ ខ្ញុំតែងនឹងឃើញរឿងរ៉ាវទាំងឡាយដែលកើតមានតាំងពីពួកយើងរៀននៅថ្នាក់ទី៩ ទី ១០ , ១១ , ១២ ជាមួយគ្នា គឺវាពិត្តអារម្មណ៍មួយដែលរំភើប មិនអាចនឹងរកពាក្យណាមួយមកដាក់ឲ្យត្រូវនឹងអារម្មណ៍នោះឡើយ ។ ពេលមើលរូបថតដែលយើងថតជាមួយគ្នា មើលទៅមុខគឺក្មេងៗ សោះ តែតឡូវវិញ បើមើលមុខគ្នាគឺឡើងចាស់ៗអស់ទៅហើយ ។

មិត្តអ្នកអានសាកល្បងគិតរឿងអតីតកាលល្អៗទៅមើល ចាតើអ្នកមានអារម្មណ៍យ៉ាងណា ?

លំហាត់ស្រាវជ្រាវ

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១.

១. ដោះស្រាយសមីការ $x^2-4x+3=\sqrt{x+5}$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $24x^2-60x+36-\frac{1}{\sqrt{5x-7}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0$ ។

ចម្លើយ ៖ ១. $x_1=4, x_2=\sqrt[3]{\frac{1}{54}\left(-61+3\sqrt{417}\right)}-\frac{2}{9\sqrt[3]{\frac{1}{54}\left(-61+3\sqrt{417}\right)}}+\frac{4}{3}$

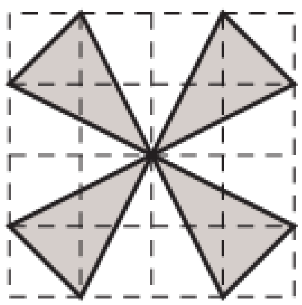
២. $x=\frac{3}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២.

តើផលបូក $13+113+213+313+\cdots+913$ ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣.

ក្នុងរូប, ការ៉េតូចៗមានរង្វាស់ជ្រុង $1cm$ ។ ចូររកក្រឡាផ្ទៃផ្នែកឆូត ។



ចម្លើយ ៖ $Area=6\,cm^2$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤.

ពីរតួដំបូងនៃស៊ីត ហ្វីបូណាស៊ី គឺ 1 និង 1 ។ បន្ទាប់មក តួនីមួយៗនៃស៊ីតគឺបានមកពីការបូកបញ្ចូលគ្នានៃតួពីរមុនដែលនៅជាប់នឹងវា ។ គេបានស៊ីត ហ្វីបូណាស៊ី ដូចតទៅ ៖

$$1\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 8\ ,\ 13\ ,\ 21\ ,\ 34\ ,\ \ldots$$

តើក្នុងចំណោម100តួដំបូងនៃស៊ីត ហ្វីបូណាស៊ី មានប៉ុន្មានតួ ដែលជាពហុគុណនៃ4 ?

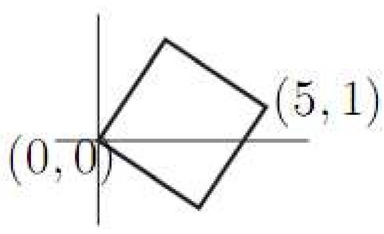
ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៥.

តើមានចំនួនគត់ចំនួនប៉ុន្មាន ដែលឋិតនៅចន្លោះ $\sqrt{11}$ និង $\sqrt{111}$?

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៦.

កំពូលទាំងពីរឈមគ្នានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់ការ៉េមួយមានកូអរដោនេ $(0,0)$ និង $(5,1)$ ។

តើការ៉េនោះមានផ្ទៃក្រឡាប៉ុន្មាន ?



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៧.

នៅពេលដែលគេយក N ទៅចែកនឹង 40 គេបានផលចែក និងសំណល់ 39 ដូចគ្នា ។ រកចំនួន N នោះ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៨.

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y និង z បង្ហាញថា ៖ $\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy} \geq x+y+z$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩.

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y និង z បង្ហាញថា ៖ $x^2+y^2+z^2 \geq \sqrt{2}\left(xy+xz\right)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១០.

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c និង d បង្ហាញថា ៖

$$16\left(abc+bcd+cda+dab\right) \leq \left(a+b+c+d\right)^4$$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១១.

គេមានចំនួន a_1, a_2, a_3, a_4 និង a_5 ជាចំនួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$\frac{a_1}{k^2+1}+\frac{a_2}{k^2+2}+\frac{a_3}{k^2+3}+\frac{a_4}{k^2+4}+\frac{a_5}{k^2+5}=\frac{1}{k^2}$ ចំពោះតម្លៃ $k=1, 2, 3, 4, 5$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃនៃកន្សោម $\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+\frac{a_3}{39}+\frac{a_4}{40}+\frac{a_5}{41}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១២.

តាង $\mathbb{N}$ ជាសំណុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ គេមានអនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $\left(f(m)+f(n)\right)\Big|(m+n)^{2013}$ ចំពោះគ្រប់ $m, n\in\mathbb{N}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៣.

គេឲ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f\left(x+2xy\right)=f\left(x\right)+2f\left(xy\right)$ ដែល $x, y\in\mathbb{R}$ និង $f\left(2012\right)=a$ ។ ចូរគណនា $f\left(2013\right)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៤.

អនុគមន៍ f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f\left(x\right)f\left(y\right)-f\left(x+y\right)=\sin x\sin y$ គ្រប់ $x, y\in\mathbb{R}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{1+f\left(2x\right)}+\frac{1}{1+f\left(4x\right)}+\frac{1}{1-f\left(6x\right)}>2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៥.

ដោះស្រាយក្នុងសំណុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន នូវសមីការ

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^4=3361-\sqrt{11296320}$$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៦.

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖ $\begin{cases}\left(3y^2\right)^{\log_3 2}-x^{\log_5 3}=x\\ \left(5x^2\right)^{\log_5 2}-y^{\log_3 5}=y\end{cases}$ ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០១៧.

ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x}}}=y$ ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០១៨.

ដោះស្រាយសមីការ $x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{1}{x^2}}-x^6\ln\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{1+\frac{1}{x^4}}=1-x^2$ ។

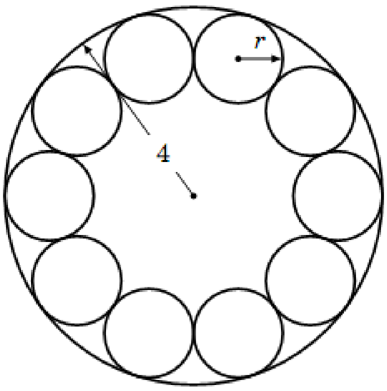
គ្រៀមសិស្សពូកែ ០១៩.

បើសិនជា a,b,c ជាចំនួនពិតផ្សេងពីគ្នា ។

បង្ហាញថា $\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}\geq 2$ ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២០.

A manufacturer needs to place ten identical ball bearings against the inner side of a circular container such that each ball bearing touches two other ball bearings, as in the picture. The (inner) radius of the container is 4 cm.

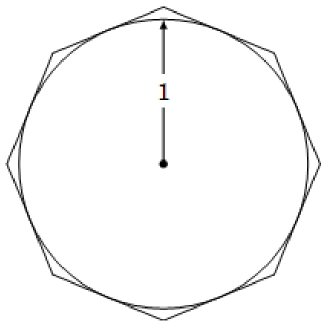


(a) Find the common radius r of the ball bearings.

(b) The manufacturer needs to place a circular ring inside the container. What is the largest possible (outer) radius of the ring such that it is not on top of the ball bearings and its base is level with the base of the container?

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២១.

A circle of radius 1 is inscribed inside a polygon with eight sides of equal length, called a regular octagon. That is, each of the eight sides is tangent to the circle, as in the picture.



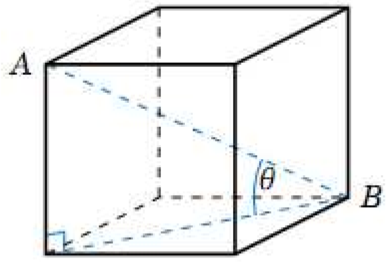
(a) Calculate the area of the octagon.

(b) If you were to increase the number of sides of the polygon, would the area inside it increase or decrease? What number would the area

approach, if any? Explain.

(c) Inscribe a regular octagon inside the same circle. That is, draw a regular octagon such that each of its eight vertices touches the circle. Calculate the area of this octagon.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២២.



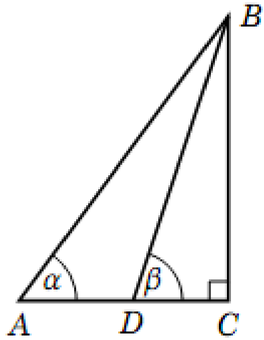
The picture on the right shows a cube whose sides are of length $a > 0$.

(a) Find the length of the diagonal line segment AB .

(b) Find the angle θ that AB makes with the base of the cube.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៣.

In Figure, suppose that α, β, and AD are known. Show that :



(a) $BC = \dfrac{AD}{\cot\alpha - \cot\beta}$

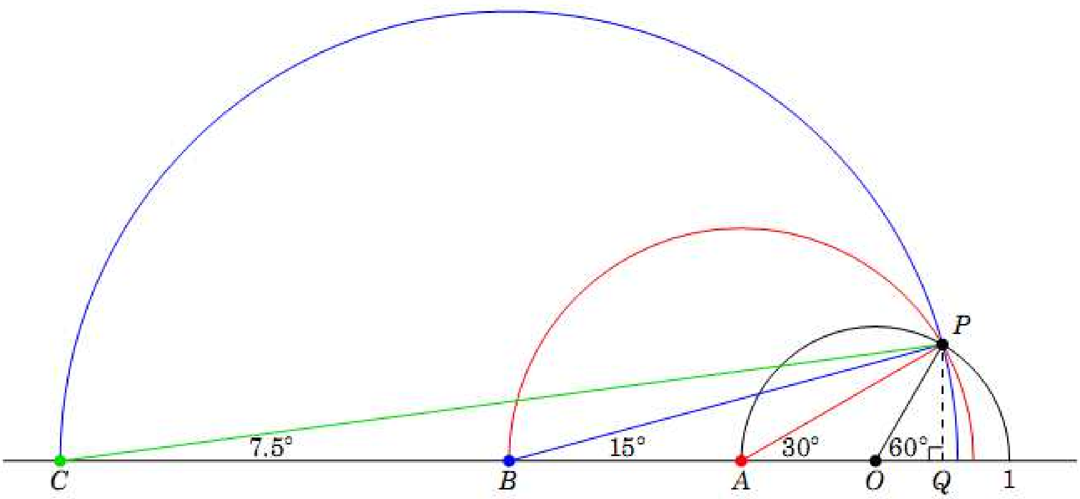
(b) $AC = \dfrac{AD \cdot \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$

(c) $BD = \dfrac{AD \cdot \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$

(Hint : What is the measure of the angle ∠ABD ?)

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៤.

we found the exact values of all six trigonometric functions of 75^o. For example, we showed that $\cot 75^o = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$. So since $\tan 15^o = \cot 75^o$ by the Cofunction Theorem, this means that $\tan 15^o = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$. We will now describe another method for finding the exact values of the trigonometric functions of 15^o. In fact, it can be used to find the exact values for the trigonometric functions of $\dfrac{\theta}{2}$ when those for θ are known, for any $0^o < \theta < 90^o$ .The method is illustrated in Figure and is described below.



Draw a semicircle of radius 1 centered at a point O on a horizontal line. Let P be the point on the semicircle such that OP makes an angle of 60^o with the horizontal line, as in Figure. Draw a line straight down from P to the horizontal line at the point Q. Now create a second semicircle as follows : Let A be the left endpoint of the first semicircle, then draw a new semicircle centered at A with radius equal to AP . Then create a third semicircle in the same way : Let B be the left endpoint of the second semicircle, then draw a new semicircle centered at B with radius equal to BP . This procedure can be continued indefinitely to create more semicircles.In general, it can be shown that the line segment from the center of the new semicircle to P makes an angle with the horizontal line equal to half the angle from the previous semicircle's center to P .

(a) Explain why $\angle PAQ = 30^o$. (Hint : What is the supplement of 60^o ?)

(b) Explain why $\angle PBQ = 15^o$ and $\angle PCQ = 7.5^o$.

(c) Use Figure to find the exact values of $\sin 15^o$, $\cos 15^o$, and $\tan 15^o$. (Hint : To start, you will need to use $\angle POQ = 60^o$ and OP =1 to find the exact lengths of PQ and OQ.)

