រៀបរៀងដោយ លោក តាត់ វិសុទ្ធី

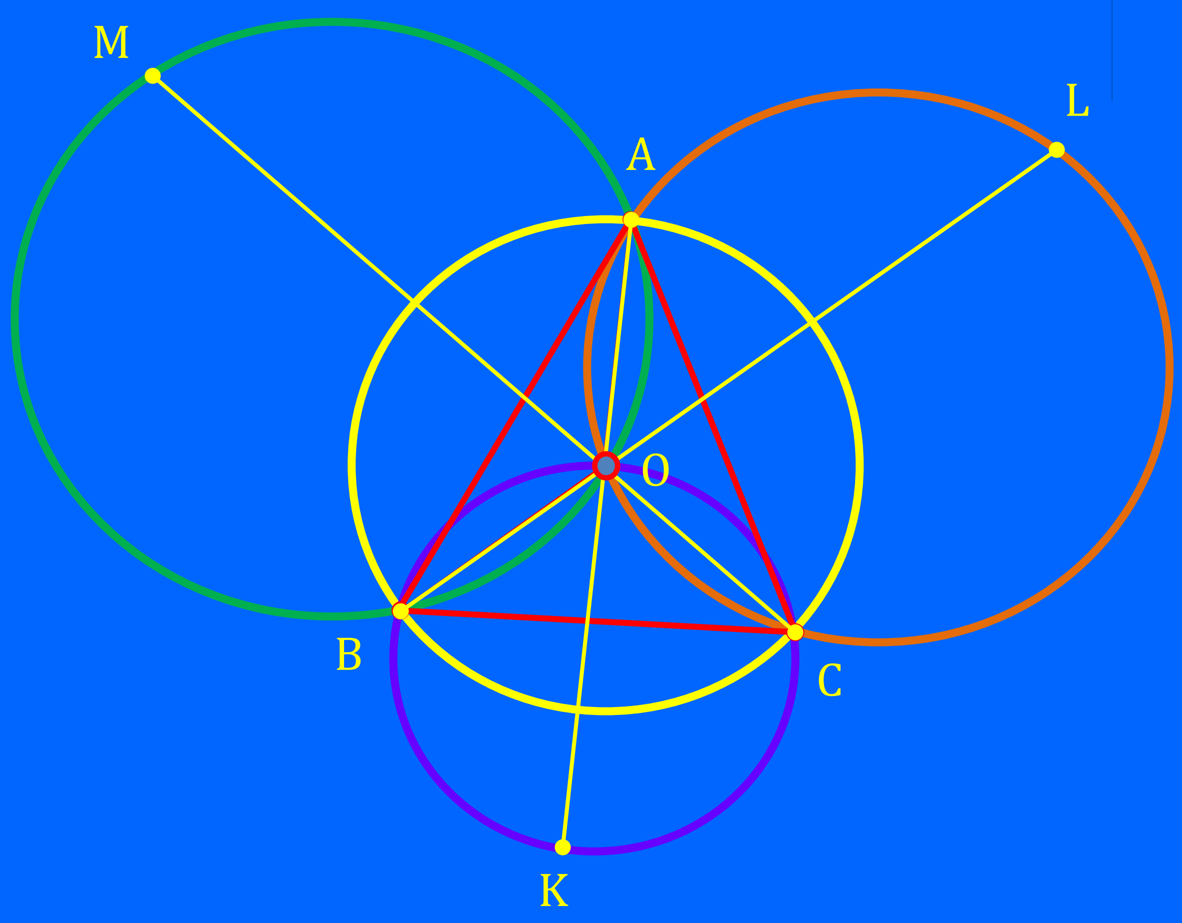
សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាល័យបាក់ទូក

លោក លឹម ផល្គុន

បរិញ្ញាប័ត្រគណិតវិទ្យា

111 គណិតវិទ្យាជ្រើសរើស

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី 12



$$OK \times OL \times OM \geq 8R^3$$

Vol.01

111

គណិតវិទ្យាជ្រើសរើស

សម្រាប់សិស្សពូកែថ្នាក់ទី ១២

www.mathtoday.wordpress.com

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

តាត់ វិសុទ្ធី និង លឹម ផល្គុន

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី | លោក សែន ពិសិដ្ឋ
លោក លឹម ឆូន | លោក អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក លឹម ផល្គុន លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !
សៀវភៅ ១១១ លំហាត់គណិតវិទ្យាជ្រើសរើសពិសេសដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងរួមមាន ១០៣ លំហាត់ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសលំហាត់ពិសេសៗមកធ្វើដំណោះស្រាយ តាមរបៀបផ្សេងៗពីគ្នាយ៉ាងក្បោះក្បាយ ដែលអាចឲ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់ និង ឆាប់ចងចាំ ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវគំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យាកំរិតសិស្សពូកែចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី27មករា ឆ្នាំ2013

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន និង **សាត់ វិសុទ្ធី**

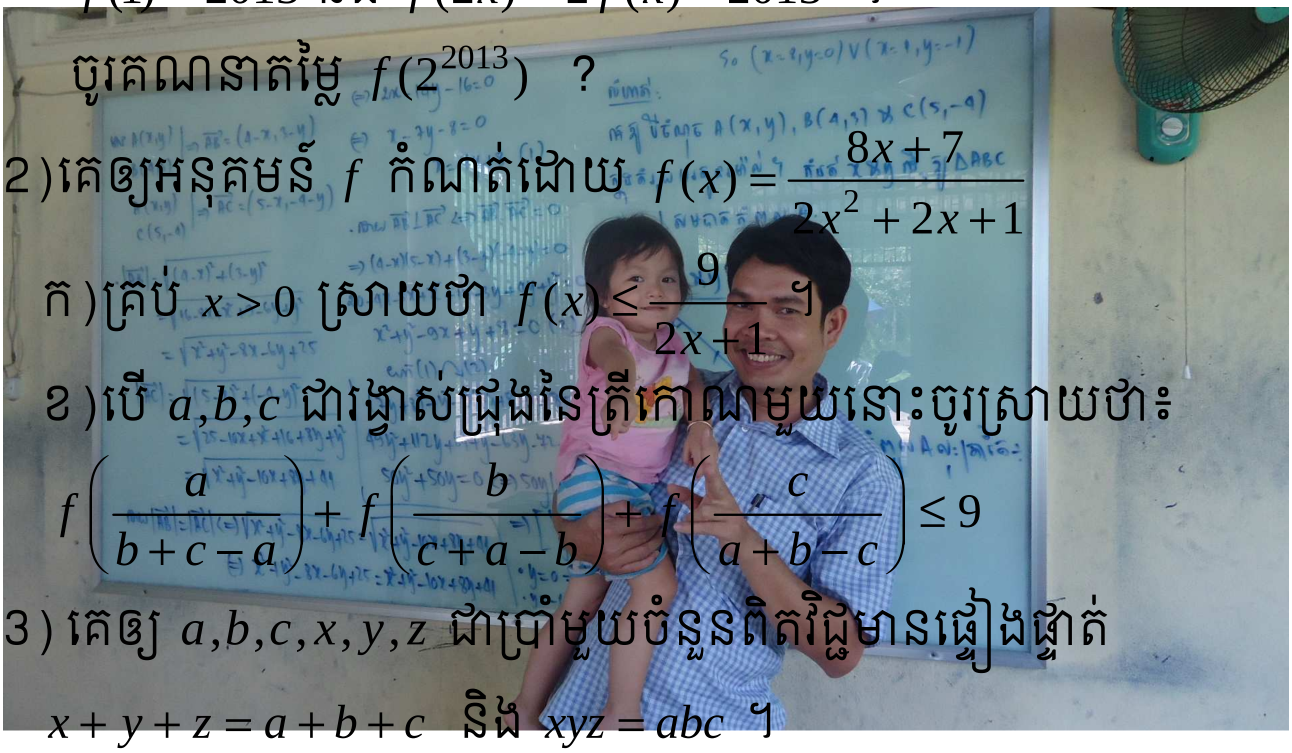
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី១

111 លំហាត់គណិតវិទ្យាជ្រើសរើស

1) គេឲ្យអនុគមន៍ $f : IN \to IR$ ដោយដឹងថាគ្រប់ $x \in IN$ គេមាន

$f(1) = 2013$ និង $f(2x) = 2f(x) - 2013$ ។



ចូរគណនាតម្លៃ $f(2^{2013})$?

2) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{8x+7}{2x^2+2x+1}$

ក) គ្រប់ $x > 0$ ស្រាយថា $f(x) \le \dfrac{9}{2x+1}$ ។

ខ) បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយនោះចូរស្រាយថា៖

$$f\left(\frac{a}{b+c-a}\right) + f\left(\frac{b}{c+a-b}\right) + f\left(\frac{c}{a+b-c}\right) \le 9$$

3) គេឲ្យ a,b,c,x,y,z ជាប្រាំមួយចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់

$x + y + z = a + b + c$ និង $xyz = abc$ ។

សន្មតថា $a \le x < y < z \le c$ និង $a < b < c$ ។

ចូរស្រាយថា $x = a$, $y = b$ និង $z = c$

4) គេឲ្យ $a,b,c,d \in IN$ ដោយដឹងថា $a \ge b \ge c \ge d$ ។

ចូរបង្ហាញថាសមីការ $x^4 - ax^2 - bx^2 - cx - d = 0$ គ្មានឫស

ជាចំនួនគត់ ។

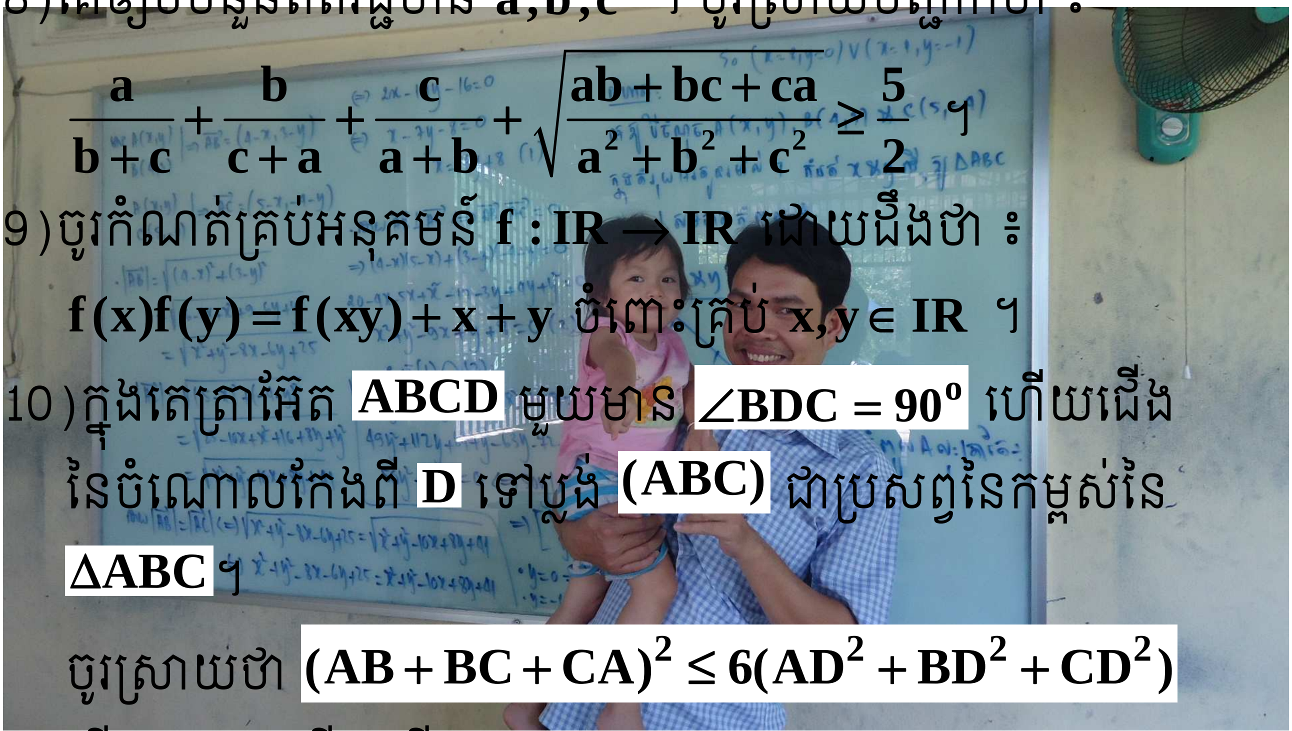
5)ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m , n និងចំនួនបឋម $p \geq 5$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $m(4m^2+m+12)=3(p^n-1)$ ។

6)គេឲ្យ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាឫសនៃ $\mathbf{P(x)=x^4+x^3-1}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{ab}$ ជាឫសនៃ $\mathbf{Q(x)=x^6+x^4+x^3-x^2-1}$

7)ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{\tan 10^o+\dfrac{1}{\sin 40^o}=\sqrt{3}}$ ។

8)គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a,b,c}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖



$$\mathbf{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{5}{2}}$$ ។

9)ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f:IR\to IR}$ ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{f(x)f(y)=f(xy)+x+y}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x,y\in IR}$ ។

10)ក្នុងតេត្រាអ៊ែត $\mathbf{ABCD}$ មួយមាន $\mathbf{\angle BDC=90^o}$ ហើយជើងនៃចំណោលកែងពី $\mathbf{D}$ ទៅប្លង់ $\mathbf{(ABC)}$ ជាប្រសព្វនៃកម្ពស់នៃ $\mathbf{\Delta ABC}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{(AB+BC+CA)^2\leq 6(AD^2+BD^2+CD^2)}$

តើពេលណាទើបយើងបានសមភាព ?

11)គេឲ្យ $\mathbf{a,b,c}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

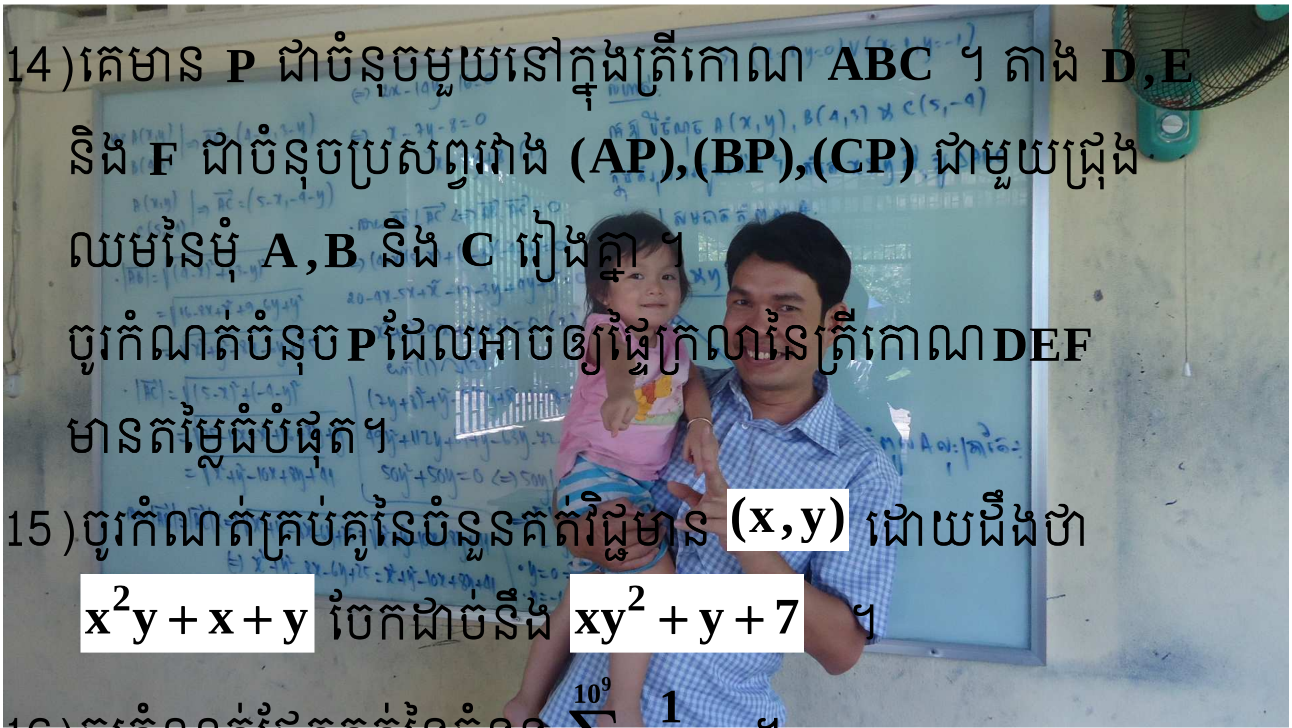
ចូរបង្ហាញថាចំនួនបី $\mathbf{a^2+b+c,b^2+c+a,c^2+a+b}$ មិនអាចជាការេប្រាកដទាំងអស់ ។

12)សមីការ $\mathbf{x^3-ax^2+bx-c=0}$ មានឫសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន (មិនចាំបាច់ខុសគ្នា)។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\frac{c}{b}$ ។

13)ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x^3+y=3x+4 \\ 2y^3+z=6y+6 \\ 3z^3+x=9z+8 \end{cases}$

ដែល $x,y,z\in IR$ ។



14)គេមាន **P** ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ **ABC** ។ តាង **D,E** និង **F** ជាចំនុចប្រសព្វរវាង **(AP),(BP),(CP)** ជាមួយជ្រុងឈមនៃមុំ **A,B** និង **C** រៀងគ្នា ។

ចូរកំណត់ចំនុច**P**ដែលអាចឲ្យផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ**DEF** មានតម្លៃធំបំផុត។

15)ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដោយដឹងថា x^2y+x+y ចែកដាច់នឹង xy^2+y+7 ។

16)ចូរកំណត់ផ្នែកគត់នៃចំនួន $\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ ។

17)គេតាង Q^+ ជាសំណុំនៃចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន ។

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:Q^+\to Q^+$ បើគេដឹងថា

$f(x+1)=f(x)+1$ និង $f(x^3)=f^3(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in Q^+$ ។

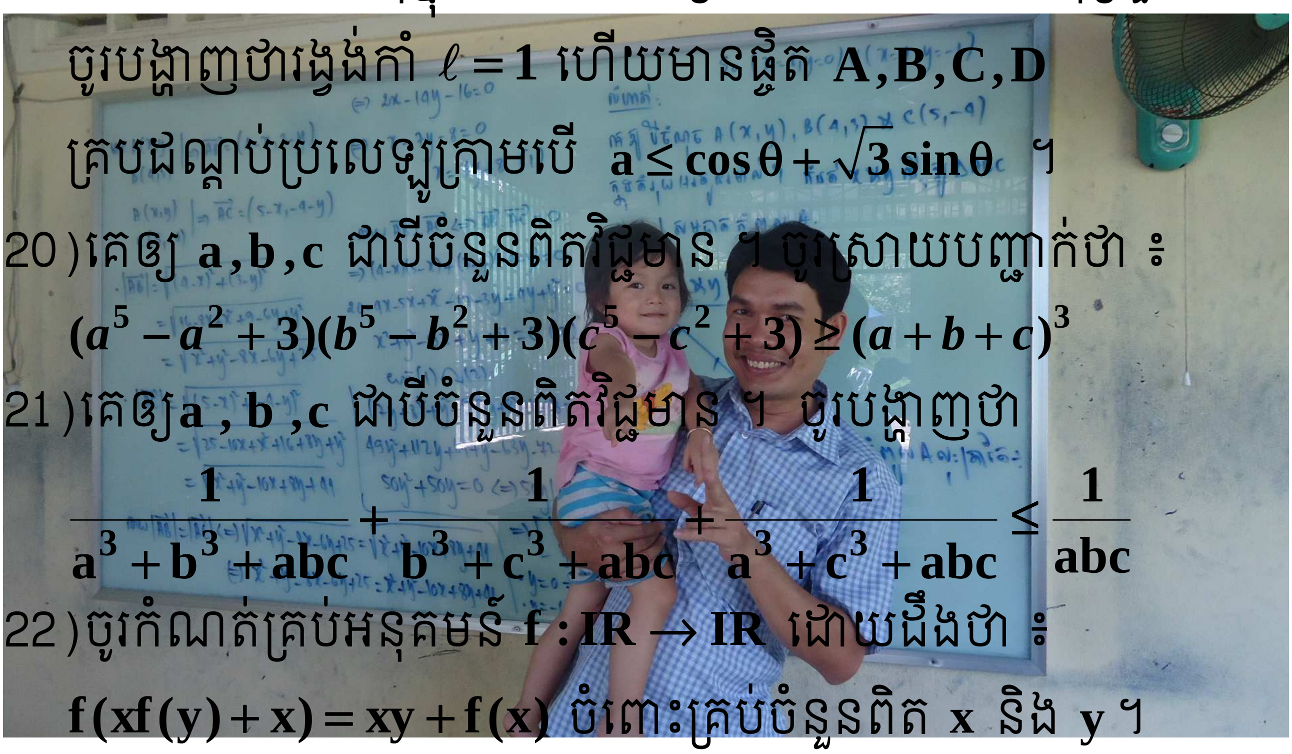
18)គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនគត់ខុសគ្នា ។

យក $P(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។

ចូរបង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌ $P(a)=b, P(b)=c, P(c)=a$

មិនអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នាបានទេ ។

19)ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ មួយមាន $AB=a$, $AD=1$ និងមុំ $\angle BAD=\theta$ និងមុំក្នុងទាំងអស់នៃត្រីកោណ ABD ជាមុំស្រួច



ចូរបង្ហាញថារង្វង់កាំ $\ell=1$ ហើយមានផ្ចិត A,B,C,D គ្របដណ្តប់ប្រលេឡូក្រាមបើ $a\le \cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ ។

20)គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge(a+b+c)^3$$

21)គេឲ្យ a , b ,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

22)ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{IR}\to\mathbb{IR}$ ដោយដឹងថា ៖

$f(xf(y)+x)=xy+f(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង y ។

23)គេឱ្យ $a\,;\,b\,;\,c$ ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមាន បរិមាត្រស្មើ 2 ។

ចូរស្រាយថា $\frac{3}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<2$ ។

24)ចូរកំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់ (x,y) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$x^2(y^2+16)+y^2(x^2+1)=448$ ។

25) ចូរកំណត់ចំនួនពិតតូចជាងគេនៃ M ដោយដឹងថាវិសមភាព

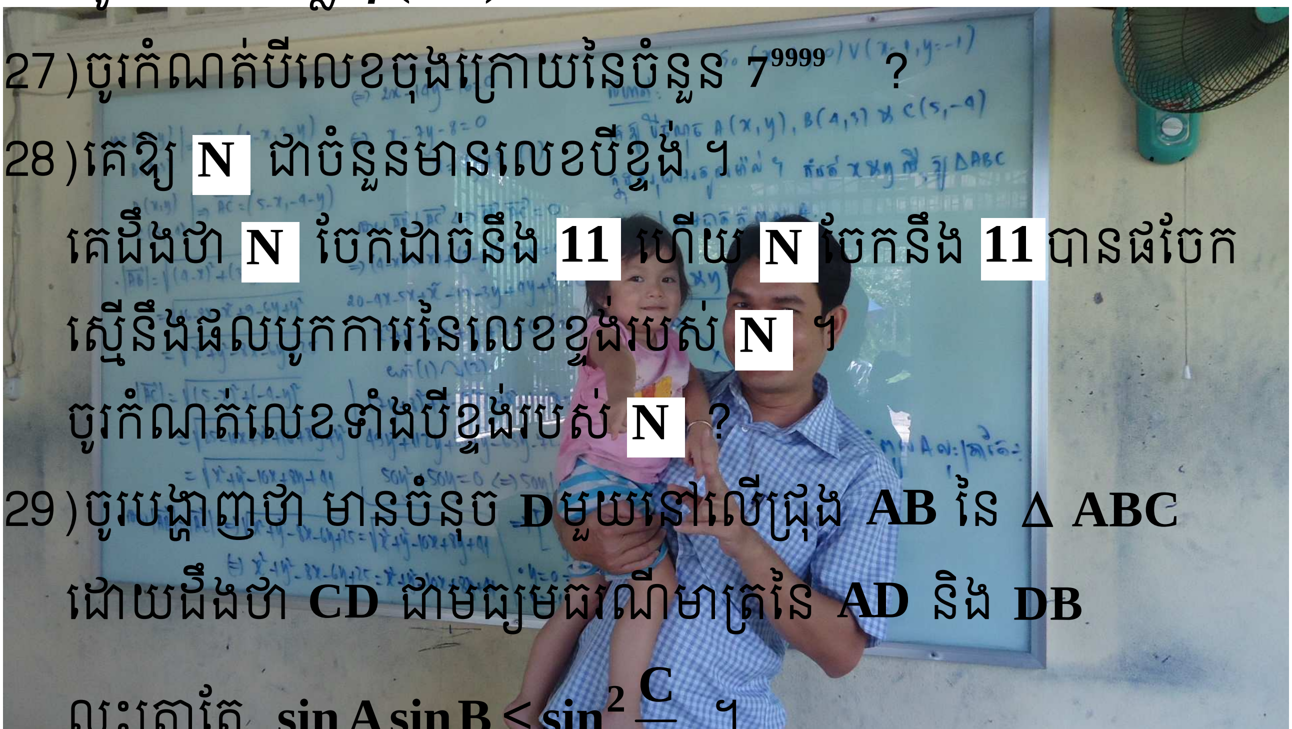
$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\le M.(a^2+b^2+c^2)^2$$

ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b និង c ។

26) គេឲ្យអនុគមន៍ជាប់ $f: IR \to IR$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$f(1000)=999$ និង $f(x).f[f(x)]=1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ $f(500)$ ។



27) ចូរកំណត់បីលេខចុងក្រោយនៃចំនួន 7^{9999} ?

28) គេឱ្យ N ជាចំនួនមានលេខបីខ្ទង់ ។

គេដឹងថា N ចែកដាច់នឹង 11 ហើយ N ចែកនឹង 11 បានផលចែក ស្មើនឹងផលបូកការេនៃលេខខ្ទង់របស់ N ។

ចូរកំណត់លេខទាំងបីខ្ទង់របស់ N ?

29) ចូរបង្ហាញថា មានចំនុច D មួយនៅលើជ្រុង AB នៃ $\Delta\, ABC$ ដោយដឹងថា CD ជាមធ្យមធរណីមាត្រនៃ AD និង DB លុះត្រាតែ $\sin A\sin B\le \sin^2\frac{C}{2}$ ។

30) ក) ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ចូរស្រាយថា $\ln x>\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ ។

ខ) ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{ab}+\dfrac{a+b}{2}\right)$

ដែល $a>0,b>0\,,a\neq b$ ។

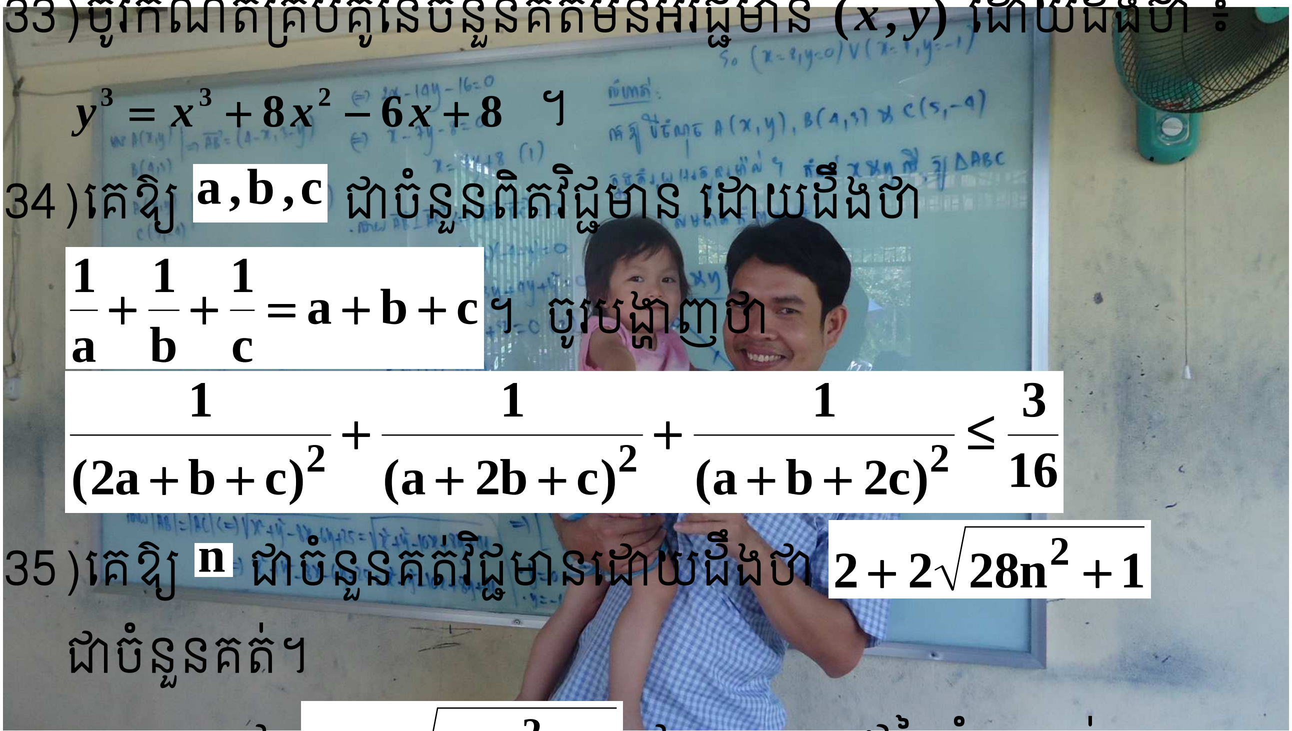
31) គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ។

គេដឹងថា $P(1)=1$, $P(2)=8$ និង $P(3)=27$ ។

ចូរស្រាយថា $f(2+\lambda)+f(2-\lambda)=2\lambda^4+10\lambda^2+16$ ។

32) គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\geq\frac{10}{9}(a+b+c)^2$$



33) ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន (x,y) ដោយដឹងថា ៖

$y^3=x^3+8x^2-6x+8$ ។

34) គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដោយដឹងថា

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\leq\frac{3}{16}$$

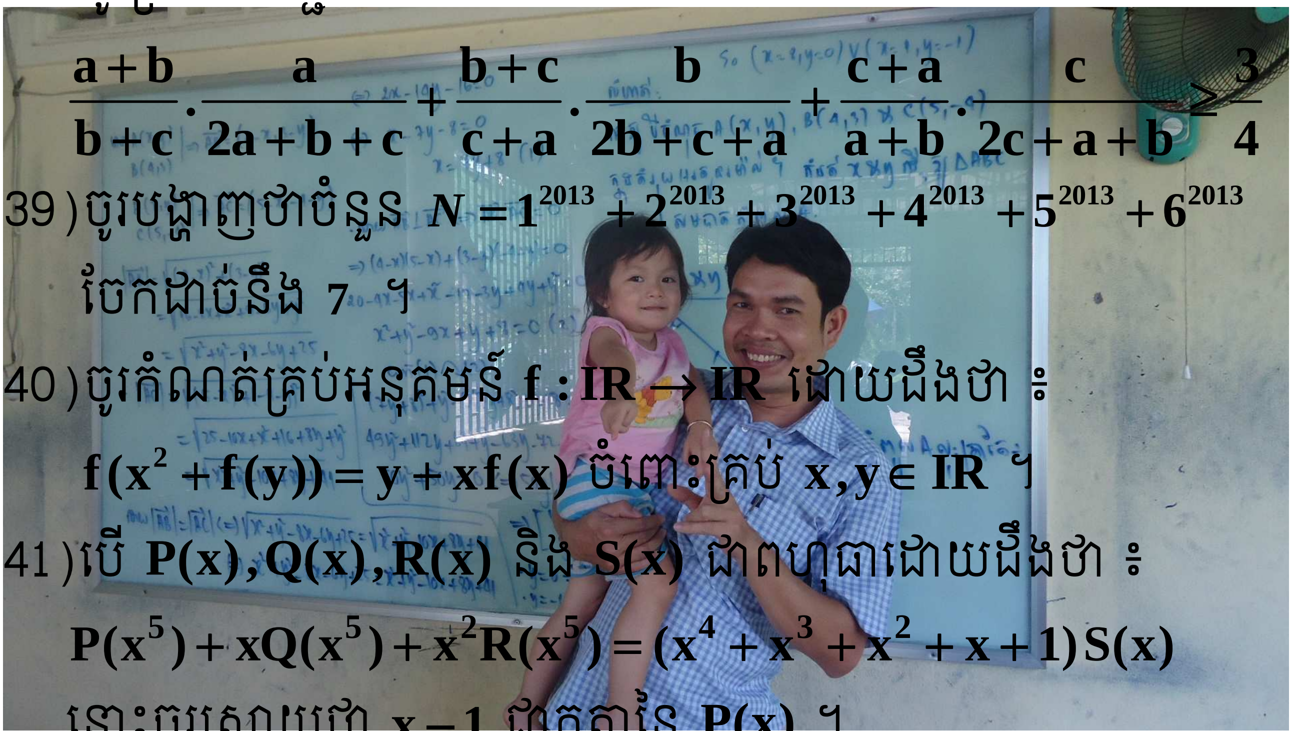
35) គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់។

ចូរស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ។

36) គេយក P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយ D,E,F ជាជើងនៃចំណោលកែងពី P ទៅបន្ទាត់ BC,CA,AB រៀងគ្នា ។ ចូរស្រាយថា $PA+PB+PC\geq 2(PD+PE+PF)$ ។

37) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយនិង P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា យ៉ាងតិចមួយនៃមុំ $\angle PAB, \angle PBC$ និង $\angle PCA$ ត្រូវតូចជាង ឬ ស្មើទៅនឹង 30^o ។

38) គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។
ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖



$$\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c+a}{a+b}\cdot\frac{c}{2c+a+b}\geq\frac{3}{4}$$

39) ចូរបង្ហាញថាចំនួន $N=1^{2013}+2^{2013}+3^{2013}+4^{2013}+5^{2013}+6^{2013}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

40) ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: IR\to IR$ ដោយដឹងថា ៖
$f(x^2+f(y))=y+xf(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$ ។

41) បើ $P(x),Q(x),R(x)$ និង $S(x)$ ជាពហុធាដោយដឹងថា ៖
$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$$
នោះចូរស្រាយថា $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ។

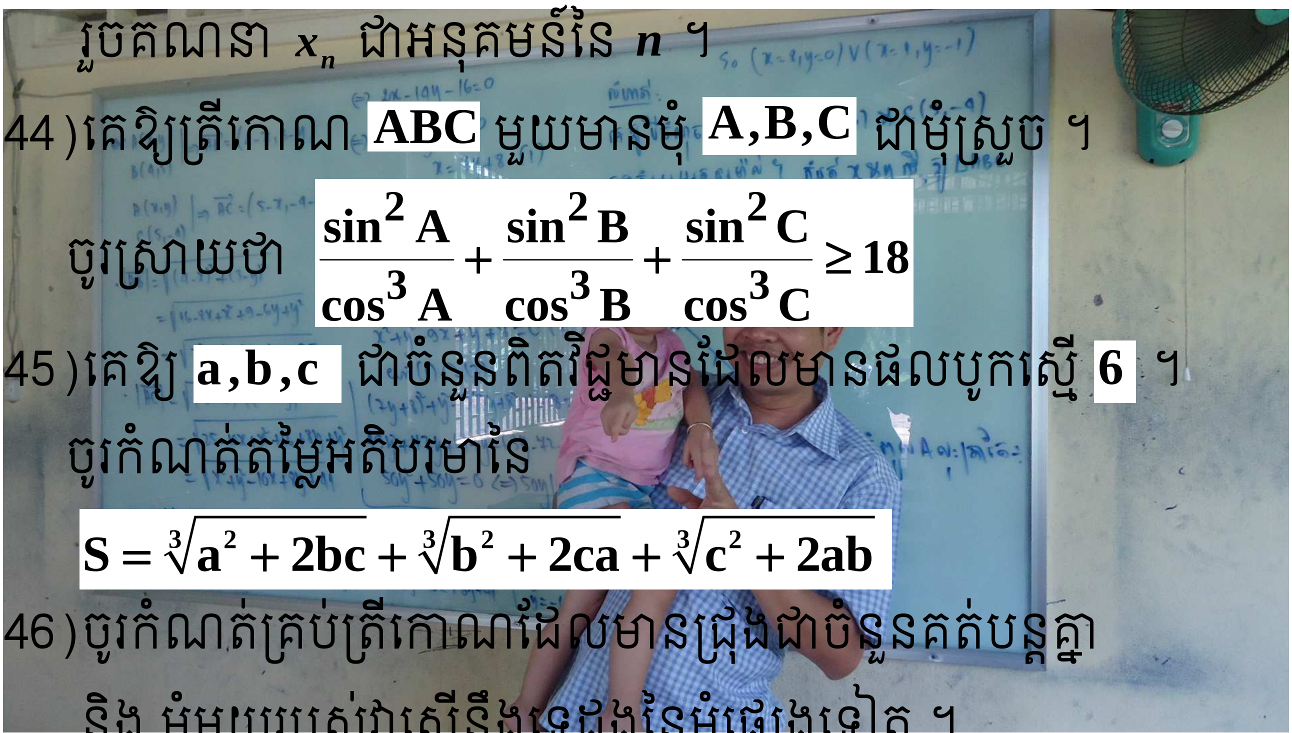
42) គេយក P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយ D,E,F ជាជើងនៃចំណោលកែងពី P ទៅបន្ទាត់ BC,CA,AB រៀងគ្នា ។ ចូរកំណត់គ្រប់ចំណុច P ដើម្បីឲ្យ $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ អប្បបរមា ?

43)គេឲ្យ $k \geq 2$ ជាចំនួនគត់មួយ ។ ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ ៖

$x_0 = x_1 = 1$ និង $x_{n+1} = \dfrac{x_n^k + 1}{x_{n-1}}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។

ក)ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k \geq 2$ ស្វ៊ីត (x_n) គឺ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ។

ខ)បើ $k = 2$ ចូរបង្ហាញថា $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$



រួចគណនា x_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

44)គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^3 A} + \dfrac{\sin^2 B}{\cos^3 B} + \dfrac{\sin^2 C}{\cos^3 C} \geq 18$

45)គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលមានផលបូកស្មើ 6 ។ ចូរកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ

$$S = \sqrt[3]{a^2 + 2bc} + \sqrt[3]{b^2 + 2ca} + \sqrt[3]{c^2 + 2ab}$$

46)ចូរកំណត់គ្រប់ត្រីកោណដែលមានជ្រុងជាចំនួនគត់បន្តគ្នា និង មុំមួយរបស់វាស្មើនឹងទ្វេដងនៃមុំផ្សេងទៀត ។

47)គេឲ្យ p ជាចំនួនពិតដែល $p + \dfrac{1}{p}$ ជាចំនួនគត់មួយ ។

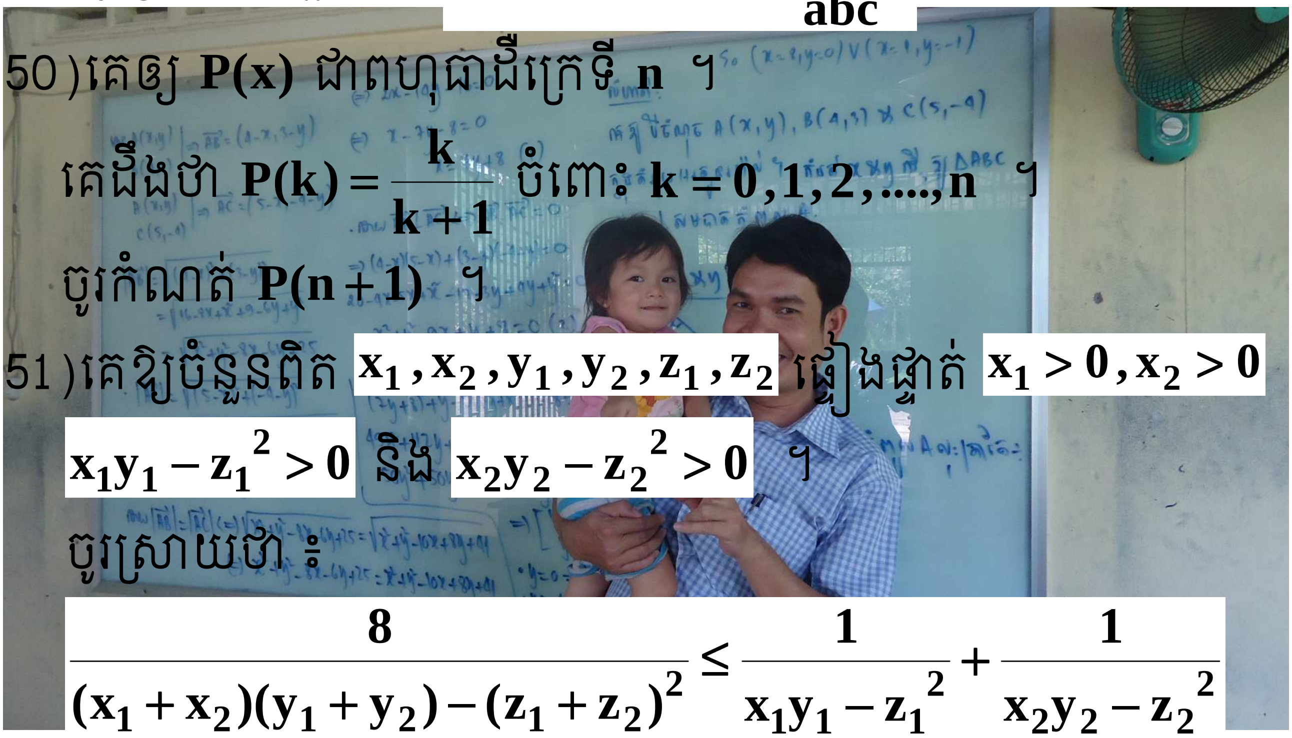
ស្រាយថា $p^n + \dfrac{1}{p^n}$ ជាចំនួគត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

48) គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

49) គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c និងមានផ្ទៃក្រឡា S ។ឧបមាថា DEF ជាត្រីកោណចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $DE+EF+FD\ge\dfrac{8S^2}{abc}$



50) គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ។

គេដឹងថា $P(k)=\dfrac{k}{k+1}$ ចំពោះ $k=0,1,2,....,n$ ។

ចូរកំណត់ $P(n+1)$ ។

51) គេឱ្យចំនួនពិត x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1>0,x_2>0$ $x_1y_1-z_1{}^2>0$ និង $x_2y_2-z_2{}^2>0$ ។

ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\le\frac{1}{x_1y_1-z_1{}^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2{}^2}$$

52) ចូរបង្ហាញថា $(2m+1)^{2^n}=2^{n+2}\lambda_n+1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដែល $m,\lambda_n\in\mathbb{Z}$ ។

53) គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a,AC=b,AB=c$

ហើយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a+b}{\cos C}+\dfrac{b+c}{\cos A}+\dfrac{c+a}{\cos B}\ge 4(a+b+c)$

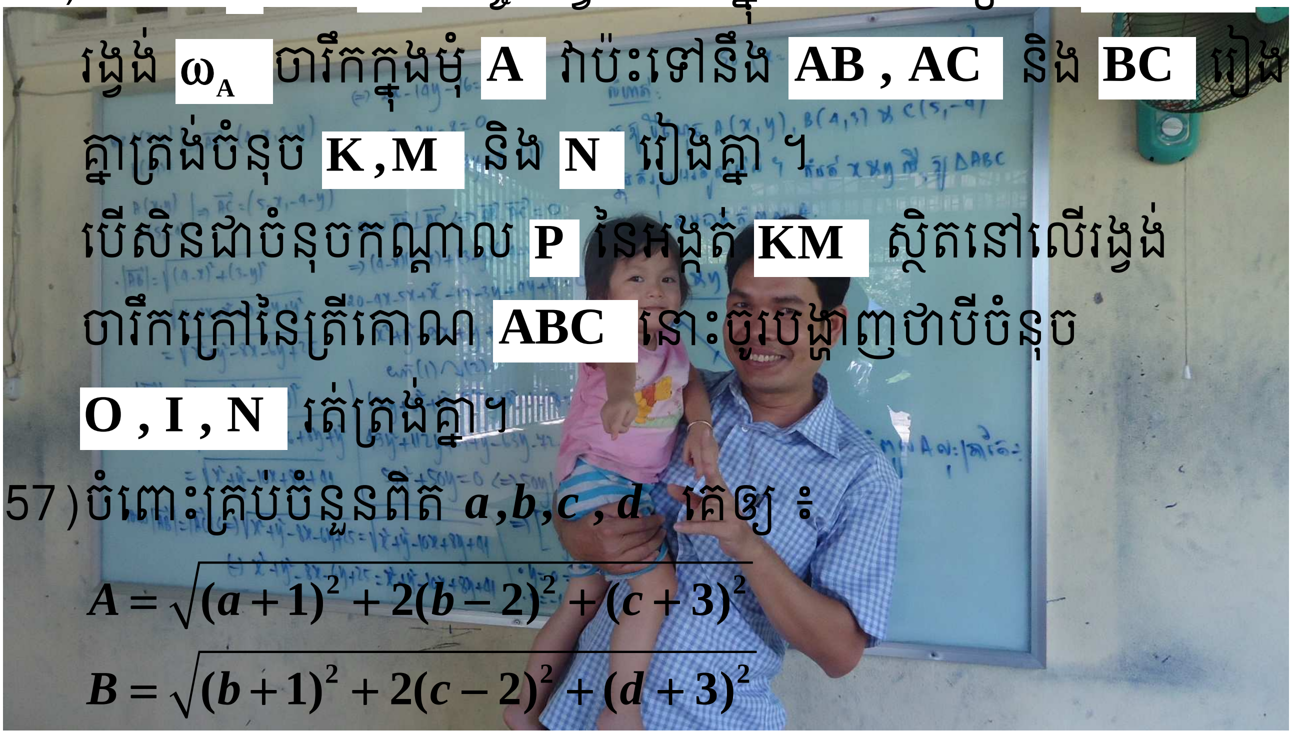
54) គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a<b$ និង $a,b,c\in IR$

បើ $f(x)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ នោះចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ

$D=\dfrac{a+b+c}{b-a}$ ។

55) គេឲ្យ $P_n=\prod_{k=3}^{n}\left[1-\tan^4\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right)\right]$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$?

56) គេយក $\mathbf{I}$ និង $\mathbf{O}$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងចារឹកក្រៅនៃ $\Delta\mathbf{ABC}$



រង្វង់ ω_A ចារឹកក្នុងមុំ $\mathbf{A}$ វាប៉ះទៅនឹង $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$ និង $\mathbf{BC}$ រៀងគ្នាត្រង់ចំនុច $\mathbf{K},\mathbf{M}$ និង $\mathbf{N}$ រៀងគ្នា ។

បើសិនជាចំនុចកណ្ដាល $\mathbf{P}$ នៃអង្កត់ $\mathbf{KM}$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ នោះចូរបង្ហាញថាបីចំនុច $\mathbf{O}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{N}$ រត់ត្រង់គ្នា។

57) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c,d គេឲ្យ ៖

$$A=\sqrt{(a+1)^2+2(b-2)^2+(c+3)^2}$$

$$B=\sqrt{(b+1)^2+2(c-2)^2+(d+3)^2}$$

$$C=\sqrt{(c+1)^2+2(d-2)^2+(a+3)^2}$$

$$D=\sqrt{(d+1)^2+2(a-2)^2+(b+3)^2}$$

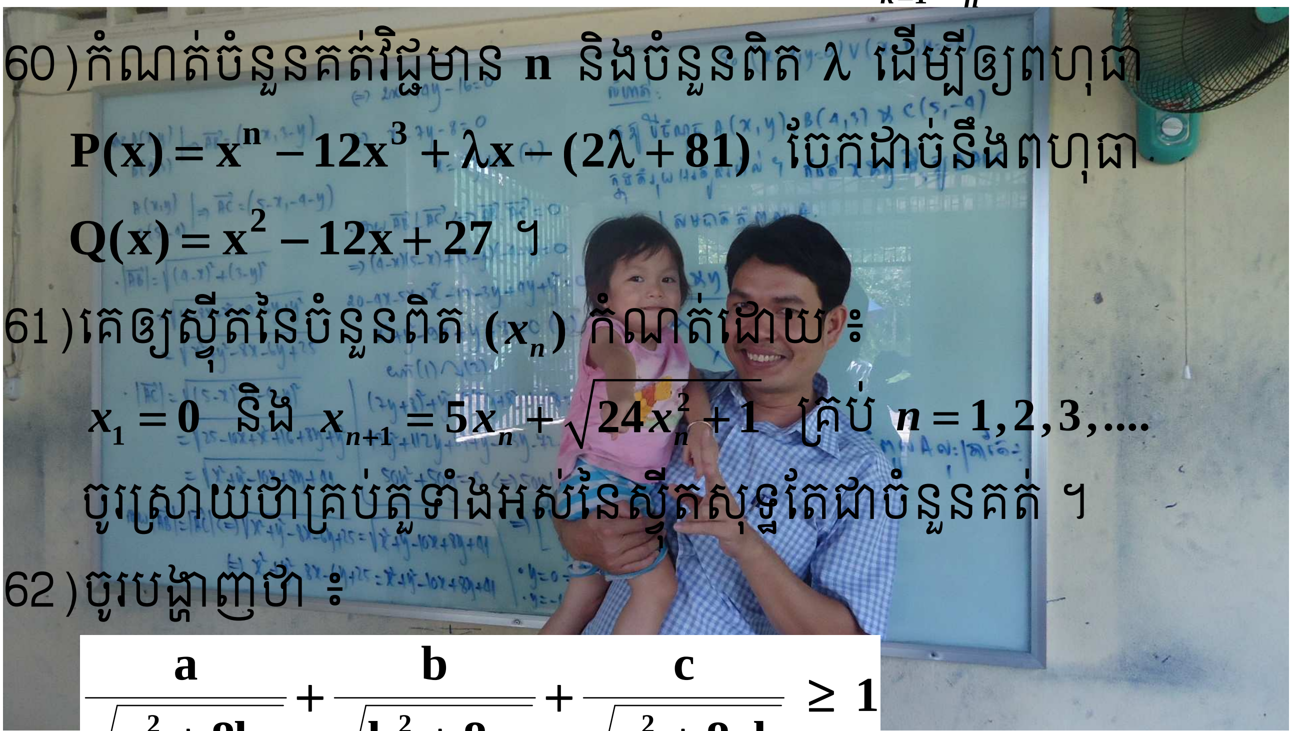
ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $S=A+B+C+D$ ។

58) ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}} \le \dfrac{1}{\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+d}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,d ។

59) គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=2$ និង $u_n=n!+\dfrac{n-1}{n}u_{n-1}$

គ្រប់ $n=2,3,4,...$ ។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{u_n}$?



60) កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យពហុធា

$P(x)=x^n-12x^3+\lambda x-(2\lambda+81)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា

$Q(x)=x^2-12x+27$ ។

61) គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ ៖

$x_1=0$ និង $x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1}$ គ្រប់ $n=1,2,3,....$

ចូរស្រាយថាគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតសុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ។

62) ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

63) ចូរបង្ហាញថាបើចំនួនគត់ $a_1,a_2,a_3,....,a_9$ ចែកមិនដាច់នឹង 3

នោះគេបាន $N=a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_9^2$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

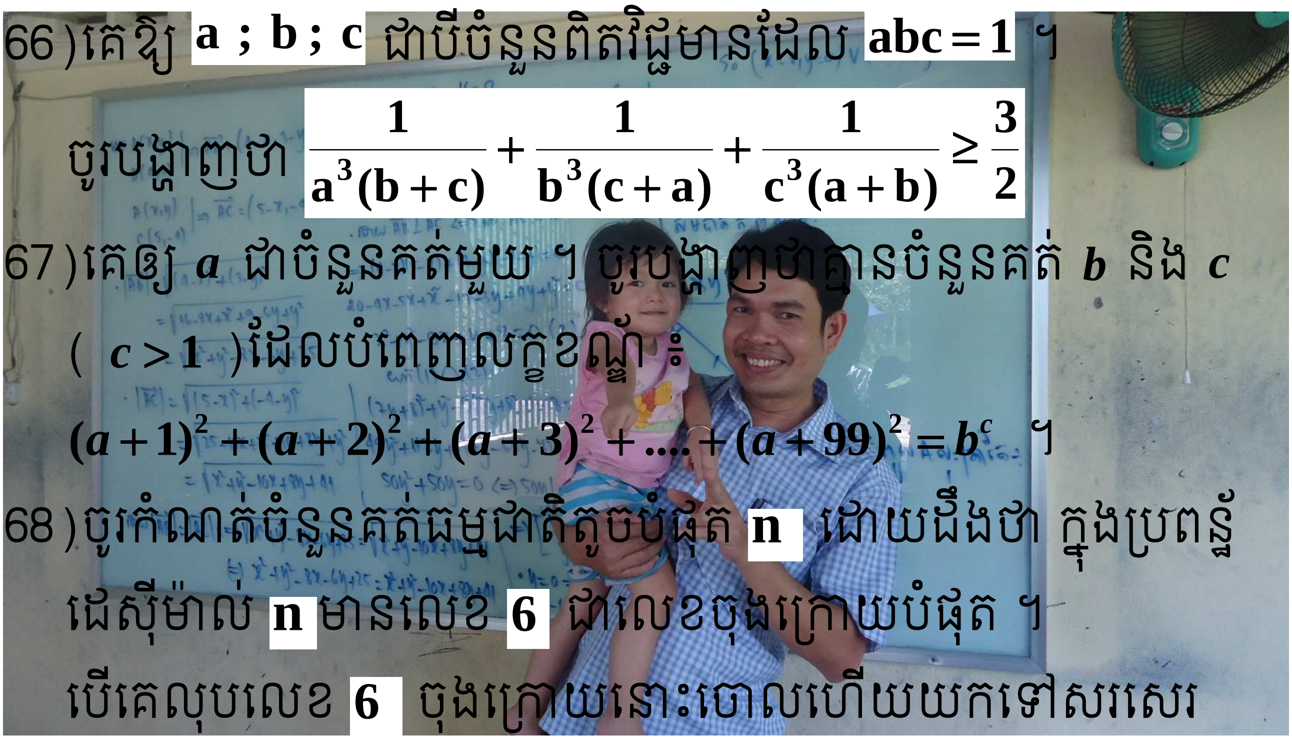
64) គេឲ្យ **m** និង **n** ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ ជាចំនួនគត់ ។

65) គេឲ្យចំនួនពិត α និង β ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-17=0$ និង $\beta^3-3\beta^2+5\beta+11=0$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ $\alpha+\beta$?



66) គេឱ្យ $a\,;\,b\,;\,c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$

67) គេឲ្យ a ជាចំនួនគត់មួយ ។ ចូរបង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ b និង c ($c>1$)ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ ៖

$(a+1)^2+(a+2)^2+(a+3)^2+....+(a+99)^2=b^c$ ។

68) ចូរកំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត **n** ដោយដឹងថា ក្នុងប្រព័ន្ធដេស៊ីម៉ាល់ **n** មានលេខ **6** ជាលេខចុងក្រោយបំផុត ។ បើគេលុបលេខ **6** ចុងក្រោយនោះចោលហើយយកទៅសរសេរពីខាងមុខនៃលេខដែលនៅសល់នោះគេបានចំនួនមួយទៀតស្មើនឹង **4** ដងនៃចំនួនដើម **n** ។

69) ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ដើម្បីឲ្យ a^4+4b^4 ជាចំនួនបឋម ។

70) គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ (ដែល $n \ge 2$)ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1} \ge 1998$ ។

71) គេឲ្យ α,β,γ ជាបីចំនួនពិតដែល $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \ge 2$ ។

ចូរស្រាយថា $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \sqrt{5}$ ។

72) ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $n^n \le (n!)^2 \le \left[\frac{(n+1)(n+2)}{6}\right]^n$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

73) ចូរស្រាយថា $\frac{1}{199}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times....\times\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$ ។

74) គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ ៖

$x_1 = 1$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $x_{n+1}=\frac{\sqrt{1+x_n^2}-1}{x_n}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

ចូរស្រាយថា $x_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)$ ។

75) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$

P ជាចំណុចមួយនៃប្លង់ ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោ ABC

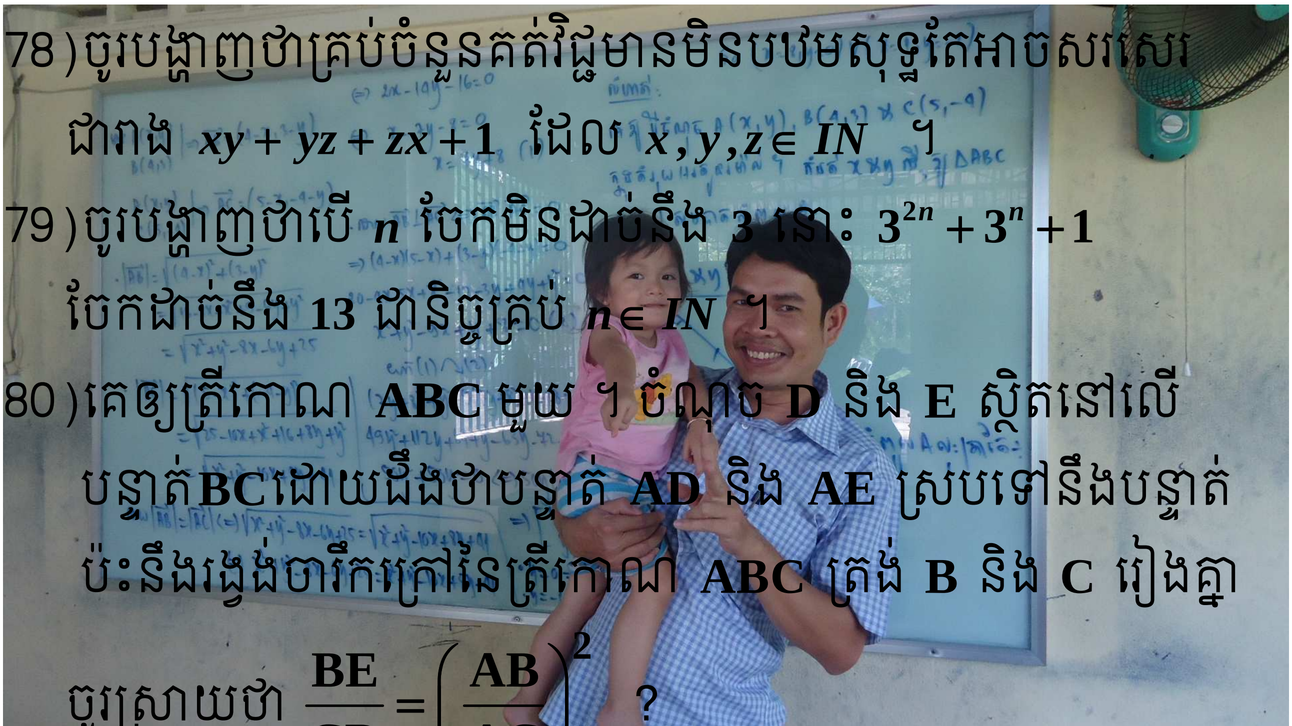
ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព ៖

$a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2=(a+b+c).PI^2+abc$ ។

76) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$
ចូរកំណត់ចំណុច P នៃប្លង់ដើម្បីឲ្យ $a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2$
មានតម្លៃអប្បបរមា រួចកំណត់តម្លៃអប្បបរមានេះ ។

77) បើ $0\le a_1\le a_2\le \dots \le a_n$ និង $0\le b_1\le b_2\le \dots \le b_n$

ចូរស្រាយថា $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\times\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ ។



78) ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនបឋមសុទ្ធតែអាចសរសេរ
ជារាង $xy+yz+zx+1$ ដែល $x,y,z\in IN$ ។

79) ចូរបង្ហាញថាបើ n ចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះ $3^{2n}+3^n+1$
ចែកដាច់នឹង 13 ជានិច្ចគ្រប់ $n\in IN$ ។

80) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ចំណុច D និង E ស្ថិតនៅលើ
បន្ទាត់BCដោយដឹងថាបន្ទាត់ AD និង AE ស្របទៅនឹងបន្ទាត់
ប៉ះនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ត្រង់ B និង C រៀងគ្នា
ចូរស្រាយថា $\frac{BE}{CD}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$?

81) គេឲ្យចំនួន $x=\underbrace{444...444}_{2n\text{ លេខ}}$ និង $y=\underbrace{888...888}_{n\text{ លេខ}}$

ចូរស្រាយថា $x+2y+4$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ ។

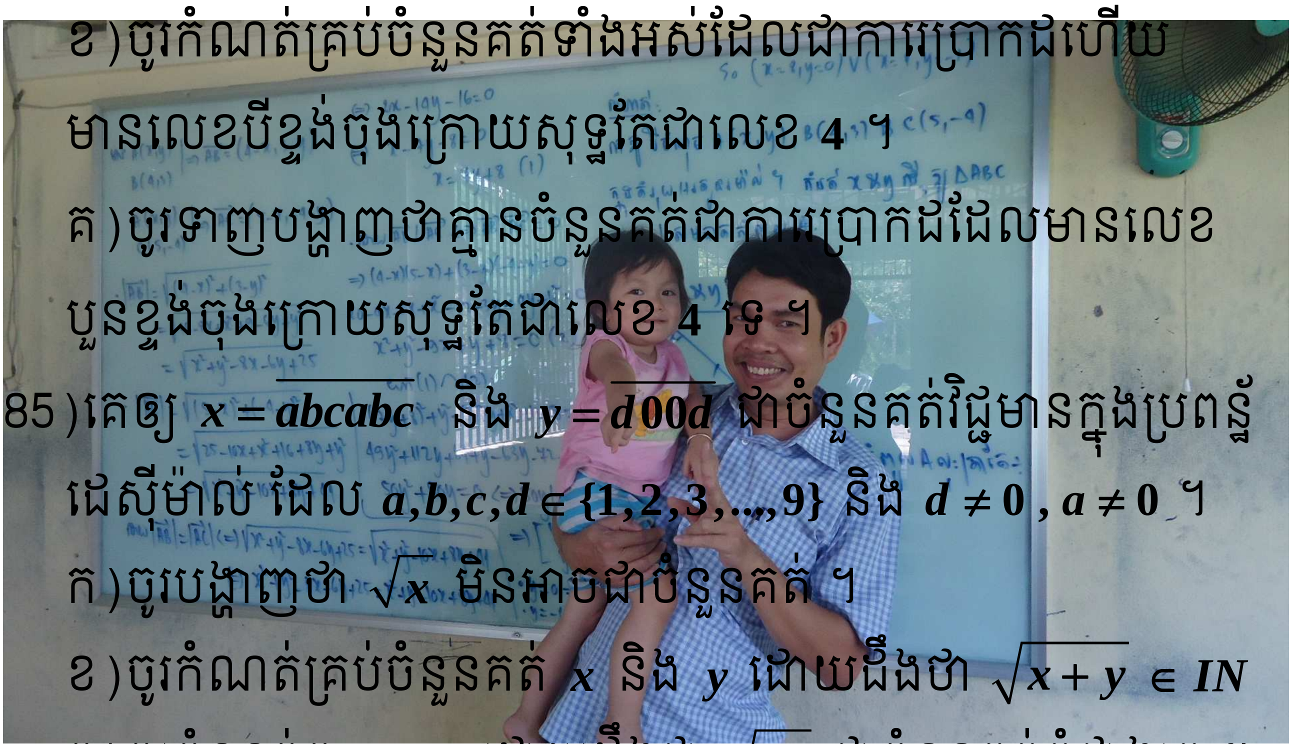
82) គេឲ្យ a,b និង n ជាចំនួនគត់ដែល $\frac{a^2+b^2}{2}=n$ ។
ចូរបង្ហាញថា $n=c^2+d^2$ ចំពោះ c និង d ជាចំនួនគត់ ។

83) គេឱ្យបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a,b,c និងមិនសូន្យព្រមគ្នាពីរ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$

84) ក) ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូងគេជាការេប្រាកដហើយមានលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយសុទ្ធតែជាលេខ 4 ។



ខ) ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ដែលជាការេប្រាកដហើយមានលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយសុទ្ធតែជាលេខ 4 ។

គ) ចូរទាញបង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ជាការេប្រាកដដែលមានលេខបួនខ្ទង់ចុងក្រោយសុទ្ធតែជាលេខ 4 ទេ ។

85) គេឲ្យ $x=\overline{abcabc}$ និង $y=\overline{d00d}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានក្នុងប្រព័ន្ធដេស៊ីម៉ាល់ ដែល $a,b,c,d\in\{1,2,3,...,9\}$ និង $d\neq 0$, $a\neq 0$ ។

ក) ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{x}$ មិនអាចជាចំនួនគត់ ។

ខ) ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x និង y ដោយដឹងថា $\sqrt{x+y}\in IN$

គ) ចូរកំណត់គូ (x,y) ដោយដឹងថា $\sqrt{xy}$ ជាចំនួនគត់ធំជាងគេ ។

86) គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ គេតាង I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនេះ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A , B , C កាត់ជ្រុងឈមរៀងគ្នាត្រង់ A' , B' , C' ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{4}<\dfrac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\leq\dfrac{8}{27}$ ។

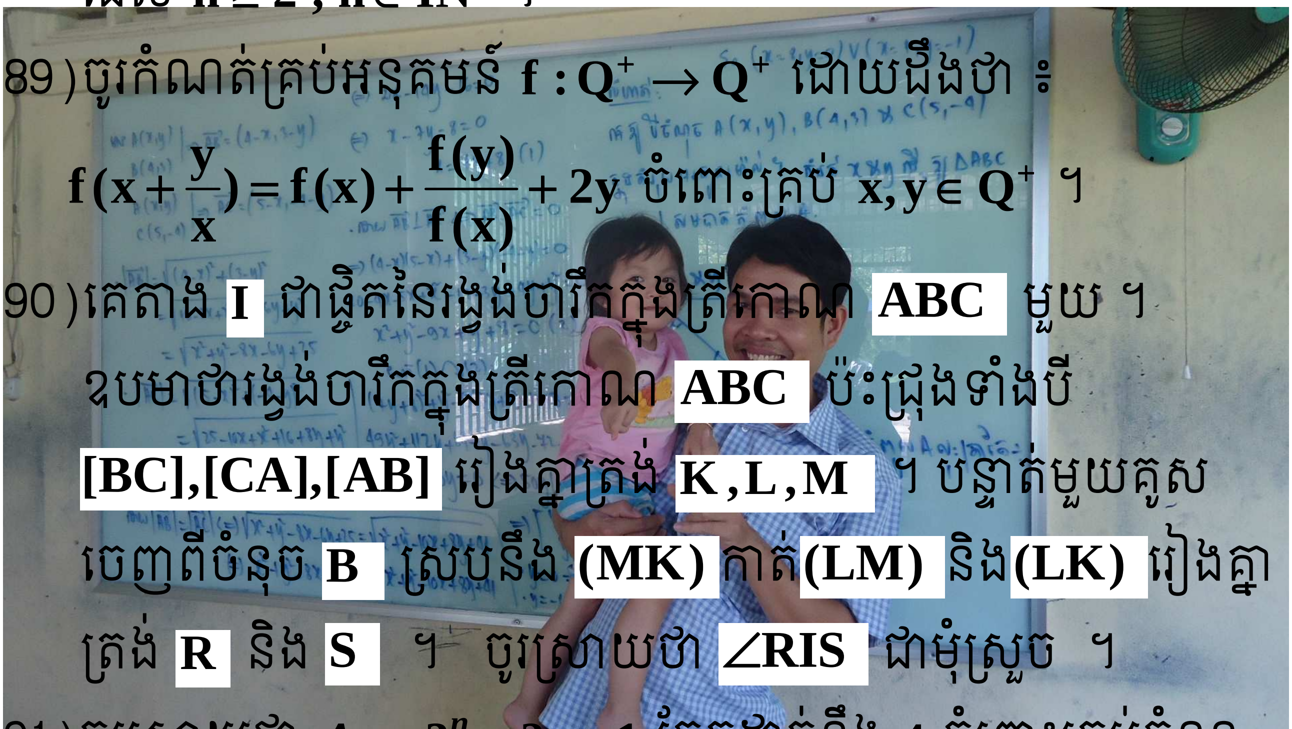
87) គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2+\sqrt{2bc}}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2+\sqrt{2ca}}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{2ab}}}\ge\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

88) គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{n+3}{2}$$

ដែល $n\ge 2\,,\ n\in IN$ ។



89) ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:Q^{+}\to Q^{+}$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x+\frac{y}{x})=f(x)+\frac{f(y)}{f(x)}+2y$ ចំពោះគ្រប់ $x,y\in Q^{+}$ ។

90) គេតាង I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ ។ ឧបមាថារង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ប៉ះជ្រុងទាំងបី $[BC],[CA],[AB]$ រៀងគ្នាត្រង់ K,L,M ។ បន្ទាត់មួយគូសចេញពីចំនុច B ស្របនឹង (MK) កាត់ (LM) និង (LK) រៀងគ្នាត្រង់ R និង S ។ ចូរស្រាយថា $\angle RIS$ ជាមុំស្រួច ។

91) ចូរស្រាយថា $A_n=3^n-2n-1$ ចែកដាច់នឹង 4 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

92) បើ p_1 និង p_2 ជាចំនួនបឋមសេសផ្សេងគ្នានោះបង្ហាញថា ៖

$N=(p_1p_2+1)^4-1$ យ៉ាងតិចមាន4តួចែកបឋមផ្សេងគ្នា ។

93) ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{\pi}{22}-4\cos\frac{3\pi}{22}=\sqrt{11}$ ។

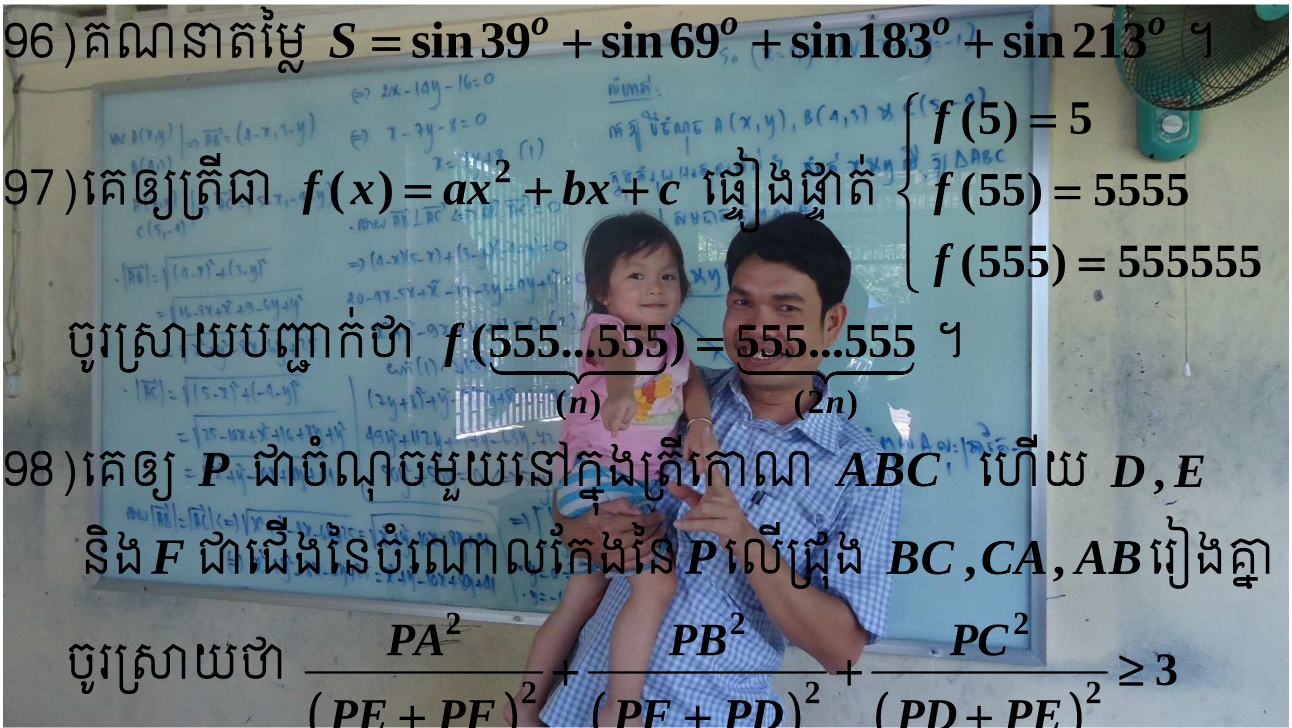
94) គេឲ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៖

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2+\left(\frac{y}{z}+\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2+\left(\frac{z}{x}+\frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2\geq 12$$

95) គេឲ្យអនុគមន៍ $f:IR\to IR$ ដែលចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$ គេមាន

$f(x^3-y)+2y(3f^2(x)+y^2)=f\left(y+f(x)\right)$ ។

ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ។



96) គណនាតម្លៃ $S=\sin 39^o+\sin 69^o+\sin 183^o+\sin 213^o$ ។

97) គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} f(5)=5 \\ f(55)=5555 \\ f(555)=555555 \end{cases}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\underbrace{555...555}_{(n)})=\underbrace{555...555}_{(2n)}$ ។

98) គេឲ្យ P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយ D,E និង F ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ P លើជ្រុង BC,CA,AB រៀងគ្នា

ចូរស្រាយថា $\frac{PA^2}{(PE+PF)^2}+\frac{PB^2}{(PF+PD)^2}+\frac{PC^2}{(PD+PE)^2}\geq 3$

99) សមីការ $x^2-2013x+q=0$ មានឫសពីរ α និង β ជាចំនួនពិត។

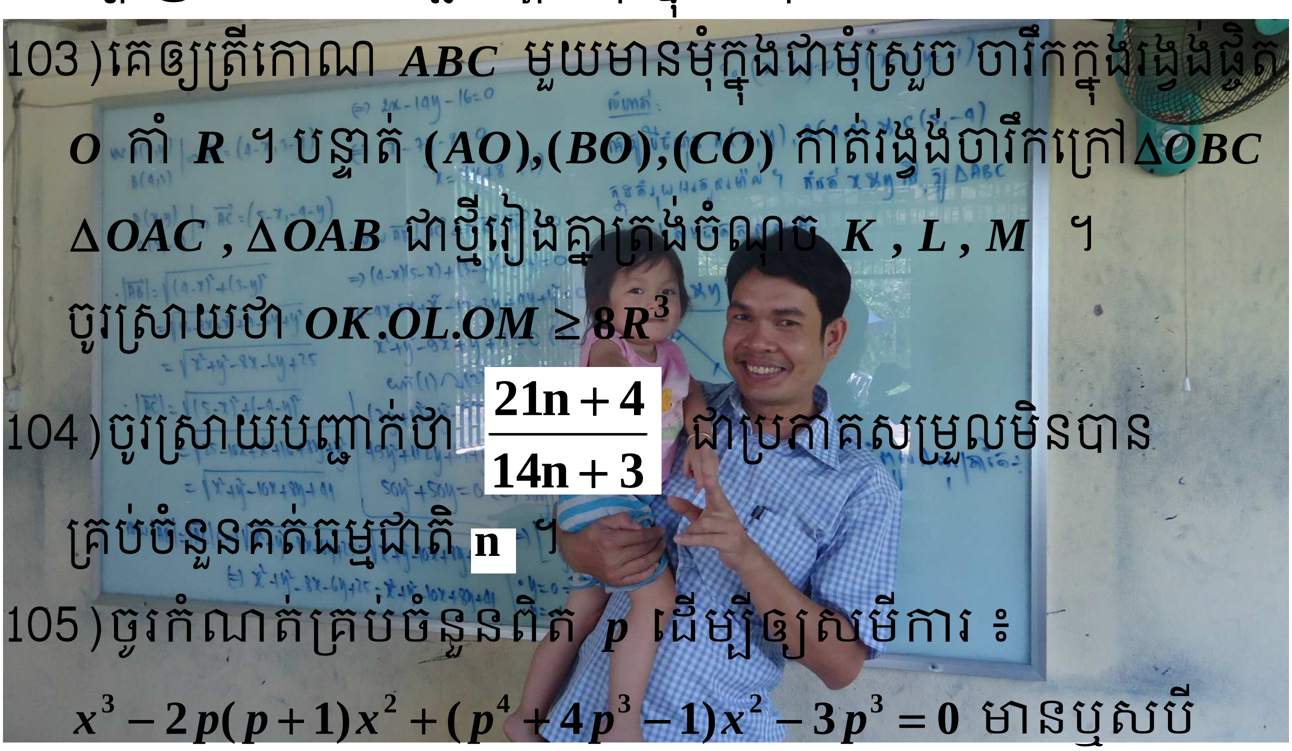
គេដឹងថា $\alpha^3+\beta^3=2013^2$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ q ?

100) គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab}\geq\frac{3}{5}$ ។

101) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $AB = 20$, $AC = 21$ និង $BC = 29$ ។ D និង E ជាពីរចំណុចស្ថិតនៅលើអង្កត់ $[BC]$ ដែល $BD = 8$ និង $EC = 9$ ។ ចូរគណនារង្វាស់នៃមុំ $\angle DAE$?

102) បន្ទាត់សេវាពីរ AP និង AQ ខុសគ្នានៃ ΔABC ដែល $AB \neq AC$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $AQ^2 = AP^2 + (AC - AB)^2$ បង្ហាញថា AP ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle BAC \Leftrightarrow BP = CQ$ ។



103) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។ បន្ទាត់ $(AO),(BO),(CO)$ កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔOBC ΔOAC , ΔOAB ជាថ្មីរៀងគ្នាត្រង់ចំណុច K , L , M ។ ចូរស្រាយថា $OK.OL.OM \geq 8R^3$

104) ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

105) ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនពិត p ដើម្បីឲ្យសមីការ ៖ $x^3 - 2p(p+1)x^2 + (p^4 + 4p^3 - 1)x^2 - 3p^3 = 0$ មានឫសបី ផ្សេងគ្នាបង្កីតបានជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែងមួយ ។

106) គេឲ្យ $a,b,c \in IR$ ។ បើ $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ គ្រប់ $x \in [-1,1]$ ចូរស្រាយថា $|cx^2 + bx + a| \leq 2$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [-1,1]$ ។

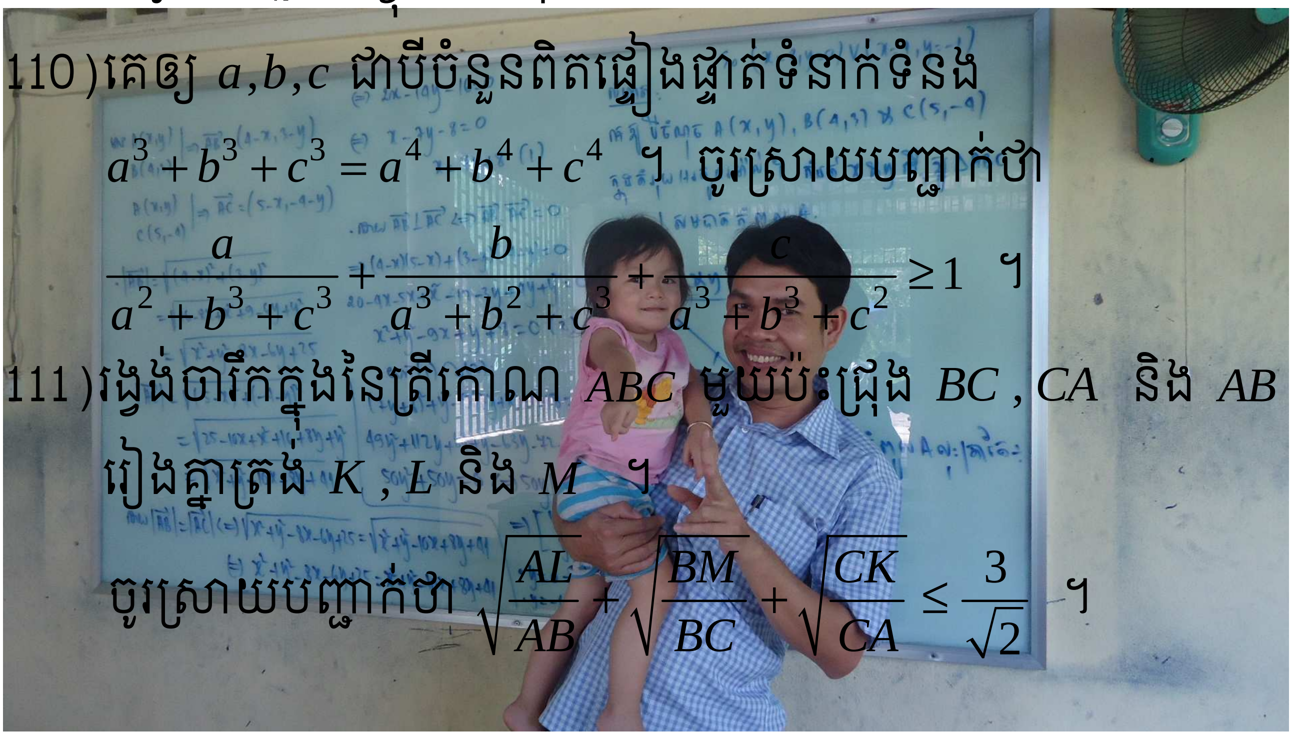
107) ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តម្លៃនៃកន្សោម ៖ $A_n = 2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$ ចែកដាច់នឹង 9 ។

108) ចូរបង្ហាញថា $512^3+675^3+720^3$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

109) គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1$, $u_2=5$

និង $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}^2+4}{u_n}$ ដែល $n\in IN$ ។

ចូរស្រាយថាគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត(u_n)សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ រួចគណនាតួទូទៅ u_n នៃស្វ៊ីតជាអនុគមន៍នៃ n ។



110) គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$a^3+b^3+c^3=a^4+b^4+c^4$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{a^2+b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+b^2+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3+c^2}\ge 1 \text{ ។}$$

111) រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC មួយប៉ះជ្រុង BC , CA និង AB រៀងគ្នាត្រង់ K , L និង M ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{\dfrac{AL}{AB}}+\sqrt{\dfrac{BM}{BC}}+\sqrt{\dfrac{CK}{CA}}\le\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ។

✧✧✧✧✧

ជំពូកទី២

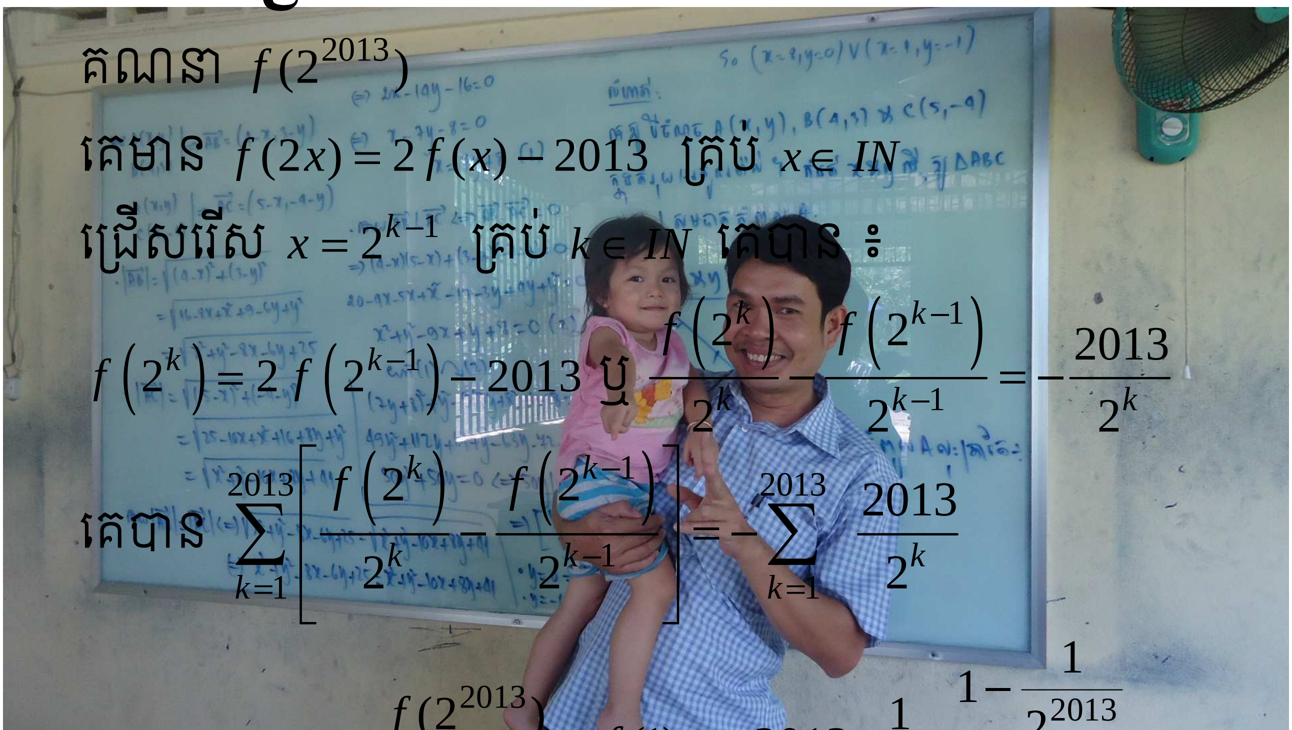
ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី០១

គេឲ្យអនុគមន៍ $f: IN \to IR$ ដោយដឹងថាគ្រប់ $x \in IN$ គេមាន $f(1)=2013$ និង $f(2x)=2f(x)-2013$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ $f(2^{2013})$?

ដំណោះស្រាយ



គណនា $f(2^{2013})$

គេមាន $f(2x)=2f(x)-2013$ គ្រប់ $x \in IN$

ជ្រើសរើស $x=2^{k-1}$ គ្រប់ $k \in IN$ គេបាន ៖

$$f\left(2^k\right)=2f\left(2^{k-1}\right)-2013 \text{ ឬ } \frac{f\left(2^k\right)}{2^k}-\frac{f\left(2^{k-1}\right)}{2^{k-1}}=-\frac{2013}{2^k}$$

គេបាន $$\sum_{k=1}^{2013}\left[\frac{f\left(2^k\right)}{2^k}-\frac{f\left(2^{k-1}\right)}{2^{k-1}}\right]=-\sum_{k=1}^{2013}\frac{2013}{2^k}$$

$$\frac{f(2^{2013})}{2^{2013}}-f(1)=-2013\times\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{2^{2013}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{f(2^{2013})}{2^{2013}}-2013=-2013+\frac{2013}{2^{2013}}$$

ដូចនេះ $f(2^{2013})=2013$ ។

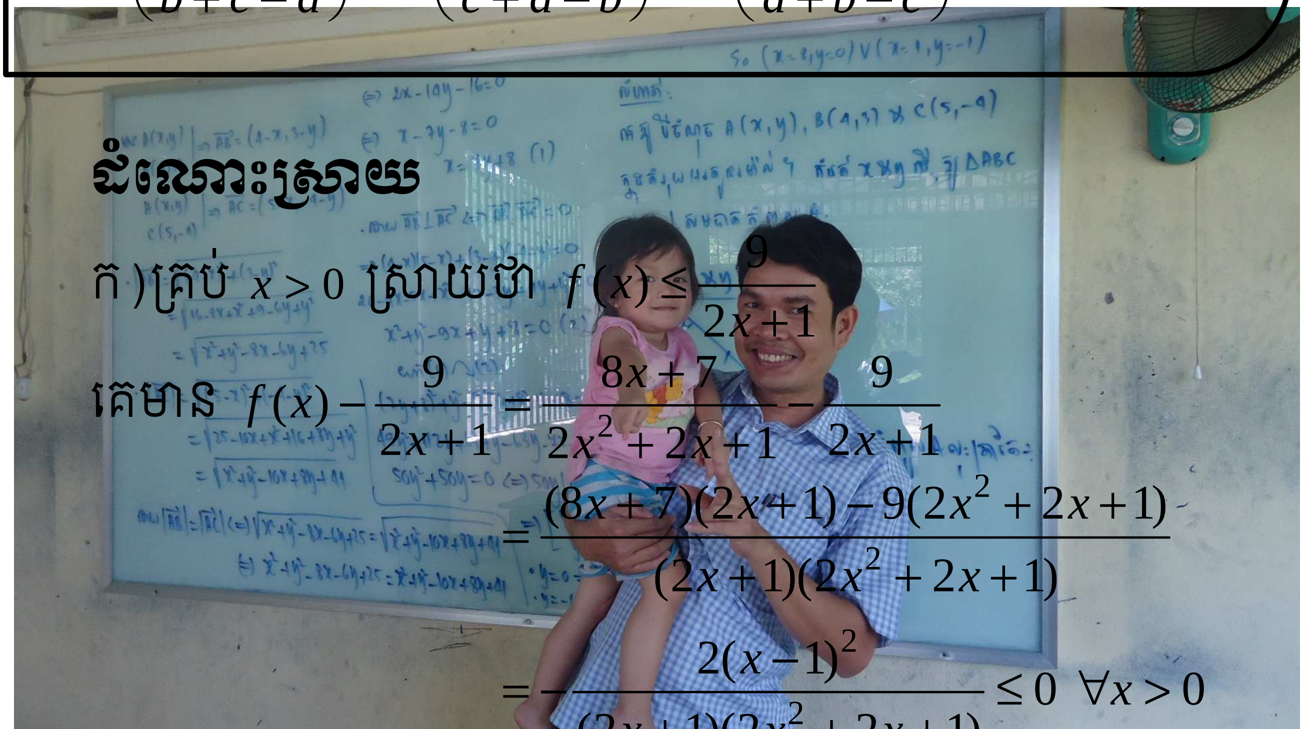
លំហាត់ទី០២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{8x+7}{2x^2+2x+1}$

ក)គ្រប់ $x>0$ ស្រាយថា $f(x)\le\dfrac{9}{2x+1}$ ។

ខ)បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយនោះចូរស្រាយថា៖

$$f\left(\frac{a}{b+c-a}\right)+f\left(\frac{b}{c+a-b}\right)+f\left(\frac{c}{a+b-c}\right)\le 9$$



ដំណោះស្រាយ

ក)គ្រប់ $x>0$ ស្រាយថា $f(x)\le\dfrac{9}{2x+1}$

គេមាន $f(x)-\dfrac{9}{2x+1}=\dfrac{8x+7}{2x^2+2x+1}-\dfrac{9}{2x+1}$

$$=\frac{(8x+7)(2x+1)-9(2x^2+2x+1)}{(2x+1)(2x^2+2x+1)}$$

$$=-\frac{2(x-1)^2}{(2x+1)(2x^2+2x+1)}\le 0\ \ \forall x>0$$

ព្រោះ $2(x-1)\ge 0$, $(2x+1)(2x^2+2x+1)>0\ \forall x>0$ ។

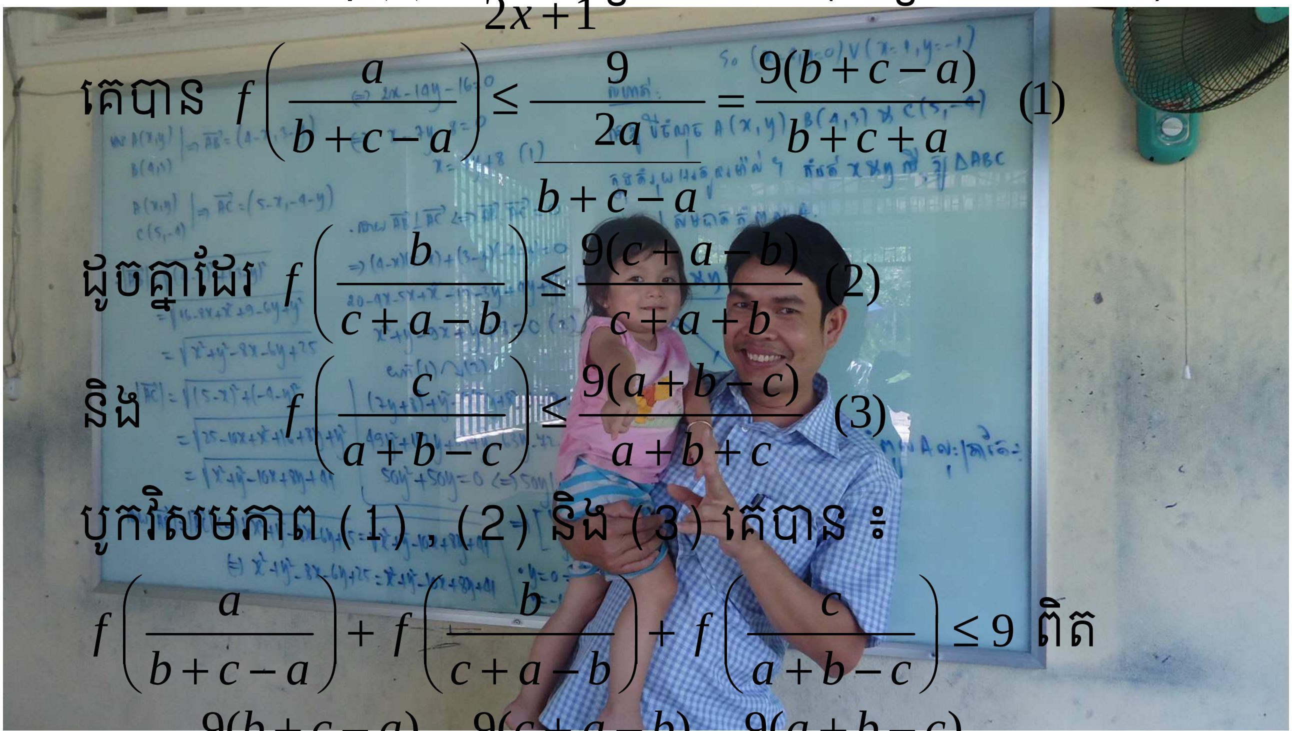
ដូចនេះ $f(x)\le\dfrac{9}{2x+1}$ គ្រប់ $x>0$ ។

ខ) ស្រាយថា

$$f\left(\frac{a}{b+c-a}\right)+f\left(\frac{b}{c+a-b}\right)+f\left(\frac{c}{a+b-c}\right)\le 9$$

បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយនោះ $\begin{cases} b+c-a>0 \\ c+a-b>0 \\ a+b-c>0 \end{cases}$

ដោយគេមាន $f(x)\le\frac{9}{2x+1}$ គ្រប់ $x>0$ (សម្រាយខាងលើ)



គេបាន $f\left(\frac{a}{b+c-a}\right)\le\frac{9}{\frac{2a}{b+c-a}}=\frac{9(b+c-a)}{b+c+a}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $f\left(\frac{b}{c+a-b}\right)\le\frac{9(c+a-b)}{c+a+b}$ (2)

និង $f\left(\frac{c}{a+b-c}\right)\le\frac{9(a+b-c)}{a+b+c}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន ៖

$$f\left(\frac{a}{b+c-a}\right)+f\left(\frac{b}{c+a-b}\right)+f\left(\frac{c}{a+b-c}\right)\le 9$$ ពិត

ព្រោះ $\frac{9(b+c-a)}{b+c+a}+\frac{9(c+a-b)}{a+b+c}+\frac{9(a+b-c)}{a+b+c}=9$ ។

សមភាពកើតមានកាលណា $x=1$ នោះ $\begin{cases} 2a=b+c \\ 2b=c+a \\ 2c=a+b \end{cases}$

នាំឲ្យ $a=b=c$ នោះវាជាជ្រុងនៃត្រីកោណសមង្ស ។

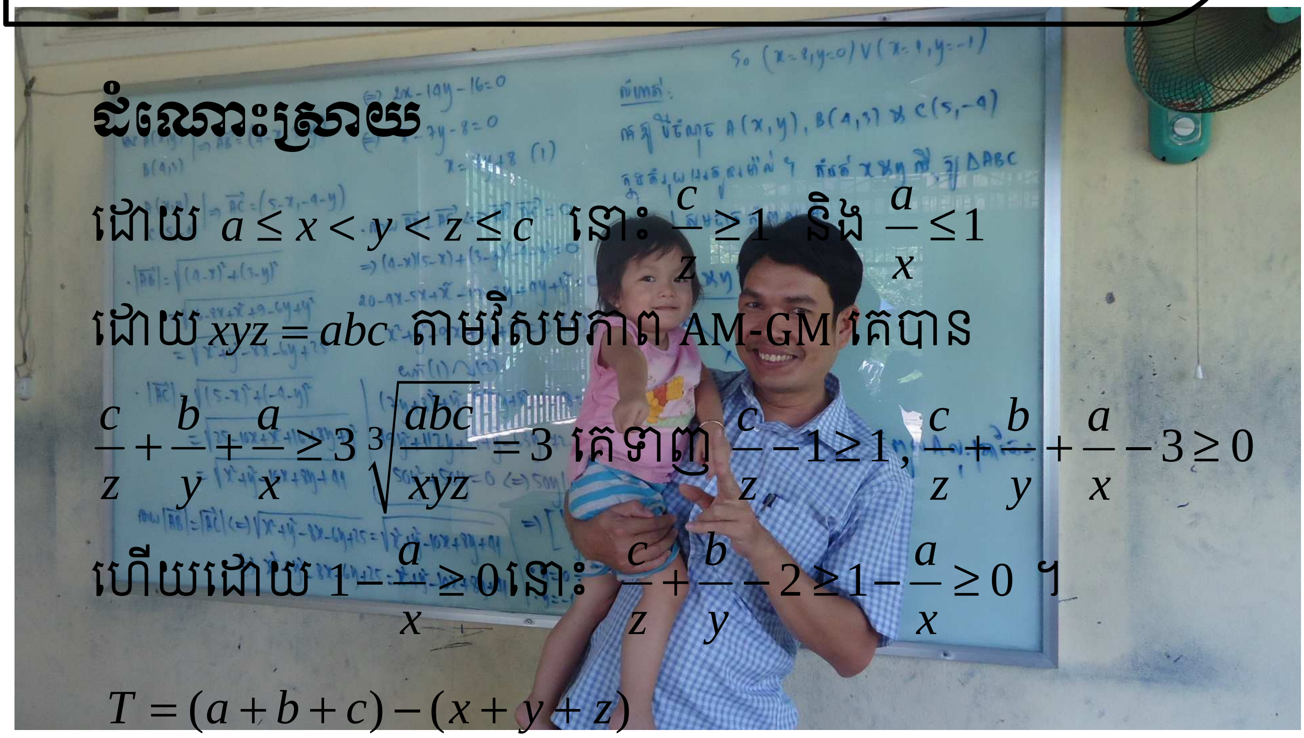
លំហាត់ទី០៣ (India National Olympiad 2013)

គេឲ្យ a,b,c,x,y,z ជាប្រាំមួយចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់

$x+y+z=a+b+c$ និង $xyz=abc$ ។

សន្មតថា $a\le x<y<z\le c$ និង $a<b<c$ ។

ចូរស្រាយថា $x=a$, $y=b$ និង $z=c$



ដំណោះស្រាយ

ដោយ $a\le x<y<z\le c$ នោះ $\frac{c}{z}\ge 1$ និង $\frac{a}{x}\le 1$

ដោយ $xyz=abc$ តាមវិសមភាព AM-GM គេបាន

$\frac{c}{z}+\frac{b}{y}+\frac{a}{x}\ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{xyz}}=3$ គេទាញ $\frac{c}{z}-1\ge 1, \frac{c}{z}+\frac{b}{y}+\frac{a}{x}-3\ge 0$

ហើយដោយ $1-\frac{a}{x}\ge 0$ នោះ $\frac{c}{z}+\frac{b}{y}-2\ge 1-\frac{a}{x}\ge 0$ ។

$$
\begin{aligned}
T&=(a+b+c)-(x+y+z)\\
&=x\left(\frac{a}{x}-1\right)+y\left(\frac{b}{y}-1\right)+z\left(\frac{c}{z}-1\right)\\
&=x\left(\frac{c}{z}+\frac{b}{y}+\frac{a}{x}-3\right)+(y-x)\left(\frac{c}{z}+\frac{b}{y}-2\right)+(z-y)\left(\frac{c}{z}-1\right)\ge 0
\end{aligned}
$$

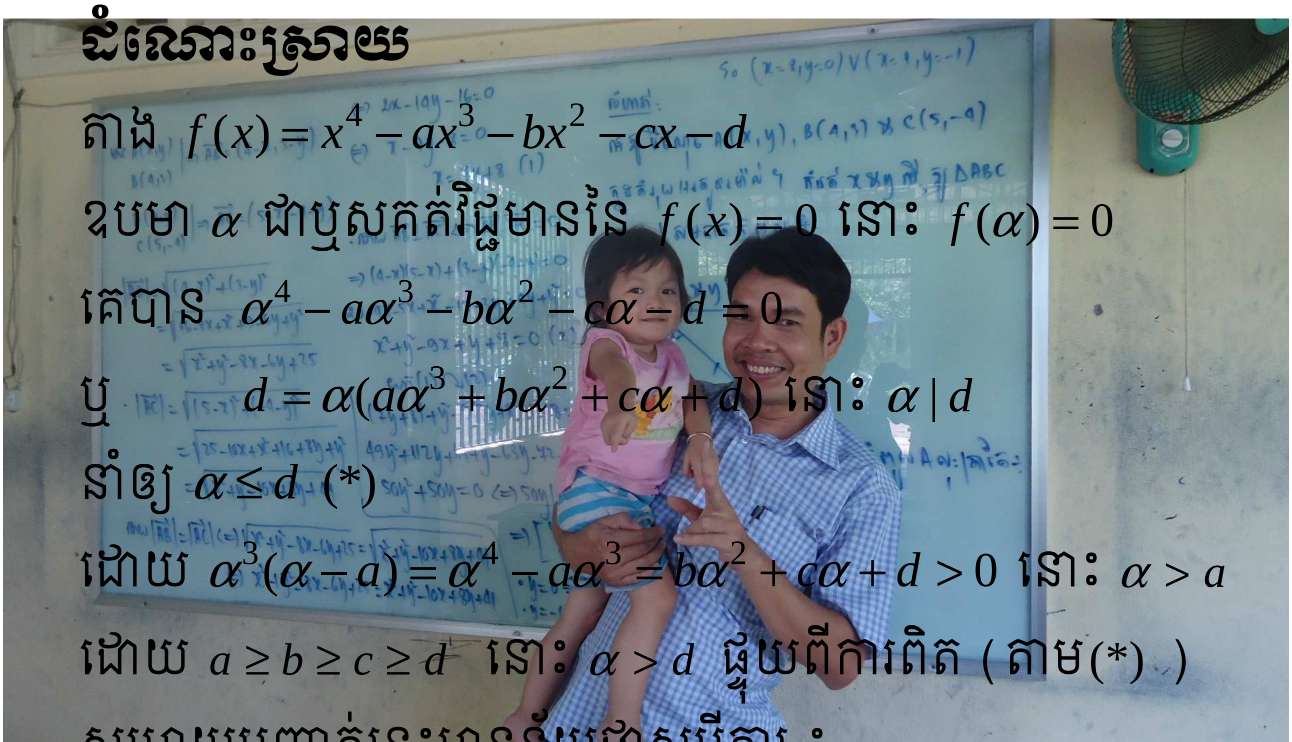
ដោយ $a+b+c=x+y+z$ នាំឲ្យ $T=0$ នោះវិសមភាពពិត