(d) Use Figure to calculate the exact value of $\tan 7.5^o$.

(e) Use the same method but with an initial angle of $\angle POQ = 45^o$ to find the exact values of $\sin 22.5^o$, $\cos 22.5^o$, and $\tan 22.5^o$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៥.

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $f\left(xf\left(y\right)+x\right)=xy+f\left(x\right)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x,y ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦.

តាង x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា ៖

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le 1$$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧.

តាង a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $abc=1$ ។ បង្ហាញថា ៖

១. $\frac{a-1}{b}+\frac{b-1}{c}+\frac{c-1}{a}\ge 0$

២. $\frac{a-1}{b+c}+\frac{b-1}{c+a}+\frac{c-1}{a+b}\ge 0$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៨.

គេមាន a,b,c,d ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$ ។ បង្ហាញថា $(a+b)(c+d)\ge 2(ab+cd)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៩.

គេមាន a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។

បើ $a\le b\le c$ បង្ហាញថា $ab^2c^3\ge 1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣០.

បើគេពន្លាតកន្សោម $x_1(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_2)\cdots(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)$ តើមានប៉ុន្មានតួផ្សេងគ្នា ?

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣១.

បើ u ជាចំនួនគត់មួយ ។

ចូរសម្រួលកន្សោម $\sqrt[3]{3u-1+\sqrt{8u^3-3u^2}}+\sqrt[3]{3u-1-\sqrt{8u^3-3u^2}}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣២.

សន្មតថា $x^2=yx-1$ និង $y^2=1-y$ ។ បង្ហាញថា $x^5=1$ តែ $x\neq 1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៣.

តើ $\dfrac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\dfrac{a+b}{a+(a-b)}$ ត្រឹមត្រូវ ឬទេ ?

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៤.

តើចំនួនគត់ x ណាដែល $x^4+x^3+x^2+x+1$ ជាការេប្រាកដ ?

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៥.

តាង a និង b ជាចំនួនសនិទាន ។ តើអាចឬទេ t^5-t-1 និង t^2+at+b មានឫសកុំផ្លិចរួមគ្នា ?

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៦.

រកចំនួនពិត a,b ដែលសមីការ $x^3+ax^2+11x+6=0$ និង $x^3+bx^2+14x+8=0$ មានឫសរួមគ្នាចំនួនពីរ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៧.

សម្រួលកន្សោម $\left(\cos 42^o+\cos 102^o+\cos 114^o+\cos 174^o\right)^2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៨.

សន្មតថា $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$ ជាចំនួនគត់ផ្សេងគ្នាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

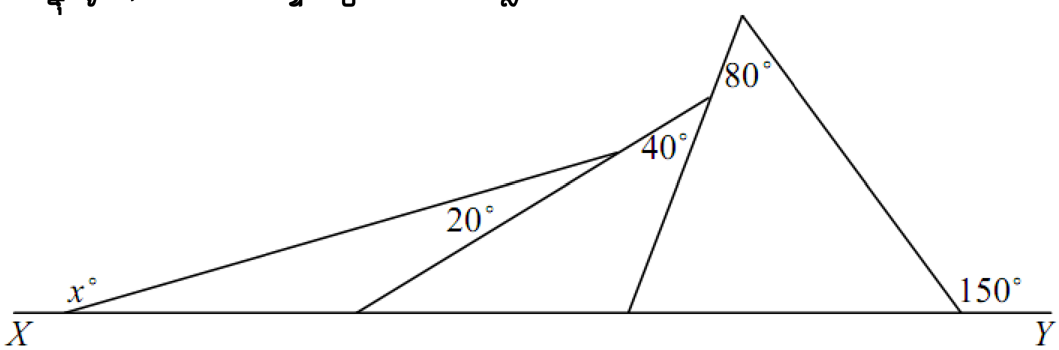
$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_{2n})+(-1)^{n-1}(n!)^2=0$$

មានឫសជាចំនួនគត់មួយ r ។

បង្ហាញថា $2nr=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ ។

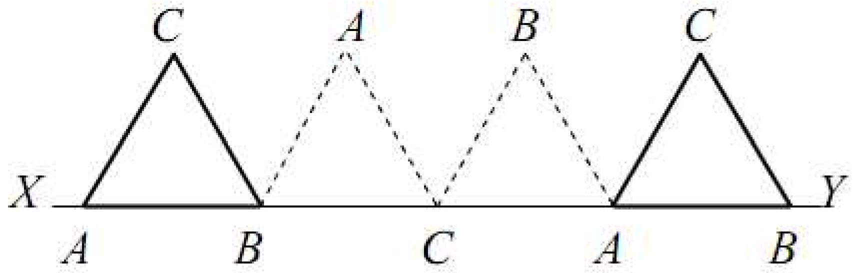
ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩.

នៅក្នុងរូប , XY គឺជាបន្ទាត់ត្រង់ ។ រកតម្លៃនៃ x ។



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤០.

The equilateral triangle ABC has sides of length 1 and AB lies on the line XY. The triangle is rotated clockwise around B until BC lies on the line XY. It is then rotated similarly around C and then about A as shown in the diagram.
What is the length of the path traced out by point C during this sequence of rotations?



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤១.

គេឲ្យ $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$, $(n \geq 2)$ ។

បង្ហាញថា $x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3} \cdot \cdots \cdot x_n^{p_n} \leq \left(\dfrac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤២.

ដោះស្រាយសមីការ ៖

១. $\cos^{2013} x + \sin^{2013} x = 2^{\cos^2 x - 1} + 2^{\sin^2 x - 2}$, $0 \leq x \leq \pi$

២. $5^{1+x} + 5^{1-x} = 9$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤៣.

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{\pi}{48} \leq \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{dx}{5 + 4\cos^2 x} \leq \dfrac{\pi}{36}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤៤.

កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ f ដោយដឹងថា $f\left(x + \dfrac{1}{x} \right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤៥.

រកបណ្តាចំនួនសនិទាន x ដែលធ្វើឲ្យកន្សោម $x^2 + x + 6$ ជាការ៉េប្រាជនៃចំនួនគត់មួយ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤៦.

a, b, c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geq a + b + c + \dfrac{4(a-b)^2}{a+b+c}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤៧.

a, b, c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\dfrac{b+c}{a^2} + \dfrac{c+a}{b^2} + \dfrac{a+b}{c^2} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤៨.

a, b, c, d ជាបួនចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \geq 1 \text{ ។}$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤៩.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $a+b+c\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។បង្ហាញថា $a+b+c\geq\frac{3}{abc}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៥០.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $(a+b)(b+c)(c+a)=1$ ។

បង្ហាញថា $ab+bc+ca\geq\frac{3}{4}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៥១.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $a+b+c=3$ ។

បង្ហាញថា $a^2b^2c^2\geq(3-2a)(3-2b)(3-2c)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៥២.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $abc\geq1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៥៣.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $abc=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{b^2(c+1)}+\frac{b}{c^2(a+1)}+\frac{c}{a^2(b+1)}\geq\frac{3}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៥៤.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $a+b+c\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a^3c}{b(c+a)}+\frac{b^3a}{c(a+b)}+\frac{c^3b}{a(b+c)}\geq\frac{3}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៥៥.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៥៦.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $ab+bc+ca+2abc=1$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq\frac{3}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៥៧.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $abc=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៥៨.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា $a(1+b-c)^{\frac{1}{3}}+b(1+c-a)^{\frac{1}{3}}+c(1+a-b)^{\frac{1}{3}}\leq1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៥៩.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា $2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\geq\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៦០.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3\geq\frac{3}{8}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៦១.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា $10\left(a^3+b^3+c^3\right)-9\left(a^5+b^5+c^5\right)\geq 1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៦២.

a,b,c,d ជាបួនចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $abcd=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geq 1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៦៣.

a,b,c ជាបីចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ហើយដែល $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}\leq 3$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៦៤.

a,b,c ជាបីចំនួន ដែល $0\leq a,b,c\leq 1$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\leq 2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៦៥.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $ab+bc+ca=3$ ។

បង្ហាញថា $a^3+b^3+c^3+6abc\geq 9$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៦៦.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $abc=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\geq 1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៦៧.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៦៨.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $a+b+c=3$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៦៩.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា $a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៧០.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៧១.

a,b,c,d ជាបួនចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\ge\frac{a+b+c+d}{abcd}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៧២.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $a^4+b^4+c^4=3$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៧៣.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $abc=8$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\ge\frac{4}{3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៧៤.

x,y,z ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $xyz\ge1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\ge0$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៧៥.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $abc=1$ ហើយ $n\in\mathbb{N}$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^n+b^n+1}+\frac{1}{b^n+c^n+1}+\frac{1}{c^n+a^n+1}\le1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៧៦.

គេឲ្យ $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ ។ បង្ហាញថា $\frac{2\sqrt{2}}{x^2+y^2}\ge\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៧៧.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ហើយដែល $ab+bc+ca=1$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\le\frac{1}{abc}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៧៨.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge9(ab+bc+ca)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៧៩.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge(a+b+c)^3$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩០.

x,y,z ជាបីចំនួន ដែល $x,y,z>-1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq 2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩១.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩២.

x,y,z ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $x+y+z=3$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៣.

a,b,c,d ជាបួនចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$ ។

បង្ហាញថា $abcd\geq 3$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៤.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៥.

a,b,c,d ជាបួនចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា ៖

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}+\frac{2|ad-bc|}{\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}}\geq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2}$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៦.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៧.

a,b,c ជាបីចំនួនពិត ដែល $a^2+b^2+c^2=9$ ។ បង្ហាញថា $2(a+b+c)-abc\leq 10$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៨.

a,b,c ជាបីចំនួនពិត ដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab}\leq\frac{3}{5}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៩.

a,b,c ជាបីចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩០.

a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩១.

a,b,c ជាបីចំនួនពិត ដែល $bc\neq0$, $\frac{1-c^2}{bc}\geq0$ ។

បង្ហាញថា $10\left(a^2+b^2+c^2-bc^3\right)\geq2ab+5ac$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩២.

គេមាន $a,b,c,d\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ ។

បង្ហាញថា $\frac{abcd}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}\leq\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{(1-a)^4+(1-b)^4+(1-c)^4+(1-d)^4}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៣.

គេឲ្យ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ និង $x,y,z>0$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\geq\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៤.

គេមាន $x+y=2$ និង $x,y\geq0$ ។ បង្ហាញថា $x^2y^2\left(x^2+y^2\right)\leq2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៥.

គេមាន $a+b+c\geq abc$ និង $a,b,c\geq0$ ។ បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2\geq\sqrt{3}abc$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៦.

គេមាន $a^2+b^2+c^2+abc=4$ និង $a,b,c\geq0$ ។ បង្ហាញថា $0\leq ab+bc+ca-abc\leq2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៧.

គេមាន $x,y\in\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $3(x+y+1)^2+1\geq3xy$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៨.

គេមាន $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា ៖

$\sqrt{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)}\geq abc+\sqrt[3]{\left(a^3+abc\right)\left(b^3+abc\right)\left(c^3+abc\right)}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៩៩.

គេមាន $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា ៖ $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១០០.

គេមាន $a,b,c>0$ និង $abc=1$ ។ បង្ហាញថា ៖ $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១០១.

គេមាន $a,b>0$ ។ បង្ហាញថា ៖ $\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\geq\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១០២.

គេមាន $a,b,c>0$ និង $abc=1$ ។បង្ហាញថា ៖ $\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3}\ge\frac{18}{a^3+b^3+c^3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១០៣.

គេមាន $m,n\in\mathbb{N}$ និង $x\in[0,1]$ ។ បង្ហាញថា $\left(1-x^n\right)^m+\left(1-(1-x)^m\right)^m\ge 1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១០៤.

គេមាន $x,y,z>0$ ។ បង្ហាញថា $x^2+y^2+z^2\ge\sqrt{2}\left(xy+yz\right)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១០៥.

គេមាន $a,b,c>0$ ។បង្ហាញថា ៖ $\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១០៦.

គេមាន $a,b,c>0$ និង $a^2+b^2+c^2=3$ ។បង្ហាញថា ៖ $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\ge\frac{3}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១០៧.

គេមាន $a,b,c>0$ ។បង្ហាញថា ៖ $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\ge 1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១០៨.

គេមាន $a,b,c>0$ ។បង្ហាញថា ៖ $\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\ge\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១០៩.

គេមាន $p,q,r>0$ និង $p+q+r=1$ ។បង្ហាញថា ៖ $7\left(pq+qr+rp\right)\le 2+9pqr$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១១០.

គេមាន $x,y,z\ge 0$ និង $x+y+z=1$ ។បង្ហាញថា ៖ $x^2y+y^2z+z^2x\le\frac{4}{27}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១១១.

គេមាន $x,y,z>1$ ។បង្ហាញថា ៖ $x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy}\ge\left(xyz\right)^{xy+yz+zx}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១១២.

គេមាន $a\ge b\ge c\ge 0$ ។បង្ហាញថា ៖ $\left(a+3b\right)\left(b+4c\right)\left(c+2a\right)\ge 60abc$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១១៣.

គេមាន $a,b,c>0$ និង $a^2+b^2+c^2=1$ ។បង្ហាញថា ៖ $a+b+c+\frac{1}{abc}\ge 4\sqrt{3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១១៤.

គេមាន $a,b,c>0$ និង $a+b+c=1$ ។បង្ហាញថា ៖ $a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\le 1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១១៥.

គេមាន $x,y,z>1$ និង $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0116.

គេមាន $a,b,c>0$ ។បង្ហាញថា ៖ $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}+1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0117.

គេមាន $a,b,c>0$ ។បង្ហាញថា ៖ $\left(1+\frac{a}{b}\right)+\left(1+\frac{b}{c}\right)+\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0118.

គេមាន $a,b,c,d,e,f>0$ ដែល $a+b+c+d+e+f=1$ និង $ace+bdf\ge\frac{1}{108}$ ។

បង្ហាញថា ៖ $abc+bcd+cde+def+efa+fab\le\frac{1}{36}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0119.

គេមាន $x,y,z>0$ និង $x+y+z=xyz$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0120.

គេមាន $a,b,c\ge1$ ។បង្ហាញថា ៖ $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\le\sqrt{c(ab+1)}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0121.

គេមាន $x,y,z>0$ និង $xyz=1$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\ge\frac{3}{4}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0122.

គេមាន $a,b,c\ge0$ ដែល $a+b+c\ge abc$ ។បង្ហាញថា ៖ $a^2+b^2+c^2\ge abc$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0123.

គេមាន $x_1,x_2,x_3,x_4>0$ ដែល $x_1x_2x_3x_4=1$ ។

បង្ហាញថា ៖ $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\ge\max\left(x_1+x_2+x_3+x_4,\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0124.

គេមាន $x,y,z>0$ ។ បង្ហាញថា ៖ $\frac{3+\sqrt{3}}{9}\ge\frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)(xy+yz+zx)}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0125.

គេមាន $a,b,c>0$ ។បង្ហាញថា ៖ $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0126.

គេមាន $a,b,c>0$ និង $abc=1$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\le\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១២៧.

គេមាន $x,y,z>0$ និង $xyz=1$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq 2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១២៨.

គេមាន $a,b,c>0$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geq 1\geq \frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+ca}+\frac{ab}{c^2+ab}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១២៩.

គេមាន $a,b,c>0$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq \frac{1}{abc}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៣០.

គេមាន $a,b,c>0$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq \frac{3}{5}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៣១.

គេមាន $x,y\in\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា ៖ $x^2+y^2+1>x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៣២.

គេមាន $x,y,z,t\in\mathbb{R}$ ដែល $x+y+z+t=0$ និង $x^2+y^2+z^2+t^2=1$ ។

បង្ហាញថា ៖ $-1\leq xy+yz+zt+tx\leq 0$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៣៣.

គេមាន $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា ៖ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geq 3(a-b)(b-c)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៣៤.

គេមាន $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq 1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៣៥.

គេមាន $a,b,c\geq -\frac{3}{4}$ ដែល $a+b+c=1$ ។ បង្ហាញថា ៖ $\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq \frac{9}{10}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៣៦.

គេមាន $a,b>0$ ដែល $a+b=1$ ។ បង្ហាញថា ៖ $\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\geq \frac{1}{3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៣៧.

គេមាន $a,b,c\in\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា ៖ $(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4\geq \frac{4}{7}\left(a^4+b^4+c^4\right)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៣៨.

គេមាន $x,y,z>0$ ដែល $x+y+z=\sqrt{xyz}$ ។ បង្ហាញថា ៖ $xy+yz+zx\geq 9(x+y+z)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៣៩.

គេមាន $a,b,c>0$ ។

បង្ហាញថា ៖ $(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៤០.

គេមាន $a,b,c,d\geq 0$ ដែល $2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abc+bcd+cda+dab=16$ ។

បង្ហាញថា ៖ $a+b+c+d\geq\frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៤១.

គេមាន $a,b,c,d>0$ ។ បង្ហាញថា ៖ $\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៤២.

គេមាន $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា ៖ $a^ab^bc^c\geq(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៤៣.

គេមាន $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៤៤.

គេមាន $x,y>0$ ។ បង្ហាញថា ៖ $\frac{1}{xy}\geq\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៤៥.

គេមាន $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា ៖ $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៤៦.

គេឲ្យ $m,n\in\mathbb{N}$ និង $x,y>0$ ។ បង្ហាញថា ៖

$(n-1)(m-1)\left(x^{n+m}+y^{n+m}\right)+(n+m-1)\left(x^ny^m+x^my^n\right)\geq nm\left(x^{n+m-1}y+xy^{n+m-1}\right)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៤៧.

គេឲ្យ $x,y,z>0$ និង $xy+yz+zx=1$ ។

បង្ហាញថា $x\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)+y\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)+z\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\leq\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៤៨.

គេមាន $a,b,c,d>0$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៤៩.

គេមាន $a,b\geq 0$ ។

បង្ហាញថា ៖ $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\leq\frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4}\leq\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}\leq\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៥០.

គេឲ្យ $x,y,u,v>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{xy+xv+uy+uv}{x+y+u+v}\geq\frac{xy}{x+y}+\frac{uv}{u+v}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៥១.

គេឲ្យ $a,b,c,d>0$ និង $a+b+c+d=1$ ។

បង្ហាញថា $abc+bcd+cda+dab\leq\frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៥២.

គេមាន $0\leq a,b,c\leq 1$ ។ បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2\leq a^2b+b^2c+c^2a+1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៥៣.

គេឲ្យ $a,b,c\in\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា

$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2\geq(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៥៤.

គេឲ្យ $x\geq y\geq z>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\geq x^2+y^2+z^2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៥៥.

គេឲ្យ $x,y,z\in\mathbb{R}$ និង $x^2+y^2+z^2=2$ ។ បង្ហាញថា $x+y+z\leq 2+xyz$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៥៦.

គេឲ្យ $a,b,c\in\mathbb{R}$ និង $a^2+b^2+c^2=2$ ។ បង្ហាញថា $\left|a^3+b^3+c^3-abc\right|\leq 2\sqrt{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៥៧.

គេឲ្យ $a,b,c,d>0$ និង $ab+bc+cd+da=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៥៨.

គេឲ្យ $x,y,z>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2}\geq\frac{x+y+z}{3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៥៩.

គេឲ្យ $a,b>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៦០.

គេឲ្យ $a,b,c,d>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៦១.

គេឲ្យ $x,y,z>0$ និង $x+y+z=1$ ។ បង្ហាញថា $0\le xy+yz+zx-2xyz\le\dfrac{7}{27}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៦២.

គេឲ្យ $a,b,c\in[0,1]$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{a}{b+c+1}+\dfrac{b}{c+a+1}+\dfrac{c}{a+b+a}+(1-a)(1-b)(1-c)\le 1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៦៣.

គេឲ្យ $x,y,z>0$ និង $x+y+z=1$ ។ បង្ហាញថា $x^3+y^3+z^3+6xyz\ge\dfrac{1}{4}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៦៤.

គេឲ្យ $a,b,c,d>0$ ។ បង្ហាញថា $1<\dfrac{a}{a+b+d}+\dfrac{b}{b+c+a}+\dfrac{c}{c+d+b}+\dfrac{d}{d+a+c}<2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៦៥.

គេឲ្យ $x_1,x_2>0,y_1,y_2,z_1,z_2\in\mathbb{R},x_1y_1>z_1^2,x_2y_2>z_2^2$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\dfrac{1}{x_2y_2-z_2^2}\ge\dfrac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៦៦.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៦៧.

គេឲ្យ $a,b>0,a\ne b$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{ab}+\dfrac{a+b}{2}\right)\ge\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៦៨.

គេឲ្យ $-1<a=x,y,z<1$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}+\dfrac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}\ge 2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៦៩.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\ge\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៧០.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា ៖

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\ge 3$$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៧១.

គេឲ្យ $a,b,c,d>0$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{a-b}{b+c}+\dfrac{b-c}{c+d}+\dfrac{c-d}{d+a}+\dfrac{d-a}{a+b}\ge 0$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៧២.

គេឲ្យ $x,y,z>0$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\ge\dfrac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៧៣.

គេឲ្យ $x,y,z>0, x+y+z=1$ ។

បង្ហាញថា $(1+x)(1+y)(1+z)\geq\left(1-x^2\right)^2+\left(1-y^2\right)^2+\left(1-z^2\right)^2$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៧៤.

គេឲ្យ $xy>0, x,y\in\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $\frac{2xy}{x+y}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\geq\sqrt{xy}+\frac{x+y}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៧៥.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៧៦.

គេឲ្យ $a,b,c>0, abc=1$ ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៧៧.

គេឲ្យ $a,b,c>0, abc=1$ ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\geq\frac{1}{2}(a+b)(c+a)(b+c)-1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៧៨.

គេឲ្យ $x,y,z>0, x+y+z=3, x^2+y^2+z^2=7$ ។ បង្ហាញថា $1+\frac{6}{xyz}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\right)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៧៩.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq\frac{3(a+b+c)}{a+b+c+3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៨០.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2+2abc+3\geq(1+a)(1+b)(1+c)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៨១.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា ៖

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}+\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}+\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}\geq a\sqrt{2a^2+bc}+b\sqrt{2b^2+ca}+c\sqrt{2c^2+ab}$$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៨២.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}\geq\frac{3}{1+abc}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៨៣.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៨៤.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0185.

គេឲ្យ $a,b,c>0, a^2+b^2+c^2=1$ ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3+\frac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0186.

គេឲ្យ $a,b,c>0, a^2+b^2+c^2=1$ ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\leq\frac{9}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0187.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\geq 33$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0188.

គេឲ្យ $x,y\in\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $-\frac{1}{2}\leq\frac{(x+y)(1-xy)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}\leq\frac{1}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0189.

គេឲ្យ $0<x,y<1$ ។ បង្ហាញថា $x^y+y^x>1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0190.

គេឲ្យ $x,y,z>0$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt[3]{xyz}+\frac{|x-y|+|y-z|+|z-x|}{3}\geq\frac{x+y+z}{3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0191.

គេឲ្យ $a,b,c,x,y,z>0$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}\geq\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0192.

គេឲ្យ $x,y,z>0$ ។

បង្ហាញថា $\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leq 1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0193.

គេឲ្យ $x,y,z>0, x+y+z=1$ ។ បង្ហាញថា $\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}+\frac{z}{\sqrt{1-z}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0194.

គេឲ្យ $a,b,c\in\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt{a^2+\left(1-b^2\right)}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0195.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0196.

គេឲ្យ $x,y,z>0, xy+yz+zx=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\geq\frac{2x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{2y\left(1-y^2\right)}{\left(1+y^2\right)^2}+\frac{2z\left(1-z^2\right)}{\left(1+z^2\right)^2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៩៧.

គេឲ្យ $x,y,z\ge 0$ ។ បង្ហាញថា $xyz\ge (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៩៨.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\ge \sqrt{4abc+(a+b)(b+c)(c+a)}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០១៩៩.

គេឲ្យ $x,y,z\ge 0$ ។ បង្ហាញថា ៖

$\left(\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{z(x+y)}\right)\cdot\sqrt{x+y+z}\ge 2\sqrt{(y+z)(z+x)(x+y)}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២០០.

គេឲ្យ $x,y,z>0$ ។ បង្ហាញថា ៖ $\dfrac{\sqrt{y+z}}{x}+\dfrac{\sqrt{z+x}}{y}+\dfrac{\sqrt{x+y}}{z}\ge \dfrac{4(x+y+z)}{\sqrt{(y+z)(z+x)(x+y)}}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២០១.

គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{a^2(b+c)}{(b^2+c^2)(2a+b+c)}+\dfrac{b^2(c+a)}{(c^2+a^2)(2b+c+a)}+\dfrac{c^2(a+b)}{(a^2+b^2)(2c+a+b)}>\dfrac{2}{3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២០២.