លុះត្រាតែ $a=x\,,b=y\,,c=z$ ។

លំហាត់ទី០៤(India National Olympiad 2013)

គេឲ្យ $a,b,c,d\in IN$ ដោយដឹងថា $a\ge b\ge c\ge d$ ។

ចូរបង្ហាញថាសមីការ $x^4-ax^2-bx^2-cx-d=0$ គ្មានឫស ជាចំនួនគត់ ។



ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x)=x^4-ax^3-bx^2-cx-d$

ឧបមា α ជាឫសគត់វិជ្ជមាននៃ $f(x)=0$ នោះ $f(\alpha)=0$

គេបាន $\alpha^4-a\alpha^3-b\alpha^2-c\alpha-d=0$

ឬ $d=\alpha(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)$ នោះ $\alpha\,|\,d$

នាំឲ្យ $\alpha\le d$ (*)

ដោយ $\alpha^3(\alpha-a)=\alpha^4-a\alpha^3=b\alpha^2+c\alpha+d>0$ នោះ $\alpha>a$

ដោយ $a\ge b\ge c\ge d$ នោះ $\alpha>d$ ផ្ទុយពីការពិត (តាម(*))

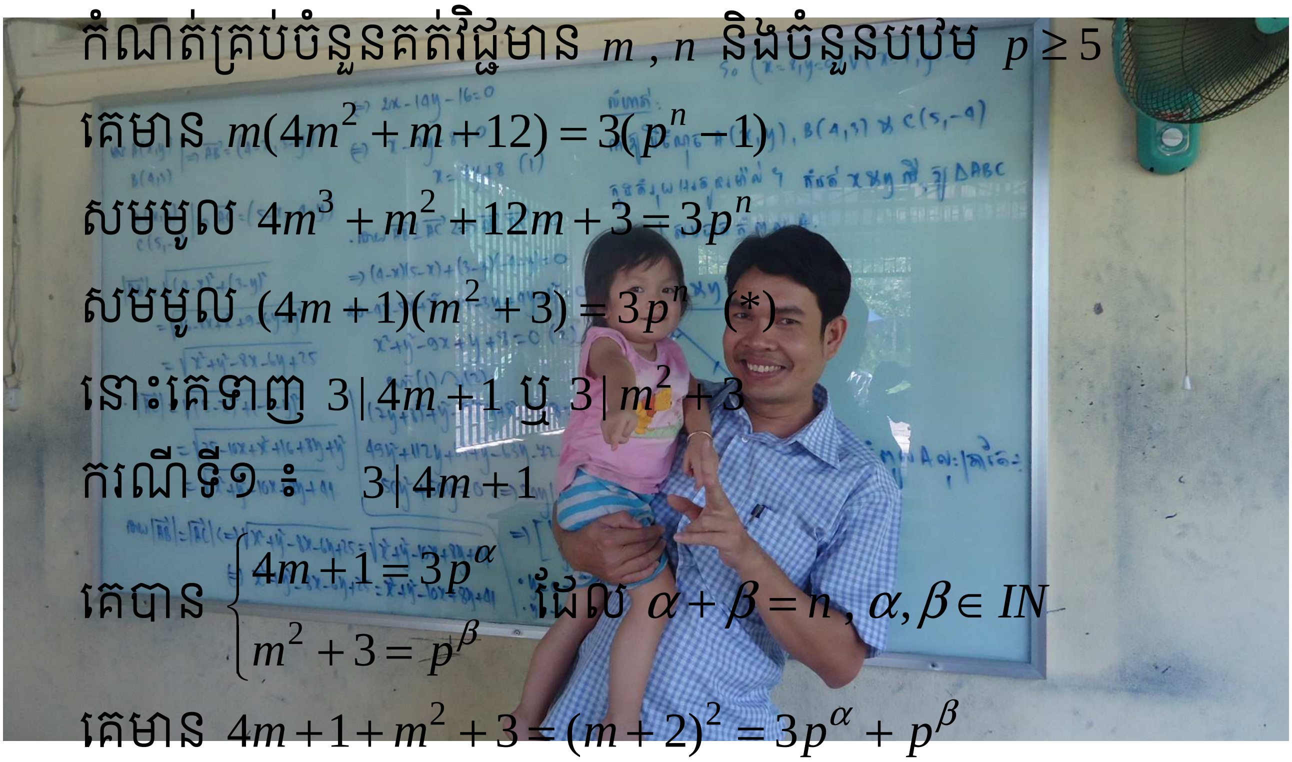
សម្រាយបញ្ជាក់នេះមានន័យថាសមីការ ៖

$x^4-ax^2-bx^2-cx-d=0$ គ្មានឫសជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី០៥ (India National Olympiad 2013)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $m\,,n$ និងចំនួនបឋម $p\geq 5$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $m(4m^2+m+12)=3(p^n-1)$ ។

ដំណោះស្រាយ



កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $m\,,n$ និងចំនួនបឋម $p\geq 5$

គេមាន $m(4m^2+m+12)=3(p^n-1)$

សមមូល $4m^3+m^2+12m+3=3p^n$

សមមូល $(4m+1)(m^2+3)=3p^n \quad (*)$

នោះគេទាញ $3\,|\,4m+1$ ឬ $3\,|\,m^2+3$

ករណីទី១ ៖ $3\,|\,4m+1$

គេបាន $\begin{cases} 4m+1=3p^{\alpha} \\ m^2+3=p^{\beta} \end{cases}$ ដែល $\alpha+\beta=n\,,\alpha,\beta\in IN$

គេមាន $4m+1+m^2+3=(m+2)^2=3p^{\alpha}+p^{\beta}$

នោះ $p\,|\,m+2$ នាំឲ្យ $m\equiv -2 \pmod p$

នាំឲ្យ $m^2+3\equiv 7 \pmod p$ តែ $m^2+3=p^{\beta}\equiv 0 \pmod p$

គេទាញ $p\,|\,7$ នោះ $p=7$

គេបាន $4m+1=3\times 7^{\alpha}$ ឬ $m=\dfrac{3\times 7^{\alpha}-1}{4}$

ដោយ $m^2+3=p^{\beta}=7^{\beta}$

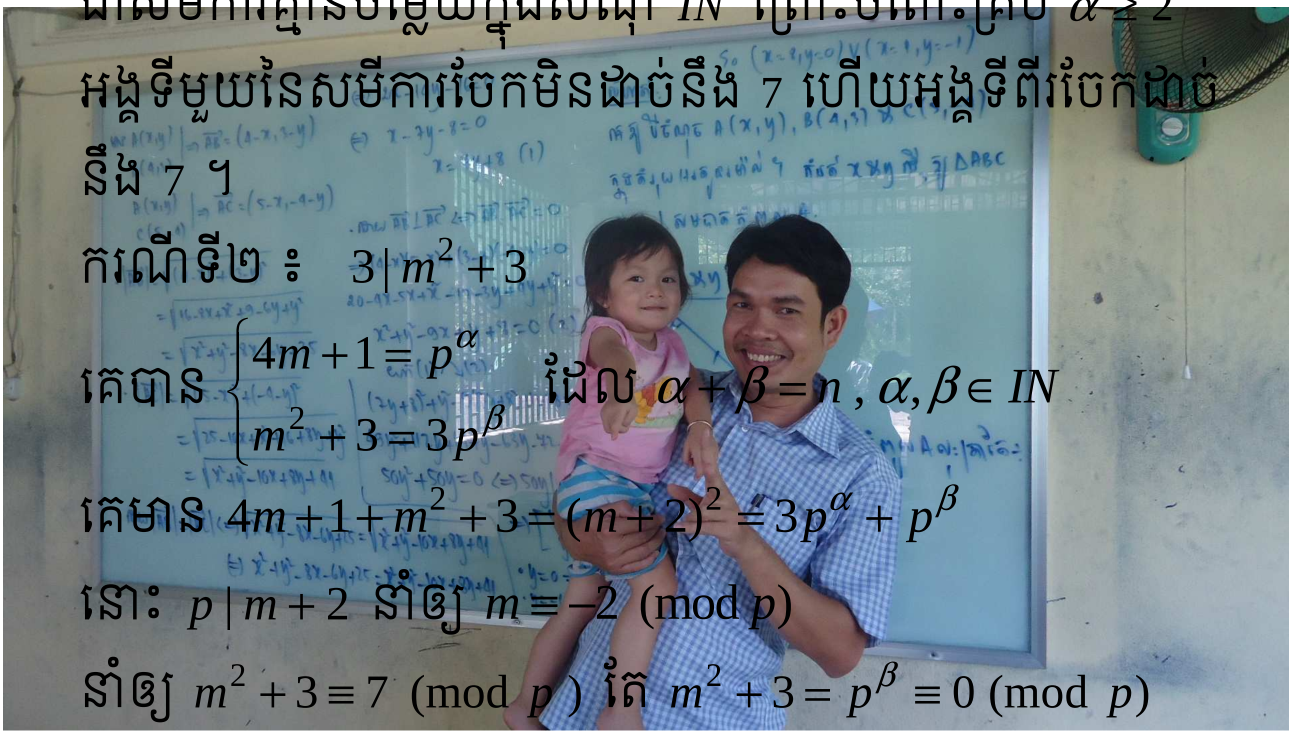
គេបាន $\dfrac{(3\times 7^{\alpha}-1)^2}{16}+3=7^{\beta}$

សមមូល $9\times 7^{2\alpha}-6\times 7^{\alpha}+49=16\times 7^{\beta}$

-បើ $\alpha=1$ គេបាន $9\times 7^2-6\times 7+49=16\times 7^{\beta}$

ឬ $16\times 7^{\beta}=8$ (គ្មានឬសក្នុង IN)

-បើ $\alpha\geq 2$ សមីការសមមូល $9\times 7^{\alpha-2}(7^{\alpha}-6)+1=16\times 7^{\beta}$



ជាសមីការគ្មានចម្លើយក្នុងសំណុំ IN ព្រោះចំពោះគ្រប់ $\alpha\geq 2$ អង្គទីមួយនៃសមីការចែកមិនដាច់នឹង 7 ហើយអង្គទីពីរចែកដាច់នឹង 7 ។

ករណីទី២ ៖ $3|m^2+3$

គេបាន $\begin{cases} 4m+1=p^{\alpha} \\ m^2+3=3p^{\beta} \end{cases}$ ដែល $\alpha+\beta=n$, $\alpha,\beta\in IN$

គេមាន $4m+1+m^2+3=(m+2)^2=3p^{\alpha}+p^{\beta}$

នោះ $p\,|\,m+2$ នាំឲ្យ $m\equiv -2 \pmod{p}$

នាំឲ្យ $m^2+3\equiv 7 \pmod{p}$ តែ $m^2+3=p^{\beta}\equiv 0 \pmod{p}$

គេទាញ $p\,|\,7$ នោះ $p=7$

គេបាន $4m+1=7^{\alpha}$ ឬ $m=\dfrac{7^{\alpha}-1}{4}$

ដោយ $m^2+3=3p^{\beta}=3\times 7^{\beta}$ នោះ $\left(\dfrac{7^{\alpha}-1}{4}\right)^2+3=3\times 7^{\beta}$

សមមូល $7^{2\alpha}-2\times 7^{\alpha}+49=48\times 7^{\beta}$

-បើ $\alpha=1$ នោះ $7^2-14+49=7\times16=48\times7^\beta$

ឬ $7^\beta=\frac{7}{3}$ (ជាសមីការគ្មានឫស)

-បើ $\alpha=2$ នោះ $7^4-2\times7^2+49=7^2\times48=48\times7^\beta$

គេទាញ $\beta=2$ ហើយ $m=\frac{7^2-1}{4}=12$, $n=2+2=4$ ។

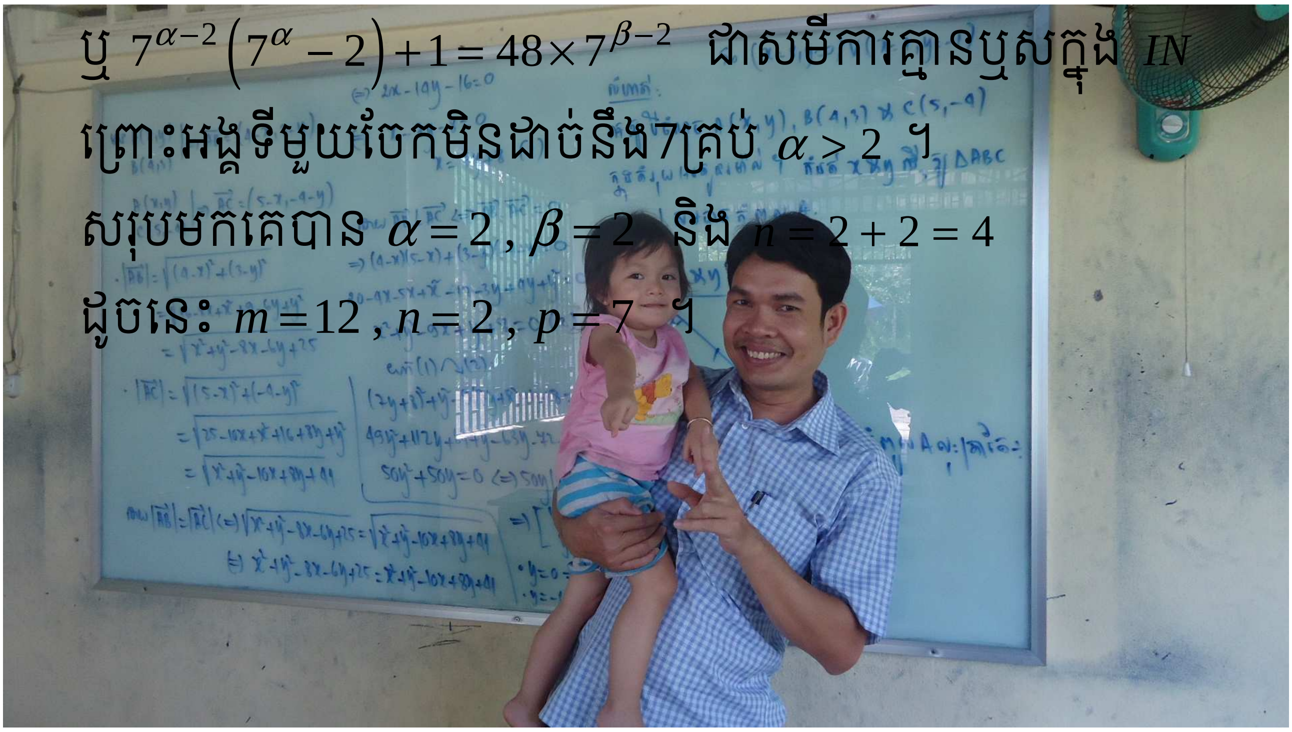
-បើ $\alpha>2$ គេបាន $7^2\left[7^{\alpha-2}\left(7^\alpha-2\right)+1\right]=48\times7^\beta$

ឬ $7^{\alpha-2}\left(7^\alpha-2\right)+1=48\times7^{\beta-2}$ ជាសមីការគ្មានឫសក្នុង IN

ព្រោះអង្គទីមួយចែកមិនដាច់នឹង7គ្រប់ $\alpha>2$ ។

សរុបមកគេបាន $\alpha=2$, $\beta=2$ និង $n=2+2=4$

ដូចនេះ $m=12$, $n=2$, $p=7$ ។



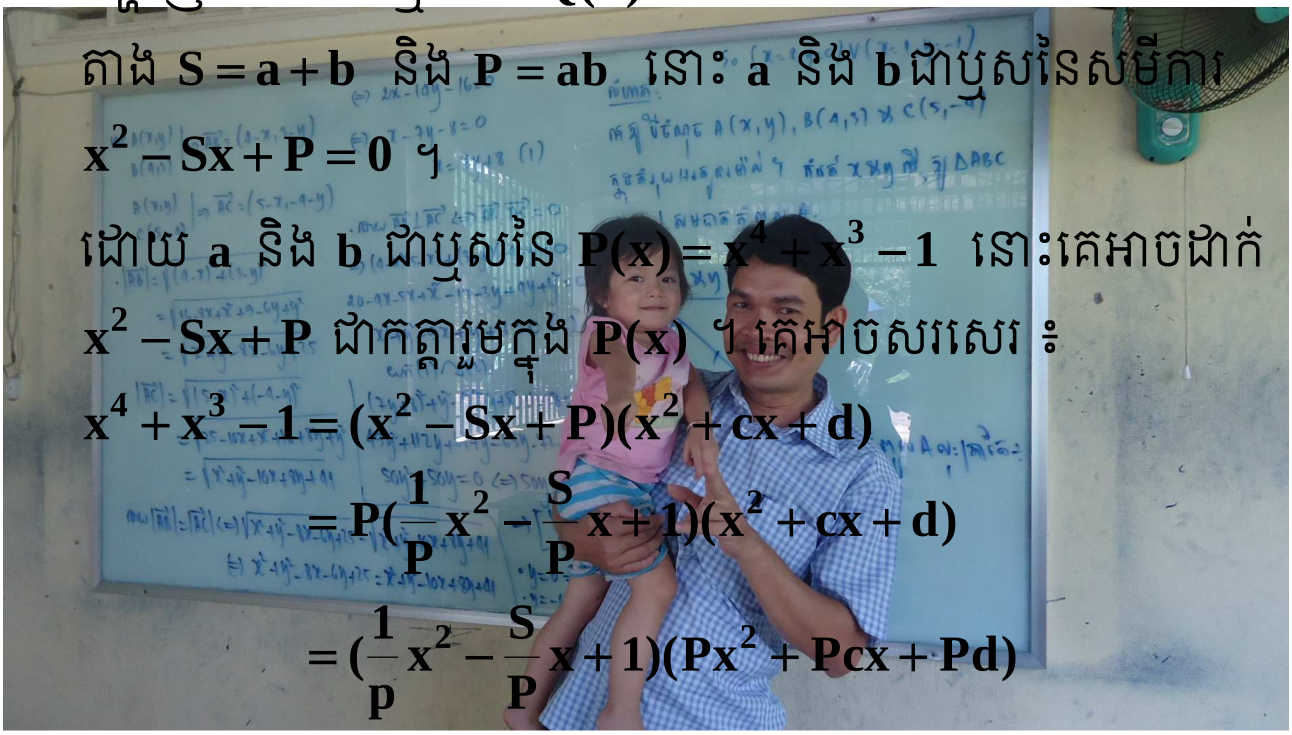
លំហាត់ទី០៦

គេឲ្យ a និង b ជាឫសនៃ $P(x)=x^4+x^3-1$ ។

ចូរបង្ហាញថា ab ជាឫសនៃ $Q(x)=x^6+x^4+x^3-x^2-1$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ab ជាឫសនៃ $Q(x)$



តាង $S=a+b$ និង $P=ab$ នោះ a និង b ជាឫសនៃសមីការ

$x^2-Sx+P=0$ ។

ដោយ a និង b ជាឫសនៃ $P(x)=x^4+x^3-1$ នោះគេអាចដាក់

x^2-Sx+P ជាកត្តារួមក្នុង $P(x)$ ។ គេអាចសរសេរ ៖

$$x^4+x^3-1=(x^2-Sx+P)(x^2+cx+d)$$

$$=P(\frac{1}{P}x^2-\frac{S}{P}x+1)(x^2+cx+d)$$

$$=(\frac{1}{p}x^2-\frac{S}{P}x+1)(Px^2+Pcx+Pd)$$

$$=(\frac{1}{p}x^2-ux+1)(px^2+vx+w)$$

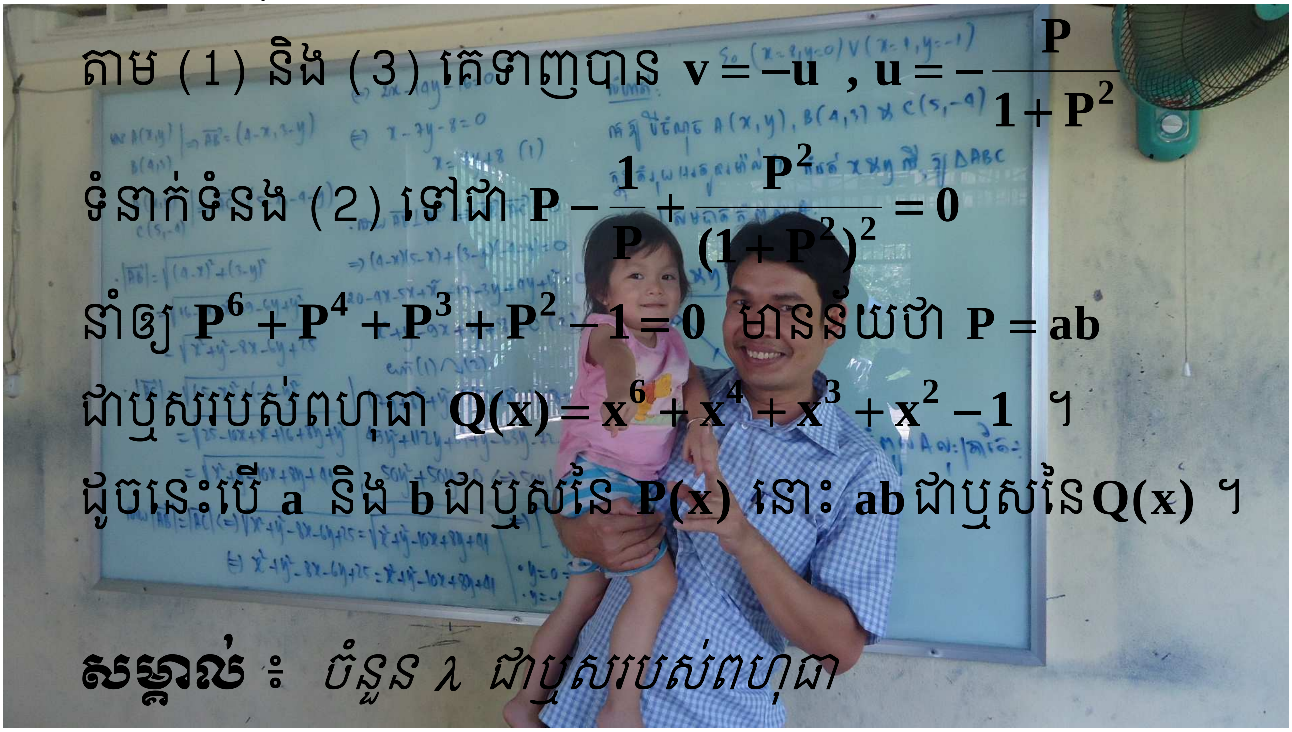
ដែល $u=\frac{S}{P}$, $v=Pc$, $w=Pd$ ។

តាមសមភាពខាងលើនេះគេទាញបាន $w=-1$ ។

គេទាញបាន $x^4+x^3-1=(\frac{1}{p}x^2-ux+1)(px^2+vx-1)$

$$x^4+x^3-1=x^4+(\frac{v}{p}-up)x^3+(p-\frac{1}{p}-uv)x^2+(u+v)x-1$$

គេទាញ $\begin{cases} \frac{v}{P}-uP=1 & (1) \\ P-\frac{1}{P}-uv=0 & (2) \\ u+v=0 & (3) \end{cases}$



តាម (1) និង (3) គេទាញបាន $v=-u$, $u=-\frac{P}{1+P^2}$

ទំនាក់ទំនង (2) ទៅជា $P-\frac{1}{P}+\frac{P^2}{(1+P^2)^2}=0$

នាំឲ្យ $P^6+P^4+P^3+P^2-1=0$ មានន័យថា $P=ab$

ជាឫសរបស់ពហុធា $Q(x)=x^6+x^4+x^3+x^2-1$ ។

ដូចនេះបើ a និង b ជាឫសនៃ $P(x)$ នោះ ab ជាឫសនៃ $Q(x)$ ។

សម្គាល់ ៖ *ចំនួន λ ជាឫសរបស់ពហុធា*

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $P(x)=0$ *ពោលគឺ ៖*

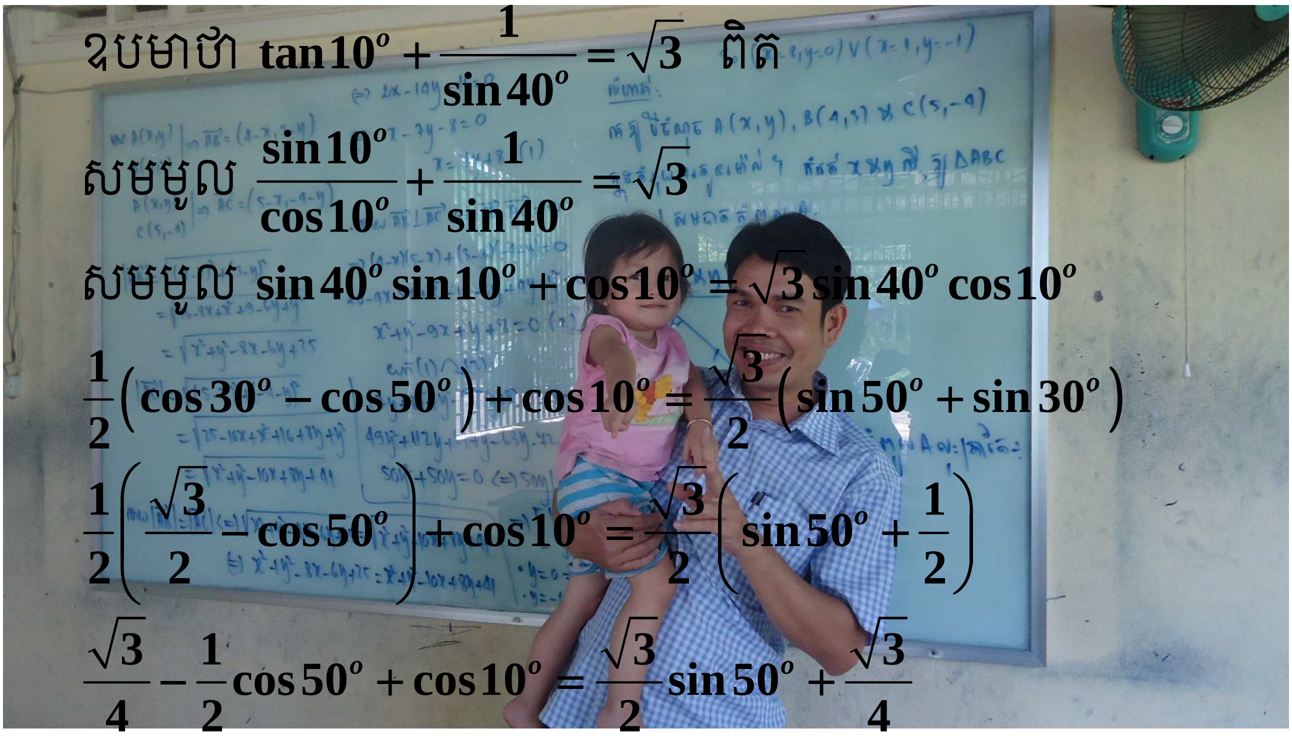
$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k=\lambda_0+\lambda_1x+\lambda_2x^2+...+\lambda_nx^n=0 \text{ ។}$$

លំហាត់ទី០៧

ចូរបង្ហាញថា $\tan 10^o + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\tan 10^o + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$



ឧបមាថា $\tan 10^o + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$ ពិត

សមមូល $\dfrac{\sin 10^o}{\cos 10^o} + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$

សមមូល $\sin 40^o \sin 10^o + \cos 10^o = \sqrt{3}\sin 40^o \cos 10^o$

$$\frac{1}{2}\left(\cos 30^o - \cos 50^o\right) + \cos 10^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin 50^o + \sin 30^o\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 50^o\right) + \cos 10^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin 50^o + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cos 50^o + \cos 10^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^o + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos 10^o = \frac{1}{2}\cos 50^o + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^o$$

$$\cos 10^o = \cos 60^o \cos 50^o + \sin 60^o \sin 50^o$$

$\cos 10^o = \cos(60^o - 50^o)$ ពិត

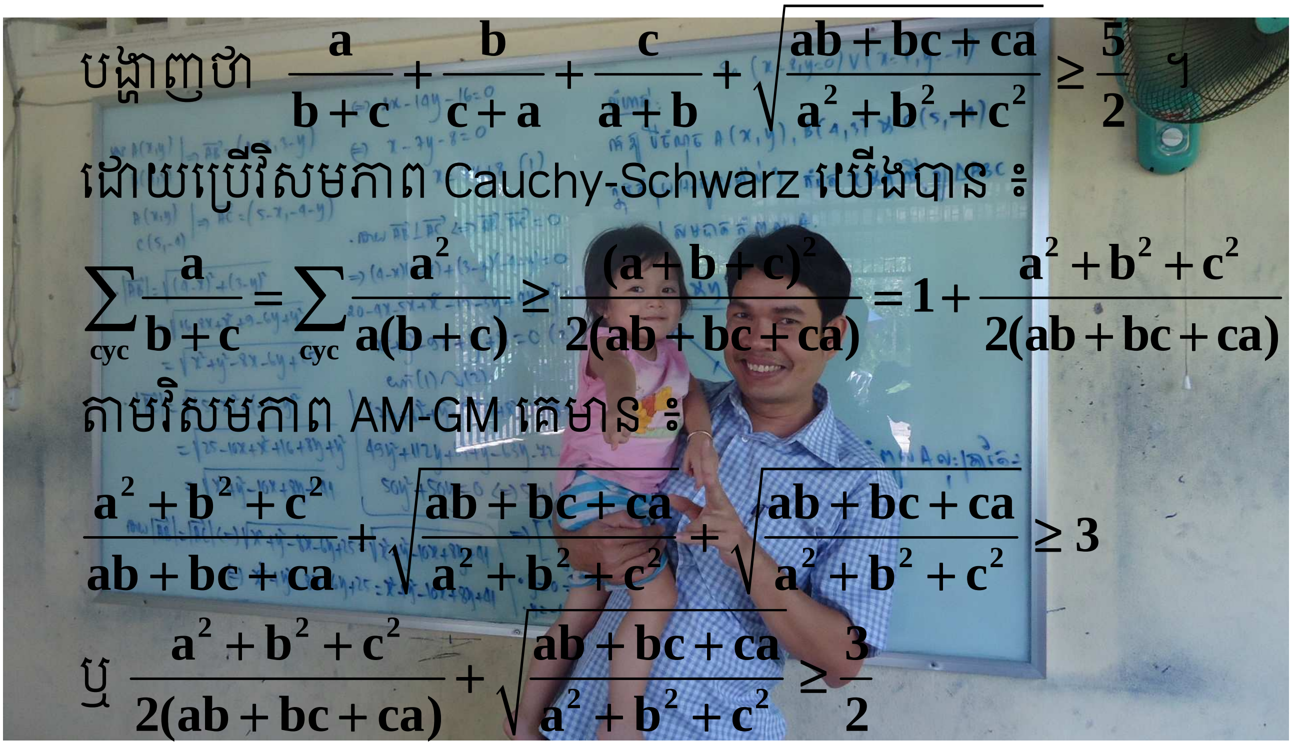
ដូចនេះ $\tan 10^o + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី០៨

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{5}{2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{5}{2}$ ។

ដោយប្រើវិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន ៖

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}=\sum_{cyc}\frac{a^2}{a(b+c)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}=1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}$$

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន ៖

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 3$$

ឬ $\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{3}{2}$

គេទាញ $\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

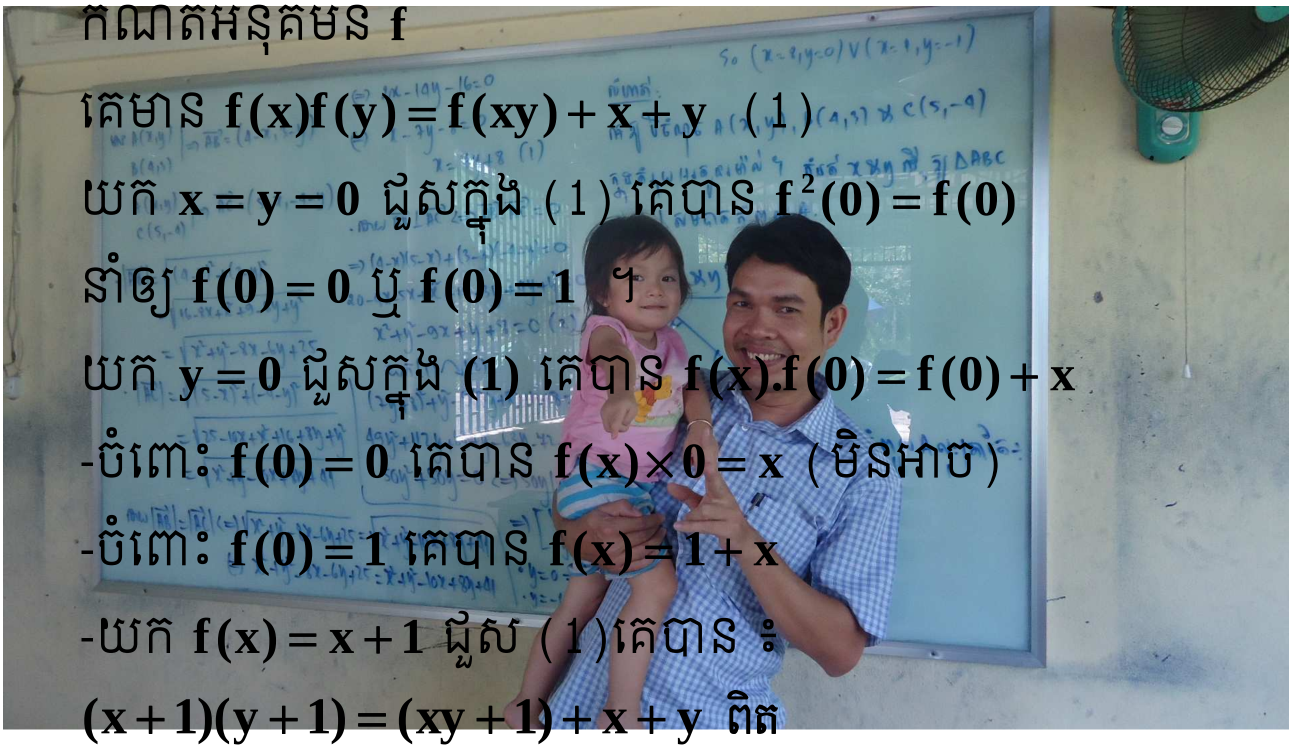
ដូចនេះ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{5}{2}$ ។

លំហាត់ទី០៩

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:IR\to IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x)f(y)=f(xy)+x+y$ ចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ



កំណត់អនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)f(y)=f(xy)+x+y$ (1)

យក $x=y=0$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $f^2(0)=f(0)$

នាំឲ្យ $f(0)=0$ ឬ $f(0)=1$ ។

យក $y=0$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $f(x).f(0)=f(0)+x$

-ចំពោះ $f(0)=0$ គេបាន $f(x)\times 0=x$ (មិនអាច)

-ចំពោះ $f(0)=1$ គេបាន $f(x)=1+x$

-យក $f(x)=x+1$ ជួស (1)គេបាន ៖

$(x+1)(y+1)=(xy+1)+x+y$ ពិត

ដូចនេះ $f(x)=x+1$ ។

✧✧✧✧✧

លំហាត់ទី១០

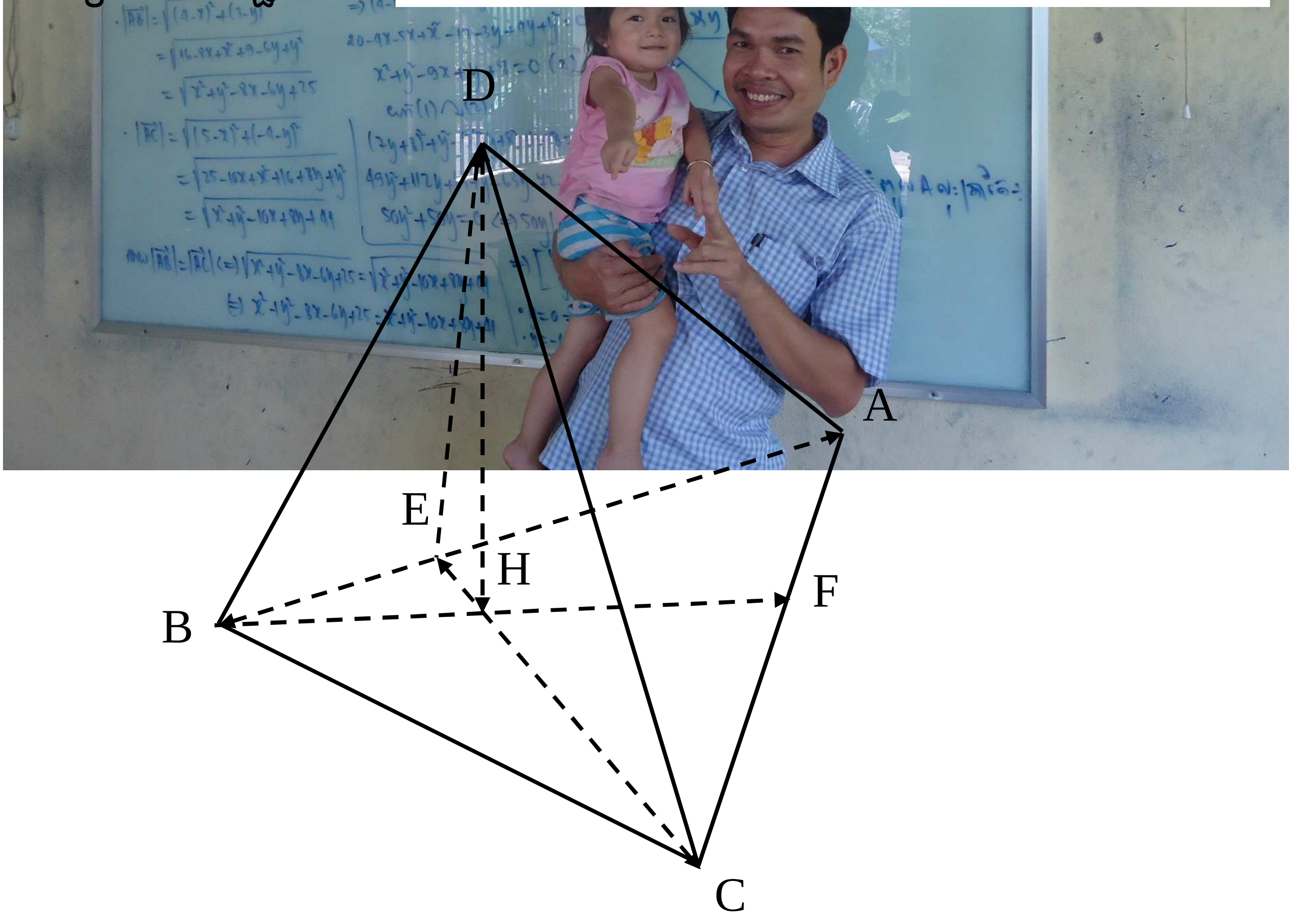
ក្នុងតេត្រាអ៊ែត $\mathbf{ABCD}$ មួយមាន $\angle \mathbf{BDC} = \mathbf{90^o}$ ហើយជើងនៃចំណោលកែងពី $\mathbf{D}$ ទៅប្លង់ $\mathbf{(ABC)}$ ជាប្រសព្វនៃកម្ពស់នៃ $\mathbf{\Delta ABC}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)}$

តើពេលណាទើបយើងបានសមភាព ?

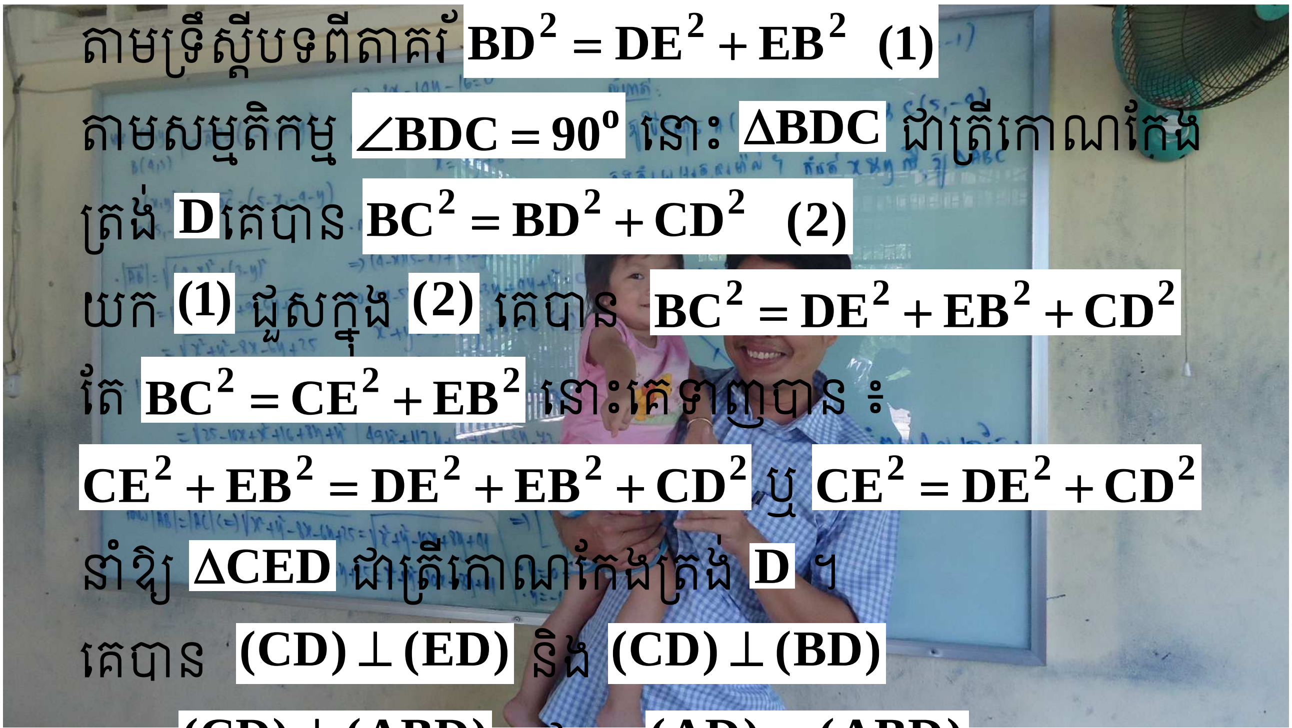
ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)}$



សង់កម្ពស់ [CE] និង [BF] នៃត្រីកោណ ABC ហើយតាង H ជាប្រសព្វរវាងកម្ពស់នៃត្រីកោណនេះ ។

គេមាន $(CED)\perp(ABC)$ និង $(AB)\perp(CE)$ ដែល (CE) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (CED) និង (ABC) នោះគេទាញបាន $(AB)\perp(CDE)$ ហើយដោយ $(DE)\subset(CDE)$ នោះគេបាន $(AB)\perp(DE)$ នាំឱ្យ ΔBED ជាត្រីកោណកែងត្រង់ E ។



តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័ $BD^2=DE^2+EB^2$ (1)

តាមសម្មតិកម្ម $\angle BDC=90^o$ នោះ ΔBDC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D គេបាន $BC^2=BD^2+CD^2$ (2)

យក (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន $BC^2=DE^2+EB^2+CD^2$

តែ $BC^2=CE^2+EB^2$ នោះគេទាញបាន ៖

$CE^2+EB^2=DE^2+EB^2+CD^2$ ឬ $CE^2=DE^2+CD^2$

នាំឱ្យ ΔCED ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D ។

គេបាន $(CD)\perp(ED)$ និង $(CD)\perp(BD)$

នោះ $(CD)\perp(ABD)$ ដោយ $(AD)\subset(ABD)$

នោះ $(CD)\perp(AD)$ នាំឱ្យ ΔCDA ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $(AD)\perp(BD)$

នាំឱ្យ ΔADB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D ។

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រគេបាន $\begin{cases} AB^2 = AD^2 + BD^2 \\ BC^2 = BD^2 + CD^2 \\ CA^2 = AD^2 + CD^2 \end{cases}$

គេទាញ $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2 + CD^2)$ (3)

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេមាន ៖

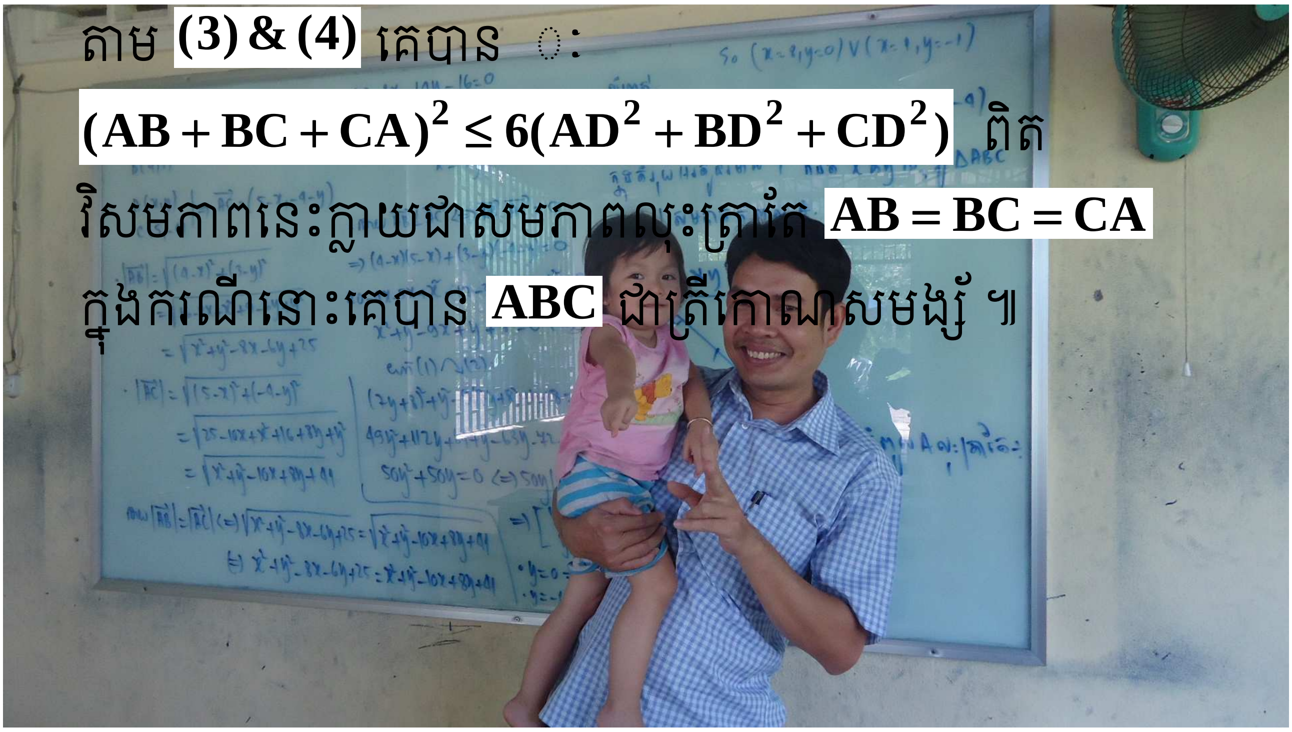
$(AB + BC + CA)^2 \leq 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ (4)

តាម (3) & (4) គេបាន ៈ

$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$ ពិត

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $AB = BC = CA$

ក្នុងករណីនោះគេបាន ABC ជាត្រីកោណសមង្ស័ ៕

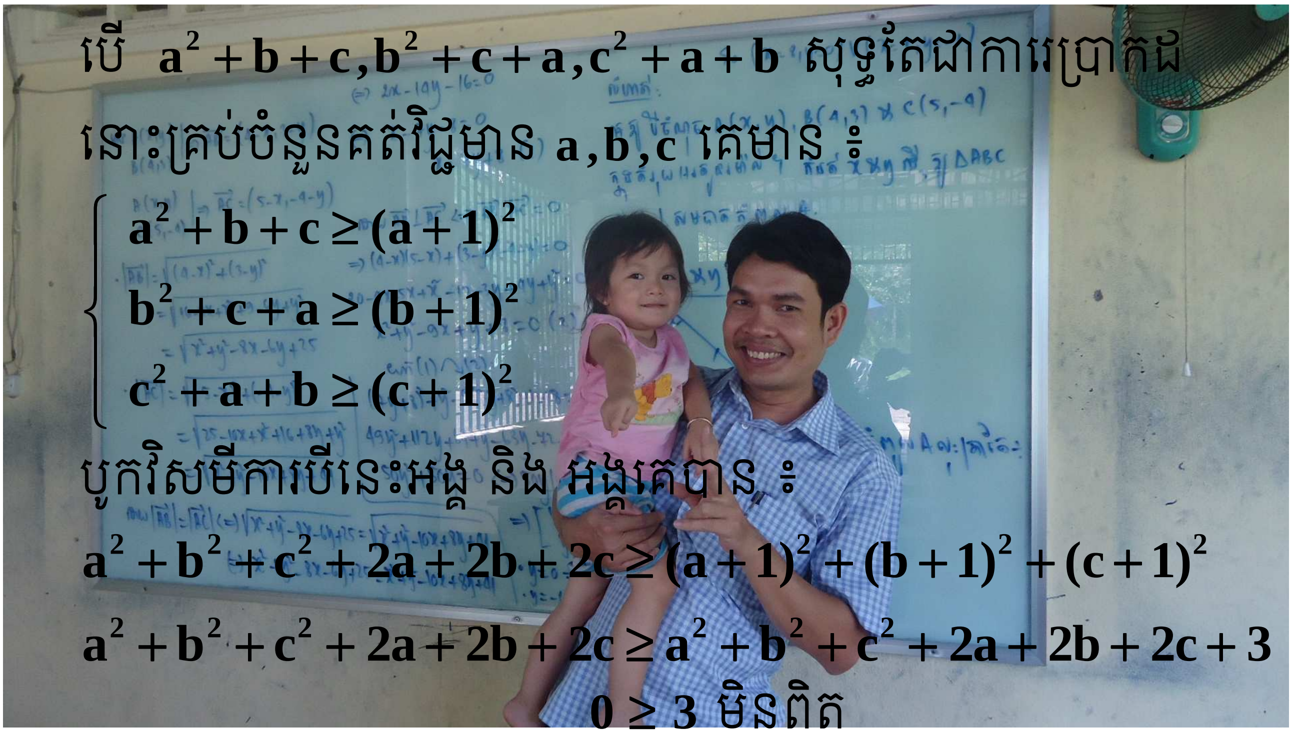


លំហាត់ទី១១

គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថាចំនួនបី $a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ មិនអាចជាការេប្រាកដទាំងអស់ ។

ដំណោះស្រាយ



បើ $a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ នោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c គេមាន ៖

$$\begin{cases} a^2+b+c \geq (a+1)^2 \\ b^2+c+a \geq (b+1)^2 \\ c^2+a+b \geq (c+1)^2 \end{cases}$$