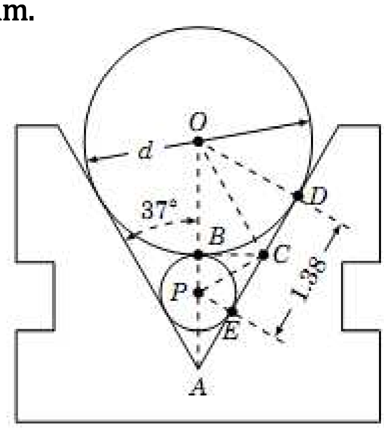
គេឲ្យ $a,b,c>0$ ។ បង្ហាញថា $\dfrac{a^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{b^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{c^2}{2c^2+(a+b)^2}<\dfrac{2}{3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២០៣.

គេឲ្យ $a,b,c\in\mathbb{R}$ ។ បង្ហាញថា $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$ ។

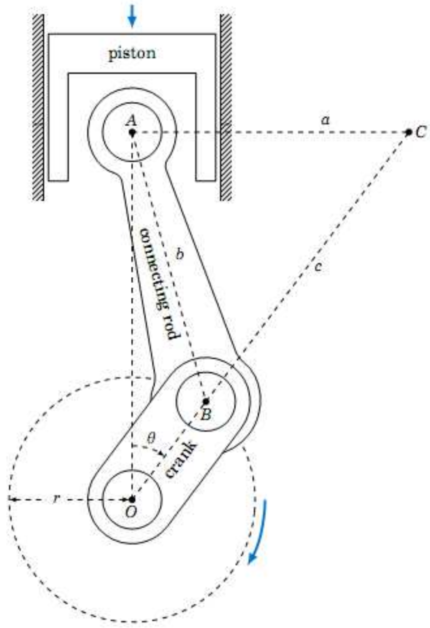
ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២០៤.

The machine tool diagram on the right shows a symmetric V-block, in which one circular roller sits on top of a smaller circular roller. Each roller touches both slanted sides of the V-block. Find the diameter d of the large roller, given the information in the diagram.



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២០៥.

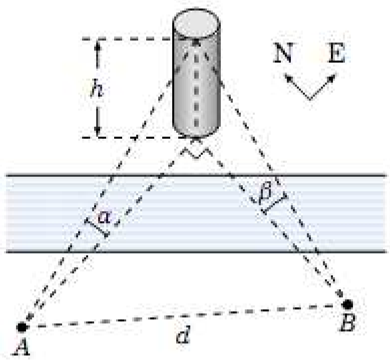
A slider-crank mechanism is shown in Figure below. As the piston moves downward the connecting rod rotates the crank in the clockwise direction, as indicated.



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២០៦.

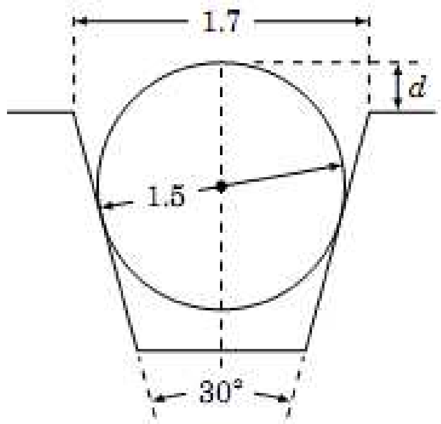
A tower on one side of a river is directly east and north of points A and B, respectively, on the other side of the river. The top of the tower has angles of elevation α and β from A and B, respectively, as in the picture on the right. Let d be the distance between A and B. Assuming that both sides of the river are at the same elevation, show that the height h of the tower is

$$h = \frac{d}{\sqrt{\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta}}$$



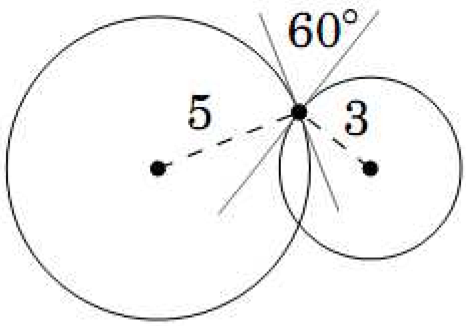
ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២០៧.

The machine tool diagram on the right shows a symmetric worm thread, in which a circular roller of diameter 1.5inches sits. Find the amount d that the top of the roller rises above the top of the thread, given the information in the diagram. (Hint: Extend the slanted sides of the thread until they meet at a point.)



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២០៨.

Two circles of radii 5 and 3 cm, respectively, intersect at two points. At either point of intersection, the tangent lines to the circles form a 60° angle, as in Figure. Find the distance between the centers of the circles.



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២០៩.

Use the Law of Cosines to show that for any triangle △ABC,

$c^2 < a^2 + b^2$ if C is acute,

$c^2 > a^2 + b^2$ if C is obtuse,

and $c^2 = a^2 + b^2$ if C is a right angle.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២១០.

Show that for any triangle △ABC,

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២១១.

Show that for any triangle △ABC,

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c)}{2abc}$$

What do the terms in parentheses represent geometrically? Use your answer to explain why cos A + cos B + cos C > 0 for any triangle, even if one of the cosines is negative[1].

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២១២.

Recall from elementary geometry that a median of a triangle is a line segment from any vertex to the midpoint of the opposite side. Show that the sum of the squares of the three medians of a triangle is 3/4 the sum of the squares of the sides.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២១៣.

The Dutch astronomer and mathematician Willebrord Snell (1580-1626) wrote the Law of Cosines as

$$\frac{2ab}{c^2 - (a-b)^2} = \frac{1}{1 - \cos C}$$

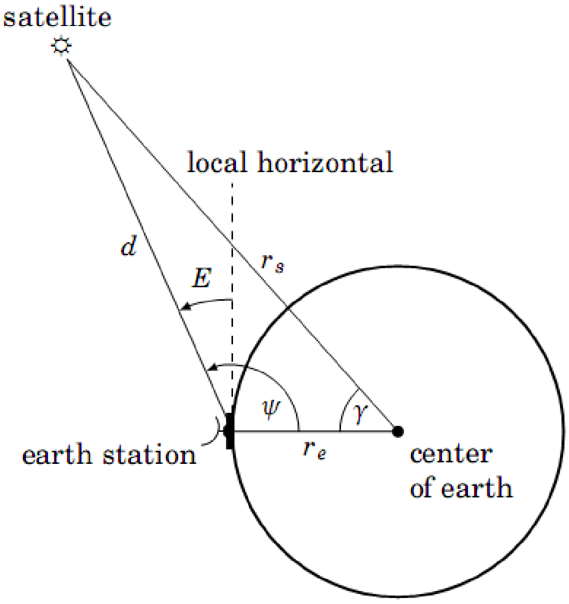
in his trigonometry text Doctrina triangulorum (published a year after his death). Show that this formula is equivalent to formula (*) in our statement of the Law of Cosines.

(*) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

[1] It turns out that 1 < cos A + cos B + cos C ≤ 3/2 for any triangle, as we will see later.

លំហាត់ទី 0214.

Suppose that a satellite in space, an earth station, and the center of the earth all lie in the same plane. Let re be the radius of the earth, let rs be the distance from the center of the earth to the satellite (called the orbital radius of the satellite), and let d be the distance from the earth station to the satellite. Let E be the angle of elevation from the earth station to the satellite, and let γ and ψ be the angles shown in Figure.



Use the Law of Cosines to show that

$$d = r_s\sqrt{1+\left(\frac{r_e}{r_s}\right)^2 - 2\left(\frac{r_e}{r_s}\right)\cos\gamma}$$

and then use $E = \psi - 90^o$ **and the Law of Sines to show that**

$$\cos E = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1+\left(\frac{r_e}{r_s}\right)^2 - 2\left(\frac{r_e}{r_s}\right)\cos\gamma}}$$

Note: This formula allows the angle of elevation E to be calculated from the coordinates of the earth station and the subsatellite point (where the line from the satellite to the center of the earth crosses the surface of the earth).

លំហាត់ទី 0215.

Let ΔABC be a right triangle with C = 90∘. Show that $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b}$.

លំហាត់ទី 0216.

For any triangle ΔABC, show that $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b}\cot\left(\frac{C}{2}\right)$.

លំហាត់ទី 0217.

For any triangle ΔABC, show that $\tan A = \frac{a\sin B}{c - a\cos B}$.

(Hint: Draw the altitude from the vertex C to AB.) Notice that this formula provides another way of solving a triangle in Case3 (two sides and the included angle).

លំហាត់ទី 0218.

For any triangle ΔABC, show that c = b cos A+a cos B. This is another check of a triangle.

លំហាត់ទី ០២១៩.

If b cos A = a cos B, show that the triangle △ABC is isosceles.

លំហាត់ទី ០២២០.

Let ABCD be a quadrilateral which completely contains its two diagonals. The quadrilateral has eight parts: four sides and four angles. What is the smallest number of parts that you would need to know to solve the quadrilateral? Explain your answer

លំហាត់ទី ០២២១.

ស្រាយបញ្ជាក់ថាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC អាចរកតាមរូបមន្ត

$$A=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$$ ។

លំហាត់ទី ០២២២.

For any triangle △ABC, let $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ **. Show that**

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

លំហាត់ទី ០២២៣.

Show that for any triangle △ABC, the radius R of its circumscribed circle is

$$R=\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

លំហាត់ទី ០២២៤.

Show that for any triangle △ABC, the radius R of its circumscribed circle and the radius r of its inscribed circle satisfy the relation

$$rR=\frac{abc}{2(a+b+c)}$$

លំហាត់ទី ០២២៥.

Let △ABC be an equilateral triangle whose sides are of length a.

a) Find the exact value of the radius R of the circumscribed circle of △ABC.

b) Find the exact value of the radius r of the inscribed circle of △ABC.

c) How much larger is R than r?

d) Show that the circumscribed and inscribed circles of △ABC have the same center.

លំហាត់ទី ០២២៦.

Let △ABC be a right triangle with C = 90°. Show that $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$

លំហាត់ទី ០២២៧.

Suppose that a point with coordinates $(x,y)=\left(a(\cos\psi-\varepsilon),a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\psi\right)$ **is a distance r > 0 from the origin, where a > 0 and** $0<\varepsilon<1$**. Use** $r^2=x^2+y^2$ **to show that** $r=a(1-\varepsilon\cos\psi)$**.**

(Note: These coordinates arise in the study of elliptical orbits of planets.)

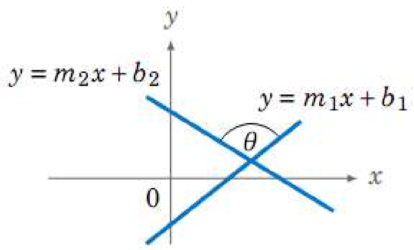
ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២២៨.

Let A, B, C, and D be positive angles such that A+B+C+D = 180°. Show that[2]

$$\sin A \sin B + \sin C \sin D = \sin(A+C)\sin(B+C) .$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២២៩.

Suppose that two lines with slopes m_1 and m_2, respectively, intersect at an angle θ and are not perpendicular (i.e. $\theta \neq 90^\circ$), as in the figur. Show that $\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៣០.

Use Exercise 0229 to find the angle between the lines y = 2x+3 and y = −5x−4.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៣១.

For any triangle △ABC, show that cot A cot B + cot B cot C + cot C cot A = 1.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៣២.

For any positive angles A, B, and C such that A+B+C = 90°, show that

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1 .$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៣៣.

Prove the identity sin (A+B) cos B − cos (A+B) sin B = sin A. Note that the right side depends only on A, while the left side depends on both A and B.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៣៤.

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ Mollweide's equations, $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}$ និង $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៣៥.

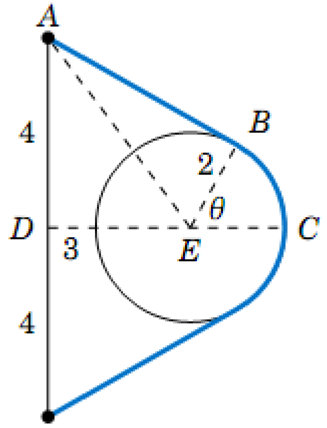
Using Mollweide's equations, please prove the Law of Tangents: For any triangle △ABC,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)},\ \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\dfrac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right)},\ \frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan\left(\dfrac{C-A}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{C+A}{2}\right)}$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៣៦.

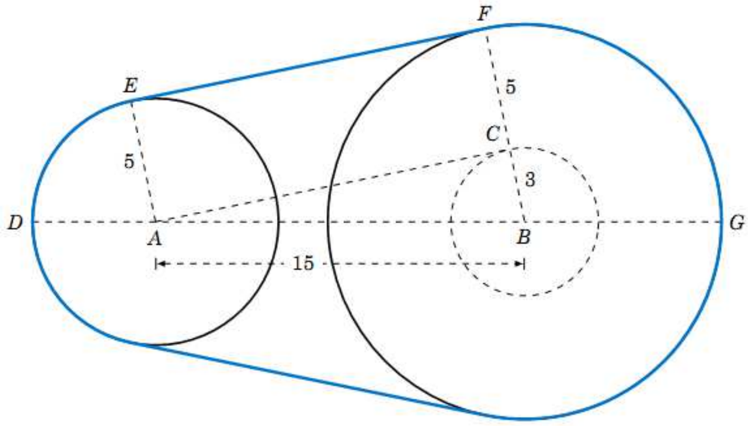
A rope is fastened to a wall in two places 8 ft apart at the same height. A cylindrical container with a radius of 2 ft is pushed away from the wall as far as it can go while being held in by the rope, as in Figure which shows the top view. If the center of the container is 3 feet away from the point on the wall midway between the ends of the rope, what is the length L of the rope?

[2] This is the "trigonometric form" of Ptolemy's Theorem, which says that a quadrilateral can be inscribed in a circle if and only if the sum of the products of its opposite sides equals the product of its diagonals.



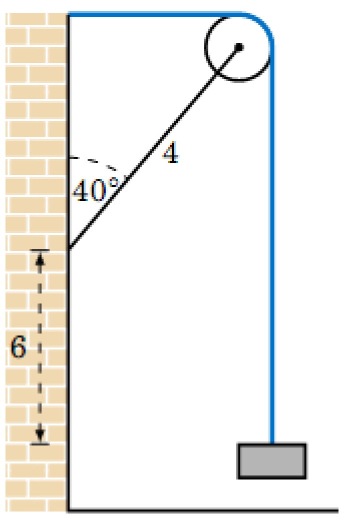
ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៣៧.

The centers of two belt pulleys, with radii of 5 cm and 8 cm, respectively, are 15 cm apart. Find the total length L of the belt around the pulleys.

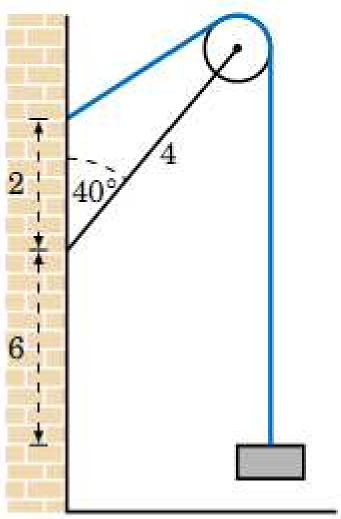


ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៣៨.

In Figure one end of a 4 ft iron rod is attached to the center of a pulley with radius 0.5 ft. The other end is attached at a 40° angle to a wall, at a spot 6 ft above the lower end of a steel wire supporting a box. The other end of the wire comes out of the wall straight across from the top of the pulley. Find the length L of the wire from the wall to the box.



Exercise 0238



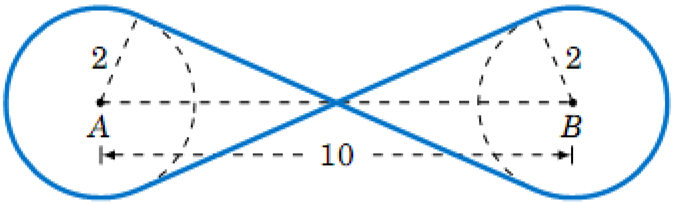
Exercise 0239

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៣៩.

Figure shows the same setup as in Exercise 6 but now the wire comes out of the wall 2 ft above where the rod is attached. Find the length L of the wire from the wall to the box.

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0240.

Find the total length L of the figure eight shape in Figure. (Hint: Draw a circle of radius 4 centered at A, then draw a tangent line to that circle from B.)

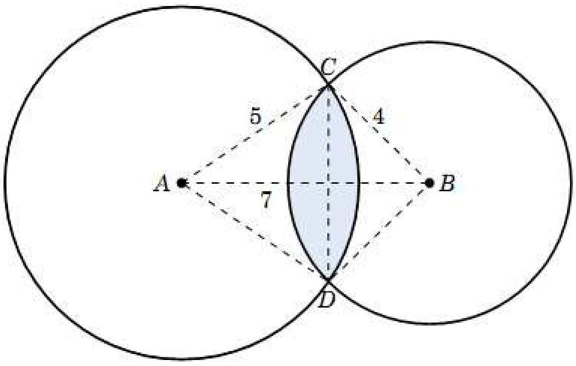


ត្រៀមសិស្សពូកែ 0241.

Repeat Exercise 8 but with the circle at A having a radius of 3 instead of 2.

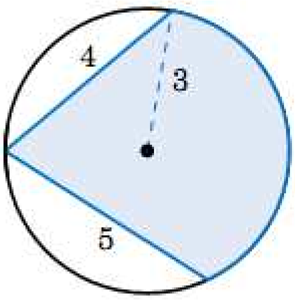
ត្រៀមសិស្សពូកែ 0242.

The centers of two circles are 7 cm apart, with one circle having a radius of 5 cm and the other a radius of 3 cm. Find the area K of their intersection.

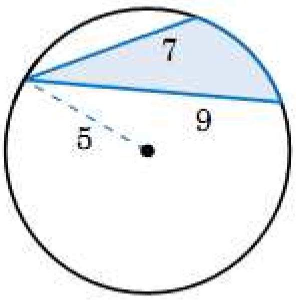


ត្រៀមសិស្សពូកែ 0243.

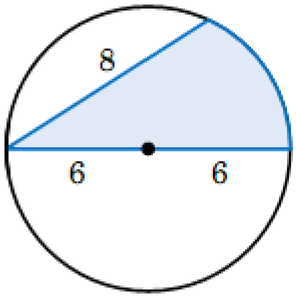
Find the area of the shaded region in Figure.



Exercise 0243



Exercise 0244



Exercise 0245

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0244.

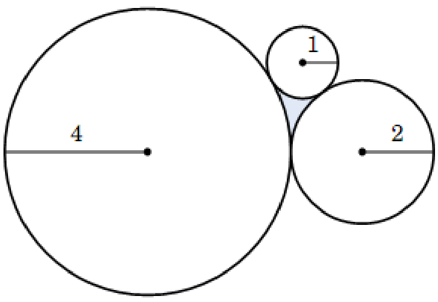
Find the area of the shaded region in Figure. (Hint: Draw two central angles.)

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0245.

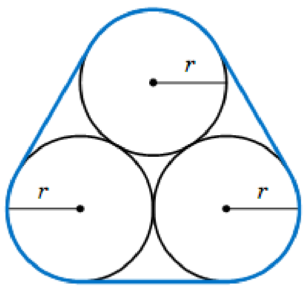
Find the area of the shaded region in Figure.

ត្រៀមសិស្សពូកែ 0246.

Three circles with radii of 4 m, 2 m, and 1 m are externally tangent to each other. Find the area of the curved region between the circles, as in Figure. (Hint: Connect the centers of the circles.)



Exercise 0246



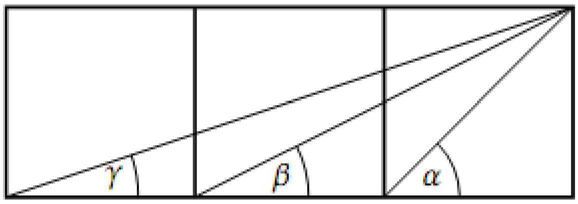
Exercise 0247

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៤៧.

Show that the total area enclosed by the loop around the three circles of radius r in Figure is $\left(\pi+6+\sqrt{3}\right)r^2$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៤៨.

Shows three equal squares lined up against each other. For the angles α, β, and γ in the picture, show that α = β+γ. (Hint: Consider the tangents of the angles.)

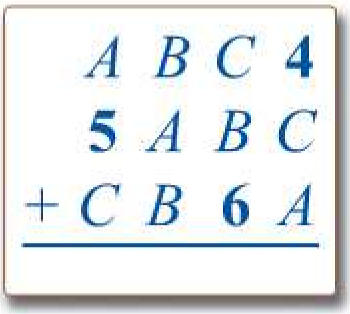


ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៤៩.

Sam's pet is tied to the corner of a square shed, 6 metres on each side. The rope is 8 metres long. The area outside the shed over which the pet can wander is $N\pi$ square metres. Find the whole number N.

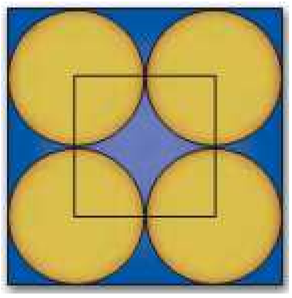
ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៥០.

Suppose that A, B, and C represent 1, 2, and 3 in some order. What is the greatest possible sum that can result from this addition?



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៥១.

As shown, each of four congruent circles just touches two other circles and two sides the outer square. The centres of the four circles are connected to form the inner square. If the area of the outer square is 100 sq cm, what is the area of the inner square, in sq cm?

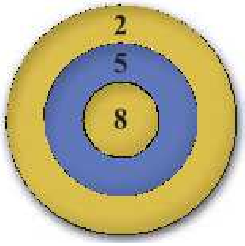


ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៥២.

Thirty cubes are placed in a line such that they are joined face to face. The edges of each cube are one cm long. Find the surface area of the resulting solid, in sq cm.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៥៣.

Each of three darts lands in a numbered region of the dart board, scoring the number of points shown. How many different sums are possible for the three darts?

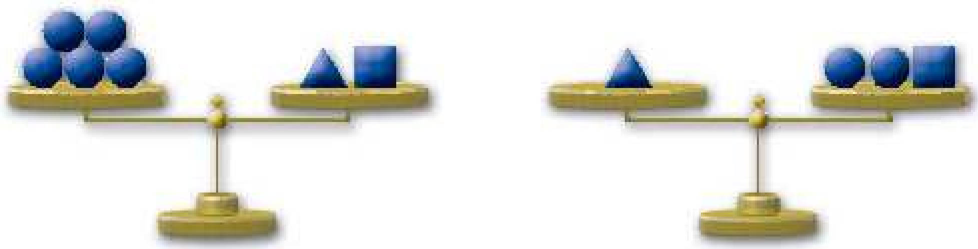


ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៥៤.

A "fast" clock gains time at the same rate every hour. It is set to the correct time at 10 a.m. When the fast clock shows 11 a.m. the same day, the correct time is 10:52 a.m. When the fast clock shows 3:30 p.m. that day, what is the correct time?

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៥៥.

Each diagram below shows a balance of masses using different objects. How many s will balance two s?



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៥៦.

គេឲ្យ កន្សោម ៖(n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន)

$$S = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha$$

$$T = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos n\alpha$$

បង្ហាញថា ៖

ក/. $S\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}$

ខ/. $T\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៥៧.

បង្ហាញថា ៖

ក/. $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{14}$

ខ/. $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

គ/. $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=-\frac{1}{2}$

ឃ/. $\sin\frac{\pi}{11}+\sin\frac{2\pi}{11}+\cdots+\sin\frac{10\pi}{11}=\cot\frac{\pi}{22}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៥៨.

បង្ហាញថា ៖

ក/. $4\cos 15^o\cos 21^o\cos 24^o-\cos 12^o-\cos 18^o=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

ខ/. $\tan 30^o+\tan 40^o+\tan 50^o+\tan 60^o=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^o$

គ/. $\frac{1}{\sin 18^o}-\frac{1}{\sin 54^o}=2$

ឃ/. $\tan 9^o-\tan 27^o-\tan 63^o+\tan 81^o=4$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៥៩.

បង្ហាញថា $\frac{\sin\alpha+\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha-\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦០.

បង្ហាញថា ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយបើ ៖

ក/. $\sin A=\frac{\cos B+\cos C}{\sin B+\sin C}$ គឺជាត្រីកោណកែង ។

ខ/. $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos B+\cos C}{\cos C+\cos A}$ គឺជាត្រីកោណសមបាត ឬត្រីកោណកែង ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦១.

រកតម្លៃ α ដើម្បីឲ្យ ៖

ក/. សមីការ $(\cos\alpha+3\sin\alpha-\sqrt{3})x^2+(\sqrt{3}\cos\alpha-3\sin\alpha-2)x+\sin\alpha-\cos\alpha+\sqrt{3}=0$

មានឫស $x=1$ ។

ខ/. សមីការ $(2\sin\alpha-\cos^2\alpha+1)x^2-\sqrt{3}x\sin\alpha+2\cos^2\alpha-(3-\sqrt{3})\sin\alpha=0$

មានឫស $x=\sqrt{3}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦២.