បូកវិសមីការបីនេះអង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c \geq (a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2$$

$$a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c \geq a^2+b^2+c^2+2a+2b+2c+3$$

$0 \geq 3$ មិនពិត

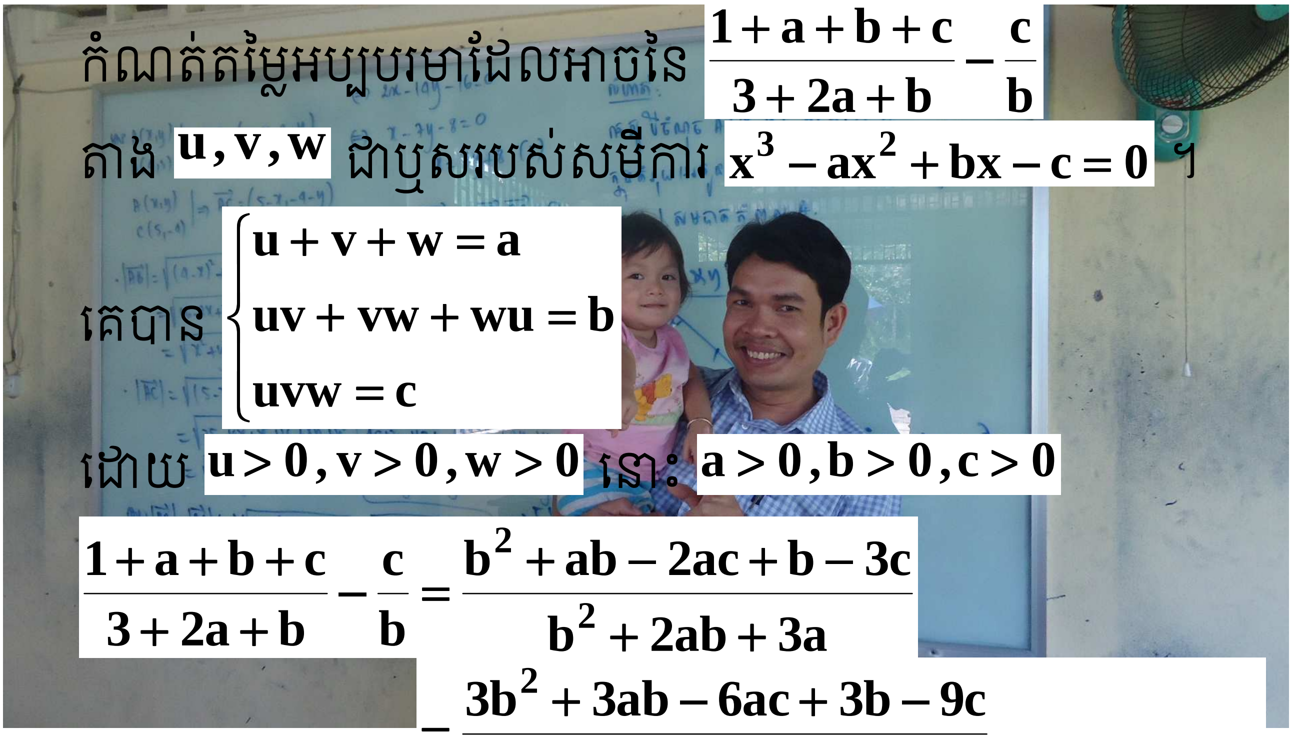
ដូចនេះបីចំនួន $a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b$ មិនអាចជាការេប្រាកដទាំងអស់ ។

លំហាត់ទី១២

សមីការ $x^3-ax^2+bx-c=0$ មានឫសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន (មិនចាំបាច់ខុសគ្នា)។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\frac{c}{b}$ ។

ដំណោះស្រាយ



កំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\frac{c}{b}$

តាង u,v,w ជាឫសរបស់សមីការ $x^3-ax^2+bx-c=0$ ។

គេបាន $\begin{cases} u+v+w=a \\ uv+vw+wu=b \\ uvw=c \end{cases}$

ដោយ $u>0,v>0,w>0$ នោះ $a>0,b>0,c>0$

$$\frac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\frac{c}{b}=\frac{b^2+ab-2ac+b-3c}{b^2+2ab+3a}$$

$$=\frac{3b^2+3ab-6ac+3b-9c}{3(b^2+2ab+3b)}$$

$$=\frac{(b^2+2ab+3b)+(2b^2+ab-6ac-9c)}{3(b^2+2ab+3b)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2b^2+ab-6ac-9c}{3(b^2+2ab+3b)}$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន ៖

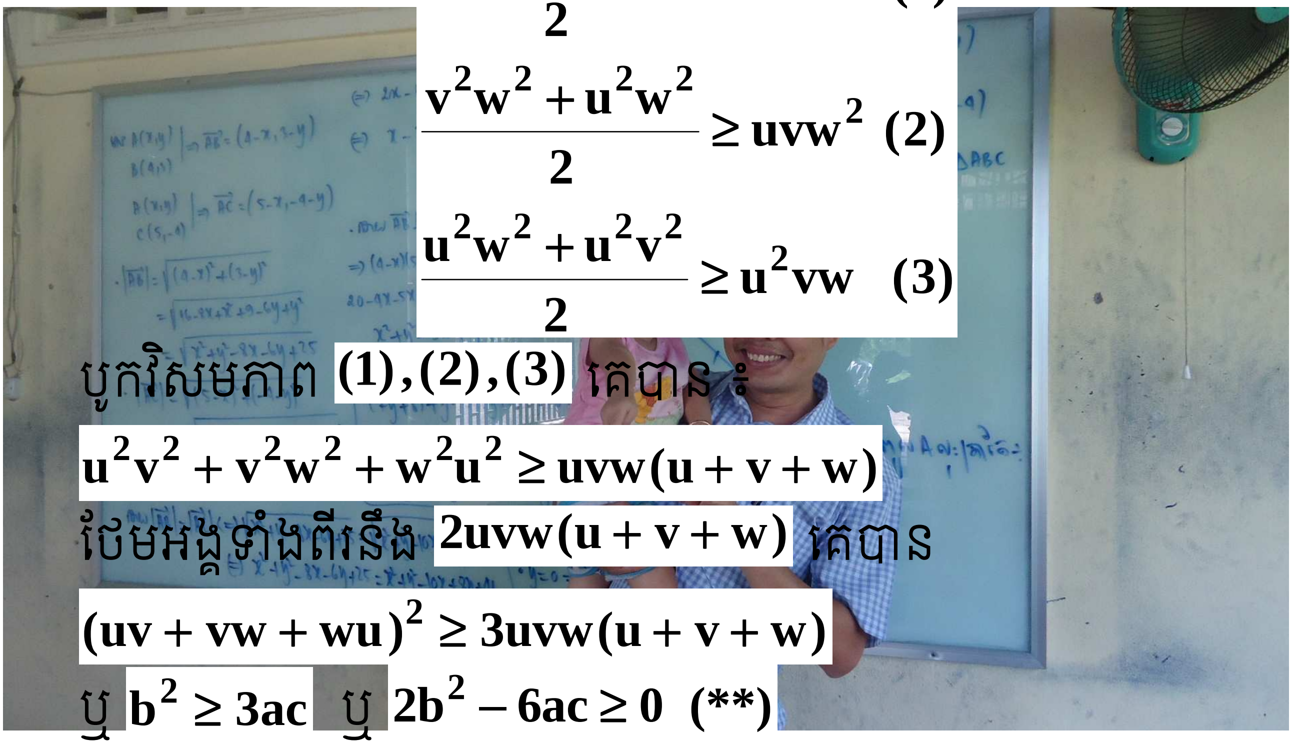
$\mathbf{a = u+v+w \ge 3\sqrt[3]{uvw}}$

និង $\mathbf{b = uv+vw+wu \ge 3\sqrt[3]{u^2v^2w^2}}$

គេបាន $\mathbf{ab \ge 9uvw = 9c}$ ឬ $\mathbf{ab - 9c \ge 0 \ \ (*)}$

ម៉្យាងទៀតគេមាន ៖

$$\frac{u^2v^2+v^2w^2}{2} \ge uv^2w \quad (1)$$



$$\frac{v^2w^2+u^2w^2}{2} \ge uvw^2 \quad (2)$$

$$\frac{u^2w^2+u^2v^2}{2} \ge u^2vw \quad (3)$$

បូកវិសមភាព $\mathbf{(1),(2),(3)}$ គេបាន ៖

$\mathbf{u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2 \ge uvw(u+v+w)}$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $\mathbf{2uvw(u+v+w)}$ គេបាន

$\mathbf{(uv+vw+wu)^2 \ge 3uvw(u+v+w)}$

ឬ $\mathbf{b^2 \ge 3ac}$ ឬ $\mathbf{2b^2 - 6ac \ge 0 \ \ (**)}$

បូកវិសមភាព $\mathbf{(*)\,\&\,(**)}$ គេបាន $\mathbf{2b^2 + ab - 6ac - 9c \ge 0}$

ហេតុនេះ $\displaystyle \frac{1}{3} + \frac{2b^2+ab-6ac-9c}{3(b^2+2ab+3b)} \ge \frac{1}{3}$

ឬ $\displaystyle \frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b} \ge \frac{1}{3}$ ។

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $\displaystyle \frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$ គឺ $\displaystyle \frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី១៣

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x^3+y=3x+4 \\ 2y^3+z=6y+6 \\ 3z^3+x=9z+8 \end{cases}$

ដែល $x,y,z\in IR$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចម្លើយពិត x,y,z ៖

គេមាន $\begin{cases} x^3+y=3x+4 \\ 2y^3+z=6y+6 \\ 3z^3+x=9z+8 \end{cases}$

តាមសមីការ $x^3+y=3x+4$ គេបាន $x^3-3x-2=2-y$

ដោយ $x^3-3x-2=(x-2)(x+1)^2$

នោះ $(x-2)(x+1)^2=2-y\ \ (i)$

តាមសមីការ $2y^3+z=6y+6$ គេបាន $2y^3-6y-4=2-z$

តែ $2y^3-6y-4=2(y-2)(y+1)^2$

នោះ $2(y-2)(y+1)^2=2-z\ \ (ii)$

តាម $3z^3+x=9z+8$ គេបាន $3(z-2)(z+1)^2=2-x\ (iii)$

គុណសមីការ $(i),(ii)\,\&\,(iii)$ គេបាន ៖

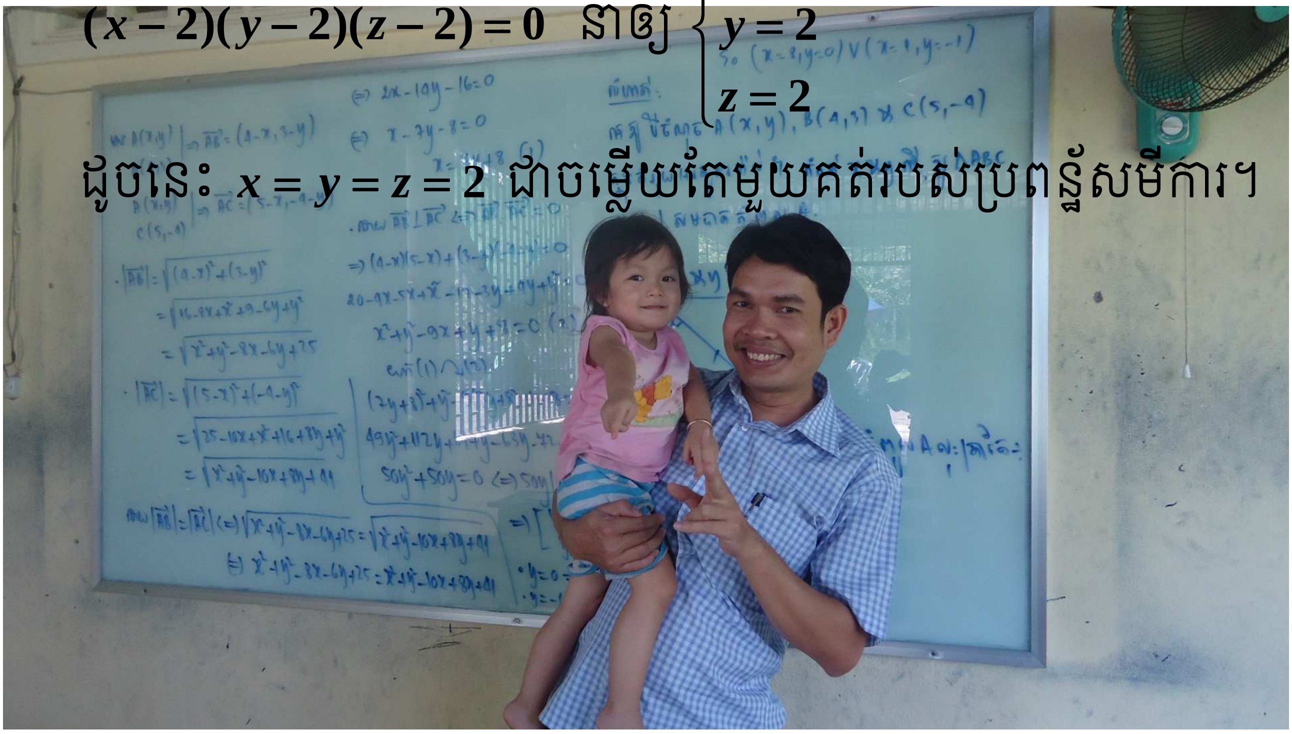
$$6(x-2)(y-2)(z-2)(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=-(x-2)(y-2)(z-2)$$

$$(x-2)(y-2)(z-2)\left[(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2+\frac{1}{6}\right]=0$$

ដោយ $\left[(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2+\frac{1}{6}\right]>0$ នោះសមីការសមមូល

$(x-2)(y-2)(z-2)=0$ នាំឲ្យ $\begin{cases}x=2\\y=2\\z=2\end{cases}$

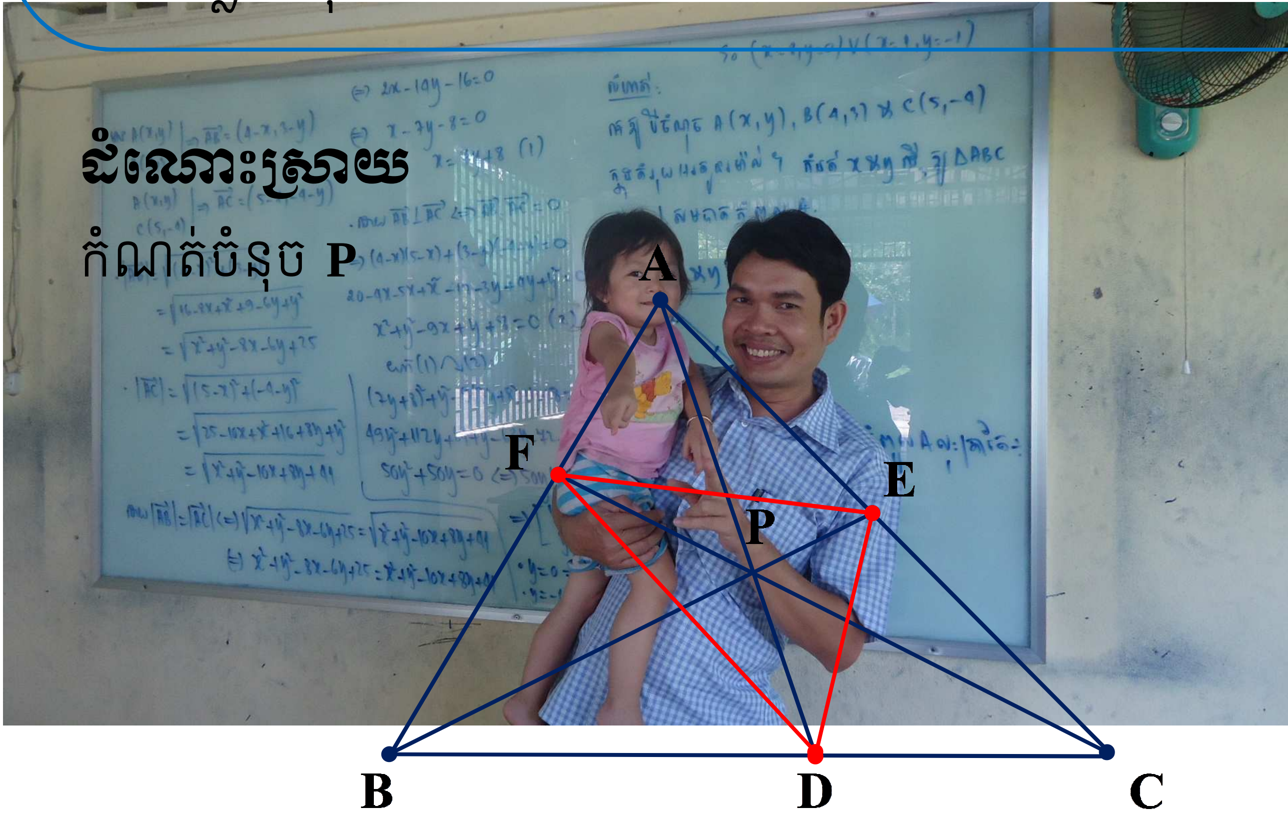
ដូចនេះ $x=y=z=2$ ជាចម្លើយតែមួយគត់របស់ប្រពន្ធ័សមីការ។



លំហាត់ទី១៤

គេមាន **P** ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ **ABC** ។ តាង **D,E** និង **F** ជាចំនុចប្រសព្វរវាង **(AP),(BP),(CP)** ជាមួយជ្រុងឈមនៃមុំ **A,B** និង **C** រៀងគ្នា ។

ចូរកំណត់ចំនុច**P**ដែលអាចឲ្យផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ**DEF** មានតម្លៃធំបំផុត។



ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនុច **P**

តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$,$BD = x$, $CE = y$, $AF = z$

គេបាន $DC = a - x$, $EA = b - y$, $FB = c - z$ ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **DEF** កំណត់ដោយ ៖

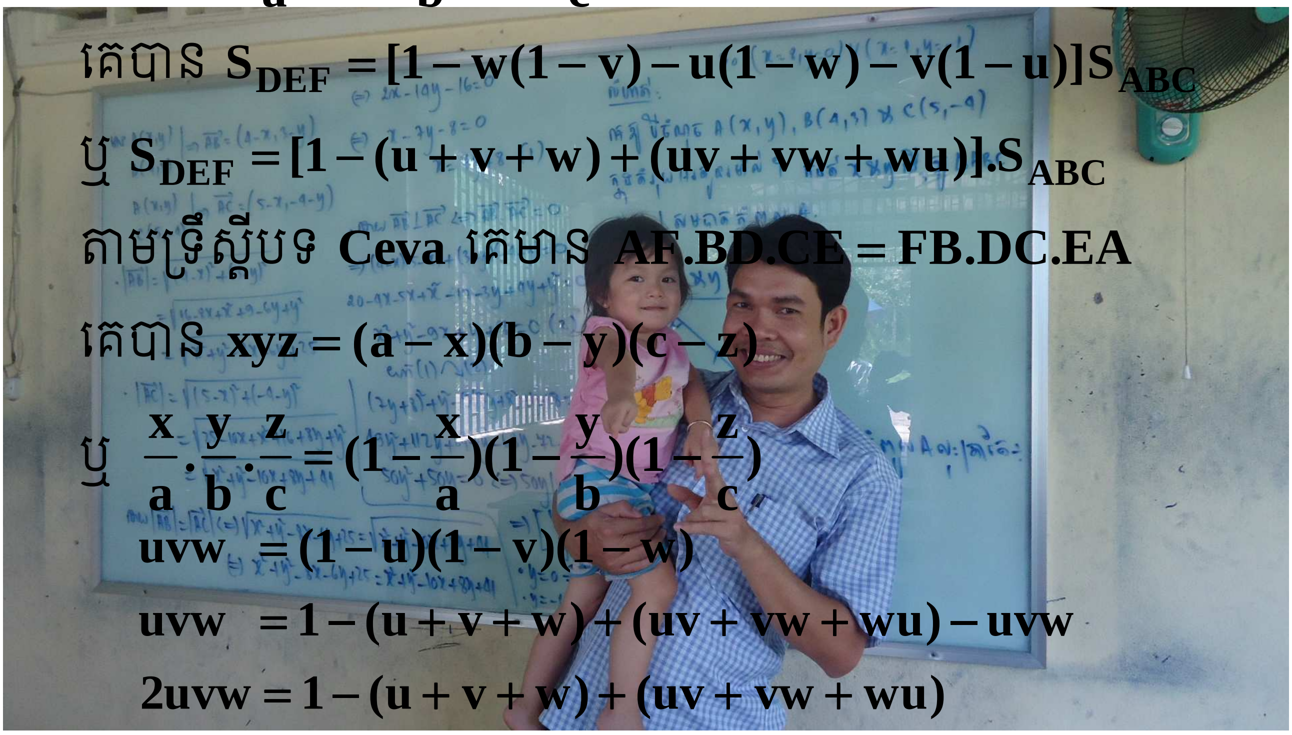
$$S_{DEF} = S_{ABC} - (S_{AFE} + S_{BDF} + S_{CED})$$

ដោយ $\frac{S_{AFE}}{S_{ABC}}=\frac{AF.AE}{AB.AC}=\frac{z(b-y)}{bc}$ ឬ $S_{AFE}=\frac{(b-y)z}{bc}S_{ABC}$

ហើយ $S_{BDF}=\frac{x(c-z)}{ac}S_{ABC}$; $S_{CDE}=\frac{(a-x)y}{ab}S_{ABC}$

នោះ $S_{DEF}=[1-\frac{z(b-y)}{bc}-\frac{x(c-z)}{ca}-\frac{y(a-x)}{ab}].S_{ABC}$

តាង $u=\frac{x}{a}$, $v=\frac{y}{b}, w=\frac{z}{c}$ ដែល $(0<u,v,w<1)$



គេបាន $S_{DEF}=[1-w(1-v)-u(1-w)-v(1-u)]S_{ABC}$

ឬ $S_{DEF}=[1-(u+v+w)+(uv+vw+wu)].S_{ABC}$

តាមទ្រឹស្តីបទ Ceva គេមាន $AF.BD.CE=FB.DC.EA$

គេបាន $xyz=(a-x)(b-y)(c-z)$

ឬ $\frac{x}{a}.\frac{y}{b}.\frac{z}{c}=(1-\frac{x}{a})(1-\frac{y}{b})(1-\frac{z}{c})$

$$uvw=(1-u)(1-v)(1-w)$$

$$uvw=1-(u+v+w)+(uv+vw+wu)-uvw$$

$$2uvw=1-(u+v+w)+(uv+vw+wu)$$

$$=2(1-u)(1-v)(1-w)$$

គេទាញ $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=2uvw=2(1-u)(1-v)(1-w)$ (*)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$$u.v.w.(1-u)(1-v)(1-w)\le(\frac{3}{6})^6=\frac{1}{64}\ (**)$$

តាម (*) និង (**) គេទាញ $\left(\frac{S_{DEF}}{2.S_{ABC}}\right)^2 \le \frac{1}{64}$

នាំឲ្យ $S_{DEF} \le \frac{1}{4} S_{ABC}$ ។

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃ S_{DEF} ស្មើនឹង $\frac{1}{4}$ នៃ S_{ABC} ។

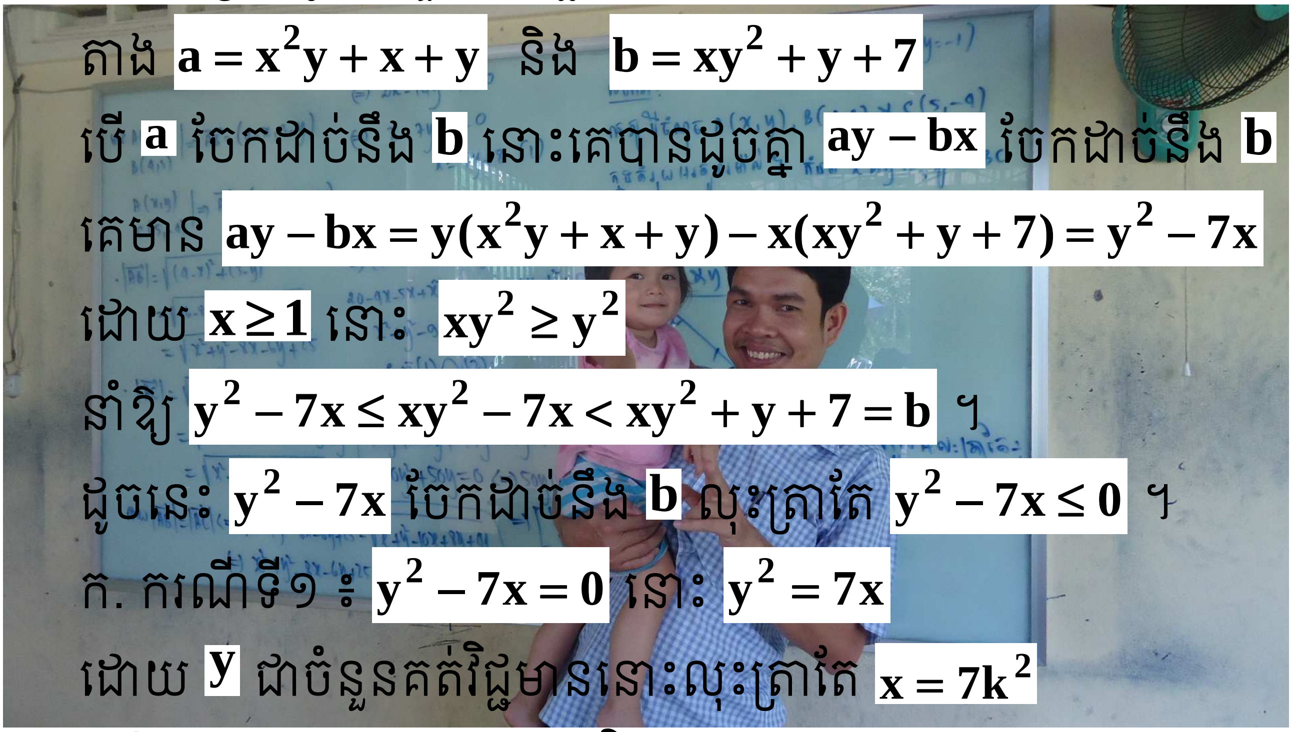
ក្នុងករណីនេះ $u = v = w = \frac{1}{2}$ នាំឲ្យ D,E,F ជាចំនុចកណ្ដាលនៃ BC, CA ,AB ,នោះ P ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃ ΔABC ។

លំហាត់ទី១៥

ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដោយដឹងថា x^2y+x+y ចែកដាច់នឹង xy^2+y+7 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y)



តាង $a=x^2y+x+y$ និង $b=xy^2+y+7$

បើ a ចែកដាច់នឹង b នោះគេបានដូចគ្នា $ay-bx$ ចែកដាច់នឹង b

គេមាន $ay-bx=y(x^2y+x+y)-x(xy^2+y+7)=y^2-7x$

ដោយ $x\geq 1$ នោះ $xy^2\geq y^2$

នាំឱ្យ $y^2-7x\leq xy^2-7x<xy^2+y+7=b$ ។

ដូចនេះ y^2-7x ចែកដាច់នឹង b លុះត្រាតែ $y^2-7x\leq 0$ ។

ក. ករណីទី១ ៖ $y^2-7x=0$ នោះ $y^2=7x$

ដោយ y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះលុះត្រាតែ $x=7k^2$

ហើយ $y=7k$ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ។

ខ.ករណីទី២ $y^2-7x<0$ នោះ $7x-y^2>0$

ដោយពិនិត្យឃើញថា $7x-y^2<7x$ ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ $7x-y^2$ ចែកដាច់នឹង $b=xy^2+y+7$ លុះត្រាតែ

$$7x>7x-y^2\geq xy^2+y+7$$

ហេតុនេះគេត្រូវឱ្យ $y^2<7$ នោះ $y=1$ ឬ $y=2$ ។

-ចំពោះ $y=1$ គេបាន $7x-y^2=7x-1$ ហើយ $b=x+8$

គេមាន $7x-1=7(x+8)-57$ ចែកដាច់នឹង $b=x+8$

លុះត្រាតែ b ជាតួចែកនៃ 57 ។

ដោយ $b=x+8>8$ នោះ $b=19$ ឬ $b=57$

គេទាញបាន $x=11$ ឬ $x=49$ ។

ដូចនេះគេបាន $x=11\ ,\ y=1$ ឬ $x=49\ ,\ y=1$ ។

-ចំពោះ $y=2$ គេបាន $7x-y^2=7x-4$ ហើយ $b=4x+9$

ដោយ $GCD(4x+9;4)=1$ នោះ $7x-4$ ចែកដាច់នឹង $4x+9$

សមមូល $4(7x-4)$ ចែកដាច់នឹង $4x+9$ ។

គេមាន $4(7x-4)=7(4x+9)-79$ ។

ដោយ 79 ជាចំនួនបឋមនោះដើម្បីឱ្យ $4(7x-4)$ ចែកដាច់នឹង

$4x+9$ លុះត្រាតែ $4x+9=79$ នោះ $x=\dfrac{35}{2}$ មិនមែនជាចំនួនគត់

ដូចនេះក្នុងករណី $y=2$ គ្មានចម្លើយ ។

សរុបមកគេបានគូចម្លើយ ៖

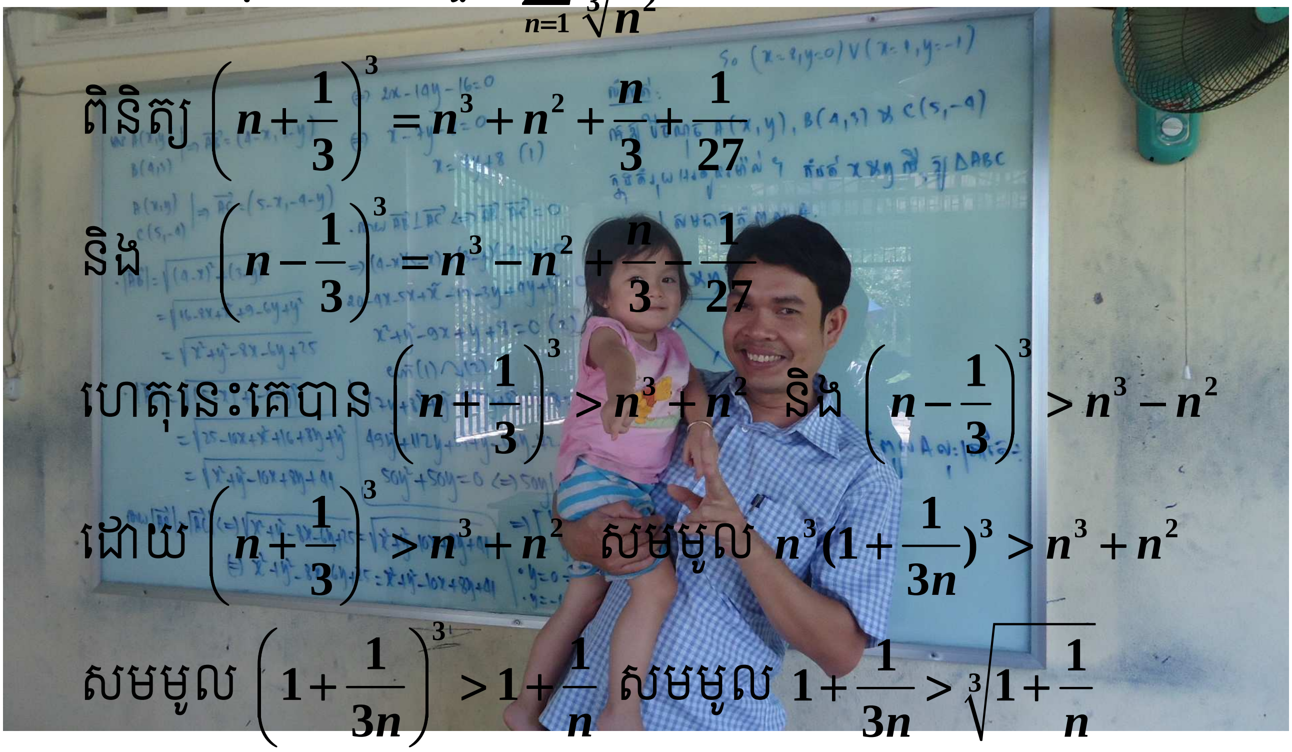
$(x,y)\in\{\ (11,1\ ),(49,1\ )\ ,(7k^2,7k)\ \},k=1,2,...$ ។

លំហាត់ទី១៦

ចូរកំណត់ផ្នែកគត់នៃចំនួន $\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ផ្នែកគត់នៃចំនួន $\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$



ពិនិត្យ $\left(n+\frac{1}{3}\right)^3=n^3+n^2+\frac{n}{3}+\frac{1}{27}$

និង $\left(n-\frac{1}{3}\right)^3=n^3-n^2+\frac{n}{3}-\frac{1}{27}$

ហេតុនេះគេបាន $\left(n+\frac{1}{3}\right)^3>n^3+n^2$ និង $\left(n-\frac{1}{3}\right)^3>n^3-n^2$

ដោយ $\left(n+\frac{1}{3}\right)^3>n^3+n^2$ សមមូល $n^3(1+\frac{1}{3n})^3>n^3+n^2$

សមមូល $\left(1+\frac{1}{3n}\right)^3>1+\frac{1}{n}$ សមមូល $1+\frac{1}{3n}>\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}$

សមមូល $\frac{1}{n}>3\left[\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1\right]$

សមមូល $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}>3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$ (1)

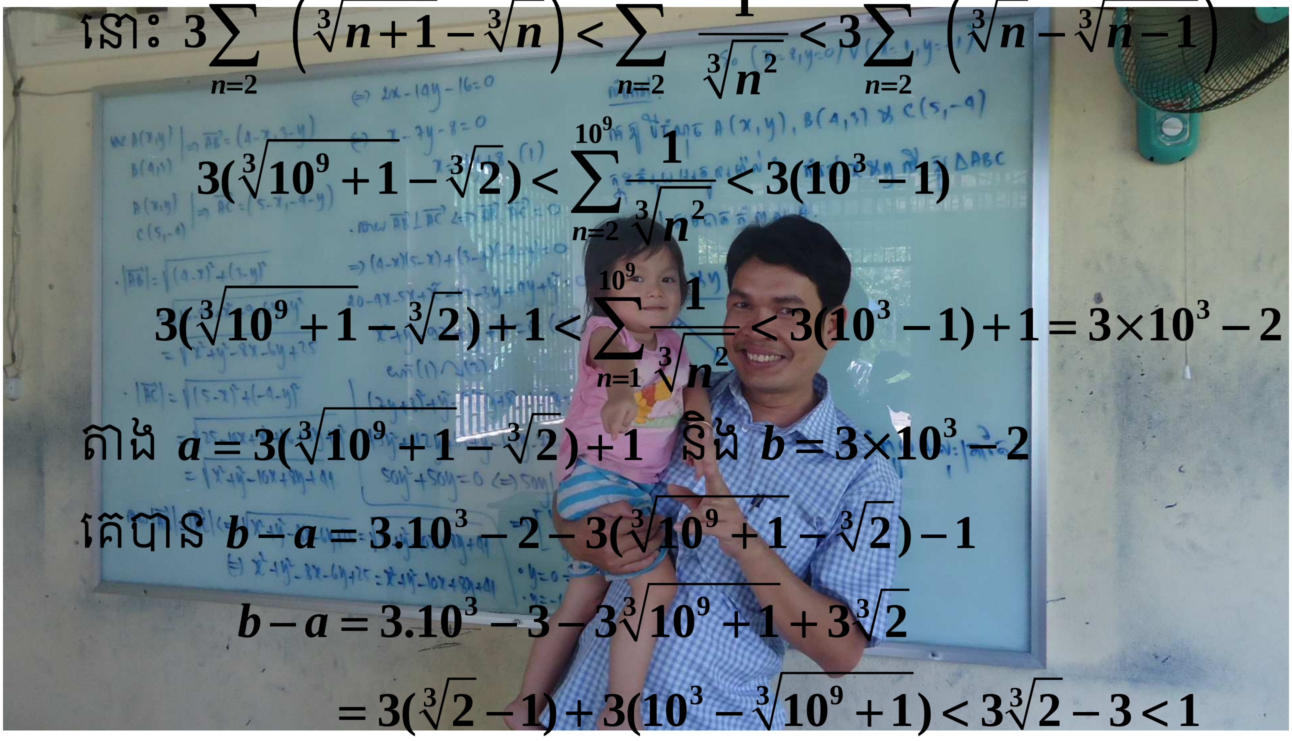
ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $1-\frac{1}{3n}>\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}$

សមមូល $\frac{1}{n} < 3(1-\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}})$

សមមូល $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < 3(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1})$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < 3\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)$$



នោះ $3\sum_{n=2}^{10^9}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right) < \sum_{n=2}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < 3\sum_{n=2}^{10^9}\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)$

$$3(\sqrt[3]{10^9+1}-\sqrt[3]{2}) < \sum_{n=2}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < 3(10^3-1)$$

$$3(\sqrt[3]{10^9+1}-\sqrt[3]{2})+1 < \sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < 3(10^3-1)+1 = 3\times10^3-2$$

តាង $a=3(\sqrt[3]{10^9+1}-\sqrt[3]{2})+1$ និង $b=3\times10^3-2$

គេបាន $b-a = 3.10^3-2-3(\sqrt[3]{10^9+1}-\sqrt[3]{2})-1$

$$b-a = 3.10^3-3-3\sqrt[3]{10^9+1}+3\sqrt[3]{2}$$

$$=3(\sqrt[3]{2}-1)+3(10^3-\sqrt[3]{10^9+1}) < 3\sqrt[3]{2}-3<1$$

នោះផ្នែកគត់នៃ $\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ គឺ $b-1=3\times10^3-2-1=2997$ ។

ដូចនេះ $\left\lfloor \sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right\rfloor = 2997$ ។

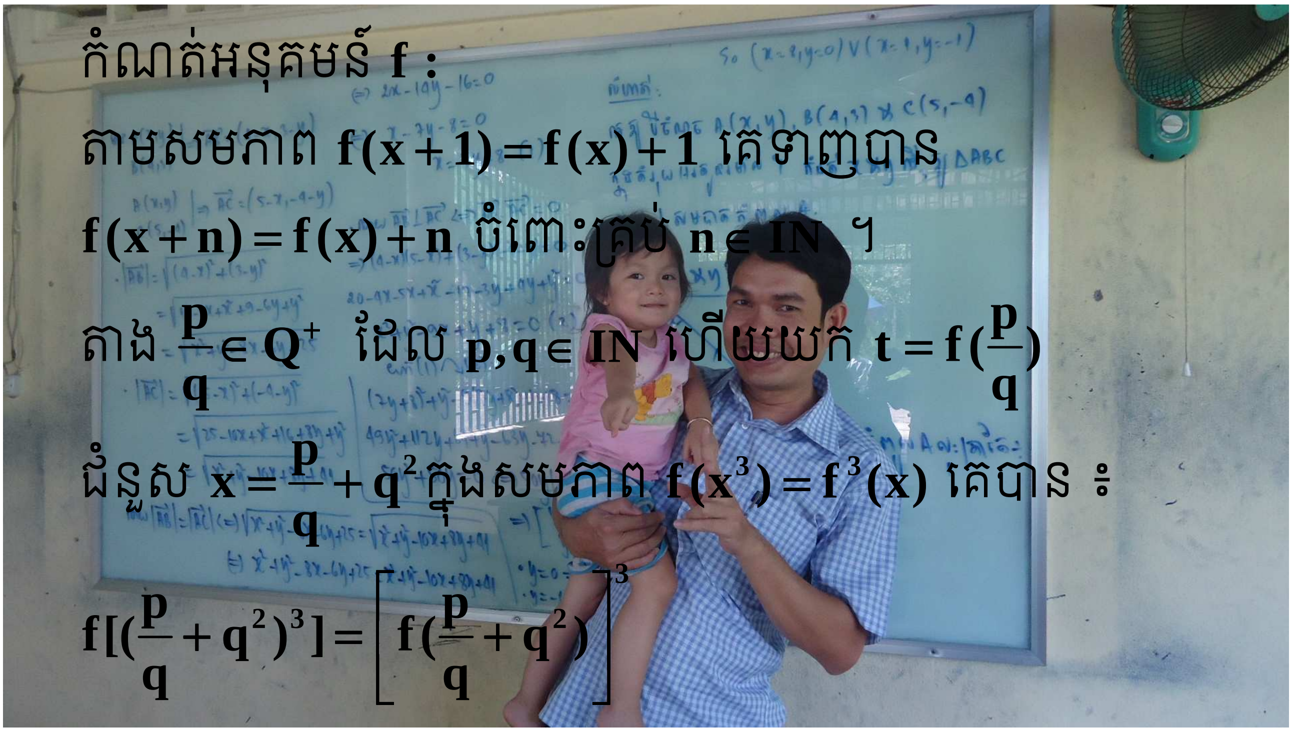
លំហាត់ទី១៧

គេតាង Q^+ ជាសំណុំនៃចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន ។

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : Q^+ \to Q^+$ បើគេដឹងថា

$f(x+1) = f(x)+1$ និង $f(x^3) = f^3(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in Q^+$ ។

ដំណោះស្រាយ



កំណត់អនុគមន៍ f :

តាមសមភាព $f(x+1) = f(x)+1$ គេទាញបាន

$f(x+n) = f(x)+n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

តាង $\frac{p}{q} \in Q^+$ ដែល $p,q \in IN$ ហើយយក $t = f(\frac{p}{q})$

ជំនួស $x = \frac{p}{q} + q^2$ ក្នុងសមភាព $f(x^3) = f^3(x)$ គេបាន ៖

$$f[(\frac{p}{q}+q^2)^3] = \left[f(\frac{p}{q}+q^2) \right]^3$$

$$= \left[f(\frac{p}{q}) + q^2 \right]^3$$

$$= (t+q^2)^3 = t^3 + 3t^2q^2 + 3tq^4 + q^6 \quad (1)$$

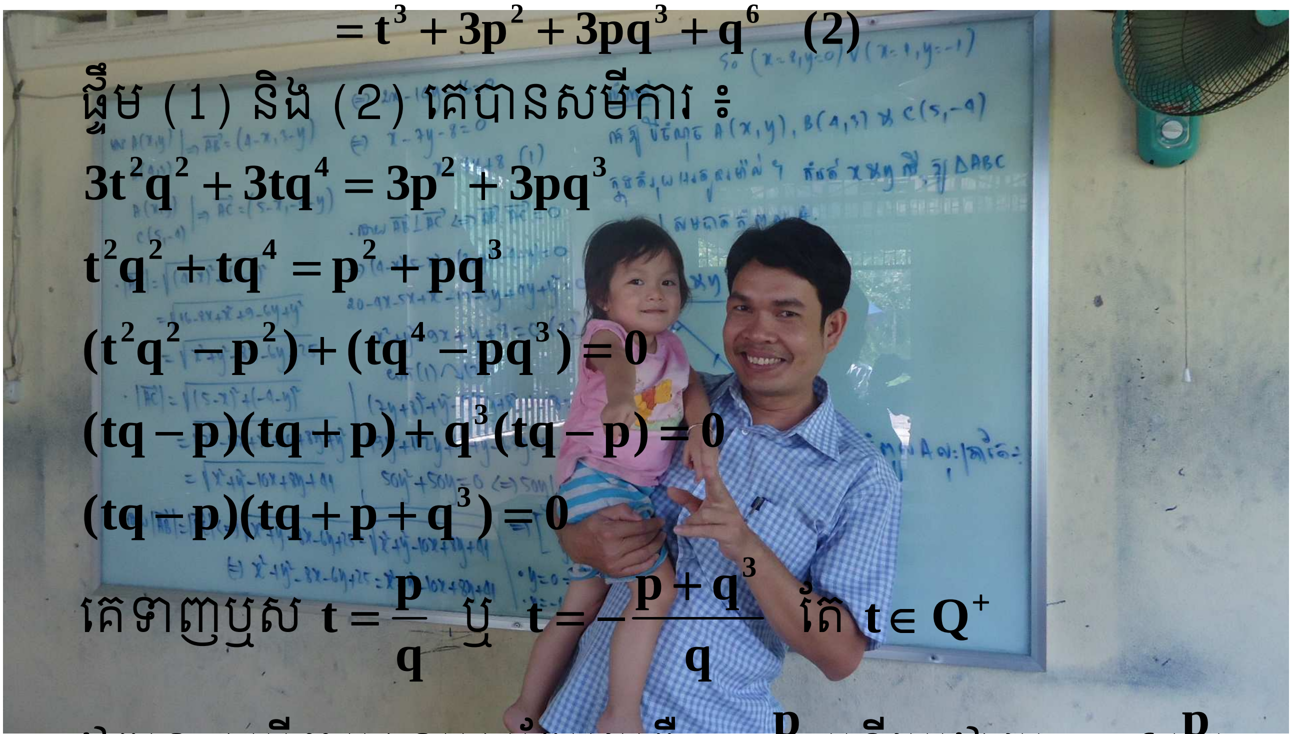
ដោយគេមាន ៖

$$f[(\frac{p}{q}+q^2)^3]=f(\frac{p^3}{q^3}+3p^2+3pq^3+q^6)$$

$$=f(\frac{p^3}{q^3})+3p^2+3pq^3+q^6$$

$$=f^3(\frac{p}{q})+3p^2+3pq^3+q^6$$

$$=t^3+3p^2+3pq^3+q^6 \quad (2)$$



ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបានសមីការ ៖

$$3t^2q^2+3tq^4=3p^2+3pq^3$$

$$t^2q^2+tq^4=p^2+pq^3$$

$$(t^2q^2-p^2)+(tq^4-pq^3)=0$$

$$(tq-p)(tq+p)+q^3(tq-p)=0$$

$$(tq-p)(tq+p+q^3)=0$$

គេទាញឫស $t=\frac{p}{q}$ ឬ $t=-\frac{p+q^3}{q}$ តែ $t\in Q^+$

ដូចនេះសមីការមានឫសតែមួយគឺ $t=\frac{p}{q}$ ហើយដោយ $t=f(\frac{p}{q})$

ដូចនេះ $f(x)=x \ , \forall x\in Q^+$ ។

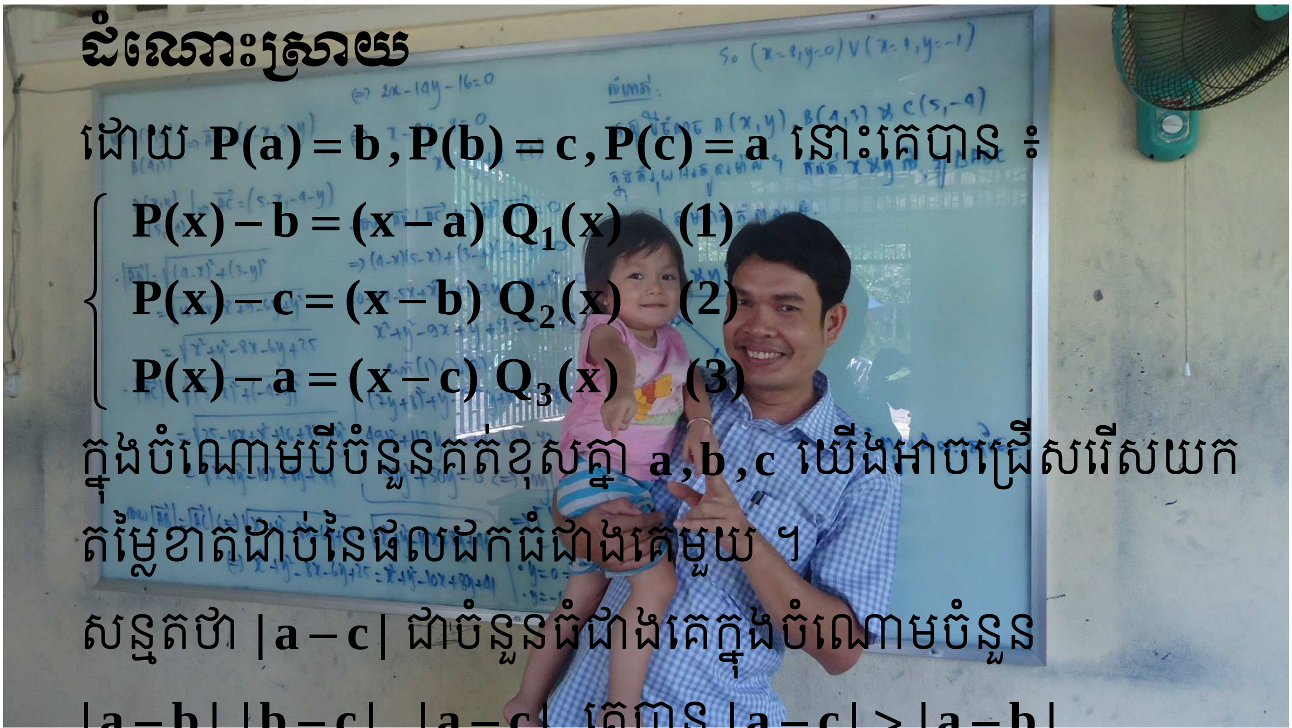
លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនគត់ខុសគ្នា ។

យក $P(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។

ចូរបង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌ $P(a)=b\,,P(b)=c\,,P(c)=a$

មិនអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នាបានទេ ។



ដំណោះស្រាយ

ដោយ $P(a)=b\,,P(b)=c\,,P(c)=a$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} P(x)-b=(x-a)\,Q_1(x) & (1) \\ P(x)-c=(x-b)\,Q_2(x) & (2) \\ P(x)-a=(x-c)\,Q_3(x) & (3) \end{cases}$$

ក្នុងចំណោមបីចំនួនគត់ខុសគ្នា a,b,c យើងអាចជ្រើសរើសយកតម្លៃខាតដាច់នៃផលដកធំជាងគេមួយ ។

សន្មតថា $|a-c|$ ជាចំនួនធំជាងគេក្នុងចំណោមចំនួន $|a-b|,|b-c|\,,|a-c|$ គេបាន $|a-c|>|a-b|$

ដោយយក $x=c$ ជួសក្នុង (1) នោះគេបាន ៖

$P(c)-b=a-b=(c-a).Q_1(c)$

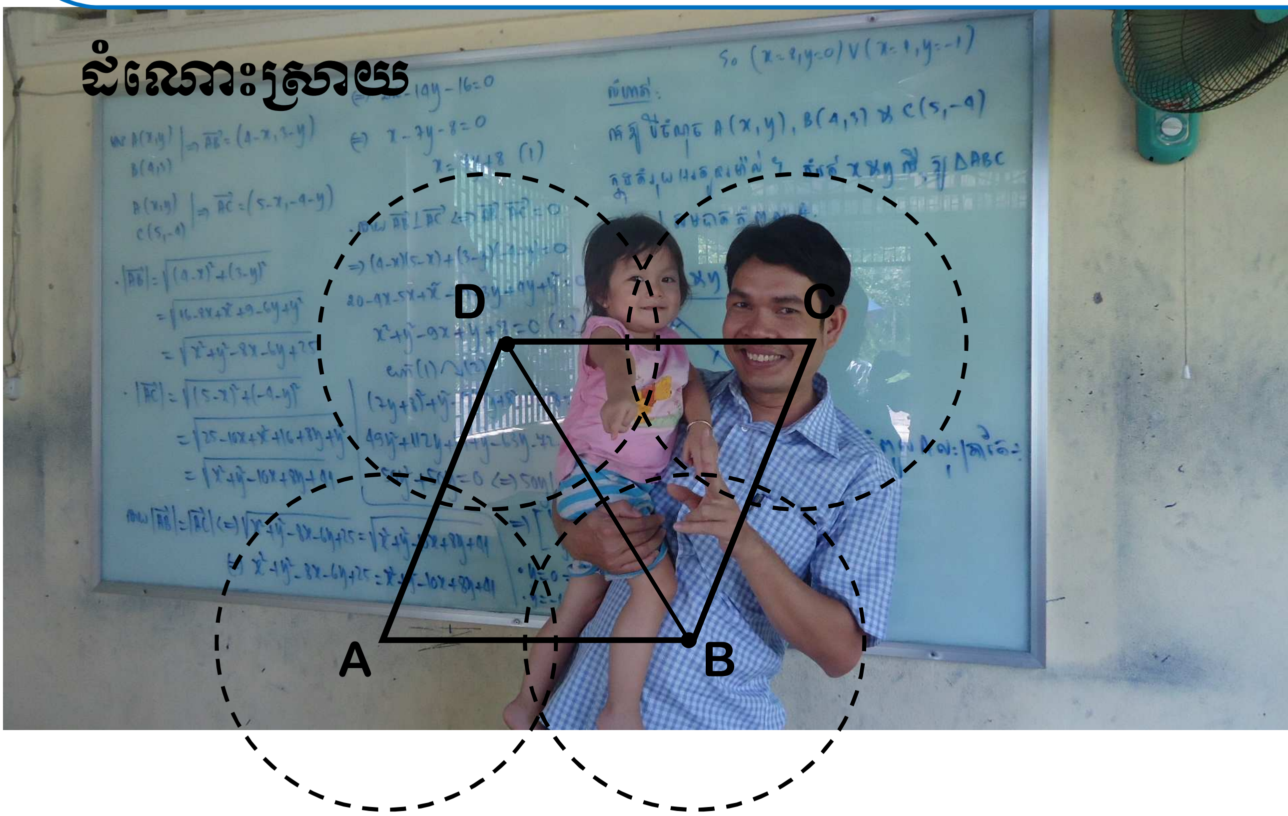
គេបាន $|a-b|=|a-c|.|Q_1(c)|$ ដោយ $Q_1(c)$ ជាចំនួនគត់

នោះ $|a-b|\geq|a-c|$ ដែលផ្ទុយពីការឧបមាខាងលើ។

លំហាត់ទី១៩ (IMO 1967)

ប្រលេឡូក្រាម $\mathbf{ABCD}$ មួយមាន $\mathbf{AB = a}$, $\mathbf{AD = 1}$ និងមុំ $\angle\mathbf{BAD} = \theta$ និងមុំក្នុងទាំងអស់នៃត្រីកោណ $\mathbf{ABD}$ ជាមុំស្រួច ចូរបង្ហាញថារង្វង់កាំ $\ell = \mathbf{1}$ ហើយមានផ្ចិត $\mathbf{A,B,C,D}$ គ្របដណ្តប់ប្រលេឡូក្រាមបើ $\mathbf{a \le \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta}$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង $\mathbf{R}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABD}$ ។

យក $\Omega_{\mathbf{A}}, \Omega_{\mathbf{B}}, \Omega_{\mathbf{C}}, \Omega_{\mathbf{D}}$ ជារង្វង់កាំ $\ell = \mathbf{1}$ និងមាន ផ្ចិត $\mathbf{A,B,C,D}$ រៀងគ្នា ។

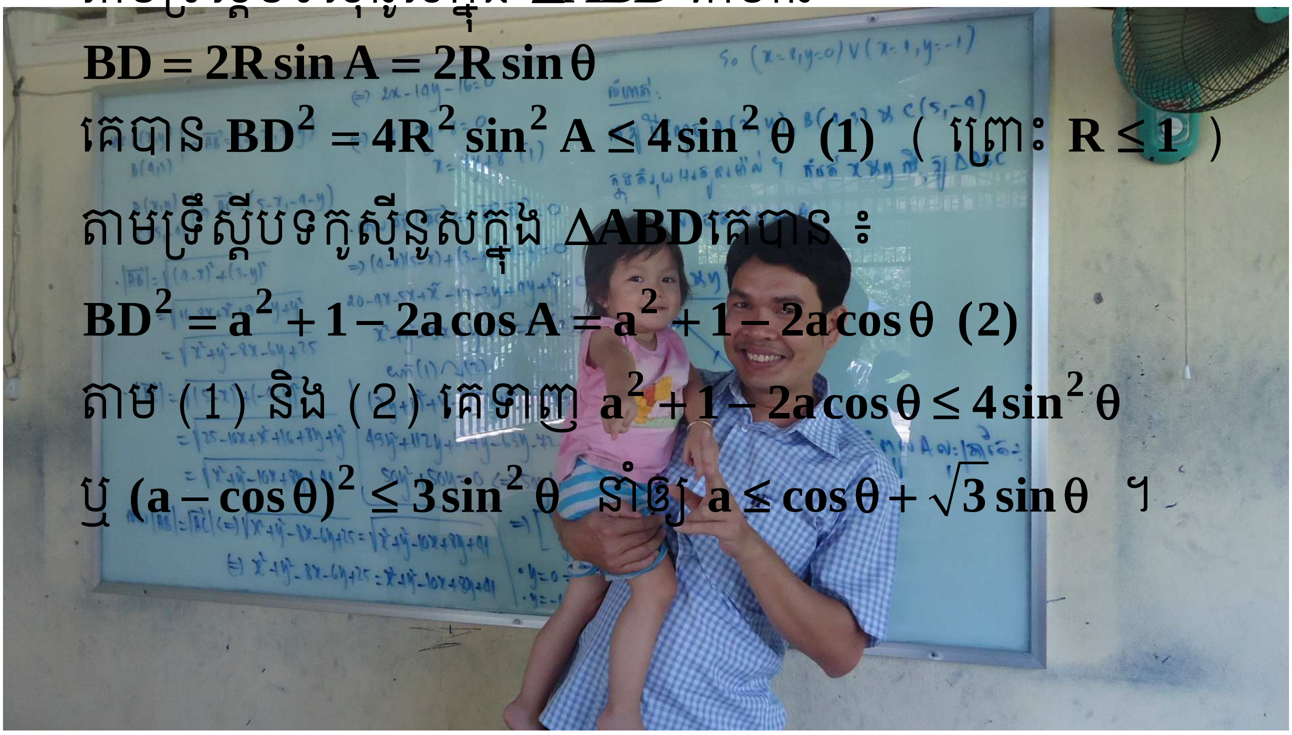
បើរង្វង់ $\Omega_{\mathbf{A}}, \Omega_{\mathbf{B}}, \Omega_{\mathbf{D}}$ គ្របដណ្តប់ $\Delta\mathbf{ABD}$ នោះ $\Omega_{\mathbf{B}}, \Omega_{\mathbf{C}}, \Omega_{\mathbf{D}}$

គ្រប់ដណ្តប់ ΔBCD ។ ហេតុនេះ រង្វង់ $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C, \Omega_D$ គ្រប់ដណ្តប់ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ សមមូលរង្វង់ $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_D$ គ្រប់ដណ្តប់ ΔABD ។

រង្វង់ $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_D$ មានកាំ $\ell = 1$ គ្រប់ដណ្តប់ ΔABD

ប្រសិនបើ $\ell \geq R$ ឬ $R \leq 1$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនួសក្នុង ΔABD គេមាន



$BD = 2R\sin A = 2R\sin\theta$

គេបាន $BD^2 = 4R^2\sin^2 A \leq 4\sin^2\theta$ (1) (ព្រោះ $R \leq 1$)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនួសក្នុង ΔABD គេបាន ៖

$BD^2 = a^2 + 1 - 2a\cos A = a^2 + 1 - 2a\cos\theta$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញ $a^2 + 1 - 2a\cos\theta \leq 4\sin^2\theta$

ឬ $(a - \cos\theta)^2 \leq 3\sin^2\theta$ នាំឲ្យ $a \leq \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ ។

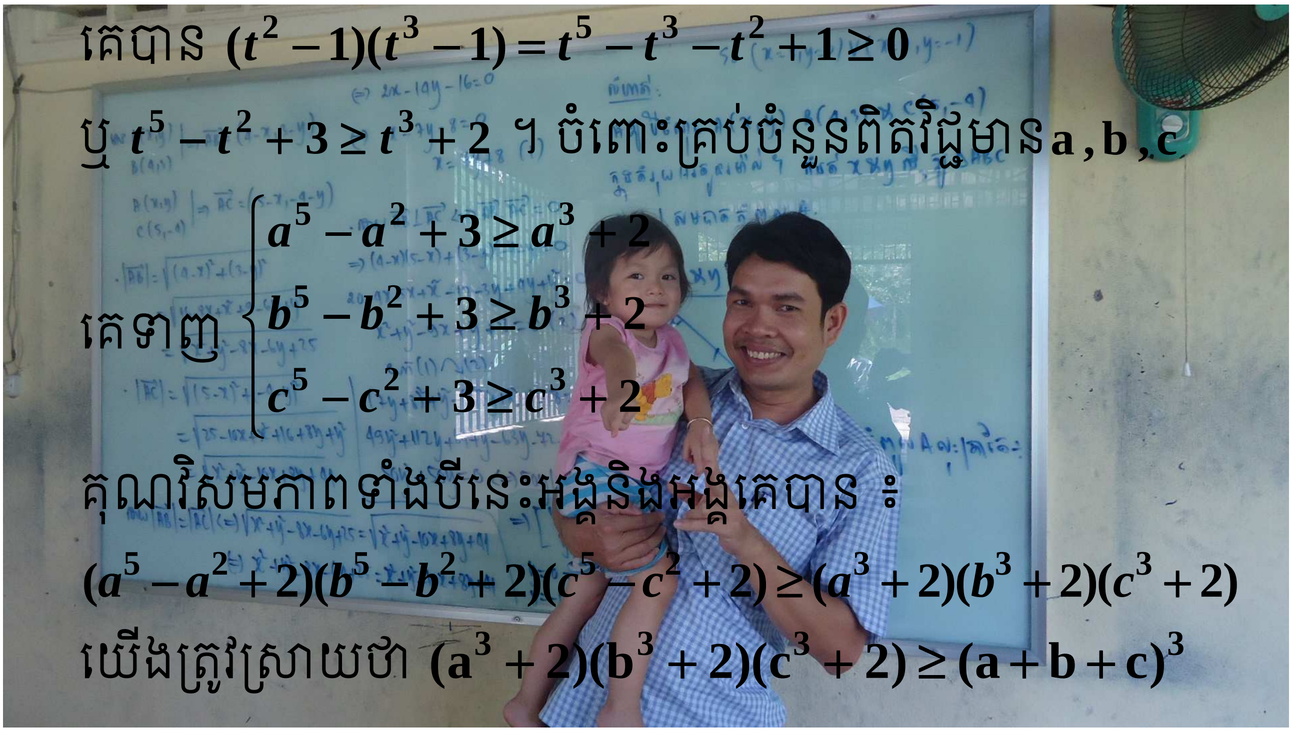
លំហាត់ទី២០ (USAMO 2004)

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge(a+b+c)^3$$

ដំណោះស្រាយ

គ្រប់ចំនួនពិត t គេមាន t^2-1 និង t^3-1 មានសញ្ញាដូចគ្នា



គេបាន $(t^2-1)(t^3-1)=t^5-t^3-t^2+1\ge 0$

ឬ $t^5-t^2+3\ge t^3+2$ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c

គេទាញ $\begin{cases} a^5-a^2+3\ge a^3+2 \\ b^5-b^2+3\ge b^3+2 \\ c^5-c^2+3\ge c^3+2 \end{cases}$

គុណវិសមភាពទាំងបីនេះអង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$(a^5-a^2+2)(b^5-b^2+2)(c^5-c^2+2)\ge(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)$$

យើងត្រូវស្រាយថា $(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)\ge(a+b+c)^3$

តាមវិសមភាព *Holder* គេបាន ៖

$$(a^3+1+1)^{\frac{1}{3}}(1+b^3+1)^{\frac{1}{3}}(1+1+c^3)^{\frac{1}{3}}\ge(a+b+c)$$

គេទាញ $(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)\ge(a+b+c)^3$ ពិត

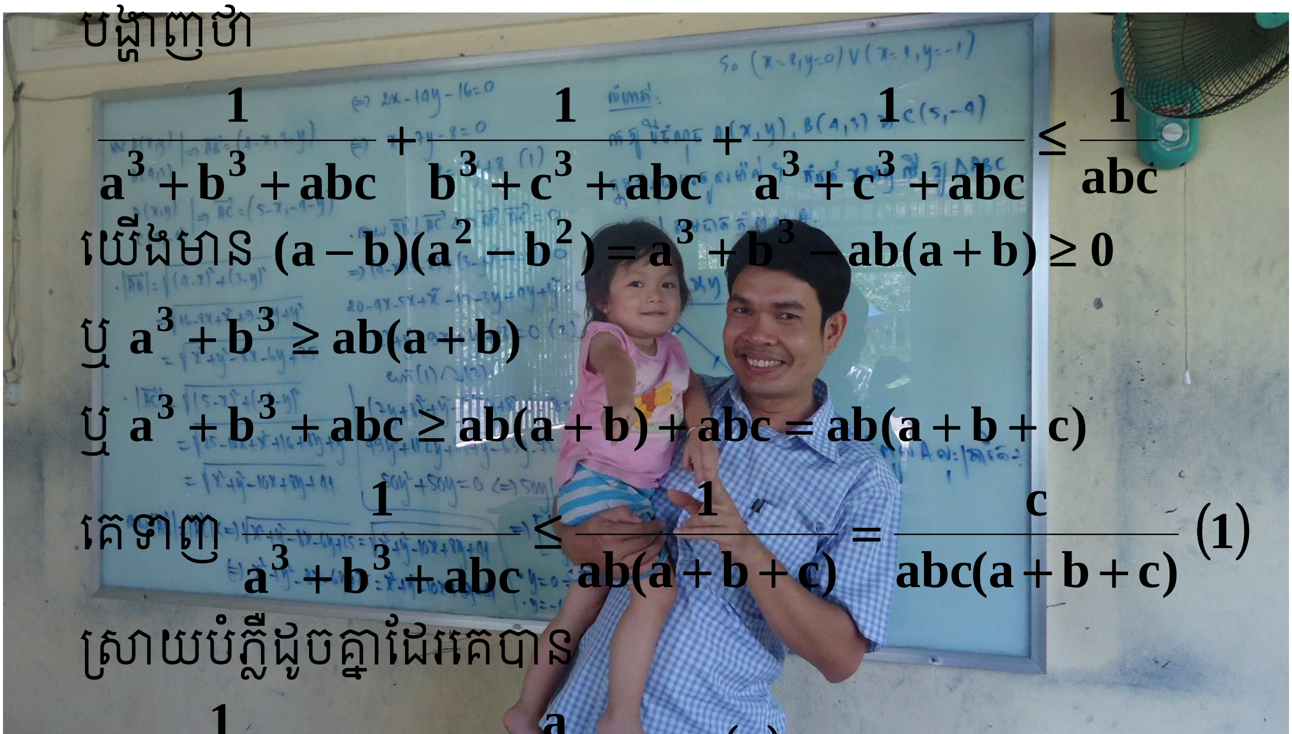
ដូចនេះ $(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge(a+b+c)^3$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យ a , b ,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

យើងមាន $(a-b)(a^2-b^2)=a^3+b^3-ab(a+b)\ge 0$

ឬ $a^3+b^3\ge ab(a+b)$

ឬ $a^3+b^3+abc\ge ab(a+b)+abc=ab(a+b+c)$

គេទាញ $\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{abc(a+b+c)}$ (1)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{a}{abc(a+b+c)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{b}{abc(a+b+c)} \quad (3)$$

ដោយបូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

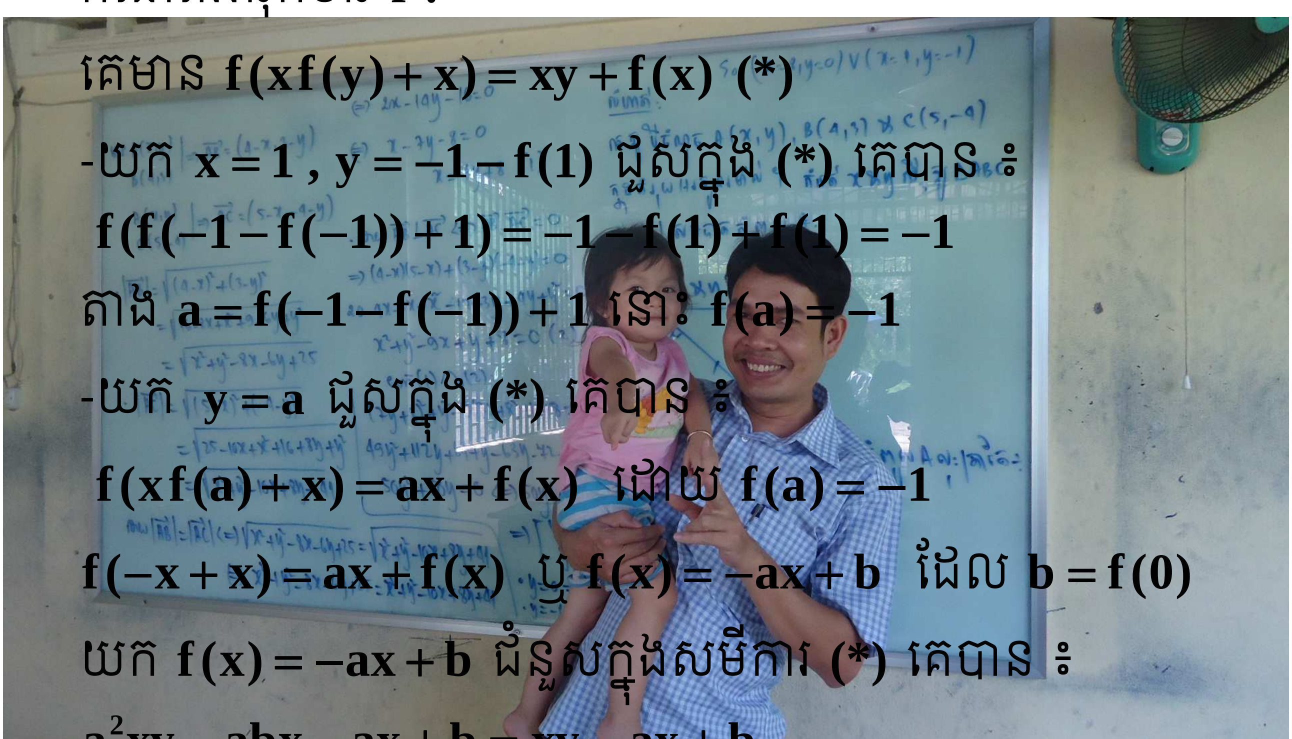
លំហាត់ទី២២

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:IR\to IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(xf(y)+x)=xy+f(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង y ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ f :



គេមាន $f(xf(y)+x)=xy+f(x)$ (*)

-យក $x=1$, $y=-1-f(1)$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$$f(f(-1-f(-1))+1)=-1-f(1)+f(1)=-1$$

តាង $a=f(-1-f(-1))+1$ នោះ $f(a)=-1$

-យក $y=a$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$$f(xf(a)+x)=ax+f(x) \text{ ដោយ } f(a)=-1$$

$f(-x+x)=ax+f(x)$ ឬ $f(x)=-ax+b$ ដែល $b=f(0)$

យក $f(x)=-ax+b$ ជំនួសក្នុងសមីការ (*) គេបាន ៖

$$a^2xy-abx-ax+b=xy-ax+b$$

គេទាញ $\begin{cases} a^2=1 \\ b=0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=\pm1 \\ b=0 \end{cases}$

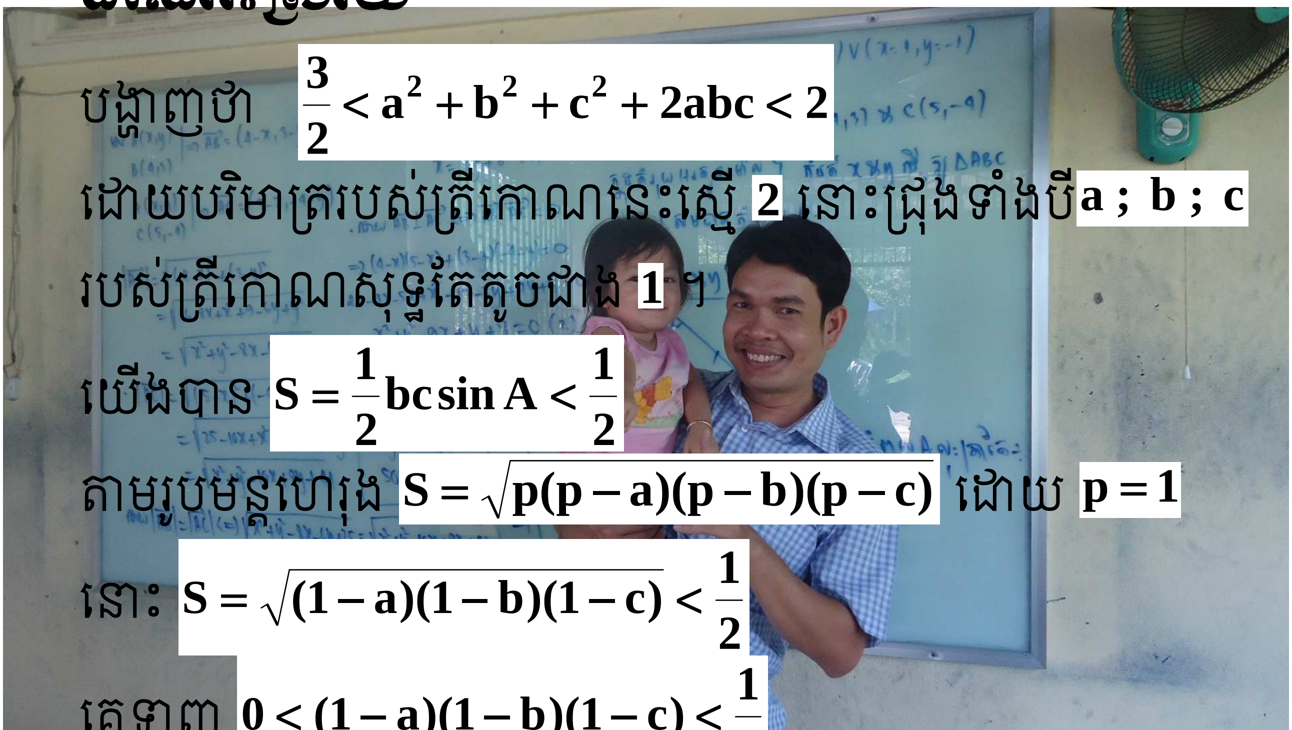
ដូចនេះ $f(x)=x$ ឬ $f(x)=-x$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឱ្យ $a\,;\,b\,;\,c$ ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមានបរិមាត្រស្មើ 2 ។

ចូរស្រាយថា $\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$ ។

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$

ដោយបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណនេះស្មើ 2 នោះជ្រុងទាំងបី $a\,;\,b\,;\,c$ របស់ត្រីកោណសុទ្ធតែតូចជាង 1 ។

យើងបាន $S = \frac{1}{2}bc\sin A < \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ដោយ $p = 1$

នោះ $S = \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \frac{1}{2}$

គេទាញ $0 < (1-a)(1-b)(1-c) < \frac{1}{4}$

ឬ $0 < 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ca) - abc < \frac{1}{4}$

ឬ $0 < 1 - 2 + (ab+bc+ca) - abc < \frac{1}{4}$

ឬ $1 < (ab+bc+ca) - abc < \frac{5}{4}$

ឬ $2 < 2(ab+bc+ca) - 2abc < \frac{5}{2}$

គេមាន $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

គេទាញ ៖

$$a^2+b^2+c^2+2abc = (a+b+c)^2+2abc-2(ab+bc+ca)$$

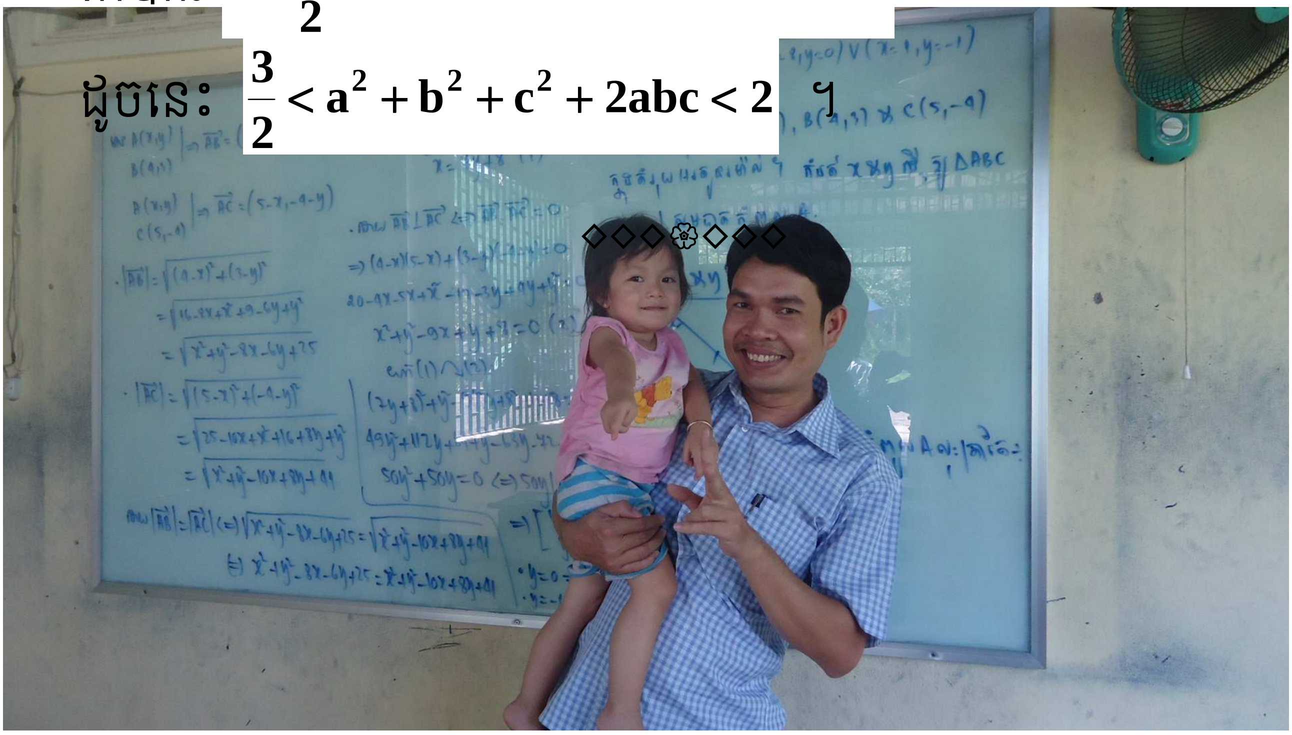
$$a^2+b^2+c^2+2abc = 4-[2(ab+bc+ca)-2abc]$$

ដោយ $2 < 2(ab+bc+ca)-2abc < \frac{5}{2}$

គេបាន $4-\frac{5}{2} < a^2+b^2+c^2+2abc < 4-2$

ដូចនេះ $\frac{3}{2} < a^2+b^2+c^2+2abc < 2$ ។

◇◇◇❀◇◇◇



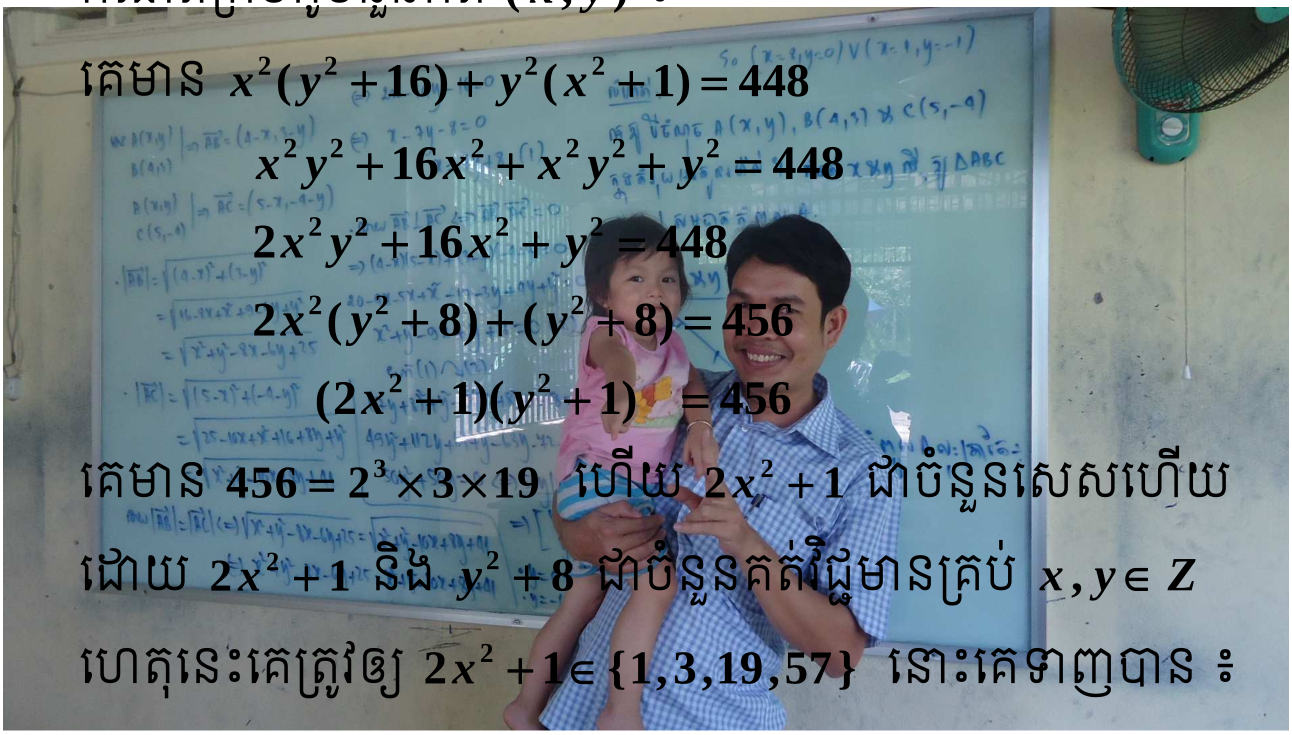
លំហាត់ទី២៤

ចូរកំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់ (x,y) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$x^2(y^2+16)+y^2(x^2+1)=448$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់ (x,y) ៖



គេមាន $x^2(y^2+16)+y^2(x^2+1)=448$

$$x^2y^2+16x^2+x^2y^2+y^2=448$$

$$2x^2y^2+16x^2+y^2=448$$

$$2x^2(y^2+8)+(y^2+8)=456$$

$$(2x^2+1)(y^2+1)=456$$

គេមាន $456=2^3\times3\times19$ ហើយ $2x^2+1$ ជាចំនួនសេសហើយ

ដោយ $2x^2+1$ និង y^2+8 ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានគ្រប់ $x,y\in Z$

ហេតុនេះគេត្រូវឲ្យ $2x^2+1\in\{1,3,19,57\}$ នោះគេទាញបាន ៖

$x=0\ ,\pm1\ ,\pm3$ ។

-ចំពោះ $x=0$ នោះគេបាន $y^2+1=456$ (គ្មានចម្លើយក្នុង Z)

-ចំពោះ $x=\pm1$ នោះគេបាន $y^2+8=152$ គេទាញ $y=\pm12$ ។

-ចំពោះ $x=\pm3$ នោះគេបាន $y^2+8=24$ គេទាញ $y=\pm4$ ។

ដូចនេះគេបានប្រាំបីគូចម្លើយ $(\pm1,\pm12);(\pm3,\pm4)$ ។

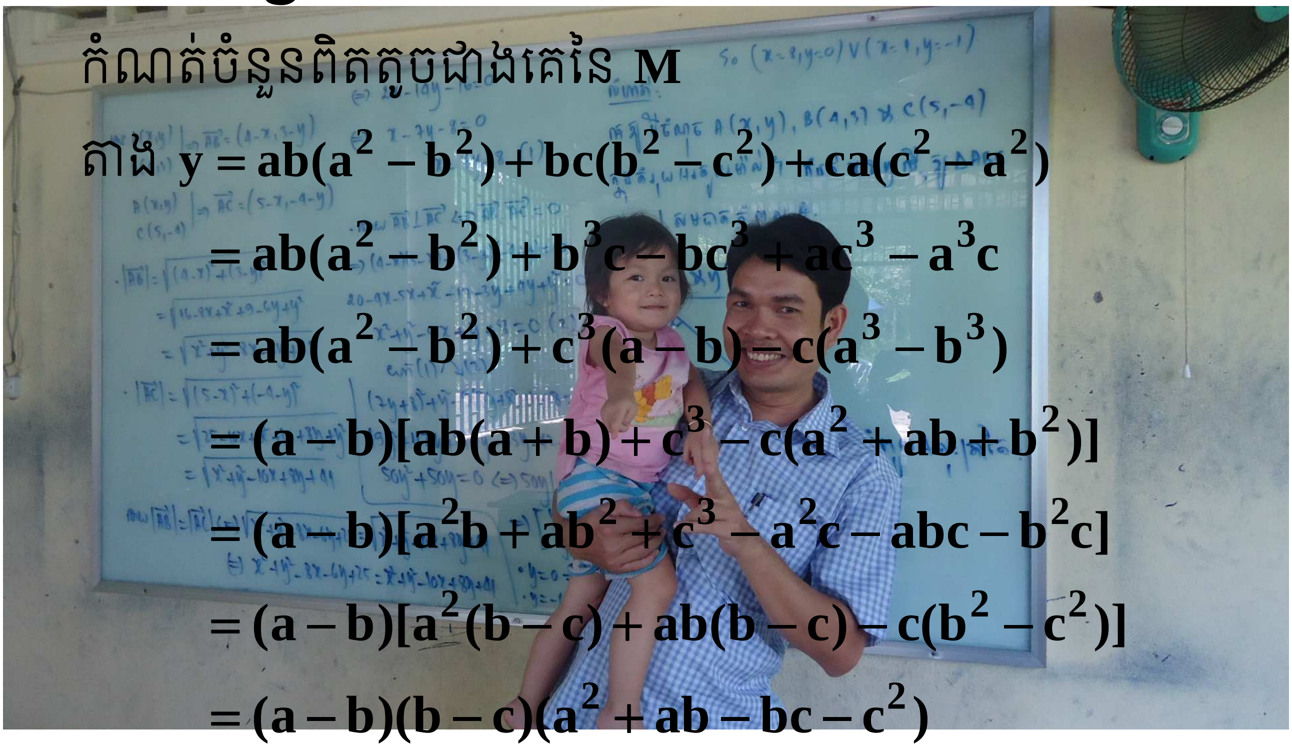
លំហាត់ទី២៥ (IMO 2006)

ចូរកំណត់ចំនួនពិតតូចជាងគេនៃ $\mathbf{M}$ ដោយដឹងថាវិសមភាព

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\le M.(a^2+b^2+c^2)^2$$

ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{a,b}$ និង $\mathbf{c}$ ។

ដំណោះស្រាយ



កំណត់ចំនួនពិតតូចជាងគេនៃ $\mathbf{M}$

តាង $y=ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)$

$$=ab(a^2-b^2)+b^3c-bc^3+ac^3-a^3c$$

$$=ab(a^2-b^2)+c^3(a-b)-c(a^3-b^3)$$

$$=(a-b)[ab(a+b)+c^3-c(a^2+ab+b^2)]$$

$$=(a-b)[a^2b+ab^2+c^3-a^2c-abc-b^2c]$$

$$=(a-b)[a^2(b-c)+ab(b-c)-c(b^2-c^2)]$$

$$=(a-b)(b-c)(a^2+ab-bc-c^2)$$

$$=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$$

វិសមភាពដែលឲ្យសមមូលនឹងវិសមភាព

$$|(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)|\le M(a^2+b^2+c^2)^2 \quad (1)$$

ដោយកន្សោមក្នុងវិសមភាព(1)មានលក្ខណៈឆ្លុះនោះយើងអាច

សន្មតថា $\mathbf{a\le b\le c}$ ។

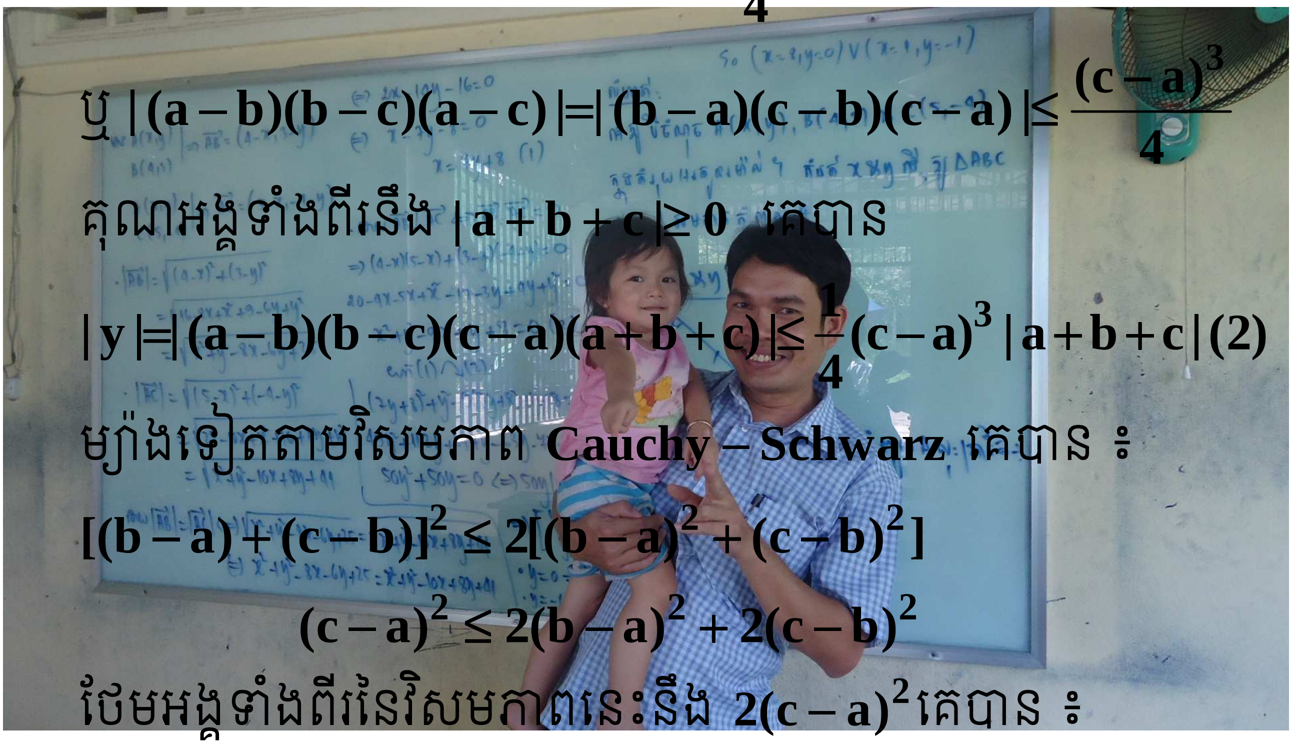
ហេតុនេះ $|(a-b)(b-c)|=(b-a)(c-b)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ ចំពោះ $b-a\ge 0, c-b\ge 0$ គេបាន

$$(b-a)+(c-b)\ge 2\sqrt{(b-a)(c-b)}$$

នោះ $(b-a)(c-b)\le \dfrac{(c-a)^2}{4}$ ដោយ $c-a\ge 0$ នោះ

គេបាន $(b-a)(c-b)(c-a)\ge \dfrac{(c-a)^3}{4}$



ឬ $|(a-b)(b-c)(a-c)|=|(b-a)(c-b)(c-a)|\le \dfrac{(c-a)^3}{4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $|a+b+c|\ge 0$ គេបាន

$$|y|=|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|\le \frac{1}{4}(c-a)^3|a+b+c| \quad (2)$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន ៖

$$[(b-a)+(c-b)]^2\le 2[(b-a)^2+(c-b)^2]$$

$$(c-a)^2\le 2(b-a)^2+2(c-b)^2$$

ថែមអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនេះនឹង $2(c-a)^2$ គេបាន ៖

$$3(c-a)^2\le 2(b-a)^2+2(c-b)^2+2(c-a)^2$$

$$(c-a)^2\le \frac{2}{3}[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2] \quad (3)$$

លើកអង្គទាំងពីរនៃ (2) ជាការេគេបាន ៖

$$|y|^2\le \frac{1}{16}(c-a)^6(a+b+c)^2 \quad (4)$$

តាម (3) និង (4) គេទាញបាន ៖

$$|y|^2 \le \frac{1}{16}\times\frac{8}{27}[(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2]^3(a+b+c)^2$$

$$|y|^2 \le \frac{1}{2}\left[\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right]^3(a+b+c)^2 \quad (5)$$

តាង $u=\dfrac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}$ និង $v=(a+b+c)^2$

គេបាន $3u+v=3(a^2+b^2+c^2)$ ។តាម $AM-GM$ គេមាន

$3u+v=u+u+u+v \ge 4\sqrt[4]{u^3v}$ នោះ $u^3v \le \dfrac{(3u+v)^4}{4^4}$

$$\left[\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right]^3(a+b+c)^2 \le \frac{3^4(a^2+b^2+c^2)^4}{4^4}$$

តាមទំនាក់ទំនង (5) គេទាញ

$$|y|^2 \le \frac{1}{2}\cdot\frac{3^4(a^2+b^2+c^2)^4}{4^4}=\frac{3^4(a^2+b^2+c^2)^4}{2^9}$$

ឬ $|y| \le \dfrac{9}{16\sqrt{2}}(a^2+b^2+c^2)^2=\dfrac{9\sqrt{2}}{32}(a^2+b^2+c^2)^2$

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \le \frac{9\sqrt{2}}{32}.(a^2+b^2+c^2)^2$$

ដូចនេះ $M=\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$ ដែលជាចំនួនពិតតូចជាង ។

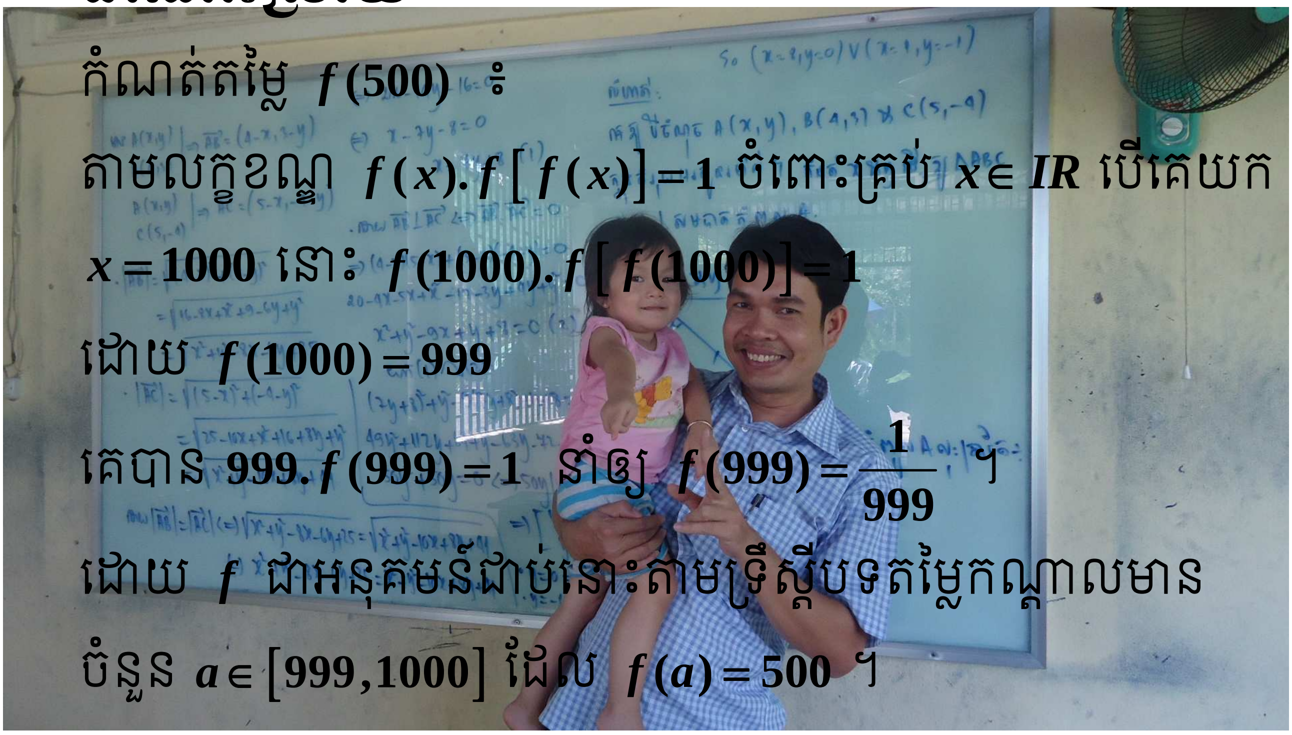
លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យអនុគមន៍ជាប់ $f: IR \to IR$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$f(1000)=999$ និង $f(x).f\left[f(x)\right]=1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ $f(500)$ ។

ដំណោះស្រាយ



កំណត់តម្លៃ $f(500)$ ៖

តាមលក្ខខណ្ឌ $f(x).f\left[f(x)\right]=1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ បើគេយក

$x=1000$ នោះ $f(1000).f\left[f(1000)\right]=1$

ដោយ $f(1000)=999$

គេបាន $999.f(999)=1$ នាំឲ្យ $f(999)=\dfrac{1}{999}$ ។

ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលមាន

ចំនួន $a\in[999,1000]$ ដែល $f(a)=500$ ។

គេបាន $f(a).f\left[f(a)\right]=1$ ឬ $500\times f(500)=1$

នោះ $f(500)=\dfrac{1}{500}$ ។

ដូចនេះ $f(500)=\dfrac{1}{500}$ ។

លំហាត់ទី២៧

ចូរកំណត់បីលេខចុងក្រោយនៃចំនួន 7^{9999} ?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់បីលេខចុងក្រោយ

គេមាន $7^4=2401$ នោះគ្រប់ $n\in IN$ គេបាន $7^{4n}=(2401)^n$

តាមទ្វេធាញូតុន ៖

$$(2401)^n=(1+2400)^n=1+2400C_n^1+2400^2C_n^2+...+2400^nC_n^n$$

ដែល $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ។

យើងសង្កេតឃើញថាគ្រប់ $k\ge 2$ និង $n\ge k$ ចំនួន $2400^kC_n^k$ មានលេខសូន្យបួនខ្ទង់ចុងក្រោយជានិច្ច ។

ដូចនេះលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ $(2401)^n$ ដូចលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន $1+2400C_n^1=1+2400n$ ដែរ ។

គេមាន $1+2400n=24n\times 100+1$ ហើយសន្មតថាលេខមួយខ្ទង់ចុងក្រោយ(ខ្ទង់រាយ)នៃចំនួន $24n$ គឺ p នោះគេបាន ៖

$24n\times 100+1=(...p)\times 100+1=...p01$ ហេតុនេះគេទាញបានថាលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន 7^{4n} គឺ $p01$ ដែល p ជាលេខខ្ទង់រាយរបស់ $24n$ គ្រប់ $n\in IN$ ។

ដោយសម្គាល់ឃើញថា $9999=4\times 2499+3$

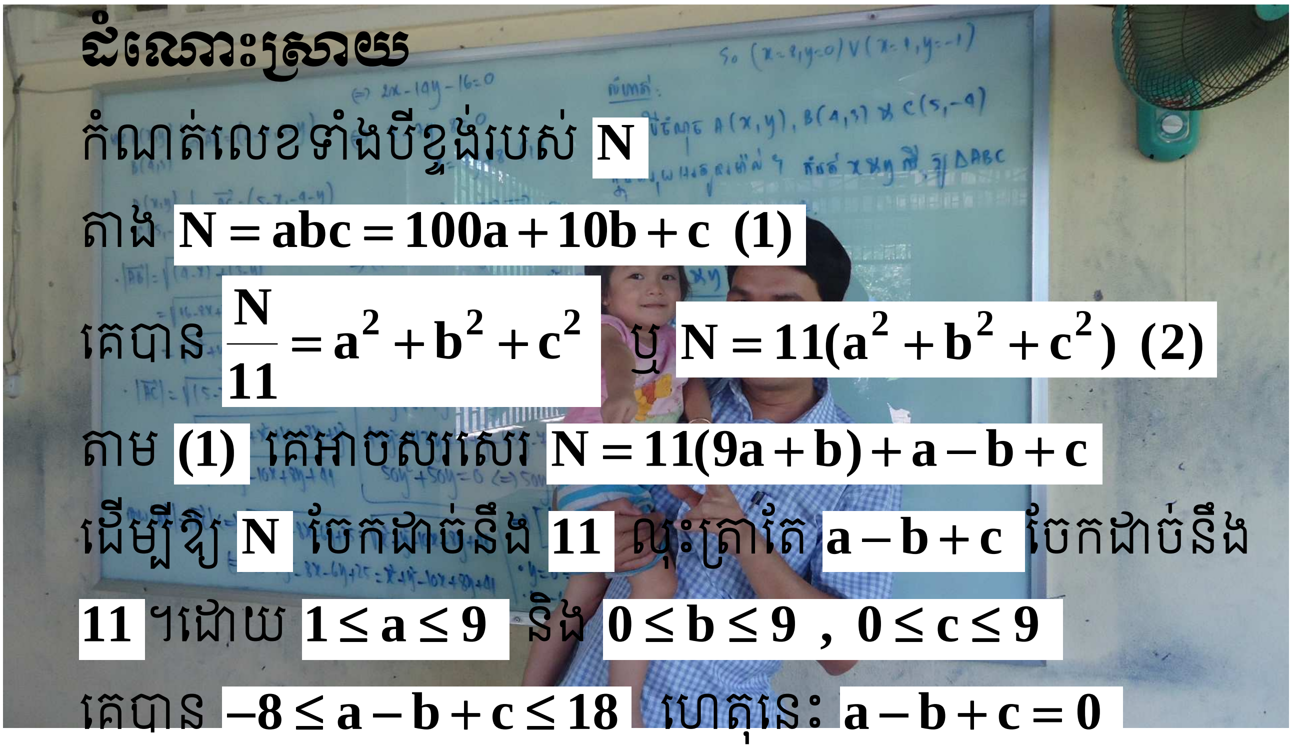
នោះចំពោះ $n = 2499$ គេបាន $24n = 59976$ មានលេខចុងក្រោយ 6
នោះគេទាញបាន $7^{4n} = 7^{9996}$ មានបីលេខចុងក្រោយស្មើ 601 ។
គេមាន $7^3 = 343$ នោះ $7^{9996} \times 7^3 = (...601) \times 343 = ...143$ ។
ដូចនេះលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយនៃ 7^{9999} គឺ 143 ។

លំហាត់ទី២៨ (IMO 1960)

គេឱ្យ N ជាចំនួនមានលេខបីខ្ទង់ ។

គេដឹងថា N ចែកដាច់នឹង 11 ហើយ N ចែកនឹង 11 បានផលចែកស្មើនឹងផលបូកការេនៃលេខខ្ទង់របស់ N ។

ចូរកំណត់លេខទាំងបីខ្ទង់របស់ N ?