ដោះស្រាយសមីការ $12\cos x+5\sin x+\frac{5}{12\cos x+5\sin x+14}+8=0$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦៣.

មុំក្នុងរបស់ត្រីកោណកែង ABC គឺជាឫសរបស់សមីការ $\sin^3 x+\sin x\sin 2x-3\cos^3 x=0$ ។

បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC គឺជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦៤.

មុំក្នុងមួយរបស់ត្រីកោណសមបាត ABC គឺជាឫសរបស់សមីការ $\tan x - \tan\frac{x}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$ ។

បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC គឺជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦៥.

បង្ហាញថា $\cos^2(x-a) + \sin^2(x-b) - 2\cos(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b) = \cos^2(a-b)$ ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦៦.

ដោះស្រាយ និងពិភាក្សាប្រព័ន្ធសមីការ ជាអនុគមន៍នៃ a ៖

$$\begin{cases} 2^x + 4^y = 1 \\ x + 2y = a \end{cases}$$ ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦៧.

ដោះស្រាយសមីការ ៖

ក/. $\log_4\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \cdot \log_5\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \log_{20}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$

ខ/. $\left(2 + \sqrt{2}\right)^{\log_2 x} + x\left(2 - \sqrt{2}\right)^{\log_2 x} = 1 + x^2$

គ/. $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^{\sin x} = 2$ ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦៨.

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $\frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c}$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦៩.

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a\cot\frac{C}{2} + b\cot\frac{B}{2} = b\tan B + a\tan A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧០.

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}\left(\cot^2 A + \cot^2 B\right)$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧១.

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a\tan B + b\tan A = (a + b)\tan\left(\frac{A + B}{2}\right)$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ឬសមបាត ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧២.

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $\tan A + \tan B = 2\cot\frac{C}{2}$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

គម្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៣.

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $\dfrac{b}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}=\dfrac{a}{\sin B\sin C}$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

គម្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៤.

ត្រីកោណ ABC មានមុំ $A=2B$ ។ បង្ហាញថា $a^2=b^2+bc$ ។

គម្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៥.

គេឲ្យត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $\dfrac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}\left(\cot^2 A+\cot^2 B\right)$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

គម្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៦.

គេឲ្យត្រីកោណសមបាត ABC មាន $BC=a, AB=AC=b$ និង $\angle A=20^o$ ។

បង្ហាញថា $a^3+b^3=3ab^2$ ។

គម្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៧.

គេមានបំណុច (x_1,y_1) និង (x_2,y_2) ជាពីរបំណុចនៅលើខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=\log_a x$ ។

ក/. បង្ហាញថាចំណុច (x_1x_2, y_1+y_2) និង $\left(x_1^2x_2, 2y_1+y_2\right)$ ឋិតនៅលើខ្សែកោងខាងលើ ។

ខ/. បង្ហាញថាចំណុច $\left(\sqrt{x_1}x_2^2, \dfrac{1}{2}y_1+2y_2\right)$ និង $\left(\dfrac{x_1^2}{x_2}, 2y_1-y_2\right)$ ឋិតនៅលើខ្សែកោង ខាងលើ ។

គម្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៨.

គេមាន (x_1,y_1) និង (x_2,y_2) ជាពីរបំណុចឋិតនៅលើខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=a^x$ ដែល $a>0, a\neq 1$ ។

ក/. បង្ហាញថា $\left(3x_1, y_1^3\right)$ និង $\left(\dfrac{x_1}{3}, \sqrt[3]{y_1}\right)$ ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោងខាងលើ ។

ខ/. បង្ហាញថា $\left(x_1+2x_2, y_1y_2^2\right)$ និង $\left(2x_1-x_2, \dfrac{y_1^2}{y_2}\right)$ ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោងខាងលើ ។

គម្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៩.

គេមាន $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ ហើយ $0<\theta<\pi$ ។ គណនា ៖

ក/. $\sin\theta\cos\theta$ ខ/. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ គ/. $\sin^3\theta-\cos^3\theta$ ។

គម្រៀមសិស្សពូកែ ០២៨០.

រកតម្លៃលេខនៃកន្សោមខាងក្រោម ៖

$A=\dfrac{8\cos^3\theta-2\sin^3\theta+\cos\theta}{2\cos\theta-\sin^3\theta}$ បើដឹងថា $\tan\theta=\sqrt{5}$

$B=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$ បើដឹងថា $\tan\theta=2$, $C=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta-2\cos^2\theta}$ បើដឹងថា $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$

$D=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ បើដឹងថា $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ និង $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៩១.

ស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម ៖

ក/. $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}$ ខ/. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

គ/. $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$ ឃ/. $\dfrac{\cot\alpha-1}{1-\tan\alpha}=\cot\alpha$

ង/. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$ ច/. $\dfrac{\cot\theta-1}{\cot\theta+1}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

ឆ/. $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\tan^2\theta-1}=\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$ ជ/. $(a\cos\alpha+b\sin\alpha)^2+(a\sin\alpha-b\cos\alpha)^2=a^2+b^2$

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៩២.

បង្ហាញថា $\cos\theta\left(\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$ អាចសរសេរក្នុងទម្រង់ $k\cot\theta$ ដែល k ជាចំនួនថេរដែលត្រូវរក ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៩៣.

បង្ហាញថា $\cos\theta\left(\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ អាចសរសេរក្នុងទម្រង់ $k\cot\theta$ ដែល k ជាចំនួនថេរដែលត្រូវរក ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៩៤.

បង្ហាញថា $\sin\alpha\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$ អាចសរសេរក្នុងទម្រង់ $k\cot\alpha$ ដែល k ជាចំនួនថេរដែលត្រូវរក ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៩៥.

បង្ហាញសមភាពខាងក្រោម ៖

ក/. $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\tan^2\alpha+\tan^2\beta$

ខ/. $\dfrac{\cos\alpha}{\tan\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cot\alpha}=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\tan\alpha+\cot\alpha-1)$

គ/. $\tan^2\alpha(1+\tan^2\alpha)(1+\cot^2\alpha)-(1-\tan^2\alpha)^2=4\tan^2\alpha$ ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៩៦.

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម ៖

ក/. $\dfrac{\sin 2a+\sin 5a-\sin 3a}{1+\cos a-2\sin^2 2a}$ ខ/. $\dfrac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{\sin 7\alpha-\sin\alpha}$

គ/. $\dfrac{\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}}{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}}$ ដែល $-\dfrac{\pi}{4}<x<0$ ។

គ្រៀមសិស្សពូកែ ០២៩៧.

បំពោះ $-1\le t\le 1$ និង $t\neq 0$, បើ $\tan x=\dfrac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}$ ។ បង្ហាញថា $t=\sin 2x$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦៨.

បង្ហាញថាកន្សោម $A=\sin^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2 x+\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ មិនអាស្រ័យនឹងតម្លៃ x ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៦៩.

រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យកន្សោម $A=\cos 2x-a\sin^2 x+2\cos^2 x$ មិនអាស្រ័យនឹងតម្លៃ x ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧០.

បង្ហាញថាកន្សោម $A=\cos^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2 x+\cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ មិនអាស្រ័យនឹងតម្លៃ x ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧១.

រកតម្លៃ $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ដើម្បីឲ្យកន្សោម

$$A=\cos x+\cos(a+x)+\cos(2a+x)+\cos(3a+x)+\cos(4a+x)+\cos(5a+x)$$

មិនអាស្រ័យនឹងតម្លៃ x ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧២.

ចូរបង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=0$ ជាត្រីកោណកែង ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៣.

គេឲ្យត្រីកោណ ABC បង្ហាញថា បើ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{9}{4}$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៤.

បង្ហាញថាបើត្រីកោណ ABC មានមុំទាំងបីផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sin A=\frac{\cos B+\cos C}{\sin B+\sin C}$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែង ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៥.

រករង្វាស់មុំទាំងបីរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ បើ ៖ $\begin{cases}\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0\\ \cos A\cos B=\sin^2\frac{C}{2}\end{cases}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៦.

រករង្វាស់មុំទាំងបីរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ បើ ៖ $\begin{cases}\sin B+\sin C=2\sin A\\ \tan B+\tan C=2\tan A\end{cases}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៧.

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងទាំងបីផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $8\cos A\cos B\cos C=1$ ។ រករង្វាស់មុំទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC នោះ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០២៧៨.

រករង្វាស់មុំក្នុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC មួយ បើ ៖ $\begin{cases}\sin B=\left(\sqrt{2}-\cos C\right)\sin A\\ \sin C=\left(\sqrt{2}-\cos B\right)\sin A\end{cases}$ ។

លំហាត់សិស្សពូកែ ០២៩៩.

បង្ហាញថាបើក្នុងត្រីកោណ ABC យើងបាន $\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}\left(\cot^2 A+\cot^2 B\right)$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

លំហាត់សិស្សពូកែ ០៣០០.

បង្ហាញថា , បើ $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A+\sin B-\sin C}=\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

លំហាត់សិស្សពូកែ ០៣០១.

បង្ហាញថាបើ $\cos A=\sin B+\sin C-\frac{3}{2}$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

លំហាត់សិស្សពូកែ ០៣០២.

បង្ហាញថាបើ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែង ។

លំហាត់សិស្សពូកែ ០៣០៣.

បង្ហាញថាបើ $\sin A+\sin B+\sin C=1-\cos A+\cos B+\cos C$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែង ។

លំហាត់សិស្សពូកែ ០៣០៤.

គេមានត្រីកោណ ABC និង A,B,C ជារង្វាស់មុំក្នុងរបស់វា ។

ក/. បើគេដឹងថា $\cos A+\cos B+\cos C=2$ ចូរគណនា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ។

ខ/. បង្ហាញថា $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\left(1+\cos A\cos B\cos C\right)$ ។

លំហាត់សិស្សពូកែ ០៣០៥.

សរសេរទំនាក់ទំនងរវាង x និង y បើ ៖

ក/. $x+1=\cos 2\theta$ និង $y=\sin\theta$ ខ/. $x=\cos 2\theta$ និង $y=\cos\theta-1$

គ/. $x-3=\cos 2\theta$ និង $y=2-\sin\theta$ ឃ/. $x=3\sin\theta-2\cos\theta$ និង $y=3\cos\theta+2\sin\theta$

លំហាត់សិស្សពូកែ ០៣០៦.

ក្នុងត្រីកោណ ABC មាន $\angle BAC=\theta$ និង $\angle ABC=2\theta$ ។ បើ $BC=x$,

បង្ហាញថា $AC=2x\cos\theta$ ។

លំហាត់សិស្សពូកែ ០៣០៧.

ក្នុងត្រីកោណ DEF មួយ , $\angle EDF=\theta$ និង $\angle DEF=4\theta$ ។ បើ $EF=x$,

បង្ហាញថា $DF=4x\cos\theta\cdot\cos 2\theta$ ។

លំហាត់សិស្សពូកែ ០៣០៨.

បង្ហាញសមភាពខាងក្រោម ៖

ក/. $\frac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}=\cot\theta$ ខ/. $\tan A-\cot A=-2\cot 2A$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣០៩.

បង្ហាញថាបើក្នុងត្រីកោណ ABC មានមុំ A និង B ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$$\tan A+2\tan B=\tan A\cdot\tan^2 B$$

នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣១០.

បង្ហាញថា $x+a+y$ គឺជាកត្តាមួយនៃដេទែមីណង់ $\begin{vmatrix} a & x & y \\ x & a & y \\ x & y & a \end{vmatrix}$ ។

សរសេរដេទែមីណង់ខាងលើជាផលគុណនៃបីកត្តា ។

ទាញរកគ្រប់តម្លៃនៃ θ ក្នុងចន្លោះ $0\le\theta\le\pi$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & 1 & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & 1 \end{vmatrix}=0$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣១១.

គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=-1, u_{n+1}=\dfrac{n}{2(n+1)}u_n+\dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ស្រាយតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា ៖ $u_n<3$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣១២.

គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1, u_n=u_{n-2}+u_{n-1}$, $\forall n\ge 3$ ។

ស្រាយតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា ៖ $u_{n-1}\cdot u_{n+1}-u_n^2=(-1)^n$, $\forall n>1$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣១៣.

បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ដែលមានមុំក្នុងទាំងបីផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $\sin A=2\sin B\cos C$

នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣១៤.

ក/. សរសេរកន្សោម $\sin x-\cos x$ ជារាង $C\sin(x+\alpha)$ ។

ខ/. សរសេរកន្សោម $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ ជារាង $C\sin(2x+\alpha)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣១៥.