ដំណោះស្រាយ

កំណត់លេខទាំងបីខ្ទង់របស់ N

តាង $N = abc = 100a + 10b + c \quad (1)$

គេបាន $\dfrac{N}{11} = a^2 + b^2 + c^2$ ឬ $N = 11(a^2 + b^2 + c^2) \quad (2)$

តាម (1) គេអាចសរសេរ $N = 11(9a + b) + a - b + c$

ដើម្បីឱ្យ N ចែកដាច់នឹង 11 លុះត្រាតែ $a - b + c$ ចែកដាច់នឹង 11 ។ដោយ $1 \le a \le 9$ និង $0 \le b \le 9\ ,\ 0 \le c \le 9$

គេបាន $-8 \le a - b + c \le 18$ ហេតុនេះ $a - b + c = 0$ ឬ $a - b + c = 11$ ។

-ករណី $a - b + c = 0$ ឬ $b = a + c$

គេបាន $N = 11(9a + b) = 11(a^2 + b^2 + c^2)$

ឬ $9a + a + c = a^2 + (a + c)^2 + c^2$

ឬ $2a^2 + 2(c - 5)a + 2c^2 - c = 0 \ (E_1)$

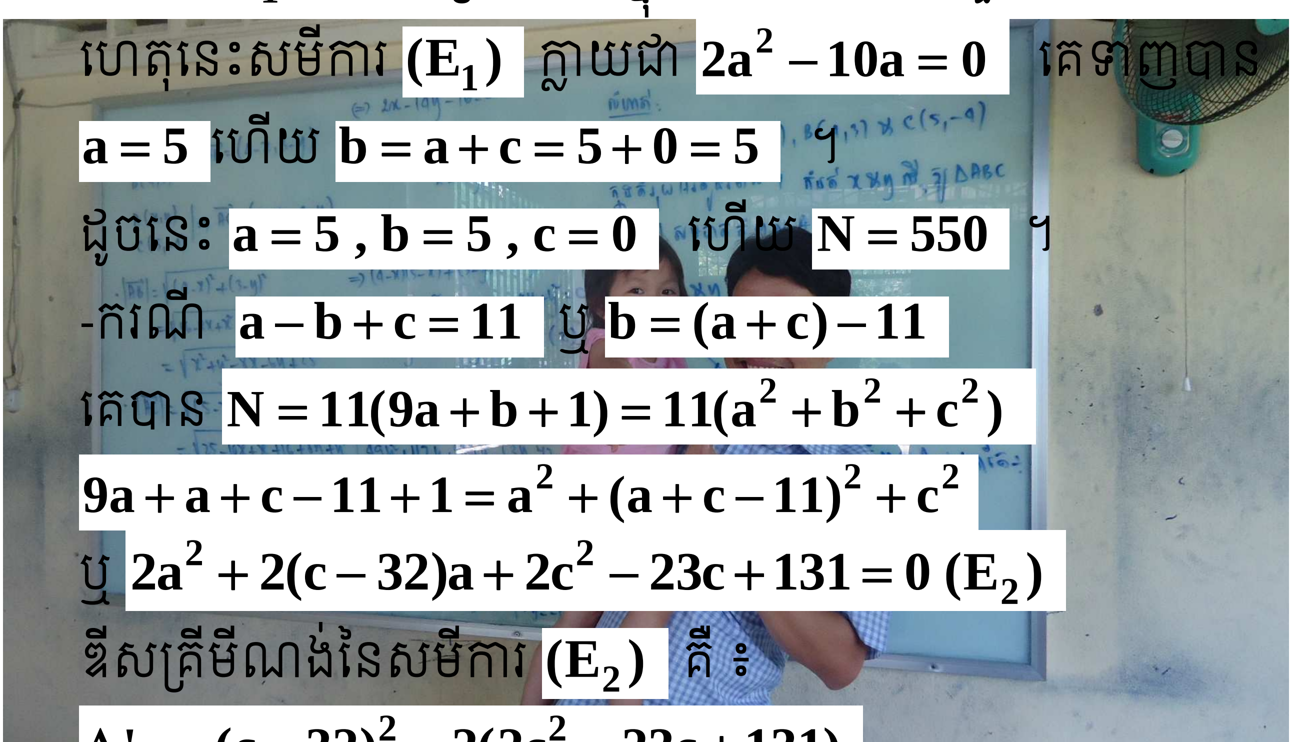
ឌីសគ្រីមីណង់សមីការ (E_1) គឺ $\Delta'_1 = (c-5)^2 - 2(2c^2 - c)$

ឬ $\Delta'_1 = -3c^2 - 8c + 25$ ។

សមីការ (E_1) មានឫសក្នុងសំណុំ $\mathbb{N}$ លុះត្រាតែ $\Delta'_1 \geq 0$ និង Δ'_1 ជាការេប្រាកដ ។

ដោយ $\Delta'_1 < 0$ ចំពោះ $c \geq 2$ នោះ $c = 0$, $c = 1$

ដោយ Δ'_1 ជាការេប្រាកដតែក្នុងករណី $c = 0$ មួយគត់



ហេតុនេះសមីការ (E_1) ក្លាយជា $2a^2 - 10a = 0$ គេទាញបាន $a = 5$ ហើយ $b = a + c = 5 + 0 = 5$ ។

ដូចនេះ $a = 5 , b = 5 , c = 0$ ហើយ $N = 550$ ។

-ករណី $a - b + c = 11$ ឬ $b = (a + c) - 11$

គេបាន $N = 11(9a + b + 1) = 11(a^2 + b^2 + c^2)$

$9a + a + c - 11 + 1 = a^2 + (a + c - 11)^2 + c^2$

ឬ $2a^2 + 2(c - 32)a + 2c^2 - 23c + 131 = 0 \; (E_2)$

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ (E_2) គឺ ៖

$$\Delta'_2 = (c - 32)^2 - 2(2c^2 - 23c + 131)$$
$$= -3c^2 + 14c - 6$$

សមីការ (E_2) មានឫសក្នុងសំណុំ $\mathbb{N}$ លុះត្រាតែ $\Delta'_2 \geq 0$ និង Δ'_1 ជាការេប្រាកដ ។

ដោយ $\Delta'_2 < 0$ ចំពោះគ្រប់ $c \geq 5$ នោះ $c = \{1, 2, 3, 4\}$

ដោយ Δ'_2 ជាការេប្រាកដតែក្នុងករណី $c = 3$ មួយគត់

ហេតុនេះសមីការ (E_1) ក្លាយជា $2a^2-26a+80=0$

គេទាញបាន $a=5$; $a=8$ ។

- ចំពោះ $a=5$, $c=3$

នោះ $b=a+c-11=8-11=-3<0$ មិនយក ។

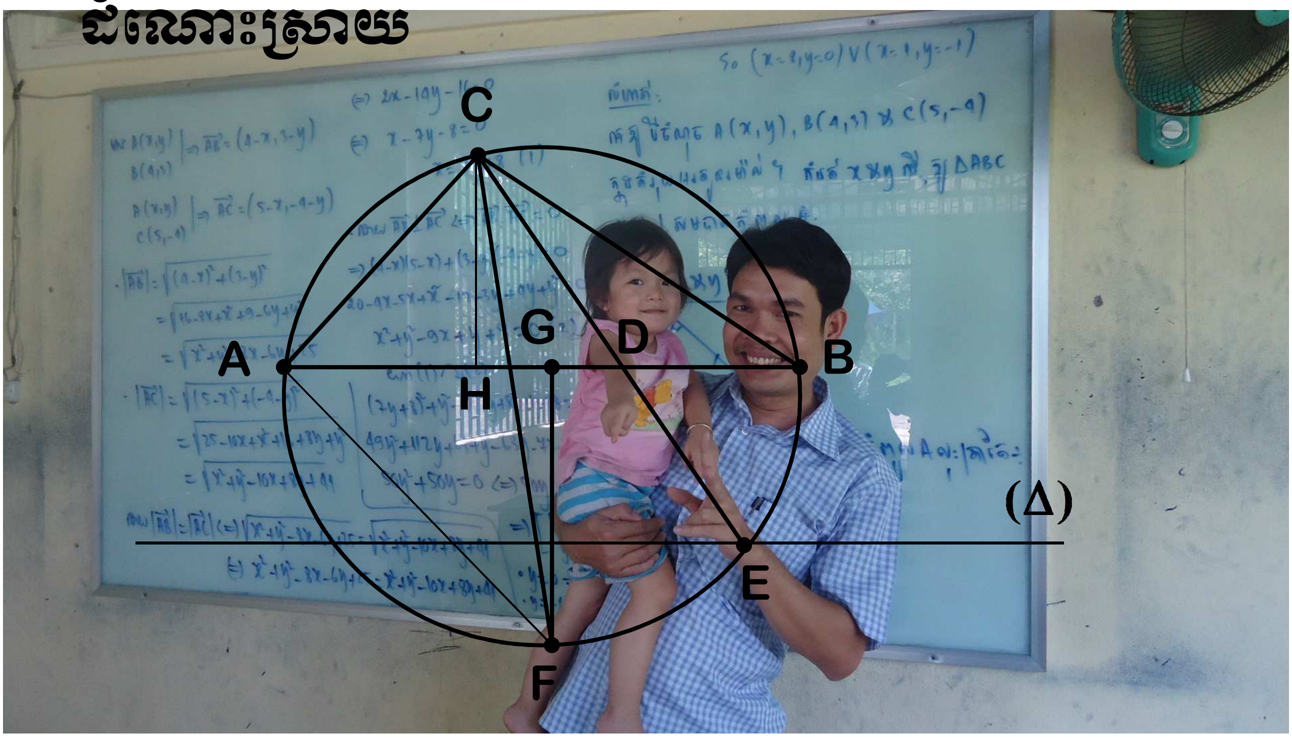
-ចំពោះ $a=8$, $c=3$ នោះ $b=8+3-11=0$ ។

ដូចនេះ $a=8$, $b=0$, $c=3$ ហើយ $N=803$ ។

លំហាត់ទី២៩ (IMO 1974)

ចូរបង្ហាញថា មានចំនុច $\mathbf{D}$ មួយនៅលើជ្រុង $\mathbf{AB}$ នៃ $\Delta\ \mathbf{ABC}$ ដោយដឹងថា $\mathbf{CD}$ ជាមធ្យមធរណីមាត្រនៃ $\mathbf{AD}$ និង $\mathbf{DB}$ លុះត្រាតែ $\sin A \sin B \le \sin^2 \frac{C}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ



យើងនឹងស្រាយថា $\sin A \sin B \le \sin^2 \frac{C}{2}$ **(1)** ពិតលុះត្រាតែ មានចំនុច $\mathbf{D}$ លើ $\mathbf{AB}$ ដែល $AD.DB = CD^2$ **(2)**

យក $\mathbf{E}$ ជាប្រសព្វរវាង $\mathbf{(CD)}$ ជាមួយរង្វង់ $\mathbf{(C)}$ ចារឹកក្រៅ $\Delta\mathbf{ABC}$ និង $\mathbf{F}$ ជាចំនុចកណ្តាលធ្នូ $\mathbf{AB}$ ឈមទៅនឹងជ្រុង $\mathbf{AB}$ នៃ $\mathbf{C}$ ។ តាង $\mathbf{G}$ ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $\mathbf{AB}$ ហើយយក $\mathbf{a,b,c}$ ជាជ្រុងនៃ

ត្រីកោណ ABC ។ គេមាន $AD.DB = CD.DE$ (3)

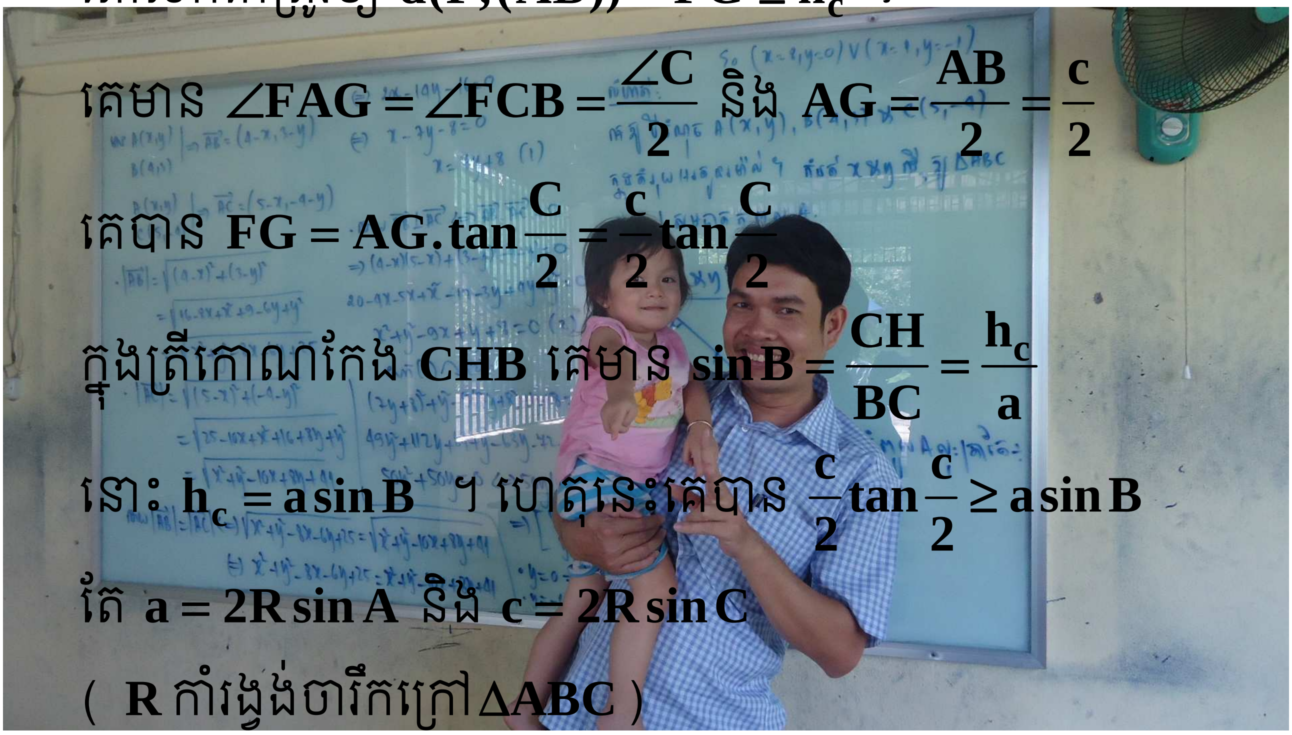
តាម (2) និង (3) គេទាញបាន $CD = DE$ នាំឲ្យចម្ងាយពីចំនុច

E ទៅជ្រុង AB ស្មើនឹងកម្ពស់ h_c គូសពីកំពូល C ទៅ AB

ចំនុច D មានលុះត្រាតែបន្ទាត់ $(\Delta)//(AB)$ និងមានចម្ងាយ h_c

ពី (AB) ប្រសព្វជាមួយរង្វង់ (C) ចារឹកក្រៅនៃ ΔABC

ពេលគឺគេត្រូវឲ្យ $d(F,(AB)) = FG \ge h_c$ ។



គេមាន $\angle FAG = \angle FCB = \frac{\angle C}{2}$ និង $AG = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$

គេបាន $FG = AG.\tan\frac{C}{2} = \frac{c}{2}\tan\frac{C}{2}$

ក្នុងត្រីកោណកែង CHB គេមាន $\sin B = \frac{CH}{BC} = \frac{h_c}{a}$

នោះ $h_c = a\sin B$ ។ ហេតុនេះគេបាន $\frac{c}{2}\tan\frac{c}{2} \ge a\sin B$

តែ $a = 2R\sin A$ និង $c = 2R\sin C$

(R កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC)

ដោយ $\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ និង $\tan\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

គេបាន $\sin^2\frac{C}{2} \ge \sin A\sin B$ សមមូលវិសមភាព (1) ។

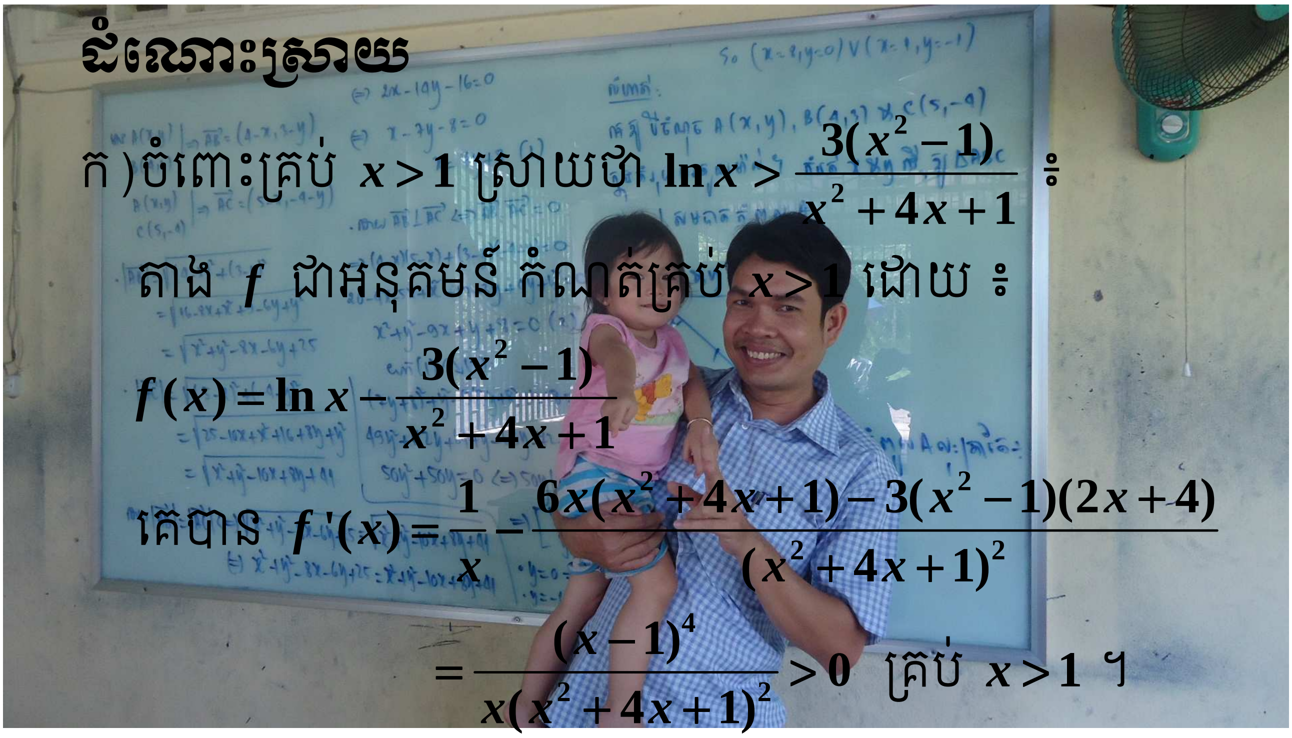
ដូចនេះភាពសមមូលនៃ (1) និង (2) ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

លំហាត់ទី៣០

ក)ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ចូរស្រាយថា $\ln x>\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ ។

ខ)ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{ab}+\dfrac{a+b}{2}\right)$

ដែល $a>0,b>0\ ,a\neq b$ ។



ដំណោះស្រាយ

ក)ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ស្រាយថា $\ln x>\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ ៖

តាង f ជាអនុគមន៍ កំណត់គ្រប់ $x>1$ ដោយ ៖

$$f(x)=\ln x-\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{6x(x^2+4x+1)-3(x^2-1)(2x+4)}{(x^2+4x+1)^2}$

$$=\frac{(x-1)^4}{x(x^2+4x+1)^2}>0$$ គ្រប់ $x>1$ ។

ដោយ $f(1)=0$ នោះ $f(x)>f(1)=0$ គ្រប់ $x>1$

ដូចនេះ $\ln x>\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ ។

ខ)បង្ហាញថា $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{1}{3}(2\sqrt{ab}+\dfrac{a+b}{2})$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\ln x>\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ គ្រប់ $x>1$

គ្រប់ $a>0\,,b>0$ យើងសន្មត $a>b$ ហើយយក $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}>1$

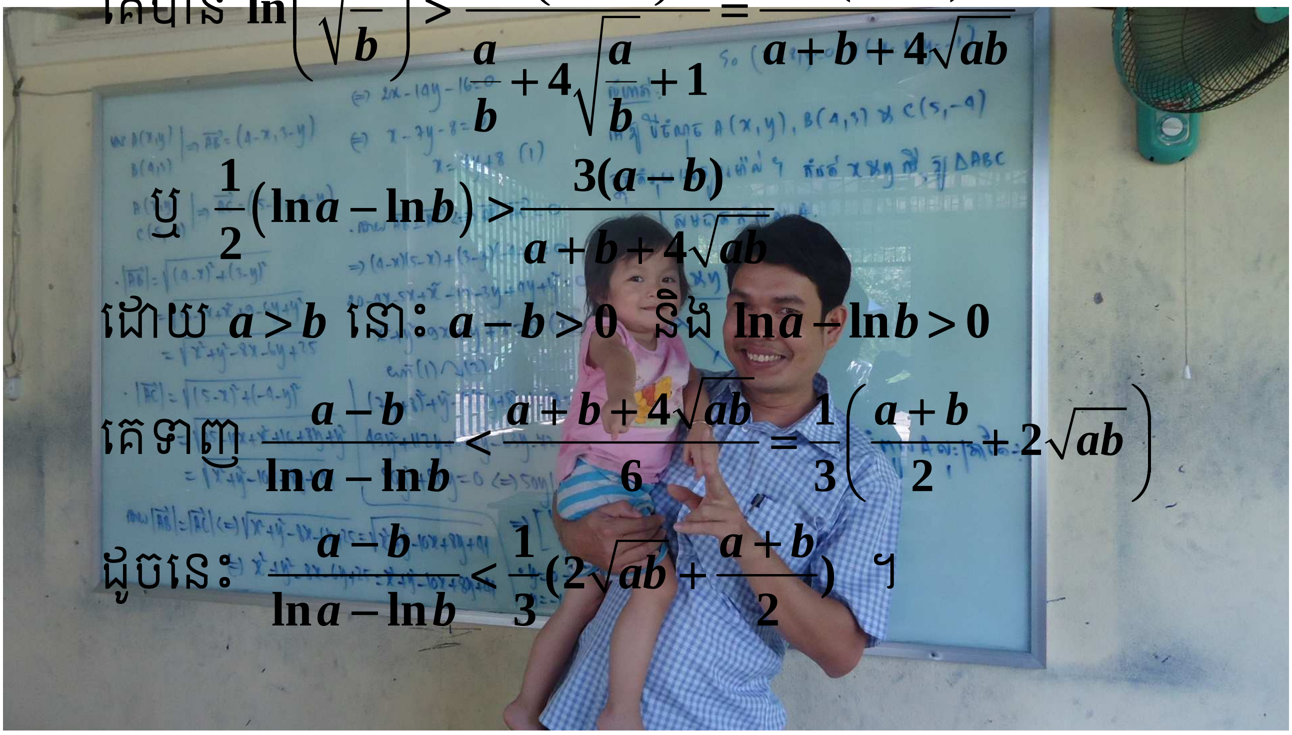
គេបាន $\ln\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)>\dfrac{3\left(\dfrac{a}{b}-1\right)}{\dfrac{a}{b}+4\sqrt{\dfrac{a}{b}}+1}=\dfrac{3(a-b)}{a+b+4\sqrt{ab}}$

ឬ $\dfrac{1}{2}(\ln a-\ln b)>\dfrac{3(a-b)}{a+b+4\sqrt{ab}}$

ដោយ $a>b$ នោះ $a-b>0$ និង $\ln a-\ln b>0$

គេទាញ $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b+4\sqrt{ab}}{6}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a+b}{2}+2\sqrt{ab}\right)$

ដូចនេះ $\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{1}{3}(2\sqrt{ab}+\dfrac{a+b}{2})$ ។



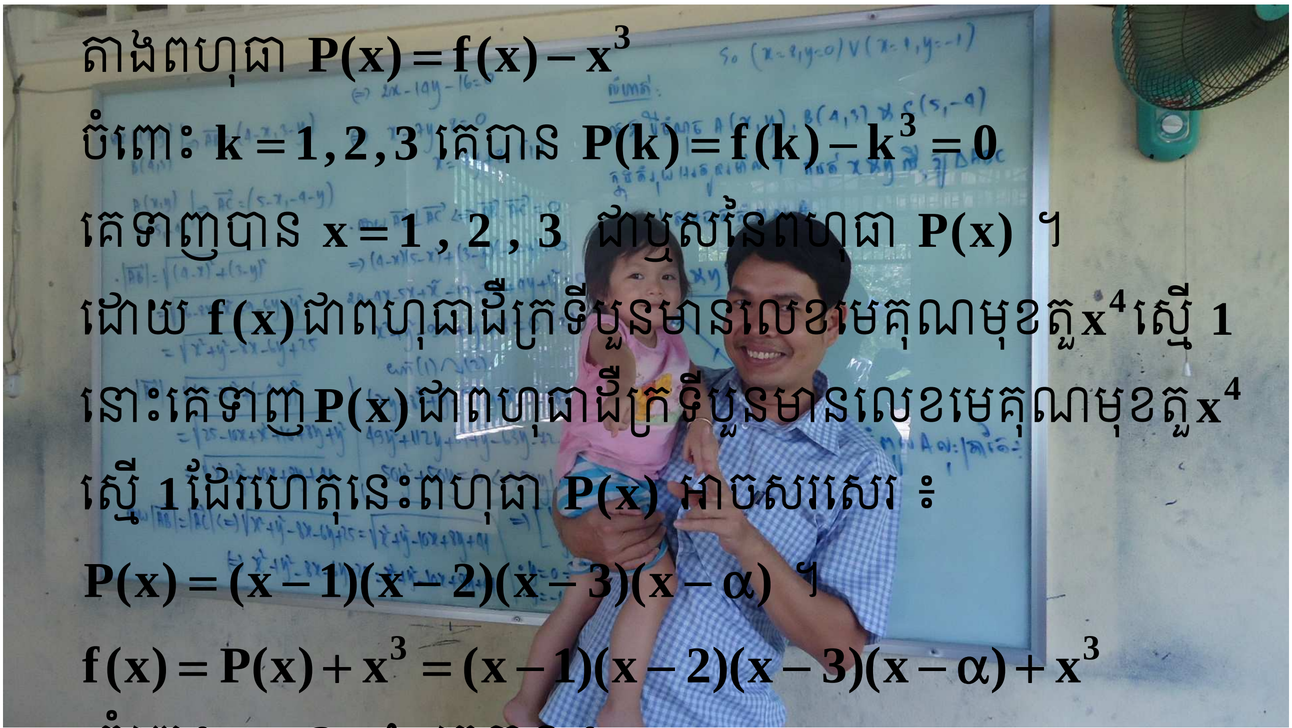
លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ។

គេដឹងថា $P(1)=1$, $P(2)=8$ និង $P(3)=27$ ។

ចូរស្រាយថា $f(2+\lambda)+f(2-\lambda)=2\lambda^4+10\lambda^2+16$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាងពហុធា $P(x)=f(x)-x^3$

ចំពោះ $k=1,2,3$ គេបាន $P(k)=f(k)-k^3=0$

គេទាញបាន $x=1,2,3$ ជាឫសនៃពហុធា $P(x)$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1

នោះគេទាញ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4

ស្មើ 1 ដែរហេតុនេះពហុធា $P(x)$ អាចសរសេរ ៖

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)$$ ។

$$f(x)=P(x)+x^3=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)+x^3$$

-ចំពោះ $x=2+\lambda$ គេបាន ៖

$$f(2+\lambda)=\lambda(\lambda^2-1)(2+\lambda-\alpha)+(2+\lambda)^3 \quad (1)$$

-ចំពោះ $x=2-\lambda$ គេបាន ៖

$$f(2-\lambda)=-\lambda(\lambda^2-1)(2-\lambda-\alpha)+(2-\lambda)^3 \quad (2)$$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន ៖

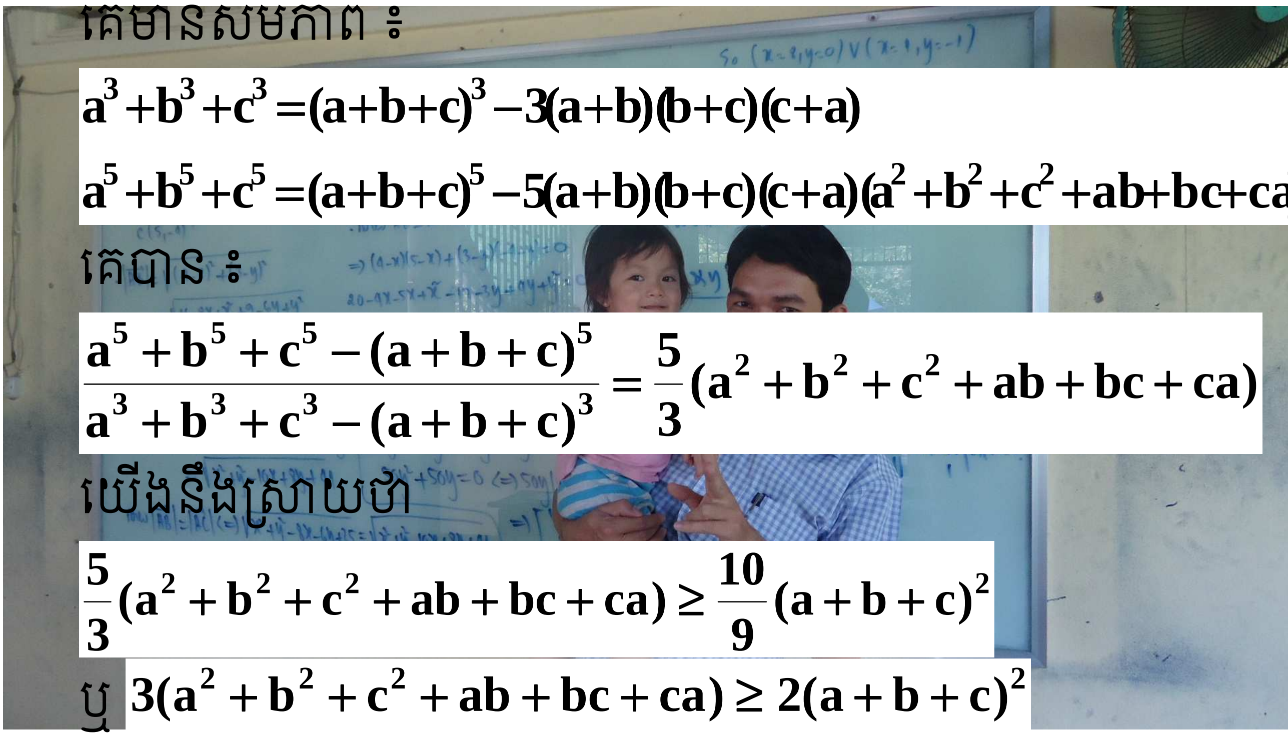
$$f(2+\lambda)+f(2-\lambda)=2\lambda^4+10\lambda^2+16$$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

ដំណោះស្រាយ



គេមានសមភាព ៖

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^5+b^5+c^5=(a+b+c)^5-5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

គេបាន ៖

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} = \frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

យើងនឹងស្រាយថា

$$\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

ឬ $3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq 2(a+b+c)^2$

ឬ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$$ab+bc+ca \leq \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2$$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \dfrac{10}{9}(a+b+c)^2$ ។

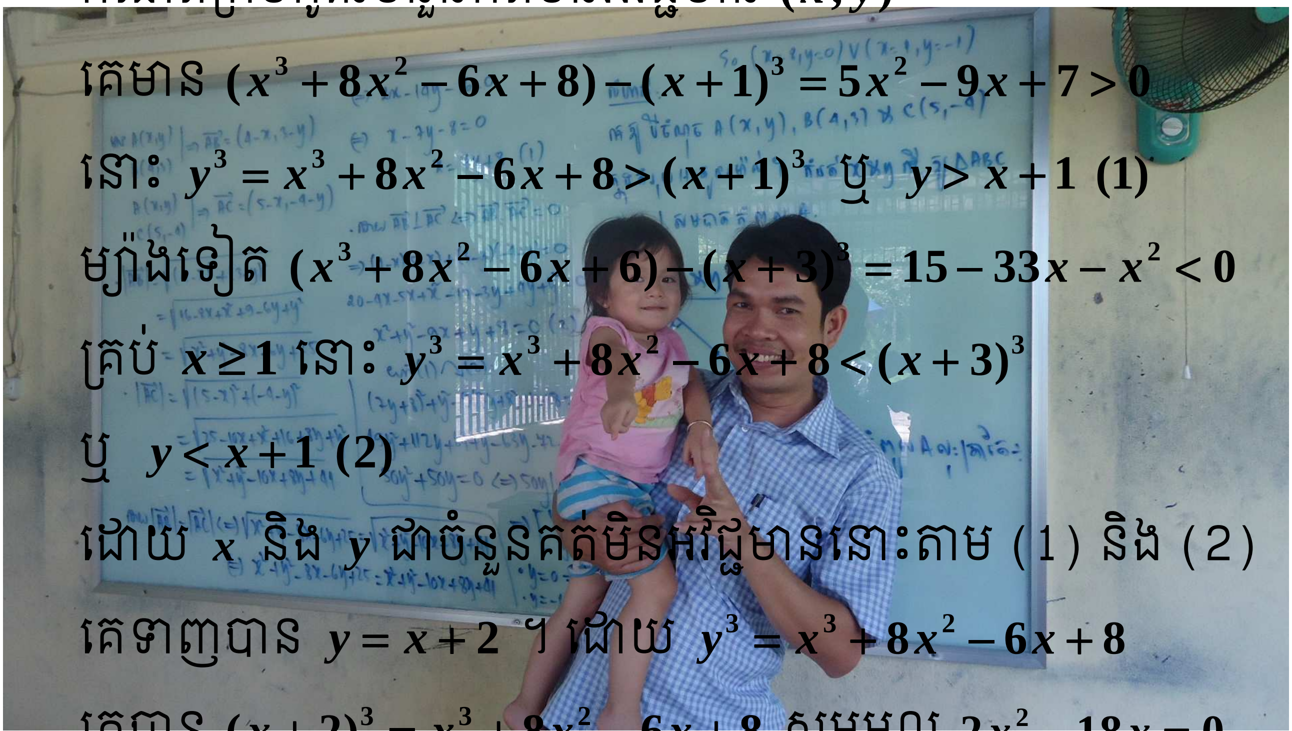
លំហាត់ទី៣៣

ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន (x,y) ដោយដឹងថា ៖

$y^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន (x,y)



គេមាន $(x^3 + 8x^2 - 6x + 8) - (x+1)^3 = 5x^2 - 9x + 7 > 0$

នោះ $y^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8 > (x+1)^3$ ឬ $y > x + 1$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $(x^3 + 8x^2 - 6x + 6) - (x+3)^3 = 15 - 33x - x^2 < 0$

គ្រប់ $x \ge 1$ នោះ $y^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8 < (x+3)^3$

ឬ $y < x + 1$ (2)

ដោយ x និង y ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាននោះតាម (1) និង (2)

គេទាញបាន $y = x + 2$ ។ ដោយ $y^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8$

គេបាន $(x+2)^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8$ សមមូល $2x^2 - 18x = 0$

គេទាញបាន $(x,y) = (0,2);(9,11)$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដោយដឹងថា $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}$

គេមាន $(2a+b+c)^2=4a^2+4a(b+c)+(b+c)^2$

$$=4a^2+4ab+4ac+4bc+(b-c)^2$$

$$=4(a+b)(a+c)+(b-c)^2$$

ដោយ $(b-c)^2\ge 0$ នោះ $(2a+b+c)^2\ge 4(a+b)(a+c)$

គេទាញ $\frac{1}{(2a+b+c)^2}\le\frac{1}{4(a+b)(a+c)}\quad(1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{1}{(a+2b+c)^2}\le\frac{1}{4(a+b)(b+c)}\quad(2)$

និង $\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{1}{4(b+c)(a+c)}\quad(3)$

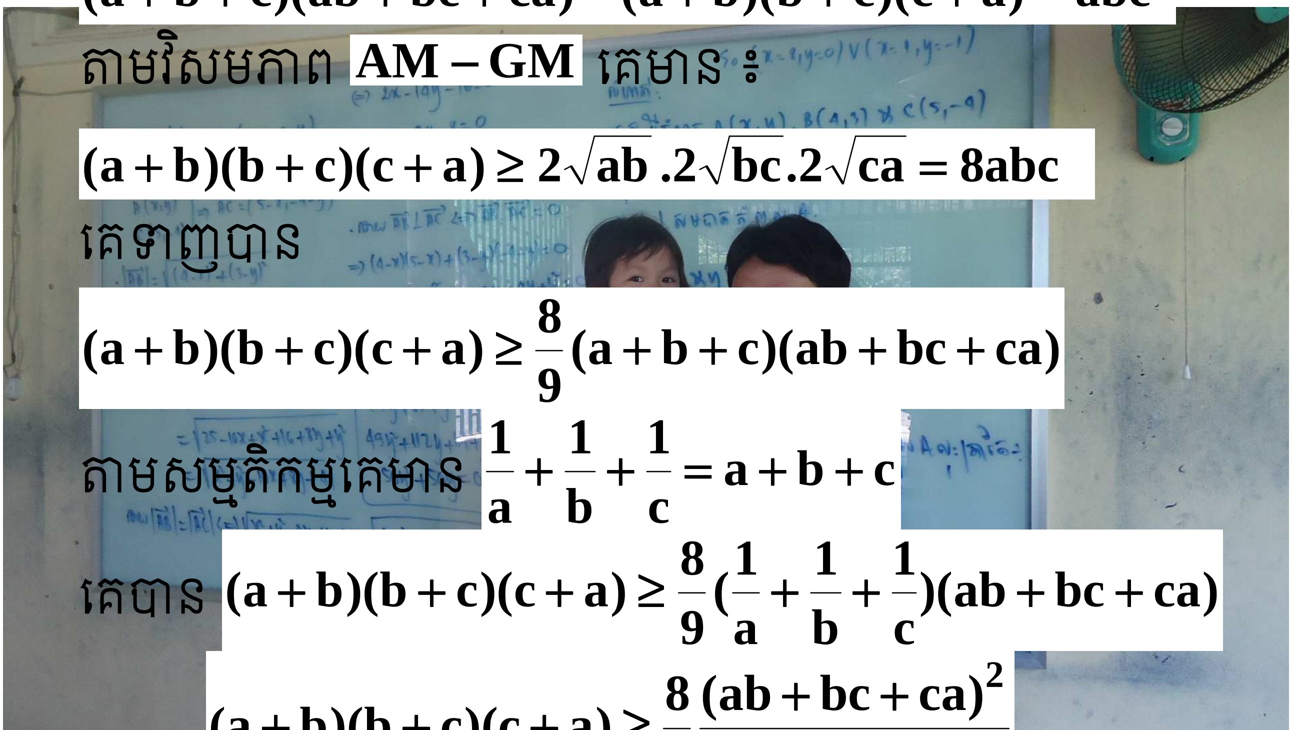
បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន ៖

$$S \le \frac{1}{4(a+b)(a+c)} + \frac{1}{4(a+b)(b+c)} + \frac{1}{4(b+c)(a+c)}$$

$$S \le \frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

ពិនិត្យ

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - (a+b)(b+c)(c+a) = abc$$



តាមវិសមភាព AM − GM គេមាន ៖

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2\sqrt{ab}\,.2\sqrt{bc}\,.2\sqrt{ca} = 8abc$$

គេទាញបាន

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a+b+c$

គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(ab+bc+ca)$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc}$$

ដោយ $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$ នោះគេទាញ

$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{3}(a+b+c)$ នោះ $S \le \frac{1}{2}.\frac{3}{8} = \frac{3}{16}$

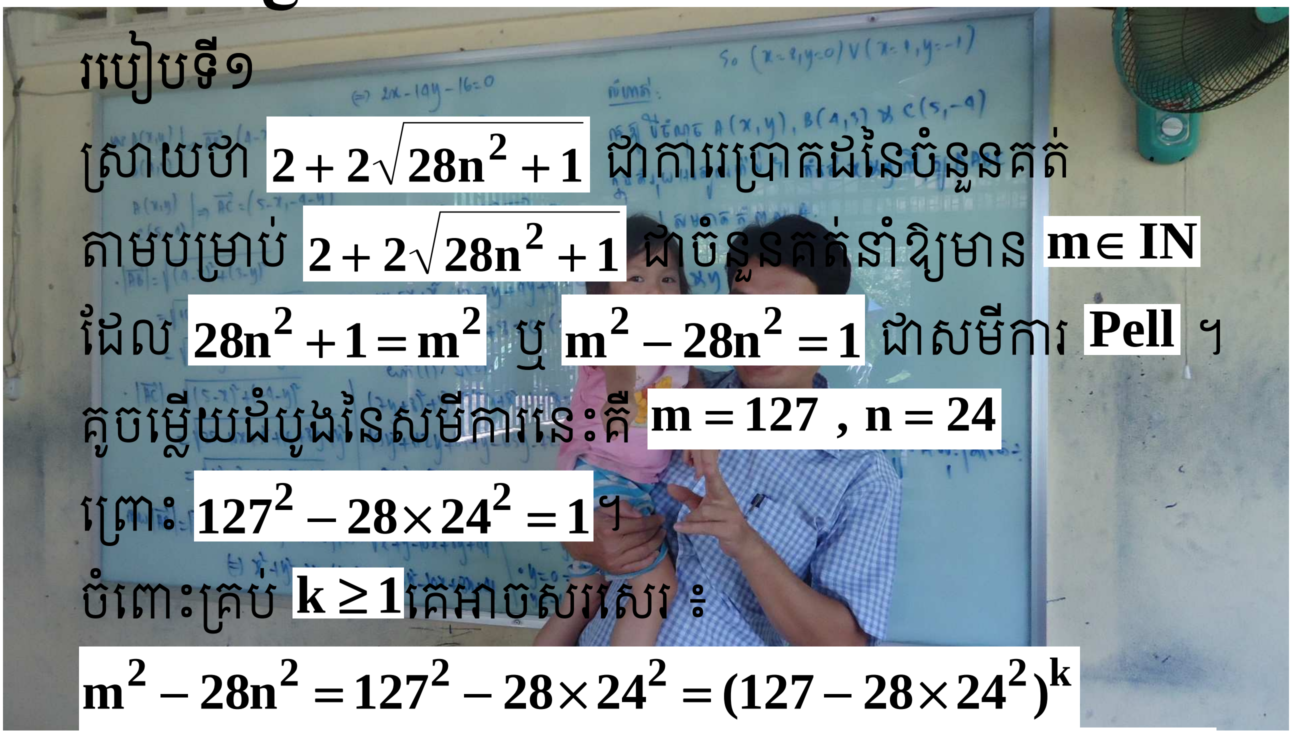
ដូចនេះ $\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \le \frac{3}{16}$

លំហាត់ទី៣៥

គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់។

ចូរស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ។

ដំណោះស្រាយ



របៀបទី១

ស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

តាមបម្រាប់ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នាំឱ្យមាន $m \in IN$

ដែល $28n^2+1=m^2$ ឬ $m^2-28n^2=1$ ជាសមីការ Pell ។

គូចម្លើយដំបូងនៃសមីការនេះគឺ $m=127\ ,\ n=24$

ព្រោះ $127^2-28\times 24^2=1$ ។

ចំពោះគ្រប់ $k\ge 1$ គេអាចសរសេរ ៖

$$m^2-28n^2=127^2-28\times 24^2=(127-28\times 24^2)^k$$

$$(m-2\sqrt{7}n)(m+2\sqrt{7}n)=(127-48\sqrt{7})^k(127+48\sqrt{7})^k$$

គេទាញ $\begin{cases} m-2\sqrt{7}n=(127-48\sqrt{7})^k \\ m+2\sqrt{7}n=(127+48\sqrt{7})^k \end{cases}$

គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ៖

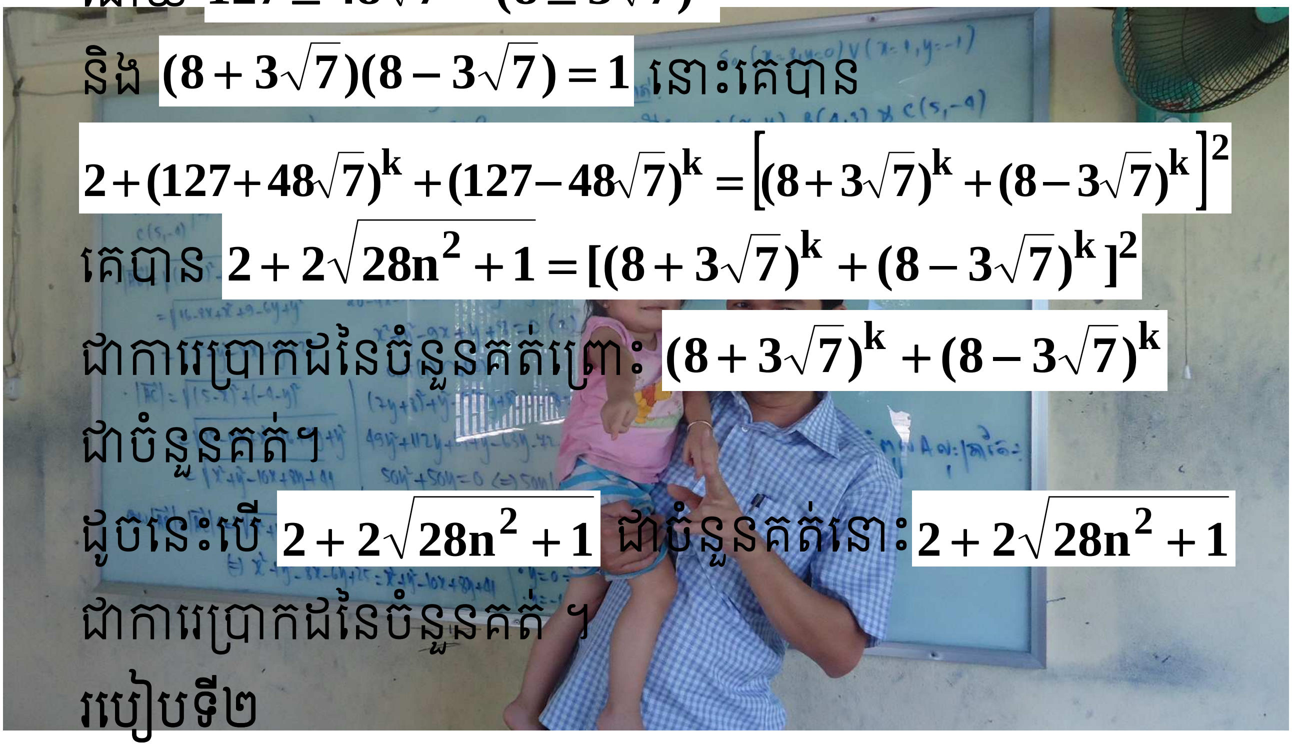
$$m = \frac{(127-48\sqrt{7})^k + (127+48\sqrt{7})^k}{2}$$

$$n = \frac{(127+48\sqrt{7})^k - (127-48\sqrt{7})^k}{4\sqrt{7}}$$

ក្នុងករណីនេះគេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1} = 2+2m$

$$2+2\sqrt{28n^2+1} = 2+(127+48\sqrt{7})^k + (127-48\sqrt{7})^k$$

ដោយ $127 \pm 48\sqrt{7} = (8 \pm 3\sqrt{7})^2$



និង $(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7}) = 1$ នោះគេបាន

$$2+(127+48\sqrt{7})^k + (127-48\sqrt{7})^k = \left[(8+3\sqrt{7})^k + (8-3\sqrt{7})^k\right]^2$$

គេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1} = [(8+3\sqrt{7})^k + (8-3\sqrt{7})^k]^2$

ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ព្រោះ $(8+3\sqrt{7})^k + (8-3\sqrt{7})^k$ ជាចំនួនគត់។

ដូចនេះបើ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នោះ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ ។

របៀបទី២

ស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

តាមបម្រាប់ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នាំឱ្យមាន $m \in \mathbb{N}$

ដែល $28n^2+1 = m^2$ ឬ $m^2 - 1 = 28n^2$

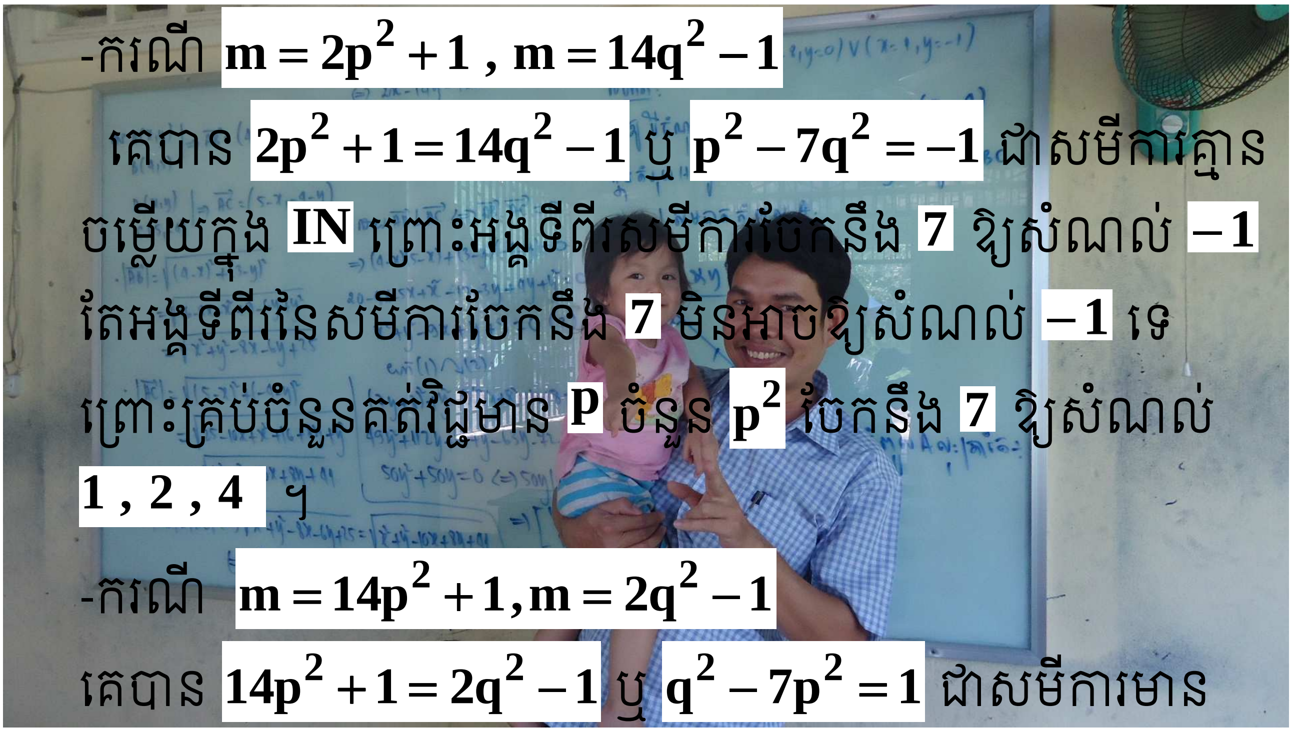
ឬ $\frac{m-1}{2} \cdot \frac{m+1}{2} = 7n^2$

តាមសមីការនេះគេទាញបាន $\begin{cases} \dfrac{m-1}{2}=p^2 \\ \dfrac{m+1}{2}=7q^2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} \dfrac{m-1}{2}=7p^2 \\ \dfrac{m+1}{2}=q^2 \end{cases}$

ដែល p និង q ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

គេទាញបាន

$m=2p^2+1$, $m=14q^2-1$ ឬ $m=14p^2+1, m=2q^2-1$



-ករណី $m=2p^2+1$, $m=14q^2-1$

គេបាន $2p^2+1=14q^2-1$ ឬ $p^2-7q^2=-1$ ជាសមីការគ្មានចម្លើយក្នុង IN ព្រោះអង្គទីពីរសមីការចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ -1 តែអង្គទីពីរនៃសមីការចែកនឹង 7 មិនអាចឱ្យសំណល់ -1 ទេ ព្រោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន p ចំនួន p^2 ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 1 , 2 , 4 ។

-ករណី $m=14p^2+1, m=2q^2-1$

គេបាន $14p^2+1=2q^2-1$ ឬ $q^2-7p^2=1$ ជាសមីការមានចម្លើយក្នុងសំណុំ IN ព្រោះ q^2-7p^2 ចែកនឹង 7 អាចឱ្យសំណល់ 1 ។

ហេតុនេះ មានគូ $p,q\in IN$ ដែល $m=14p^2+1, m=2q^2-1$

ក្នុងករណីនេះគេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2m$

ចំពោះ $m=2q^2-1$ គេបាន

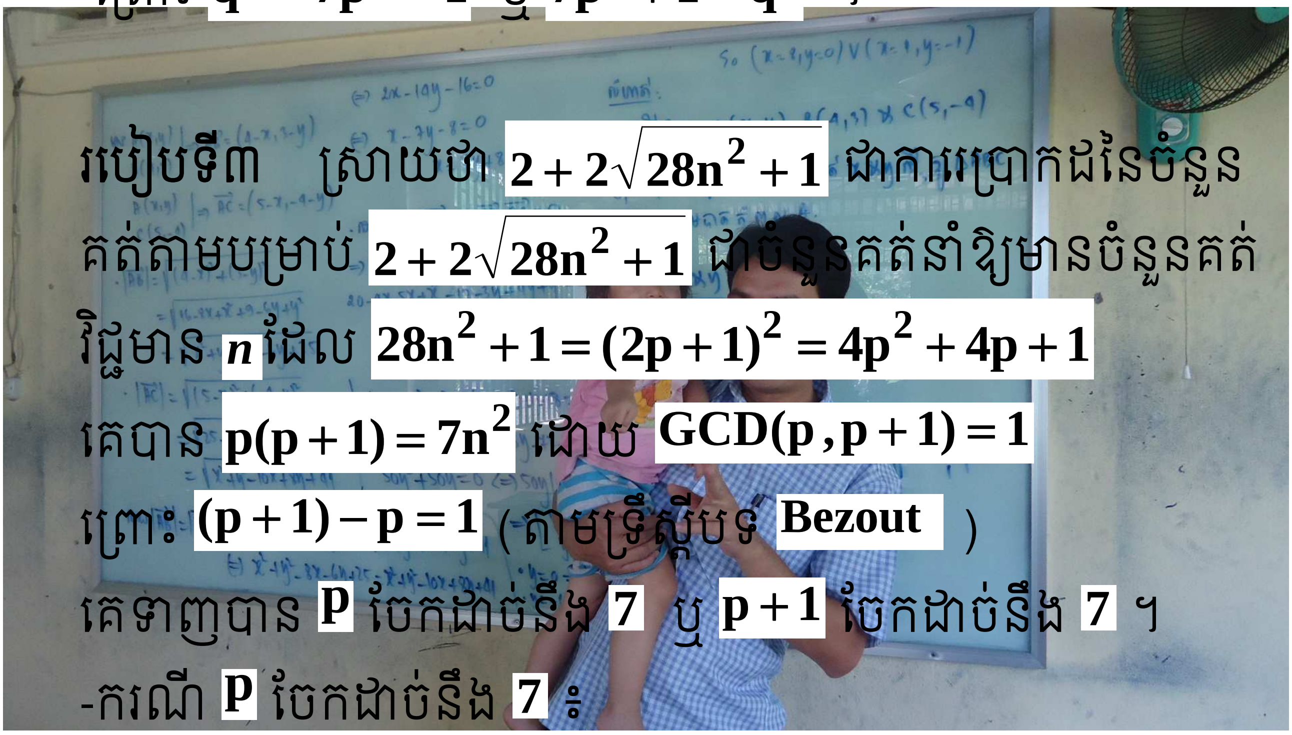
$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2(2q^2-1)=4q^2$ ជាការេប្រាកដ ។

ឬគេអាចយក $m=14p^2+1$ គេបាន ៖

$$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2(14p^2+1)=28p^2+4$$

$$=4(7p^2+1)=4q^2 \text{ ជាការេប្រាកដ។}$$

ព្រោះ $q^2-7p^2=1$ ឬ $7p^2+1=q^2$ ។



របៀបទី៣ ស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់តាមបម្រាប់ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នាំឱ្យមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $28n^2+1=(2p+1)^2=4p^2+4p+1$

គេបាន $p(p+1)=7n^2$ ដោយ $GCD(p,p+1)=1$

ព្រោះ $(p+1)-p=1$ (តាមទ្រឹស្តីបទ **Bezout**)

គេទាញបាន p ចែកដាច់នឹង 7 ឬ $p+1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

-ករណី p ចែកដាច់នឹង 7 ៖

តាម $p(p+1)=7n^2$ គេទាញបាន $p=7k^2, p+1=t^2$

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k និង t ហើយ $GCD(k,t)=1$ ។

គេមាន $7k^2+1=t^2$ ឬ $t^2-7k^2=1$ ជាសមីការមានឬសក្នុង **IN**ព្រោះ t^2-7k^2 ចែកនឹង 7 មានសំណល់ 1, 2 ឬ 4 ។

-ករណី $p+1$ ចែកដាច់នឹង 7 ៖

តាម $p(p+1)=7n^2$ គេទាញបាន $p=k^2, p+1=7t^2$

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k និង t ហើយ $GCD(k,t)=1$ ។

គេមាន $k^2+1=7t^2$ ឬ $k^2-7t^2=-1$ ជាសមីការគ្មានឫសក្នុង

INព្រោះ k^2-7t^2 ចែកនឹង 7 មិនអាចមានសំណល់ -1ទេ ។

ចំពោះ $p=7k^2, p+1=t^2$ ដែល $t^2-7k^2=1$ គេមាន

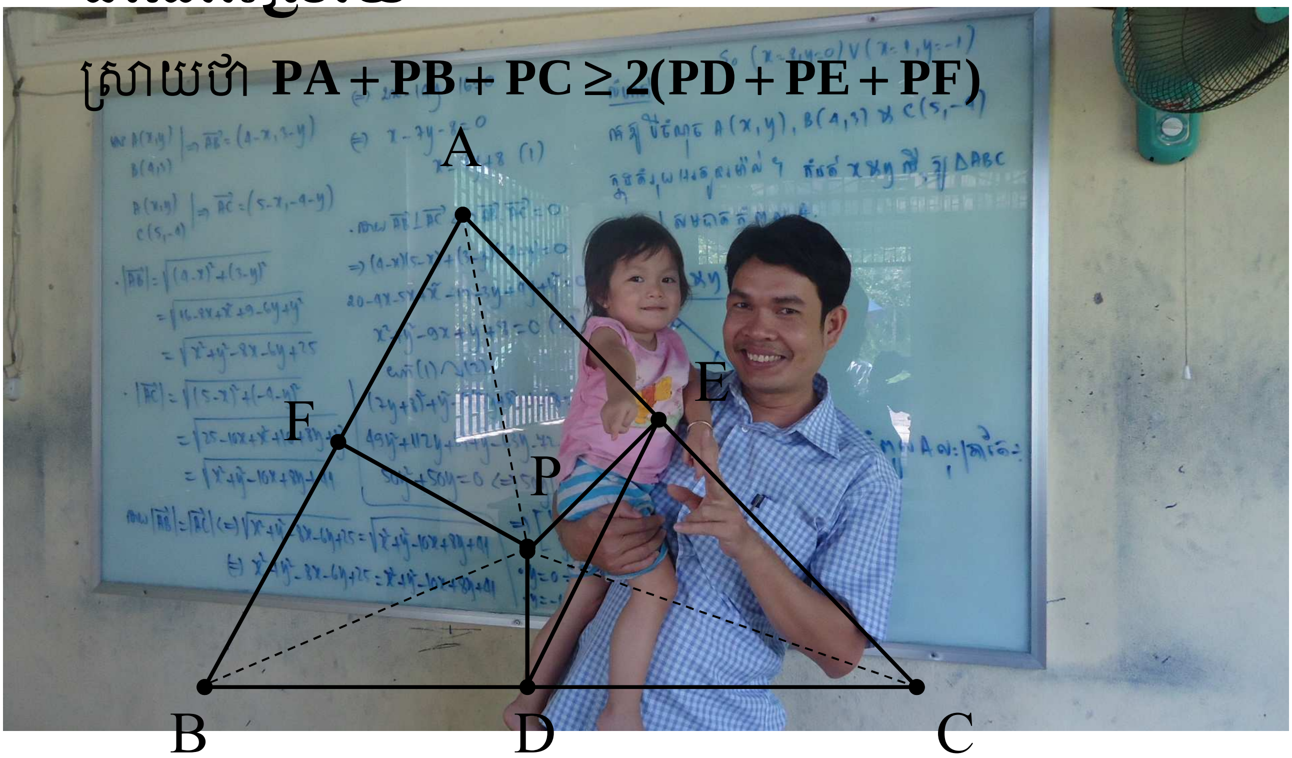
$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2(2p+1)=4p+4=4t^2$ ជាការេ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេយក $\mathbf{P}$ ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ហើយ $\mathbf{D,E,F}$ ជាជើងនៃចំណោលកែងពី $\mathbf{P}$ ទៅបន្ទាត់ $\mathbf{BC,CA,AB}$ រៀងគ្នា ។ ចូរស្រាយថា $\mathbf{PA+PB+PC \ge 2(PD+PE+PF)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\mathbf{PA+PB+PC \ge 2(PD+PE+PF)}$



គេមាន $\mathbf{\angle PDC + \angle PEC = 180^o}$ នោះ $\mathbf{PDCE}$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត $\mathbf{PC}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុង $\mathbf{\Delta PDE}$ គេបាន ៖

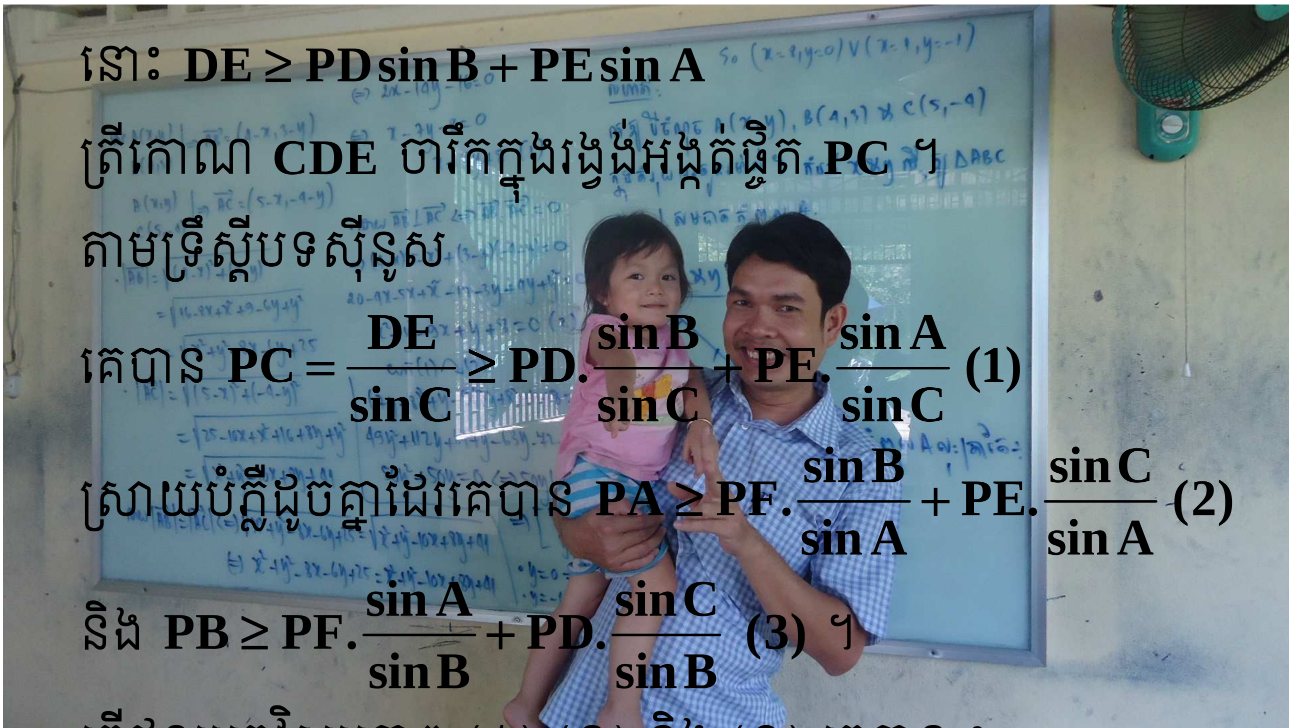
$$\mathbf{DE^2 = PD^2 + PE^2 - 2PD.PE.\cos\angle DPE}$$

តែ $\mathbf{\angle DPE = 180^o - C}$

$$\begin{aligned}DE^2 &= PD^2+PE^2+2PD.PE.\cos C\\ &= PD^2+PE^2+2PD.PE.\cos(180^o-(A+B))\\ &= PD^2+PE^2-2PD.PE\cos(A+B)\\ &= (PD\sin B+PE\sin A)^2+(PD\cos B-PE\cos A)^2\end{aligned}$$

ព្រោះ $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ ។

តែ $(PD\cos B-PE\cos A)^2\ge 0$



នោះ $DE\ge PD\sin B+PE\sin A$

ត្រីកោណ CDE ចារឹកក្នុងរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត PC ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

គេបាន $PC=\dfrac{DE}{\sin C}\ge PD.\dfrac{\sin B}{\sin C}+PE.\dfrac{\sin A}{\sin C}$ (1)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន $PA\ge PF.\dfrac{\sin B}{\sin A}+PE.\dfrac{\sin C}{\sin A}$ (2)

និង $PB\ge PF.\dfrac{\sin A}{\sin B}+PD.\dfrac{\sin C}{\sin B}$ (3) ។

ធ្វើផលបូកវិសមភាព (1),(2) និង (3) គេបាន ៖

$$PA+PB+PC\ge PD\left(\frac{\sin C}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin C}\right)+PE\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right)+PF\left(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\right)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

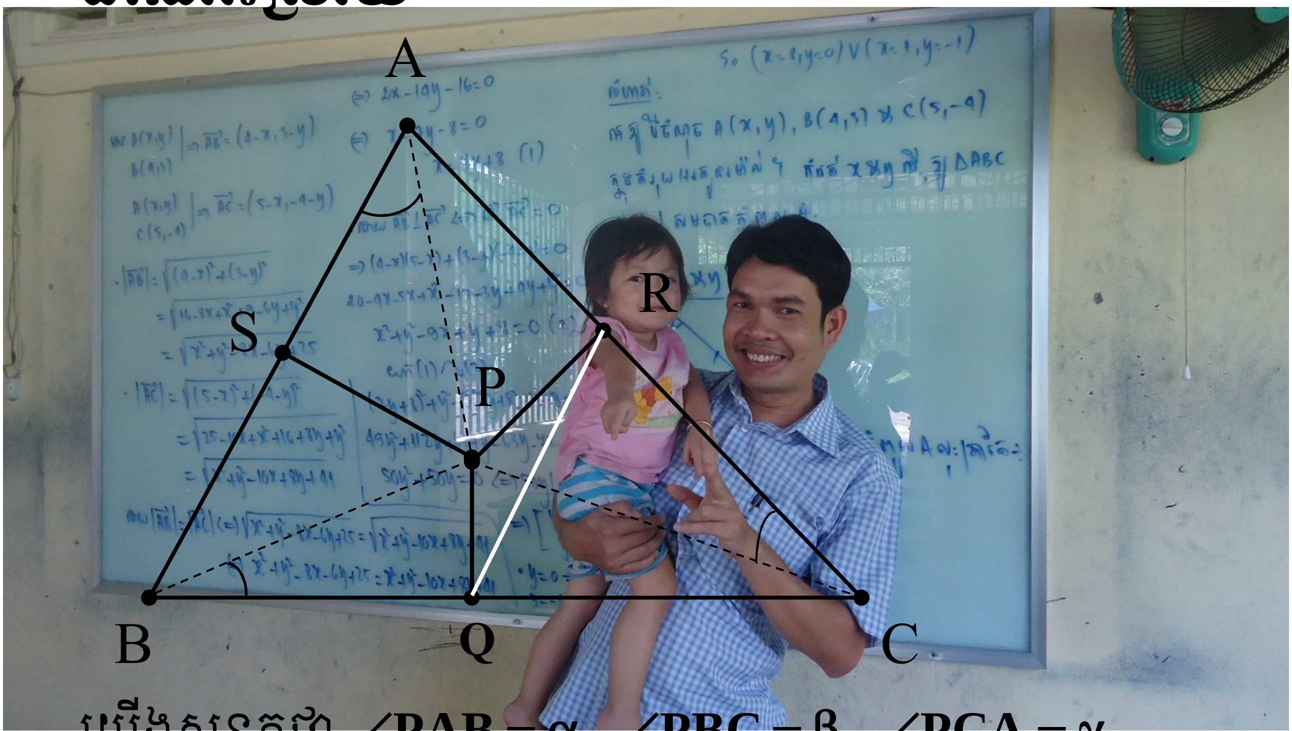
$$\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\ge 2\ ,\ \frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\ge 2,\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\ge 2$$

ដូចនេះ $PA+PB+PC\ge 2(PD+PE+PF)$ ។

លំហាត់ទី៣៧ (IMO 1991)

គេឲ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយនិង $\mathbf{P}$ ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា យ៉ាងតិចមួយនៃមុំ $\angle \mathbf{PAB}, \angle \mathbf{PBC}$ និង $\angle \mathbf{PCA}$ ត្រូវតូចជាង ឬ ស្មើទៅនឹង $\mathbf{30^o}$ ។

ដំណោះស្រាយ



យើងសន្មតថា $\angle \mathbf{PAB} = \alpha$, $\angle \mathbf{PBC} = \beta$, $\angle \mathbf{PCA} = \gamma$

យក $\mathbf{Q,R,S}$ ជាចំណោលកែងនៃ $\mathbf{P}$ លើ $\mathbf{BC,CA,AB}$ ។

គេបាន $\sin\alpha = \frac{PS}{PA}$, $\sin\beta = \frac{PQ}{PB}$, $\sin\gamma = \frac{PR}{PC}$ ។

ឧបមាថាមុំ α,β,γ ទាំងអស់សុទ្ធតែធំជាង $\mathbf{30^o}$ នោះមុំ α,β,γ នីមួយៗត្រូវតូចជាង $\mathbf{150^o}$ ។

គេបាន $\sin\alpha > \frac{1}{2}$, $\sin\beta > \frac{1}{2}$,$\sin\gamma > \frac{1}{2}$

គេទាញ $\frac{PS}{PA} > \frac{1}{2}, \frac{PQ}{PB} > \frac{1}{2}, \frac{PR}{PC} > \frac{1}{2}$

ហេតុនេះ $PA + PB + PC < 2(PQ + PR + PS)$

ដោយ $PA + PB + PC \geq 2(PQ + PR + PS)$

(វិសមភាព Erdos-Mordell : មើលសម្រាយលំហាត់ទី៣៦)

នាំឲ្យការឧបមាខាងលើមិនពិត ។

ដូចនេះយ៉ាងតិចមួយនៃមុំ $\angle PAB, \angle PBC$ និង $\angle PCA$

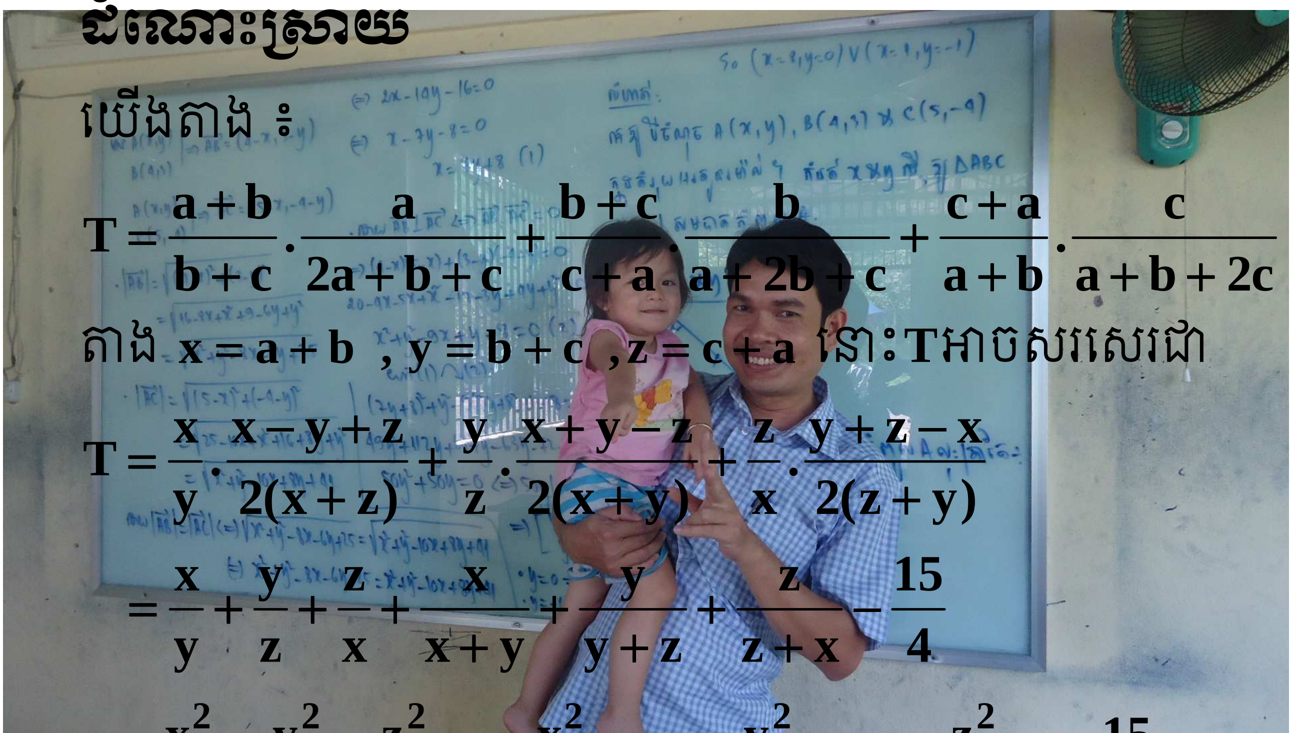
ត្រូវតូចជាង ឬ ស្មើទៅនឹង 30^0 ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c+a}{a+b}\cdot\frac{c}{2c+a+b}\geq\frac{3}{4}$$



ដំណោះស្រាយ

យើងតាង ៖

$$T=\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{b}{a+2b+c}+\frac{c+a}{a+b}\cdot\frac{c}{a+b+2c}$$

តាង $x=a+b$, $y=b+c$, $z=c+a$ នោះ T អាចសរសេរជា

$$T=\frac{x}{y}\cdot\frac{x-y+z}{2(x+z)}+\frac{y}{z}\cdot\frac{x+y-z}{2(x+y)}+\frac{z}{x}\cdot\frac{y+z-x}{2(z+y)}$$

$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}-\frac{15}{4}$$

$$=\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{yz}+\frac{z^2}{zx}+\frac{x^2}{x^2+xy}+\frac{y^2}{y^2+yz}+\frac{z^2}{z^2+zx}-\frac{15}{4}$$

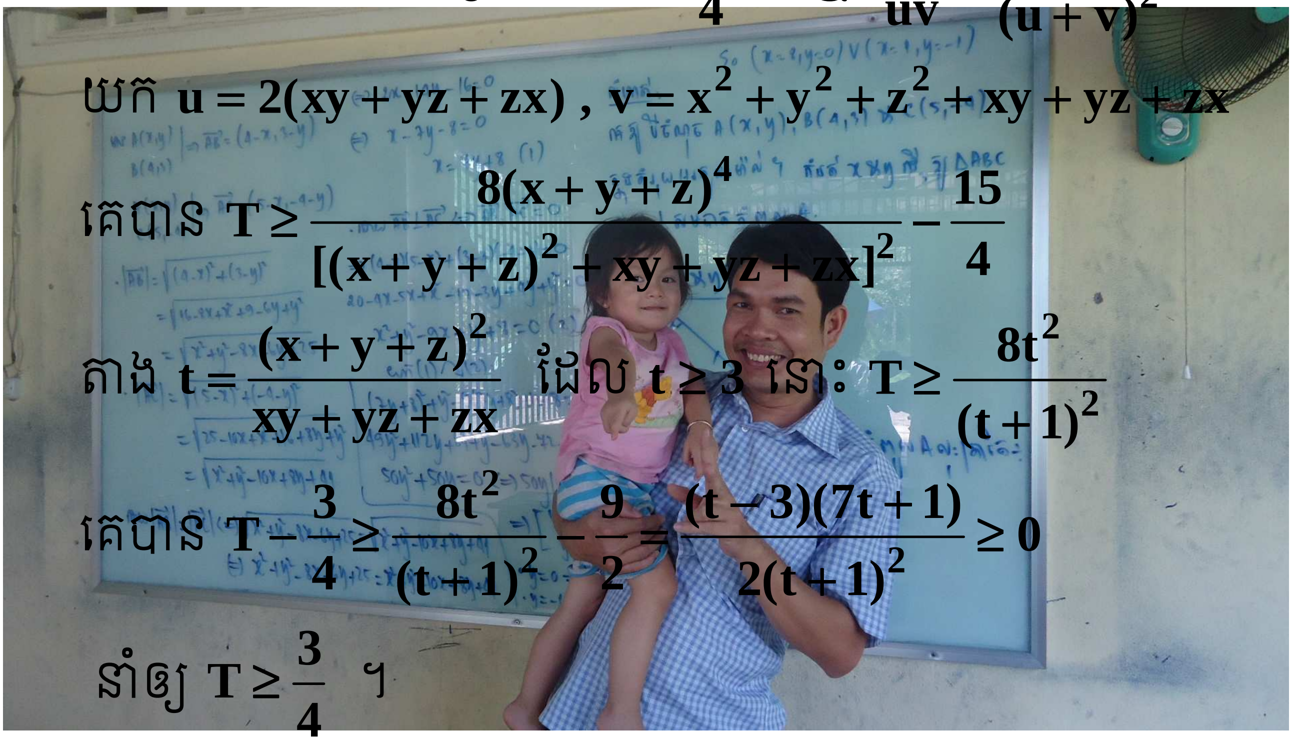
តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេបាន ៖

$$T \ge \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} + \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx} - \frac{15}{4}$$

$$= \frac{(x+y+z)^4}{(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)} - \frac{15}{4}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គ្រប់ $u, v > 0$ គេមាន

$u+v \ge 2\sqrt{uv}$ នាំឲ្យ $uv \le \frac{(u+v)^2}{4}$ ឬ $\frac{1}{uv} \ge \frac{4}{(u+v)^2}$



យក $u = 2(xy+yz+zx)$, $v = x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$

គេបាន $T \ge \frac{8(x+y+z)^4}{[(x+y+z)^2+xy+yz+zx]^2} - \frac{15}{4}$

តាង $t = \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}$ ដែល $t \ge 3$ នោះ $T \ge \frac{8t^2}{(t+1)^2}$

គេបាន $T - \frac{3}{4} \ge \frac{8t^2}{(t+1)^2} - \frac{9}{2} = \frac{(t-3)(7t+1)}{2(t+1)^2} \ge 0$

នាំឲ្យ $T \ge \frac{3}{4}$ ។

ដូចនេះ

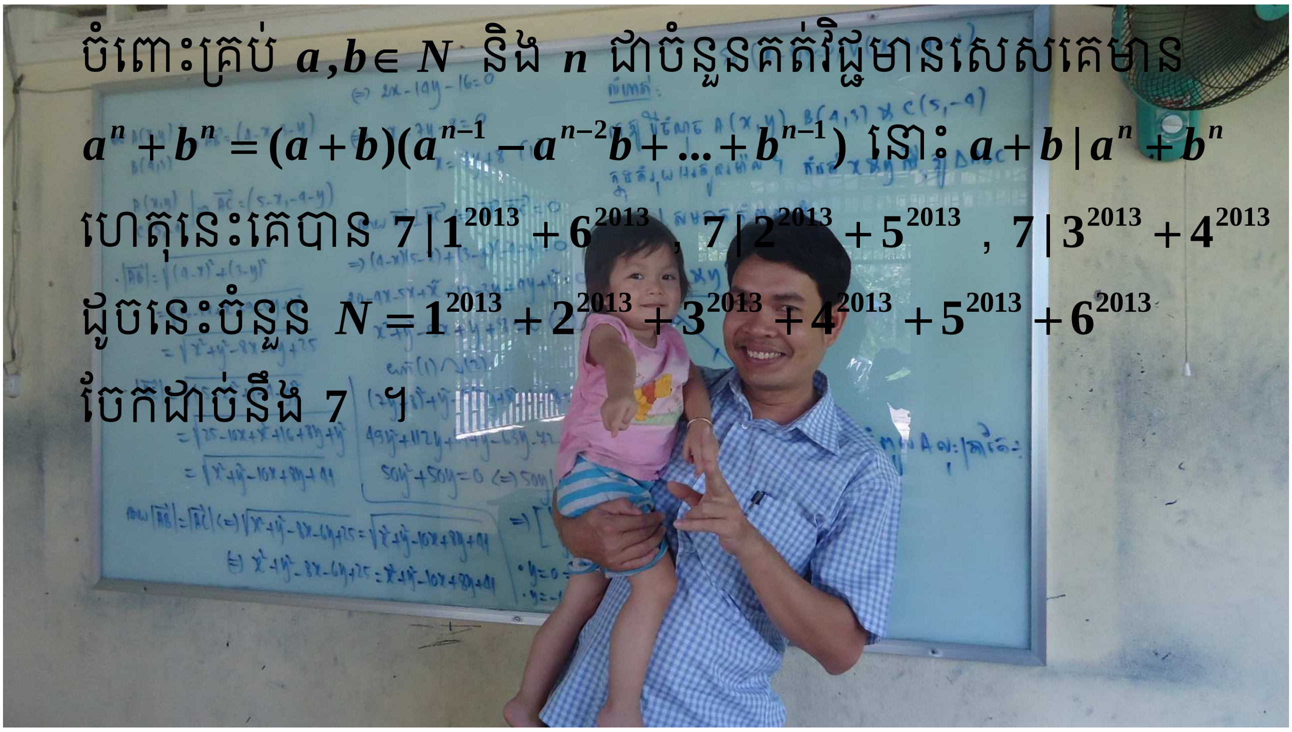
$$\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{b}{2b+c+a} + \frac{c+a}{a+b}\cdot\frac{c}{2c+a+b} \ge \frac{3}{4}$$

លំហាត់ទី៣៩

ចូរបង្ហាញថាចំនួន $N=1^{2013}+2^{2013}+3^{2013}+4^{2013}+5^{2013}+6^{2013}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $7\,|\,N$



ចំពោះគ្រប់ $a,b\in N$ និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេសគេមាន

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+...+b^{n-1})$ នោះ $a+b\,|\,a^n+b^n$

ហេតុនេះគេបាន $7\,|\,1^{2013}+6^{2013}$, $7\,|\,2^{2013}+5^{2013}$, $7\,|\,3^{2013}+4^{2013}$

ដូចនេះចំនួន $N=1^{2013}+2^{2013}+3^{2013}+4^{2013}+5^{2013}+6^{2013}$

ចែកដាច់នឹង 7 ។

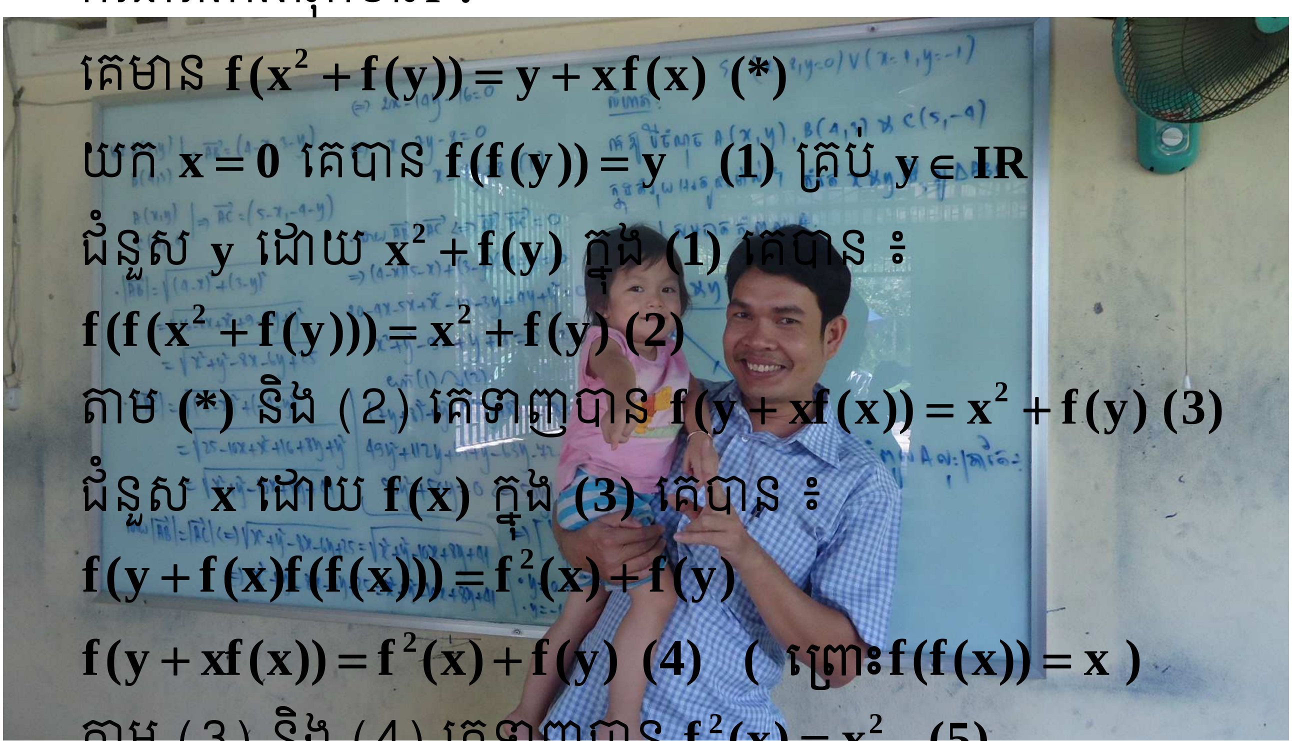
លំហាត់ទី៤០

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x^2 + f(y)) = y + xf(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x, y \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកអនុគមន៍ f :



គេមាន $f(x^2 + f(y)) = y + xf(x)$ (*)

យក $x = 0$ គេបាន $f(f(y)) = y$ (1) គ្រប់ $y \in IR$

ជំនួស y ដោយ $x^2 + f(y)$ ក្នុង (1) គេបាន ៖

$f(f(x^2 + f(y))) = x^2 + f(y)$ (2)

តាម (*) និង (2) គេទាញបាន $f(y + xf(x)) = x^2 + f(y)$ (3)

ជំនួស x ដោយ $f(x)$ ក្នុង (3) គេបាន ៖

$f(y + f(x)f(f(x))) = f^2(x) + f(y)$

$f(y + xf(x)) = f^2(x) + f(y)$ (4) (ព្រោះ $f(f(x)) = x$)

តាម (3) និង (4) គេទាញបាន $f^2(x) = x^2$ (5)

ជំនួស y ដោយ $f(y)$ ក្នុង (*) គេបាន ៖

$f(x^2 + f(f(y))) = f(y) + xf(x)$

$f(x^2 + y) = f(y) + xf(x)$

$\left(f(x^2 + y)\right)^2 = \left(f(y) + xf(x)\right)^2$

$$(x^2+y)^2 = f^2(y) + 2xf(x)f(y) + x^2f^2(x)$$

$$x^4 + 2x^2y + y^2 = y^2 + 2xf(x)f(y) + x^4$$

$$2x^2y = 2xf(x)f(y)$$

គេទាញ $f(x)f(y) = xy \ \ (6)$

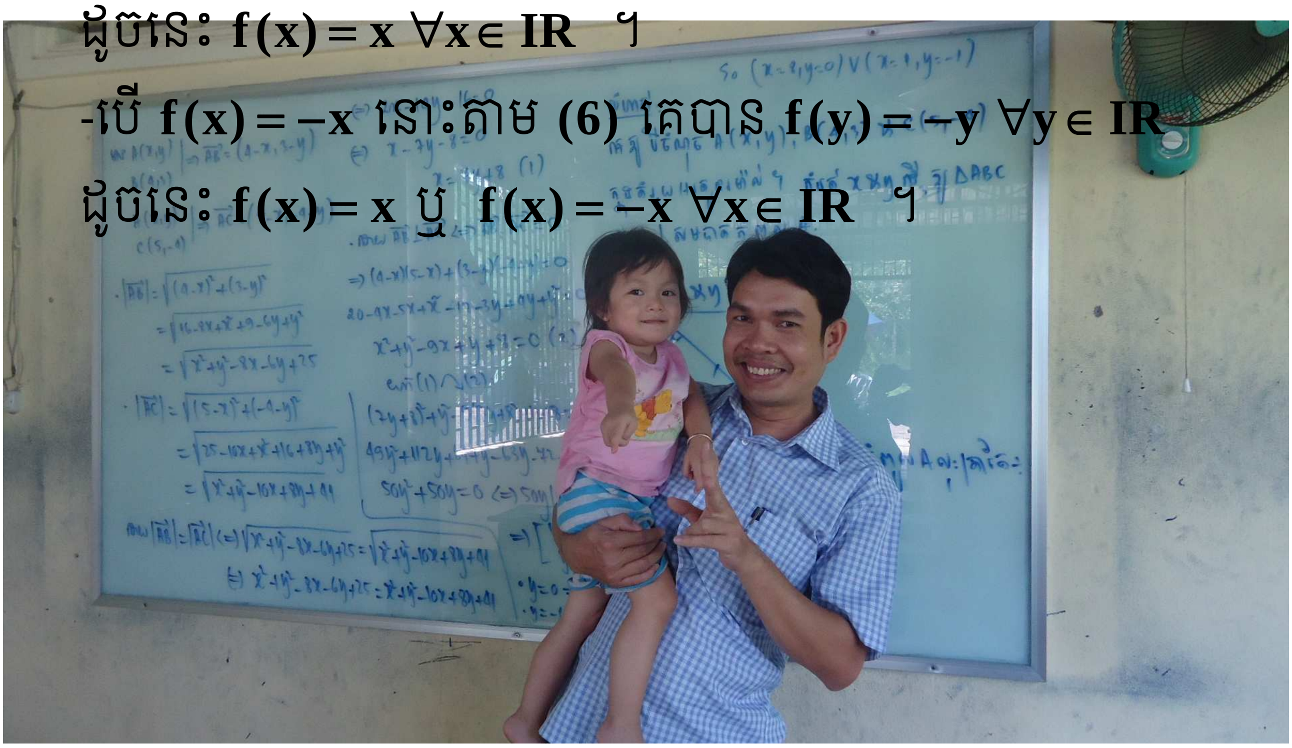
តាម (5) គេបាន $f(x) = x$ ឬ $f(x) = -x$ ។

-បើ $f(x) = x$ នោះតាម (6) យើងបាន $f(y) = y \ \forall y \in IR$

ដូចនេះ $f(x) = x \ \forall x \in IR$ ។

-បើ $f(x) = -x$ នោះតាម (6) គេបាន $f(y) = -y \ \forall y \in IR$

ដូចនេះ $f(x) = x$ ឬ $f(x) = -x \ \forall x \in IR$ ។



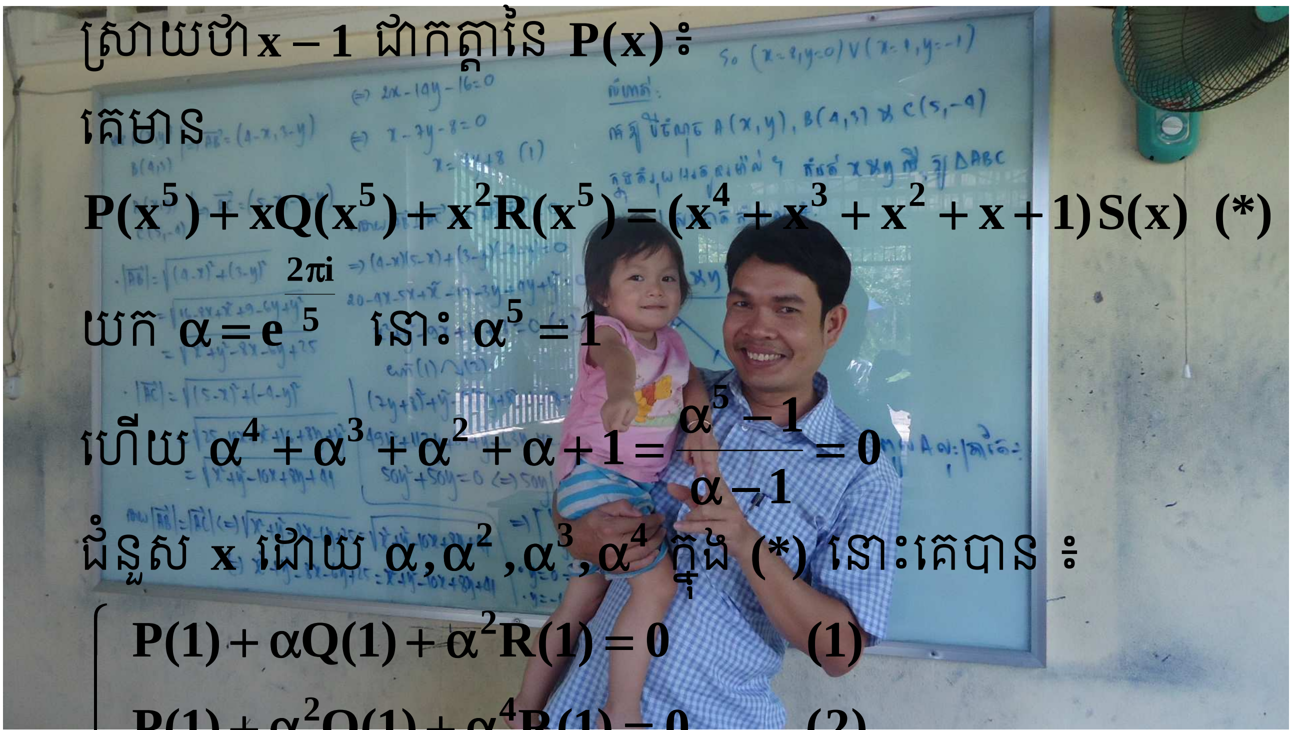
លំហាត់ទី៤១

បើ $P(x),Q(x),R(x)$ និង $S(x)$ ជាពហុធាដោយដឹងថា ៖

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$$

នោះចូរស្រាយថា $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$៖

គេមាន

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x) \quad (*)$$

យក $\alpha=e^{\frac{2\pi i}{5}}$ នោះ $\alpha^5=1$

ហើយ $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=\dfrac{\alpha^5-1}{\alpha-1}=0$

ជំនួស x ដោយ $\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4$ ក្នុង $(*)$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} P(1)+\alpha Q(1)+\alpha^2R(1)=0 & (1) \\ P(1)+\alpha^2Q(1)+\alpha^4R(1)=0 & (2) \\ P(1)+\alpha^3Q(1)+\alpha R(1)=0 & (3) \\ P(1)+\alpha^4Q(1)+\alpha^3R(1)=0 & (4) \end{cases}$$

គុណសមីការ (1),(2),(3) និង (4) នឹងចំនួនរៀងគ្នា

$-\alpha,-\alpha^2,-\alpha^3,-\alpha^4$

គេបាន $\begin{cases} -\alpha P(1)-\alpha^2 Q(1)-\alpha^3 R(1)=0 & (5) \\ -\alpha^2 P(1)-\alpha^4 Q(1)-\alpha R(1)=0 & (6) \\ -\alpha^3 P(1)-\alpha\, Q(1)-\alpha^4 R(1)=0 & (7) \\ -\alpha^4 P(1)-\alpha^3 Q(1)-\alpha^2 R(1)=0 & (8) \end{cases}$

បូកសមីការទាំង(8)ខាងលើគេបាន $5P(1)=0$ នោះ $P(1)=0$

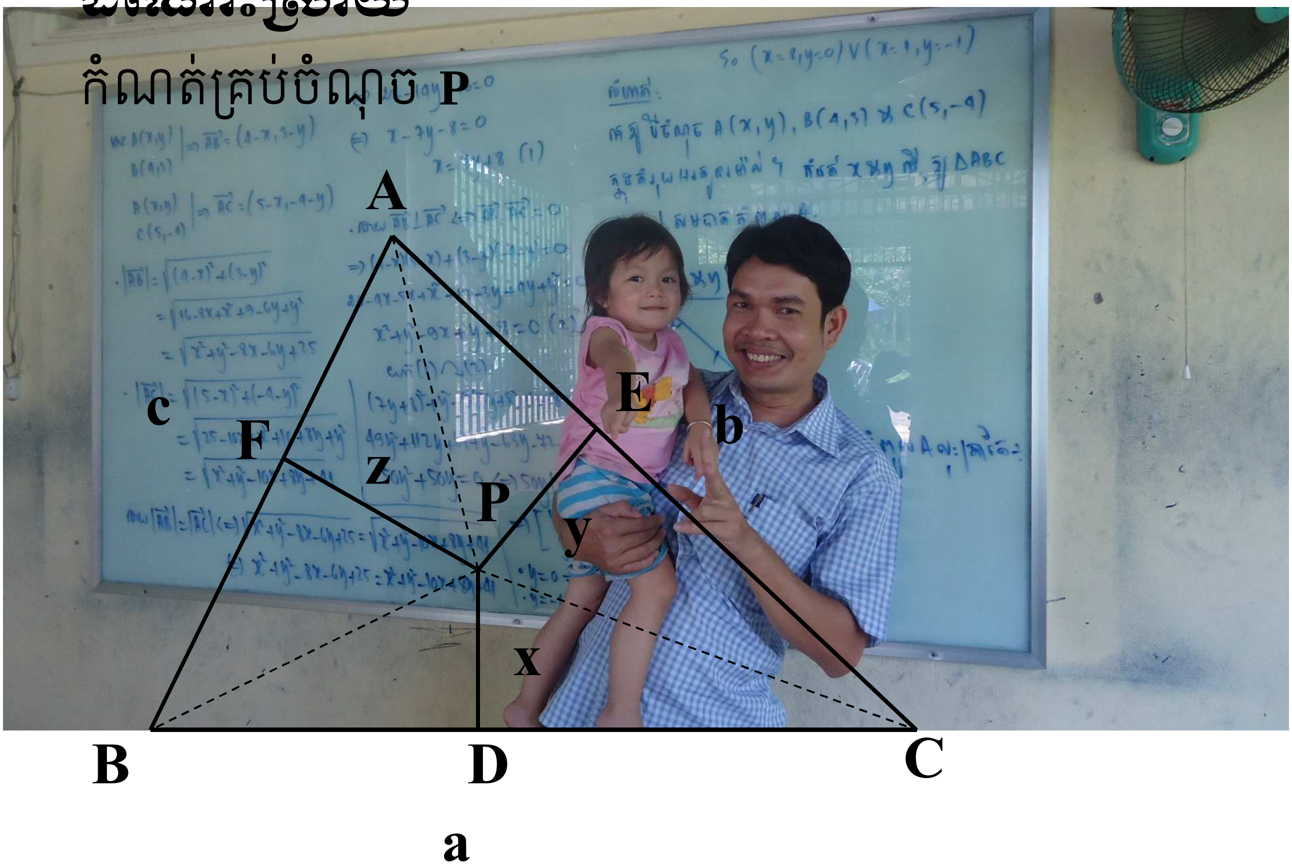
ដូចនេះ $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ។

លំហាត់ទី៤២(IMO 1981)

គេយក **P** ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ **ABC** ហើយ **D,E,F** ជាជើងនៃចំណោលកែងពី **P** ទៅបន្ទាត់ **BC,CA,AB** រៀងគ្នា ។ ចូរកំណត់គ្រប់ចំណុច **P** ដើម្បីឲ្យ $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ អប្បបរមា ?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចំណុច **P**



តាង $BC = a, AC = b, AB = c$ ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះ

យក $PD = x, PE = y, PF = z$ ជាចម្ងាយពី **P** ទៅបន្ទាត់ **BC,CA,AB** រៀងគ្នា ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ កំណត់ដោយ ៖

$$S = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB} = \frac{1}{2}(ax + by + cz)$$

គេទាញ $ax + by + cz = 2S$ ។

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz

$$(a+b+c)^2 \le (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$

គេទាញ $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2S}$

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}}=\frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}}=\frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}}$

គេទាញបាន $x = y = z$ ។

នោះមានន័យថា $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ អប្បបរមានៅពេលដែល

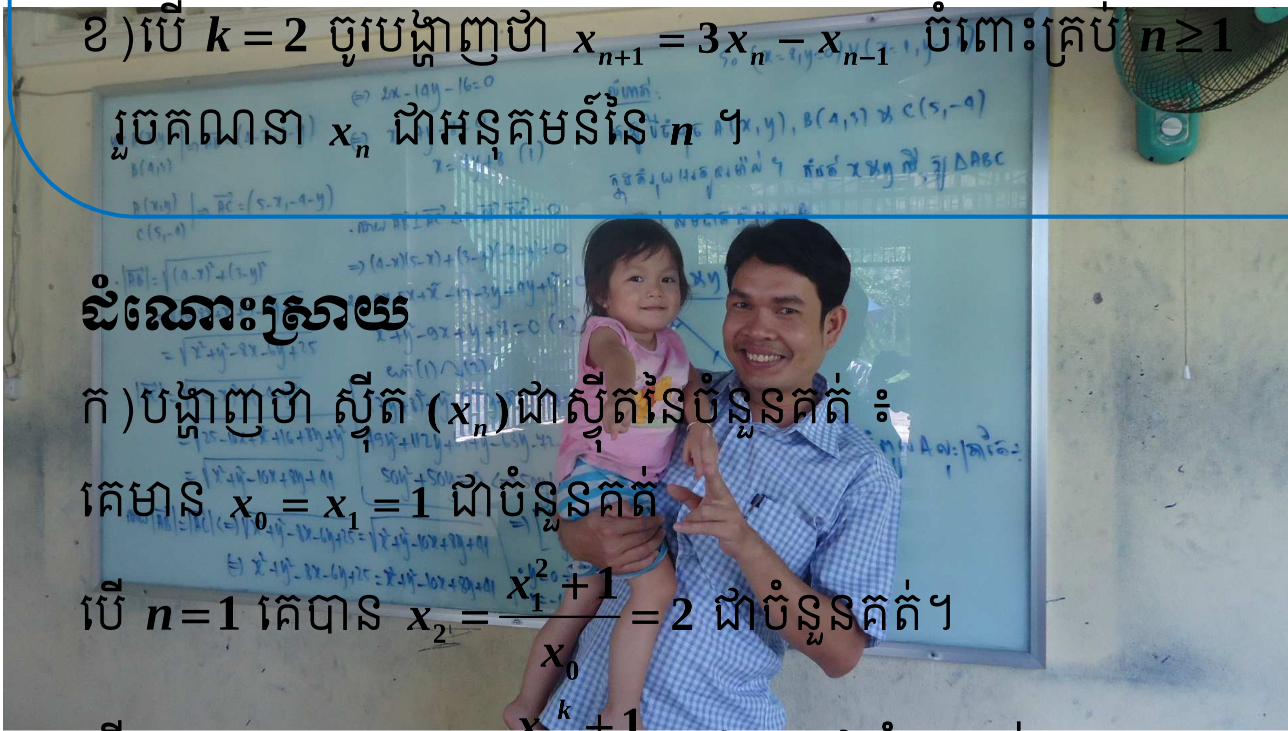
ចំណុច $\mathbf{P}$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។