ក/. បង្ហាញថា $\sin 75^o=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\cos 75^o=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

ខ/. សរសេរកន្សោម $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x$ ជារាង $C\sin(x+\alpha)$ ។

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣១៦.

គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីត ៖

$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$y_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right) \text{ , } a\in\mathbb{R}$$

$$z_n=\frac{3n-2}{7n+5}$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣១៧.

តើស៊ីត $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$ រួមឬទេ ?

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣១៨.

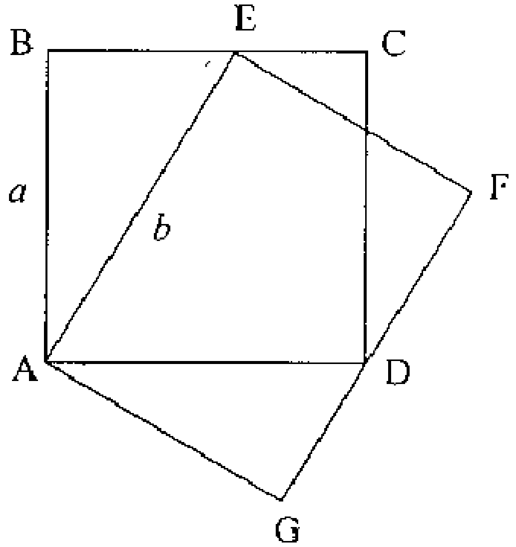
តើស៊ីត $x_n = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$ រួមឬទេ ?

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣១៩.

If a and b are integers and $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ is one of the roots of the equation $x^2+ax+b=0$, find the value of $a+b$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣២០.

$ABCD$ is a square with $AB=a$, and $AEFG$ is a rectangle such that E lies on side BC and D lies on side FG. If $AE=b$, what is the length of side EF ?



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣២១.

Find the value of $\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\sin^4\dfrac{7\pi}{8}$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣២២.

Find the minimum value of $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$, where a and b range over all positive real numbers.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣២៣.

The lengths of the sides of a quadrilateral are 2011 cm, 2012 cm, and x cm . If x is an integer, find the largest possible value of x.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣២៤.

Find the value of $\left(\log_{\sqrt{2}}\left(\cos 20^o\right)+\log_{\sqrt{2}}\left(\cos 40^o\right)+\log_{\sqrt{2}}\left(\cos 80^o\right)\right)^2$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣២៥.

Find the remainder when $(x-1)^{100}+(x-2)^{200}$ is divided by x^2-3x+2.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣២៦.

Suppose that ABC is a triangle and D is a point on side AB with $AD=BD=CD$. If $\angle ACB=x$, find the value of x.

លំហាត់ទី ០៣២៧.

បើ x, y និង z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $27x+28y+29z=363$,

រកតម្លៃនៃ $10(x+y+z)$ ។

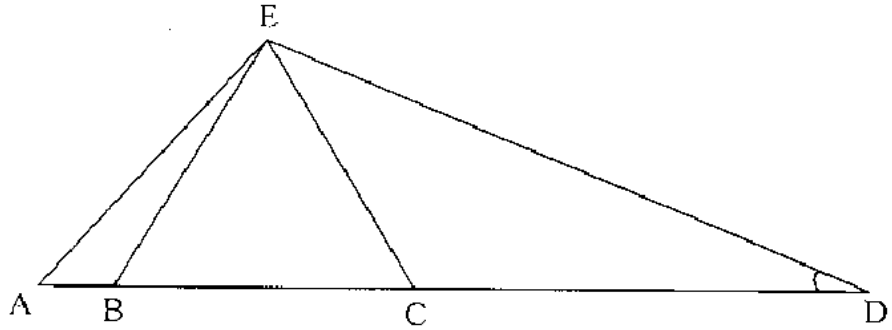
លំហាត់ទី ០៣២៨.

រកតម្លៃនៃ $\dfrac{\tan 40^o \tan 60^o \tan 80^o}{\tan 40^o+\tan 60^o+\tan 80^o}$ ។

លំហាត់ទី ០៣២៩.

នៅក្នុងរូបខាងក្រោម , ADE គឺជាត្រីកោណដែលមាន $\angle AED=120^o$ ហើយ B និង C គឺជាចំណុចនៅលើជ្រុង AD ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ BCE គឺជាត្រីកោណសម័ង្សមួយ ។

បើ $AB=4cm, CD=6cm$ និង $BC=x\,cm$ ។ រកតម្លៃនៃ x ។



លំហាត់ទី ០៣៣០.

សន្មតថា x និង y គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $x+2y=2012$ និង xy មានតម្លៃអតិបរមា,

រកតម្លៃនៃ $x-y$ ។

លំហាត់ទី ០៣៣១.

បើ $\cos 2A=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, រកតម្លៃនៃ $6\left(\sin^6 A+\cos^6 A\right)$ ។

លំហាត់ទី ០៣៣២.

Let N be the positive integer for which the sum of its two smallest factors is 4 and the sum of its two largest factors is 204. Find the value of N .

លំហាត់ទី ០៣៣៣.

បើ $S=\sum_{k=1}^{99}\dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}$, រកតម្លៃនៃ $1000S$ ។

លំហាត់ទី ០៣៣៤.

Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be the sequence of all positive integers that are relatively prime to 75, where $a_1<a_2<a_3<\cdots$.(The first five terms of the sequence are : $a_1=1, a_2=2$ $a_3=4, a_4=7, a_5=8$.) Find the value of a_{2013}.

លំហាត់ទី ០៣៣៥.

Given triangle ABC with points M and N are in the sides AB and AC respectively. If $\dfrac{BM}{MA}+\dfrac{CN}{NA}=1$, then prove that the centroid of ABC lies on MN .

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៣៦.

Given that $a,b,c,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$ **are real positives such that** $a+b+c=1$ **and** $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5=1$. **Prove that** $\left(ax_1^2+bx_1+c\right)\left(ax_2^2+bx_2+c\right)\cdots\left(ax_5^2+bx_5+c\right)\geq 1$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៣៧.

Find all pairs of nonnegative integers (x, y) satisfying $(14y)^x+y^{x+y}=2013$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៣៨.

In triangle ABC, D is a point on AB and E is a point on AC such that BE and CD are bisectors of B and C respectively. Let Q,M and N be the feet of perpendiculars from the midpoint P of DE onto BC, AB and AC, respectively. Prove that PQ = PM + PN.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៣៩.

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **so that (x + y)(f(x) − f(y)) = (x − y)f(x + y) for all x, y** $\in\mathbb{R}$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៤០.

In triangle ABC, the angle bisectors of angle B and C meet the median AD at points E and F respectively. If BE = CF, prove that 4ABC is isosceles.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៤១.

Let ABCD be a convex quadrilateral. Prove that there exists a point E in the plane of ABCD such that Δ **ABE is similar to** Δ **CDE.**

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៤២.

Let P , Q be points taken on the side BC of a triangle ABC, in the order B , P ,Q ,C. Let the circumcircles of PAB, QAC intersect at M ($\neq$ **A) and those of PAC, QAB at N (**$\neq$ **A). Prove that A , M , N are collinear if and only if P , Q are symmetric in the midpoint** A' **of BC.**

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៤៣.

For any positive real numbers a , b , c, $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៤៤.

Let a , b , c be positive numbers such that $a+b+c\leq 3$. **Prove that**

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{3}{2}.$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៤៥.

Prove that for any positive real numbers a , b , c,

$$\frac{a}{10b+11c}+\frac{b}{10c+11a}+\frac{c}{10a+11b}\geq\frac{1}{7}.$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៤៦.

Prove that for any positive real numbers a , b , c , d , e,

$$\frac{a}{b+2c+3d+4e}+\frac{b}{c+2d+3e+4a}+\frac{c}{d+2e+3a+4b}+\frac{d}{e+2a+3b+4c}+\frac{e}{a+2b+3c+4d}\geq\frac{1}{2}$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៤៧.

A sequence of natural numbers fang is defined by $a_1=1, a_2=3$ **and** $a_n=(n+1)a_{n-1}-na_{n-2}$, $n>2$. **Find all values of n such that** $11|a_n$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៤៨.

Suppose that a function f defined on the positive integers satisfies f(1) = 1, f(2) = 2, and $f(n+2)=f(n+2-f(n+1))+f(n+1-f(n))$, $(n\ge 1)$.

(a) Show that $0\le f(n+1)-f(n)\le 1$.

(b) Show that if $f(n)$ **is odd, then** $f(n+1)=f(n)+1$.

(c) Determine, with justification, all values of n **for which** $f(n)=2^{10}+1$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៤៩.

Prove that there are no perfect squares in the array below:

$$\begin{array}{llll} 11 & 111 & 1111 & \dots \\ 22 & 222 & 2222 & \dots \\ 33 & 333 & 3333 & \dots \\ 44 & 444 & 4444 & \dots \\ 55 & 555 & 5555 & \dots \\ 66 & 666 & 6666 & \dots \\ 77 & 777 & 7777 & \dots \\ 88 & 888 & 8888 & \dots \\ 99 & 999 & 9999 & \dots \end{array}$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៥០.

Let $(a_k)_{k\ge 0}$ **be a sequence given by** $a_0=0, a_{k+1}=3a_k+1$ **for** $k\ge 0$.

Prove that $11 | a_{155}$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៥១.

Find all continuous functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **such that**

$$f(x)^3=-\frac{x}{12}\left(x^2+7xf(x)+16f(x)^2\right)\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៥២.

Show that for p > 1 we have

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\dots+(n-1)^p+n^p+(n-1)^p+\dots+2^p+1^p}{n^2}=+\infty$$

Find the limit if p = 1.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៥៣.

show that the polynomial $x^4+3x^3+6x^2+9x+12$ **cannot be written as the product of 2 polynomials of degree 2 with integer coefficients.**

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៥៤.

Let (f_i) **be a sequence of functions defined by:** $f_1(x)=x$, $f_n(x)=\sqrt{f_{n-1}(x)}-\frac{1}{4}$.

$(x\in\mathbb{N}, n\ge 2)$.

(a) Prove that $f_n(x)\le f_{n-1}(x)$ **for all x where both functions are defined.**

(b) Find for each n the points of x inside the domain for which $f_n(x)=x$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៥៥.

Determine all integer solutions (a,b,c) with $c\le 94$ **for which:**

$$\left(a+\sqrt{c}\right)^2+\left(b+\sqrt{c}\right)^2=60+20\sqrt{c}.$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៥៦.

In triangle ΔADC **we got AD = DC and D =** 100°**. In triangle** ΔCAB **we got CA = AB and A =** 20°**. Prove that AB = BC + CD.**

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៥៧.

Determine all 6-digit numbers (abcdef) so that (abcdef) = $(def)^2$ where $(x_1x_2\ldots x_n)$ is no multiplication but an n-digit number.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៥៨.

Solve for $x \in [0, 2\pi)$: $\sin x < \cos x < \tan x < \cot x$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៥៩.

(a) Solve for $\theta \in \mathbb{R}: \cos 4\theta = \cos 3\theta$.

(b) $\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}$ **and** $\cos\frac{6\pi}{7}$ **are the roots of an equation of the form**

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ **where a, b, c, d are integers. Determine a, b, c and d.**

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៦០.

Find all positive integers a and b such that $\frac{a^4 + a^3 + 1}{a^2b^2 + ab^2 + 1}$ **is an integer.**

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៦១.

Given is an acute angled triangle 4ABC with side lengths a, b and c (in an usual way) and circumcenter O. Angle bisector of angle ∠BAC intersects circumcircle at points A and A_1. Let D be projection of point A_1 onto line AB, L and M be midpoints of AC and AB , respectively.

(a) Prove that $AD = \frac{1}{2}(b + c)$.

(b) If triangle ΔABC is an acute angled prove that A_1D = OM + OL .

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៦២.

If a, b and c are positive reals such that $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ prove the inequality:

$$\frac{a^5 + b^5}{ab(a+b)} + \frac{b^5 + c^5}{bc(b+c)} + \frac{c^5 + a^5}{ca(c+a)} \geq 3(ab + bc + ca) - 2.$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៦៣.

If a, b and c are positive reals prove inequality:

$$\left(1 + \frac{4a}{b+c}\right)\left(1 + \frac{4b}{a+c}\right)\left(1 + \frac{4c}{a+b}\right) > 25.$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៦៤.

Prove that in an isosceles triangle ΔABC with AC = BC = b following inequality holds $b > \pi r$, **where r is inradius.**

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៦៥.

Let AD be height of triangle ΔABC and R circumradius. Denote by E and F feet of perpendiculars from point D to sides AB and AC. If $AD = R\sqrt{2}$, **prove that circumcenter of triangle ΔABC lies on line EF.**

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៦៦.

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **satisfying** $f\left(f(x) + y\right) = f\left(x^2 - y\right) + 4f(x)y$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៦៧.

Let p = 4k+3 be a prime number. Find the number of different residues mod p of $(x^2 + y^2)^2$ where (x, p) = (y, p) = 1.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៦៨.

Show that the number x is rational if and only if three distinct terms that form a geometric progression can be chosen from the sequence

x, x + 1, x + 2, x + 3, ...

លំហាត់ទី ០៣៦៩.

Let x, y be two positive integers such that $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Prove that $x - y$ is a perfect square.

លំហាត់ទី ០៣៧០.

Let ABC be a triangle such that $BC = AC + \frac{1}{2}AB$**. Let P be a point of AB such that AP = 3PB. Show that** $\angle PAC = 2\angle CPA$**.**

លំហាត់ទី ០៣៧១.

Let a, b, c be three positive real numbers such that abc = 1. Show that:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$$ **. When is there equality?**

លំហាត់ទី ០៣៧២.

Let a, b, c, d be positive reals such taht a + b + c + d = 1. Prove that:

$$6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right) \geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}.$$

លំហាត់ទី ០៣៧៣.

Let A,B,C,D be four distinct points on a circle such that the lines AC and BD intersect at E, the lines AD and BC intersect at F and such that AB and CD are not parallel. Prove that C,D,E, F are on the same circle if, and only if, EF⊥AB.

លំហាត់ទី ០៣៧៤.

Suppose that the minimum value of the function $f(x) = 3x^2 - ax^3$ is -4 for $0 \leq x \leq 2$.

(1) Find the value of a.

(2) Find the maximum value M of f(x) for the interval $0 \leq x \leq 2$.

លំហាត់ទី ០៣៧៥.

Find the value of c such that $\sum_{n=1}^{11}(n-c)(2n-c)$ **is minimal and find the minimum value m.**

លំហាត់ទី ០៣៧៦.

Suppose that the all of the points on the line L : x + by + 2 = 0 is mapped to L by linear transformation f **expressed by matrix** $\begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ **with k > 0.**

(1) Find the values of k and b.

(2) Find the coordinate of P(u, v) on L such that f(P) = P.

លំហាត់ទី ០៣៧៧.

Is $\tan 1^o$ **a rational number?**

លំហាត់ទី ០៣៧៨.

Three nonnegative real numbers satisfy a, b, c satisfy $a^2 \leq b^2+c^2$, $b^2 \leq c^2+a^2$ and $c^2 \leq a^2+b^2$. Prove the inequality

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq 4\left(a^6+b^6+c^6\right)$$ **. When does equality hold?**

លំហាត់ទី ០៣៧៩.

Let be given a triangle ABC with BC = a,CA = b,AB = c. Find point P in the plane for which $aAP^2 + bBP^2 + cCP^2$ is minimum, and compute this minimum.

លំហាត់ទី ០៣៨០.

Find the smallest $x \in \mathbb{N}$ **for which** $\frac{7x^{25}-10}{83}$ **7x25−10 83 is an integer.**

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩១.

The incircle of a triangle $A_1A_2A_3$ is centered at O and meets the segment OA_j at B_j j = 1, 2, 3. A circle with center B_j is tangent to the two sides of the triangle having A_j as an endpoint and intersects the segment OB_j at C_j .

Prove that $\dfrac{OC_1+OC_2+OC_3}{A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1}\le\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$ and find the conditions for equality.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩២.

Find all pairs of functions f, g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

(i) if x < y, then f(x) < f(y) ,

(ii) f(xy) = g(y)f(x) + f(y) for all x, y ∈ $\mathbb{R}$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៣.

For positive numbers $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ we define

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ ,\ G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\ ,\ H=\frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}$$

Prove that

(i) $\dfrac{A}{H}\le-1+\left(\dfrac{A}{G}\right)^n$, for n even

(ii) $\dfrac{A}{H}\le-\dfrac{n-2}{n}+\dfrac{2(n-1)}{n}\left(\dfrac{A}{G}\right)^n$, for n odd

បំណាំ ៖ A ហៅថាមធ្យមនព្វន្តនៃ $a_1,a_2,a_3,...,a_n$

G ហៅថាមធ្យមធរណីមាត្រនៃ $a_1,a_2,a_3,...,a_n$

H ហៅថាមធ្យមអាកម៉ូនិចនៃ $a_1,a_2,a_3,...,a_n$

(សូមអានបន្ថែមសៀវភៅស្ដីតរបស់អ្នករៀបរៀងដដែល)

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៤.

For all positive reals a, b, and c, what is the value of positive constant k satisfies the following inequality?

$$\frac{a}{c+kb}+\frac{b}{a+kc}+\frac{c}{b+ka}\ge\frac{1}{2013}\ .$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៥.

Find all f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that for all real numbers x, f (x) ≥ 0 and for all real numbers x and y,

$$f(x+y)+f(x-y)-2f(x)-2y^2=0.$$

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៦.

ABCD is convex AD // BC, AC ⊥ BD. M is interior point of ABCD which is not a intersection of diagonals AC and BD such that ∠AMB = ∠CMD = $\dfrac{\pi}{2}$. P is intersection of angel bisectors of ∠A and ∠C. Q is intersection of angel bisectors of ∠B and ∠D. Prove that ∠PMB = ∠QMC.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៧.

Denote by M midpoint of side BC in an isosceles triangle ΔABC with AC = AB. Take a point X on a smaller arc MA of circumcircle of triangle 4ABM. Denote by T point inside of angle BMA such that ∠TMX = 90^o and TX = BX.

Prove that ∠MTB − ∠CTM does not depend on choice of X.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៨៨.

Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfying $f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$ for all pairs of positive reals x and y. Here, $\mathbb{R}^+$ denotes the set of all positive reals.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៨៩.

Let M be the intersection point of medians of a triangle ΔABC. It is known that $AC = 2BC$ and $\angle ACM = \angle CBM$. Find $\angle ACB$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩០.

The quadrilateral ABCD is cyclic. Points E and F are chosen at the diagonals AC and BD in such a way that $AF \perp CD$ and $DE \perp AB$. Prove that $EF \parallel BC$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩១.

Prove that there exist infinitely many collections of positive integers (a, b, c, d, e, f) such that $a < b < c$ and the equalities $ab - c = de$, $bc - a = ef$ and $ac - b = df$ hold.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩២.

Find all pairs of positive integers (a, b) such that $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} = \sqrt{ab-1}$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៣.

The point D at the side AB of triangle ABC is given. Construct points E, F at sides BC,AC respectively such that the midpoints of DE and DF are collinear with B and the midpoints of DE and EF are collinear with C.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៤.

Bob has picked positive integer $1 < N < 100$. Alice tells him some integer, and Bob replies with the remainder of division of this integer by N. What is the smallest number of integers which Alice should tell Bob to determine N for sure?

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៥.

Denote by S(n) the sum of digits of integer n. Find

a). $S(3) + S(6) + S(9) + \ldots + S(300)$,

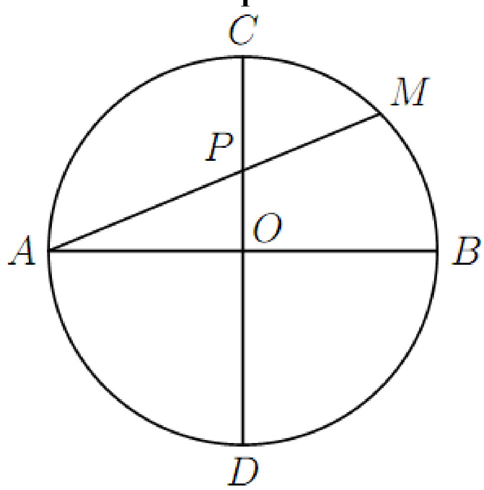
b). $S(3) + S(6) + S(9) + \ldots + S(3000)$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៦.

Let O be the circumcenter and I be the incenter of triangle ABC. Prove that if $AI \perp OB$ and $BI \perp OC$ then $CI \parallel OA$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៧.

Circle O has diameters AB and CD perpendicular to each other. AM is any chord intersecting CD at P. Then $AP \cdot AM$ is equal to:



(a) $AO \cdot OB$ (b) $AO \cdot AB$ (c) $CP \cdot CD$ (d) $CP \cdot PD$ (e) $CO \cdot OP$

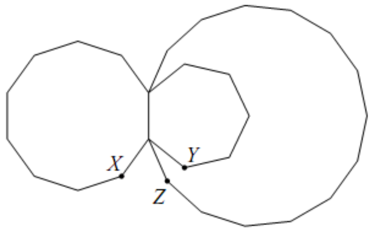
ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៨.

Prove $\dfrac{1}{\cos 0^o \cos 1^o}+\dfrac{1}{\cos 1^o \cos 2^o}+\cdots+\dfrac{1}{\cos 88^o \cos 89^o}=\dfrac{\cos 1^o}{\sin^2 1^o}$.

ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៣៩៩.

រកតម្លៃរបស់ $P+Q+R$ នៅក្នុងផលគុណខាងក្រោម ។

$$\begin{array}{cccccc} & & P & Q & P & Q \\ & \times & & R & R & R \\ \hline 6 & 3 & 9 & 0 & 2 & 7 \\ \hline \end{array}$$



ត្រៀមសិស្សពូកែ ០៤០០.

នៅក្នុងរូបខាងលើ , បង្ហាញអំពីសប្តកោណនិយ័ត , ទសកោណនិយ័ត និង ១៥-កោណនិយ័ត ដែលមានជ្រុងរួមគ្នាមួយ ។ គណនារង្វាស់នៃមុំ $\angle XYZ$ ។

កំណែកំហុសក្នុងសៀវភៅមុនៗ ៖

[1]. សៀវភៅ “១០០១ លំហាត់ vol 2”ត្រង់លំហាត់លេខ ១៨៩ បានសរសេរថា ៖ “គេឲ្យផ្នែកគត់ និងផ្នែកប្រភាគនៃ ...”។ សូមមិត្តអ្នកអានកែថា ៖ “គេឲ្យផ្នែកគត់ និងផ្នែកទសភាគនៃ ...” វិញ ។

[2]. សៀវភៅ “លំហាត់គណិតវិទ្យាពិភពលោក ភាគ១” ត្រង់ទំព័រទី ១២០ (ស្វ៊ីតអាម៉ូនិច) បានសរសេរថា ៖ “ស្វ៊ីតអាម៉ូនិចជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលបច្រាសរបស់វាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ” សូមមិត្តអ្នកអានកែថា ៖ “ស្វ៊ីតអាម៉ូនិចជាស្វ៊ីតដែលបច្រាសរបស់វាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត” វិញ ។

យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងមានការសោកស្តាយជាខ្លាំងចំពោះកំហុសឆ្គងទាំងនេះ ។ នេះបណ្តាលមកពីចំណេះដឹងរបស់អ្នករៀបរៀងនៅមានកម្រិតទាប ហើយ មិនបានពិនិត្យឯកសារយោងឲ្យបានច្បាស់លាស់ ។ អ្នករៀបរៀងសូមសន្យាថា នឹងខិតខំធ្វើឲ្យឯកសារក្រោយៗមានកំហុសតិចតួចបំផុត ។ សូមអរគុណចំពោះការគាំទ្ររបស់មិត្តអ្នកអានកន្លងមក ។

មិត្តអ្នកអានដែលគាំទ្រខ្ញុំព្រោះតែគិតថាខ្ញុំបានចូលរួមចំណែកបានល្អក្នុងការអភិវឌ្ឍប្រទេសជាតិ ជាពិសេសគឺវិស័យអប់រំគណិតវិទ្យា ។ សូមឲ្យមិត្តអ្នកអានដែលគ្រប់អាយុបោះឆ្នោត សូមចូលរួមការបោះឆ្នោតឆ្នាំ ២០១៣ នេះឲ្យបានគ្រប់ៗគ្នា ហើយសម្រេចចិត្តឲ្យបានច្បាស់លាស់ប្រកបដោយការពិចារណា វិភាគ និងការទទួលខុសត្រូវ ។ ការបោះឆ្នោតគឺដើម្បីសម្រេចជោគវាសនារបស់ខ្លួនយើង គ្រួសារ កូនចៅជំនាន់ក្រោយរបស់យើង និងប្រទេសជាតិរបស់យើង ។

សូមរង់ចាំអាន វ៉ុល៤ ជាបន្ត