លំហាត់ទី៤៣

គេឲ្យ $k \geq 2$ ជាចំនួនគត់មួយ ។ ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ ៖

$x_0 = x_1 = 1$ និង $x_{n+1} = \dfrac{x_n^k + 1}{x_{n-1}}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។

ក)ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k \geq 2$ ស្វ៊ីត (x_n)គឺ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ។



ខ)បើ $k = 2$ ចូរបង្ហាញថា $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ រួចគណនា x_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក)បង្ហាញថា ស្វ៊ីត (x_n)ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ៖

គេមាន $x_0 = x_1 = 1$ ជាចំនួនគត់

បើ $n=1$ គេបាន $x_2 = \dfrac{x_1^2 + 1}{x_0} = 2$ ជាចំនួនគត់។

បើ $n=2$ គេបាន $x_3 = \dfrac{x_2^k + 1}{x_1} = 2^k + 1$ ជាចំនួនគត់ ។

យើងឧបមាថា $x_n \in IN$ ពិត ។ យើងនិងស្រាយថា $x_{n+1} \in IN$ ។

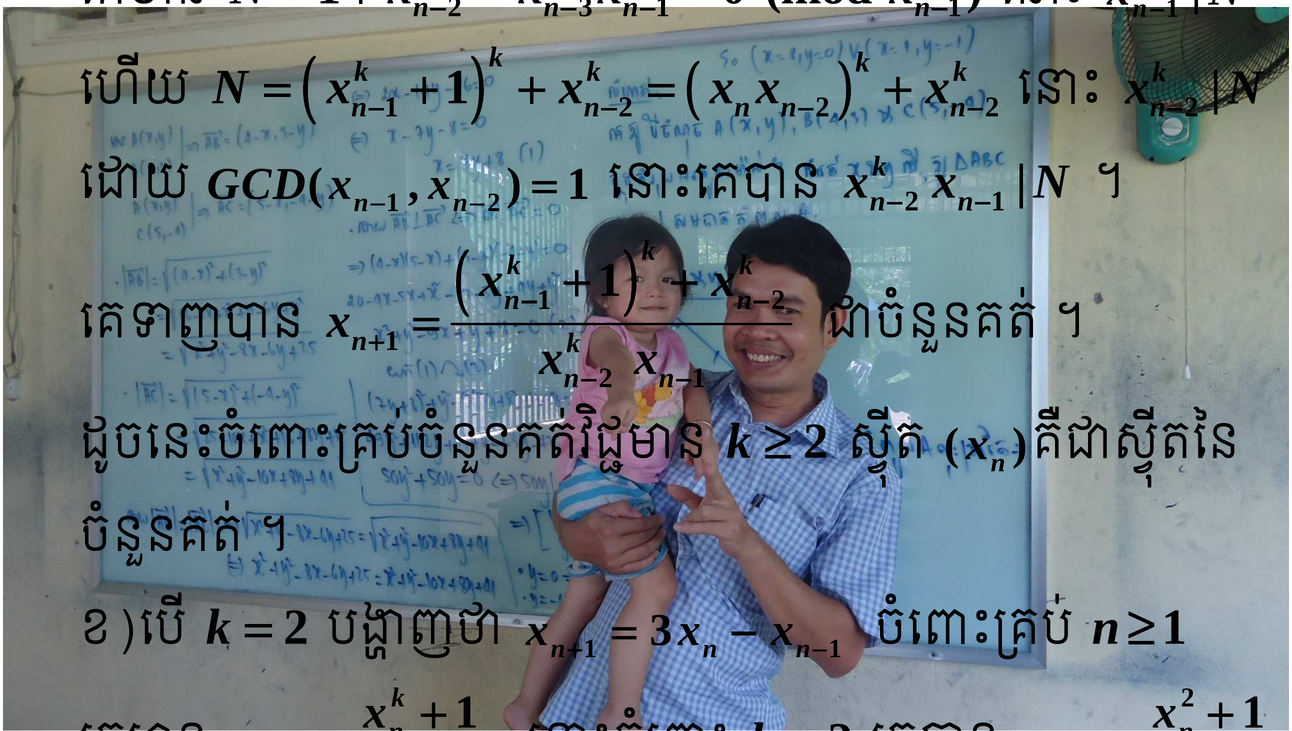
គេមាន $x_{n+1} = \dfrac{x_n^k + 1}{x_{n-1}}$ នោះ $x_n = \dfrac{x_{n-1}^k + 1}{x_{n-2}}$ គ្រប់ $n \geq 2$

ឬ $x_n x_{n-2} - x_{n-1}^k = 1$ នោះ x_{n-2} និង x_{n-1} ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

ដោយ $x_n=\dfrac{x_{n-1}^k+1}{x_{n-2}}$ នោះសមភាព $x_{n+1}=\dfrac{x_n^k+1}{x_{n-1}}$ អាចសរសេរ

$$x_{n+1}=\dfrac{\left(\dfrac{x_{n-1}^k+1}{x_{n-2}}\right)^k+1}{x_{n-1}}=\dfrac{\left(x_{n-1}^k+1\right)^k+x_{n-2}^k}{x_{n-2}^k\ x_{n-1}}$$

តាង $N=\left(x_{n-1}^k+1\right)^k+x_{n-2}^k$ គ្រប់ $n\geq 2$



គេមាន $N\equiv 1+x_{n-2}^k=x_{n-3}x_{n-1}\equiv 0\ (\bmod\ x_{n-1})$ នោះ $x_{n-1}\,|\,N$

ហើយ $N=\left(x_{n-1}^k+1\right)^k+x_{n-2}^k=\left(x_nx_{n-2}\right)^k+x_{n-2}^k$ នោះ $x_{n-2}^k\,|\,N$

ដោយ $GCD(x_{n-1},x_{n-2})=1$ នោះគេបាន $x_{n-2}^k\,x_{n-1}\,|\,N$ ។

គេទាញបាន $x_{n+1}=\dfrac{\left(x_{n-1}^k+1\right)^k+x_{n-2}^k}{x_{n-2}^k\ x_{n-1}}$ ជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $k\geq 2$ ស្វ៊ីត (x_n) គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ។

ខ) បើ $k=2$ បង្ហាញថា $x_{n+1}=3x_n-x_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

គេមាន $x_{n+1}=\dfrac{x_n^k+1}{x_{n-1}}$ នោះចំពោះ $k=2$ គេបាន $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2+1}{x_{n-1}}$

គេទាញ $x_{n+1}x_{n-1}-x_n^{\ 2}=1$ **(1)** និង $x_{n+2}x_n-x_{n+1}^2=1$ **(2)**

តាម(1)និង(2)គេបាន $x_{n+1}x_{n-1}-x_n^{\ 2}=x_{n+2}x_n-x_{n+1}^2$

សមមូល $x_n(x_n+x_{n+2})=x_{n+1}(x_{n-1}+x_{n+1})$

គេទាញ $\dfrac{x_n+x_{n+2}}{x_{n+1}}=\dfrac{x_{n-1}+x_{n+1}}{x_n}$ នោះ $\left\{\dfrac{x_{n-1}+x_{n+1}}{x_n}\right\}$ ជាស្វ៊ីតថេរ

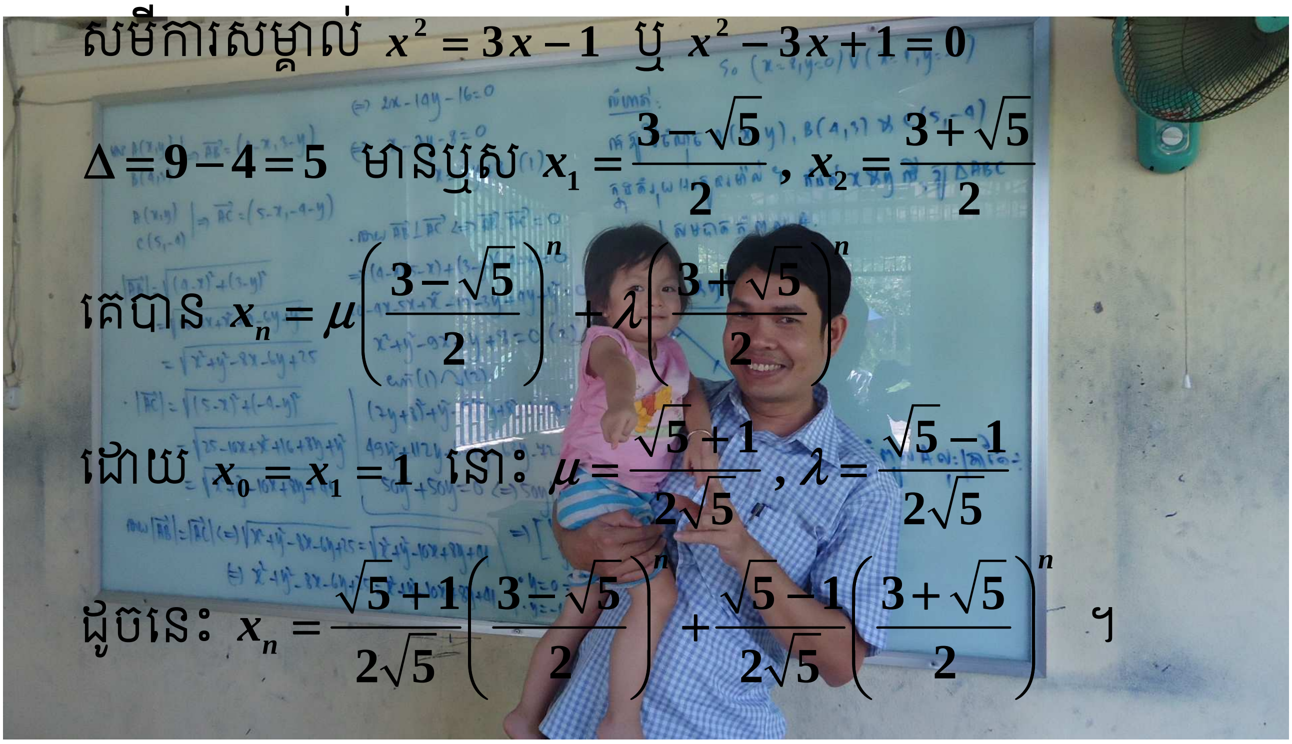
គេបាន $\dfrac{x_{n-1}+x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{x_0+x_2}{x_1}=\dfrac{1+2}{1}=3$

គេទាញ $x_{n-1}+x_{n+1}=3x_n$ ឬ $x_{n+1}=3x_n-x_{n-1}$

ដូចនេះ $x_{n+1}=3x_n-x_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

គណនា x_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $x_{n+1}=3x_n-x_{n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$



សមីការសម្គាល់ $x^2=3x-1$ ឬ $x^2-3x+1=0$

$\Delta=9-4=5$ មានឫស $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

គេបាន $x_n=\mu\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\lambda\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

ដោយ $x_0=x_1=1$ នោះ $\mu=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$, $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$

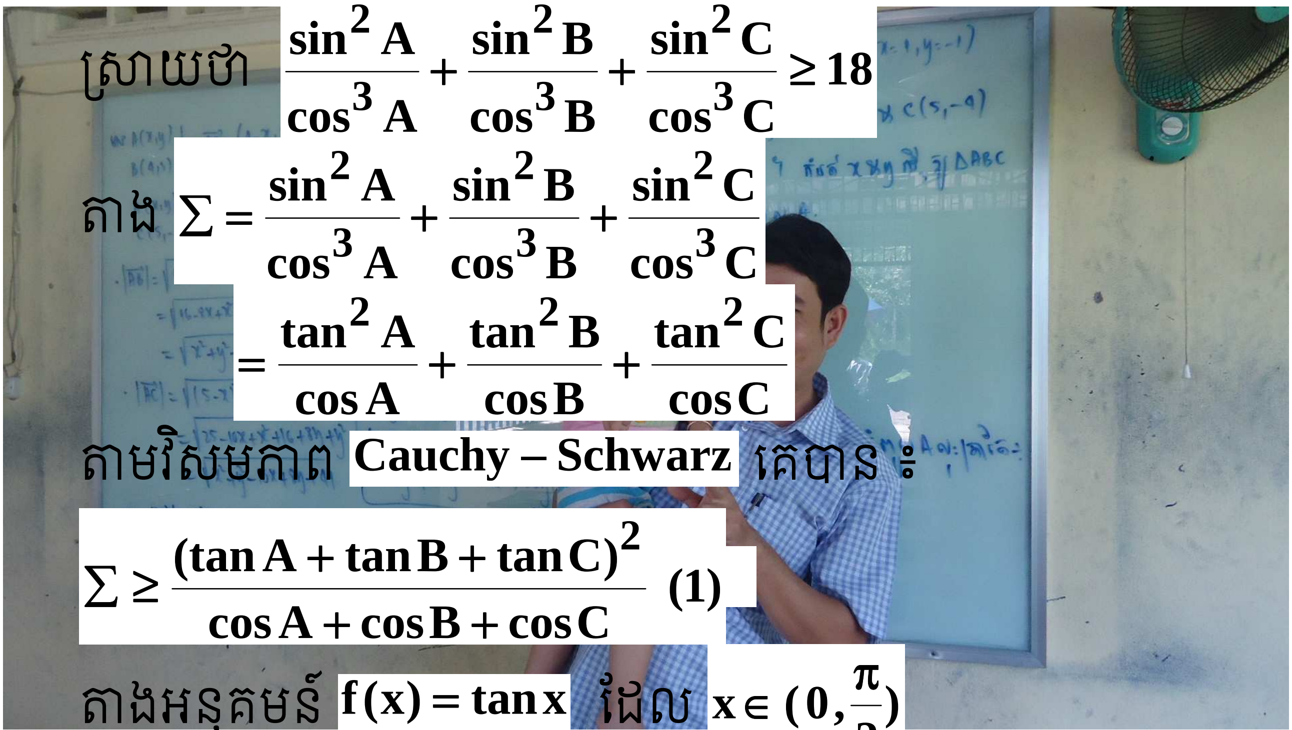
ដូចនេះ $x_n=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\dfrac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\dfrac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\ge 18$

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\dfrac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\dfrac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\ge 18$

តាង $\sum=\dfrac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\dfrac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\dfrac{\sin^2 C}{\cos^3 C}$

$=\dfrac{\tan^2 A}{\cos A}+\dfrac{\tan^2 B}{\cos B}+\dfrac{\tan^2 C}{\cos C}$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេបាន ៖

$$\sum\ge\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\cos A+\cos B+\cos C}\quad(1)$$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

$f''(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)>0$

តាមវិសមភាព Jensen គេបាន ៖

$$f(A)+f(B)+f(C)\ge 3f(\frac{A+B+C}{3})$$

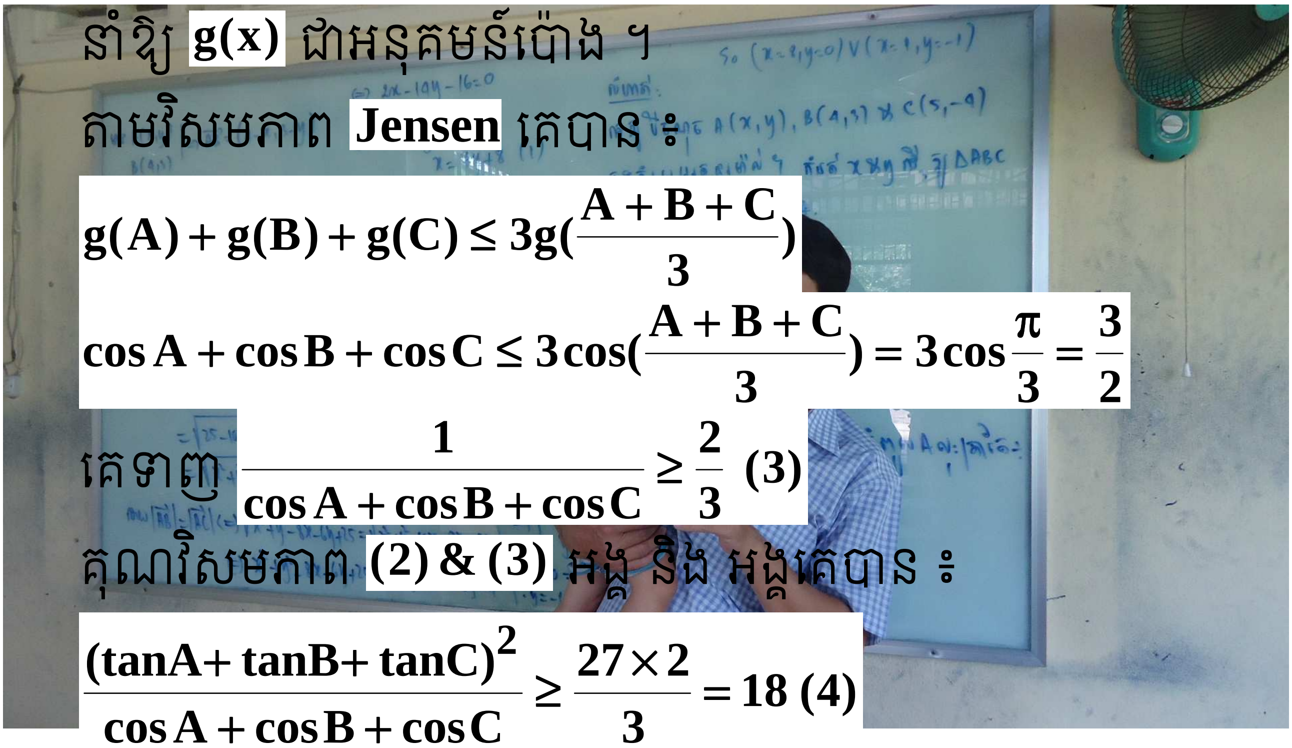
ឬ $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\tan(\frac{A+B+C}{3}) = 3\tan\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$

គេទាញ $(\tan A + \tan B + \tan C)^2 \geq 27 \quad (2)$

តាងអនុគមន៍ $g(x) = \cos x$ ដែល $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

គេបាន $g'(x) = -\sin x$

$$g''(x) = -\cos x < 0 \ , \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$



នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមវិសមភាព Jensen គេបាន ៖

$$g(A) + g(B) + g(C) \leq 3g(\frac{A+B+C}{3})$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 3\cos(\frac{A+B+C}{3}) = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$$

គេទាញ $\frac{1}{\cos A + \cos B + \cos C} \geq \frac{2}{3} \quad (3)$

គុណវិសមភាព (2) & (3) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\frac{(\tan A + \tan B + \tan C)^2}{\cos A + \cos B + \cos C} \geq \frac{27 \times 2}{3} = 18 \ (4)$$

តាម (1) & (4) គេទាញបាន $\sum \geq 18$ ។

ដូចនេះ $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A} + \frac{\sin^2 B}{\cos^3 B} + \frac{\sin^2 C}{\cos^3 C} \geq 18$ ។

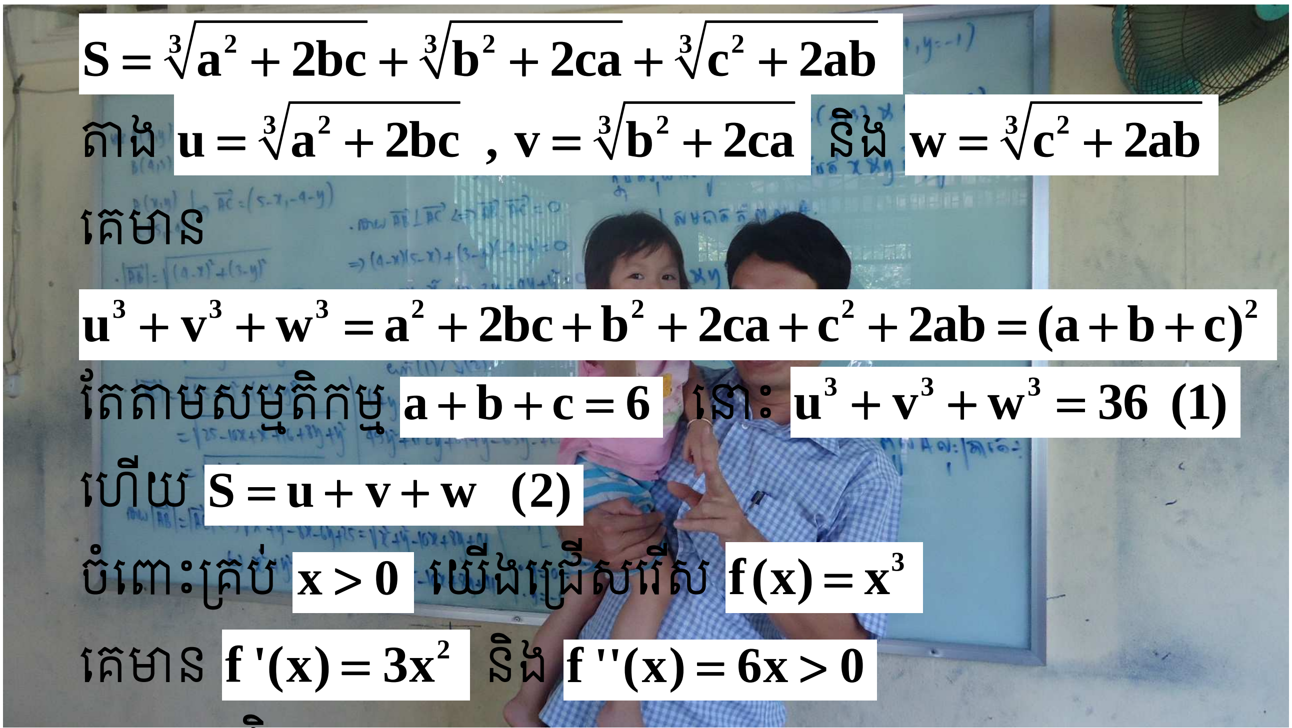
លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលមានផលបូកស្មើ 6 ។
ចូរកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ

$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ



$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$$

តាង $u=\sqrt[3]{a^2+2bc}$, $v=\sqrt[3]{b^2+2ca}$ និង $w=\sqrt[3]{c^2+2ab}$

គេមាន

$$u^3+v^3+w^3=a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab=(a+b+c)^2$$

តែតាមសម្មតិកម្ម $a+b+c=6$ នោះ $u^3+v^3+w^3=36\ \ (1)$

ហើយ $S=u+v+w\ \ \ (2)$

ចំពោះគ្រប់ $x>0$ យើងជ្រើសរើស $f(x)=x^3$

គេមាន $f'(x)=3x^2$ និង $f''(x)=6x>0$

នោះតាមវិសមភាព **Jensen** គេបាន

$$f(u)+f(v)+f(w)\geq 3f\left(\frac{u+v+w}{3}\right)\ ,\ \forall u,v,w>0$$

គេបាន $u^3+v^3+w^3\geq 3\left(\dfrac{u+v+w}{3}\right)^3=\dfrac{1}{9}(u+v+w)^3\ \ (3)$

តាមទំនាក់ទំនង $(1),(2)\,\&\,(3)$ គេបាន $36\geq\dfrac{S^3}{9}$

នាំឱ្យ $S \le 3\sqrt[3]{12}$

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមានៃ

$S = \sqrt[3]{a^2+2bc} + \sqrt[3]{b^2+2ca} + \sqrt[3]{c^2+2ab}$

ស្មើនឹង $S_{max} = 3\sqrt[3]{12}$ ដែលត្រូវនឹង $a = b = c = 2$ ។

លំហាត់ទី៤៦ (IMO 1968)

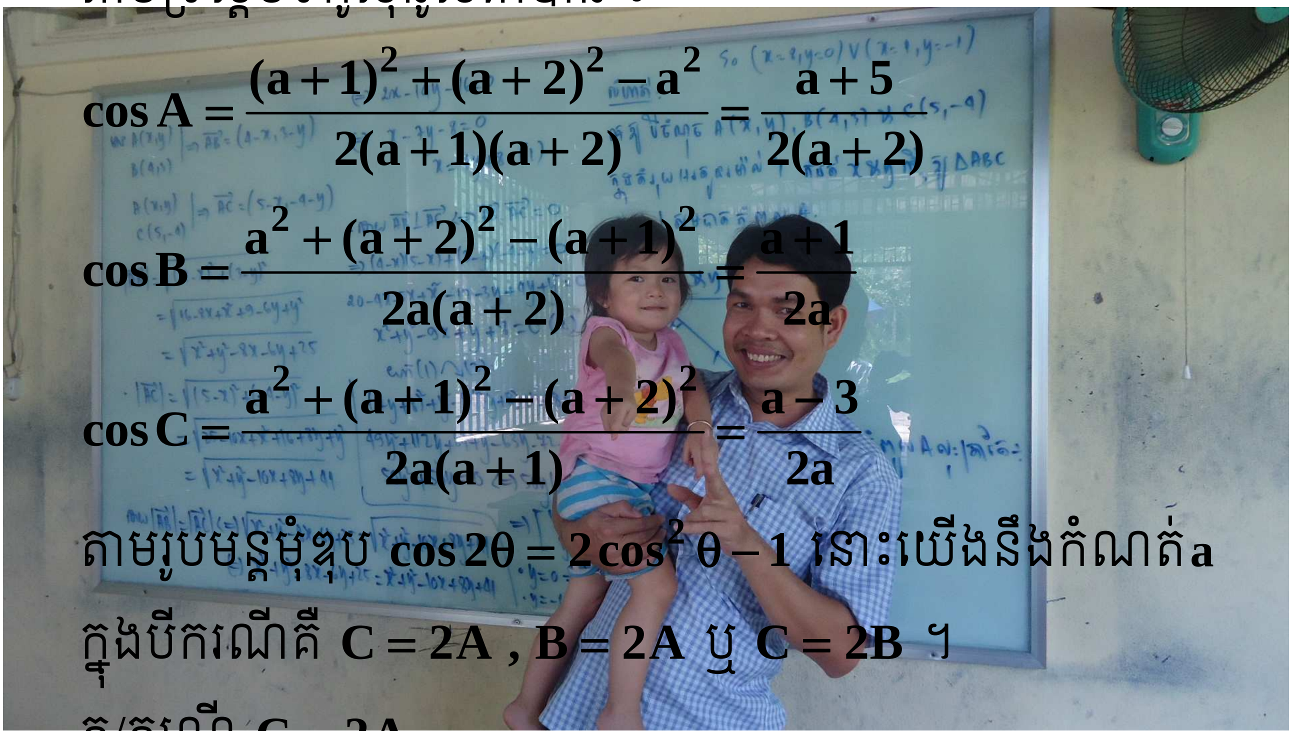
ចូរកំណត់គ្រប់ត្រីកោណដែលមានជ្រុងជាចំនួនគត់បន្តគ្នា

និង មុំមួយរបស់វាស្មើនឹងទ្វេដងនៃមុំផ្សេងទៀត ។

ដំណោះស្រាយ

តាង **ABC** ជាត្រីកោណដែលត្រូវកំណត់។ តាង$\mathbf{a,a+1,a+2}$ ជាជ្រុងឈមនៃមុំ **A,B,C** រៀងគ្នា ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេបាន ៖



$$\cos A=\frac{(a+1)^2+(a+2)^2-a^2}{2(a+1)(a+2)}=\frac{a+5}{2(a+2)}$$

$$\cos B=\frac{a^2+(a+2)^2-(a+1)^2}{2a(a+2)}=\frac{a+1}{2a}$$

$$\cos C=\frac{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}{2a(a+1)}=\frac{a-3}{2a}$$

តាមរូបមន្តមុំឌុប $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ នោះយើងនឹងកំណត់$\mathbf{a}$ ក្នុងបីករណីគឺ $C=2A$, $B=2A$ ឬ $C=2B$ ។

ក/ករណី $C=2A$

គេបាន $\cos C=\cos 2A=2\cos^2 A-1$

ឬ $\dfrac{a-3}{2a}=2\times\dfrac{(a+5)^2}{4(a+2)^2}-1$

ឬ $(a-3)(a+2)^2=a(a+5)^2-2a(a+2)^2$

បន្ទាប់ពីបង្រួមគេបាន $2a^3-a^2-25a-12=0$

ចំពោះ $a=4$ នោះ $2(4)^3-4^2-25(4)-12=0$ ពិត

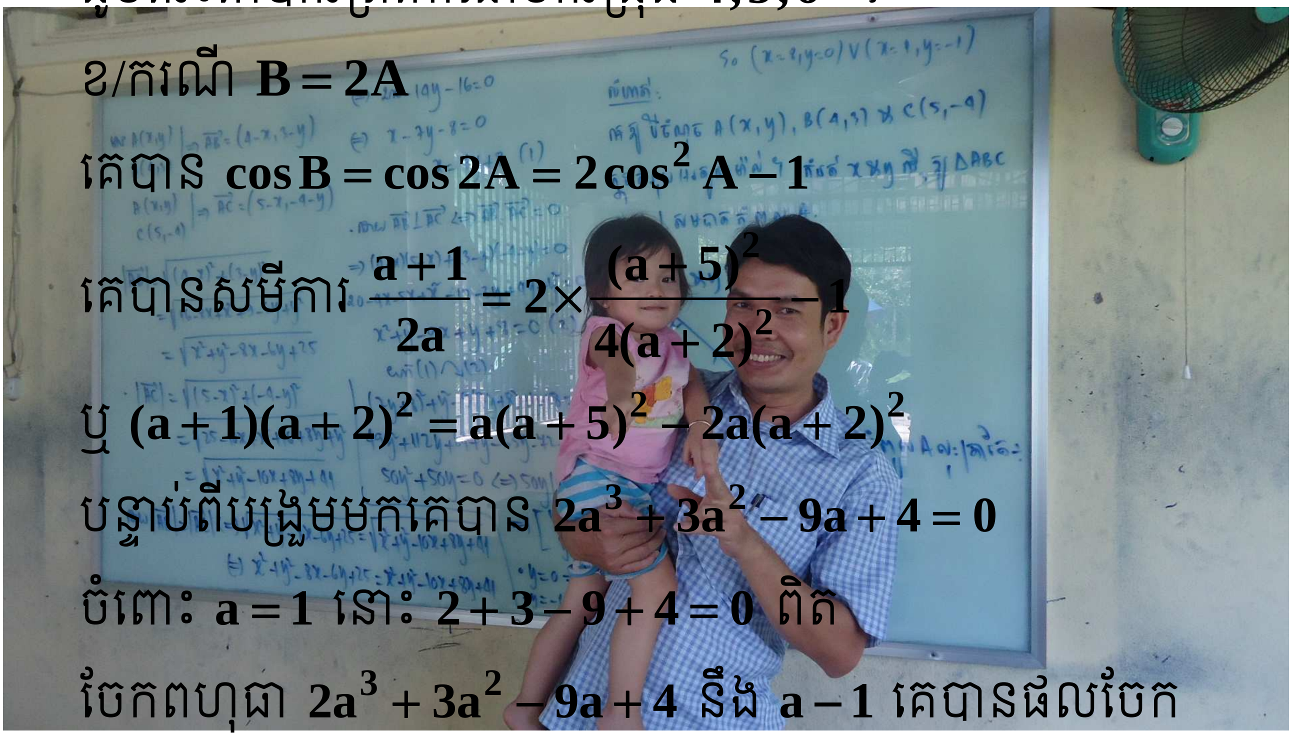
ចែកពហុធា $2a^3-a^2-25a-12$ នឹង $a-4$ គេបានផលចែក

$2a^2+7a+3=(2a+1)(a+3)$ ។

សមីការសមមូល $(a-4)(a+3)(2a+1)=0$ ដោយ $a>0$

គេទាញឬស $a=4$ ។

ដូចនេះគេបានត្រីកោណមានជ្រុង $4,5,6$ ។



ខ/ករណី $B=2A$

គេបាន $\cos B=\cos 2A=2\cos^2 A-1$

គេបានសមីការ $\dfrac{a+1}{2a}=2\times\dfrac{(a+5)^2}{4(a+2)^2}-1$

ឬ $(a+1)(a+2)^2=a(a+5)^2-2a(a+2)^2$

បន្ទាប់ពីបង្រួមមកគេបាន $2a^3+3a^2-9a+4=0$

ចំពោះ $a=1$ នោះ $2+3-9+4=0$ ពិត

ចែកពហុធា $2a^3+3a^2-9a+4$ នឹង $a-1$ គេបានផលចែក

$2a^2+5a-4$ ។

នោះសមីការសមមូល $(a-1)(2a^2+5a-4)=0$

ដោយ $a\in IN$ នោះគេទាញឬស $a=1$ ។

ដោយ $a,a+1,a+2$ ជាជ្រុងត្រីកោណនោះ $a+(a+1)>a+2$

ឬ $a>1$ ។ ដូចនេះករណី $B=2A$ មិនអាចមាន ។

ឃ/ករណី $C = 2B$ (មិនអាចមាន) សិស្សត្រូវដោះស្រាយ។

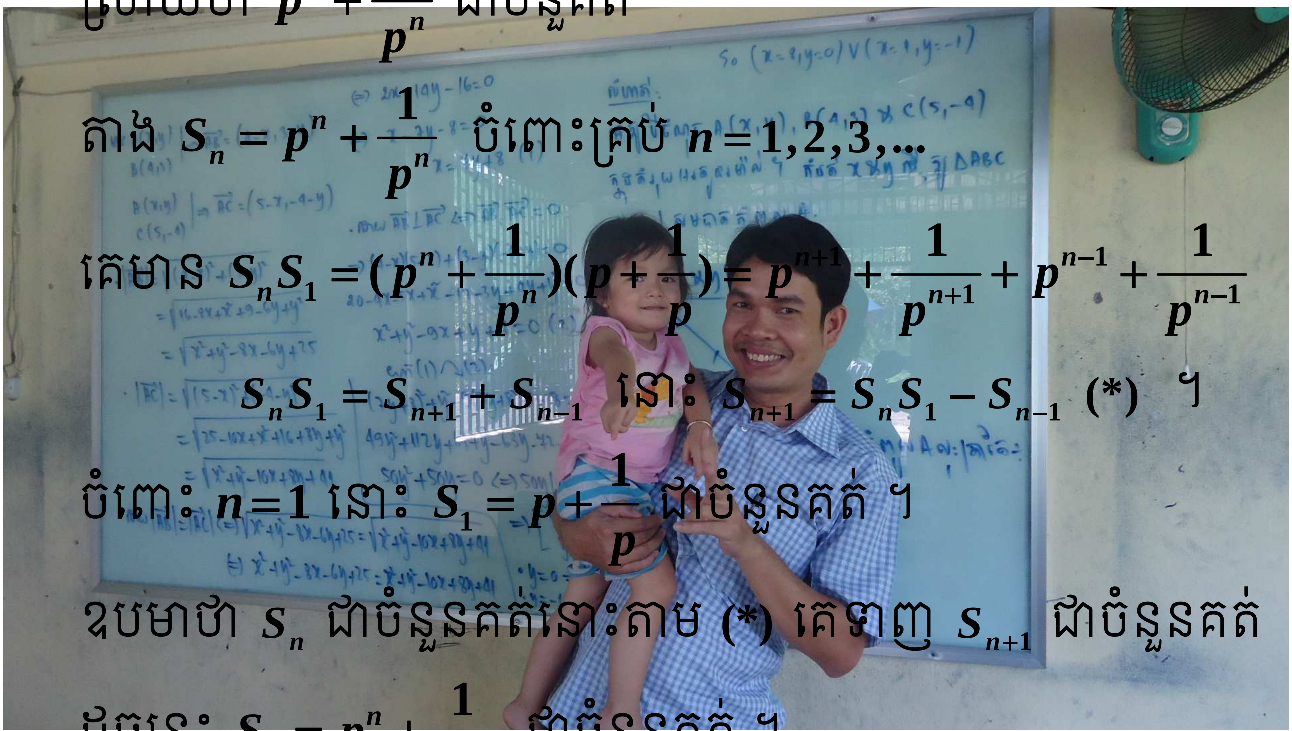
លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យ p ជាចំនួនពិតដែល $p+\frac{1}{p}$ ជាចំនួនគត់មួយ ។

ស្រាយថា $p^n+\frac{1}{p^n}$ ជាចំនួគត់ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $p^n+\frac{1}{p^n}$ ជាចំនួគត់



តាង $S_n=p^n+\frac{1}{p^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n=1,2,3,...$

គេមាន $S_nS_1=(p^n+\frac{1}{p^n})(p+\frac{1}{p})=p^{n+1}+\frac{1}{p^{n+1}}+p^{n-1}+\frac{1}{p^{n-1}}$

$S_nS_1=S_{n+1}+S_{n-1}$ នោះ $S_{n+1}=S_nS_1-S_{n-1}$ (*) ។

ចំពោះ $n=1$ នោះ $S_1=p+\frac{1}{p}$ ជាចំនួនគត់ ។

ឧបមាថា S_n ជាចំនួនគត់នោះតាម (*) គេទាញ S_{n+1} ជាចំនួនគត់

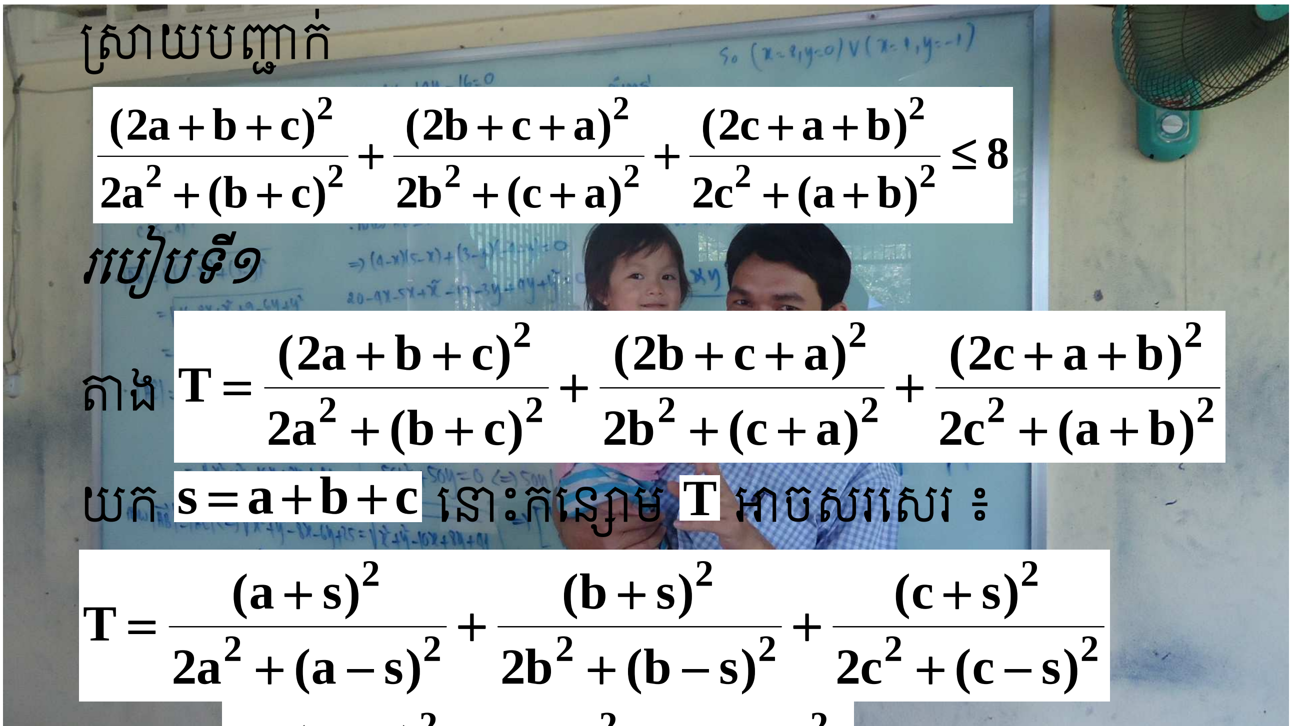
ដូចនេះ $S_n=p^n+\frac{1}{p^n}$ ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយបញ្ជាក់

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

របៀបទី១

តាង $T=\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

យក $s=a+b+c$ នោះកន្សោម T អាចសរសេរ ៖

$$T=\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}+\frac{(b+s)^2}{2b^2+(b-s)^2}+\frac{(c+s)^2}{2c^2+(c-s)^2}$$

គេមាន $\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}=\frac{a^2+2as+s^2}{3a^2-2as+s^2}$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3a^2+6as+3s^2}{3a^2-2as+s^2}$$

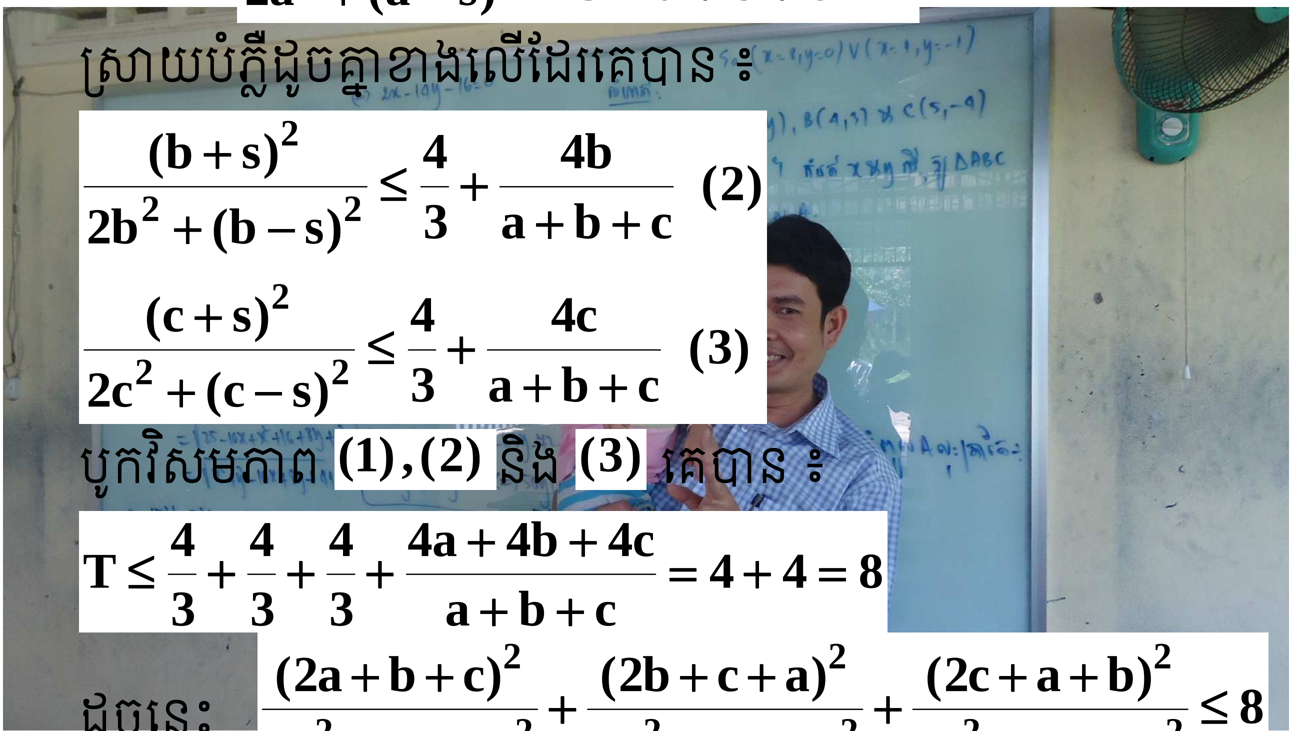
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8as+2s^2}{3a^2-2as+s^2}\right)$$

$$\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}=\frac{1}{3}+\frac{8as+2s^2}{9a^2-6as+3s^2}=\frac{1}{3}+\frac{8as+2s^2}{(3a-s)^2+2s^2}$$

ដោយ $(3a-s)^2\geq 0$ នោះ $(3a-s)^2+2s^2\geq 2s^2$

ឬ $\frac{8as+2s^2}{(3a-s)^2+2s^2}\leq\frac{8as+2s^2}{2s^2}=1+\frac{4a}{s}=1+\frac{4a}{a+b+c}$

គេទាញ $\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}\leq\frac{4}{3}+\frac{4a}{a+b+c}$ (1)



ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាខាងលើដែរគេបាន ៖

$$\frac{(b+s)^2}{2b^2+(b-s)^2}\leq\frac{4}{3}+\frac{4b}{a+b+c}\quad(2)$$

$$\frac{(c+s)^2}{2c^2+(c-s)^2}\leq\frac{4}{3}+\frac{4c}{a+b+c}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2)$ និង (3) គេបាន ៖

$$T\leq\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4a+4b+4c}{a+b+c}=4+4=8$$

ដូចនេះ $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$

របៀបទី២

តាង $T=\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

យក $x=a+b$, $y=b+c$, $z=c+a$

គេបាន $\begin{cases} x+z=2a+b+c \\ x+y=2b+c+a \\ z+y=2c+a+b \end{cases}$ និង $\begin{cases} 2a=x+z-y \\ 2b=x+y-z \\ 2c=z+y-x \end{cases}$

កន្សោម T អាចសរសេរជា ៖

$$T=\frac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2}+\frac{2(z+y)^2}{(z+y-x)^2+2x^2}+\frac{2(y+x)^2}{(y+x-z)^2+2z^2}$$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz ៖ $2(u^2+v^2)\ge(u+v)^2$

គេបាន $2(x+z-y)^2+2y^2\ge(x+z-y+y)^2=(x+z)^2$

$$2(x+z-y)^2+4y^2\ge(x+z)^2+2y^2$$

$$(x+z-y)^2+2y^2\ge\frac{1}{2}(x+z)^2+y^2$$

គេទាញ $\dfrac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2}\le\dfrac{2(x+z)^2}{\frac{1}{2}(x+z)^2+y^2}=\dfrac{4}{1+\dfrac{2y^2}{(x+z)^2}}$

ដោយ $(x+z)^2\le2(x^2+z^2)$ នាំឱ្យ $\dfrac{2y^2}{(x+z)^2}\ge\dfrac{y^2}{x^2+z^2}$

ឬ $1+\dfrac{2y^2}{(x+z)^2}\ge\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+z^2}$

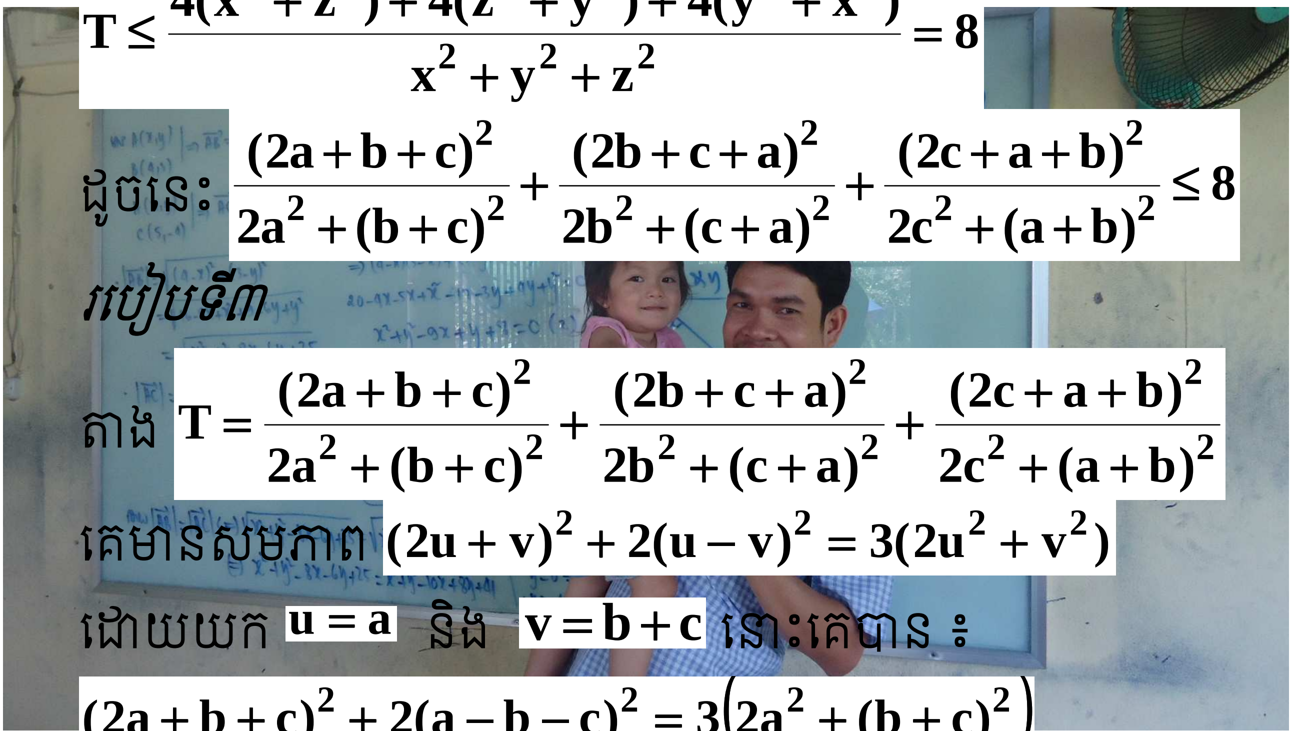
គេទាញបាន $\dfrac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2}\le\dfrac{4(x^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$ (1)

ស្រាយបំភ្លឺដូចខាងលើដែរគេបាន ៖

$$\frac{2(z+y)^2}{(z+y-x)^2+2x^2} \le \frac{4(z^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2} \quad (2)$$

$$\frac{2(y+x)^2}{(y+x-z)^2+2z^2} \le \frac{4(y^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2} \quad (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) គេបាន ៖



$$T \le \frac{4(x^2+z^2)+4(z^2+y^2)+4(y^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2} = 8$$

ដូចនេះ: $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$

របៀបទី៣

តាង $T = \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

គេមានសមភាព $(2u+v)^2+2(u-v)^2 = 3(2u^2+v^2)$

ដោយយក $u=a$ និង $v=b+c$ នោះគេបាន ៖

$$(2a+b+c)^2+2(a-b-c)^2 = 3\left(2a^2+(b+c)^2\right)$$

ឬ $(2a+b+c)^2 = 3\left(2a^2+(b+c)^2\right) - 2(a-b-c)^2$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $2a^2+(b+c)^2$ គេបាន ៖

យើងបាន $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = 3 - \frac{2(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}$

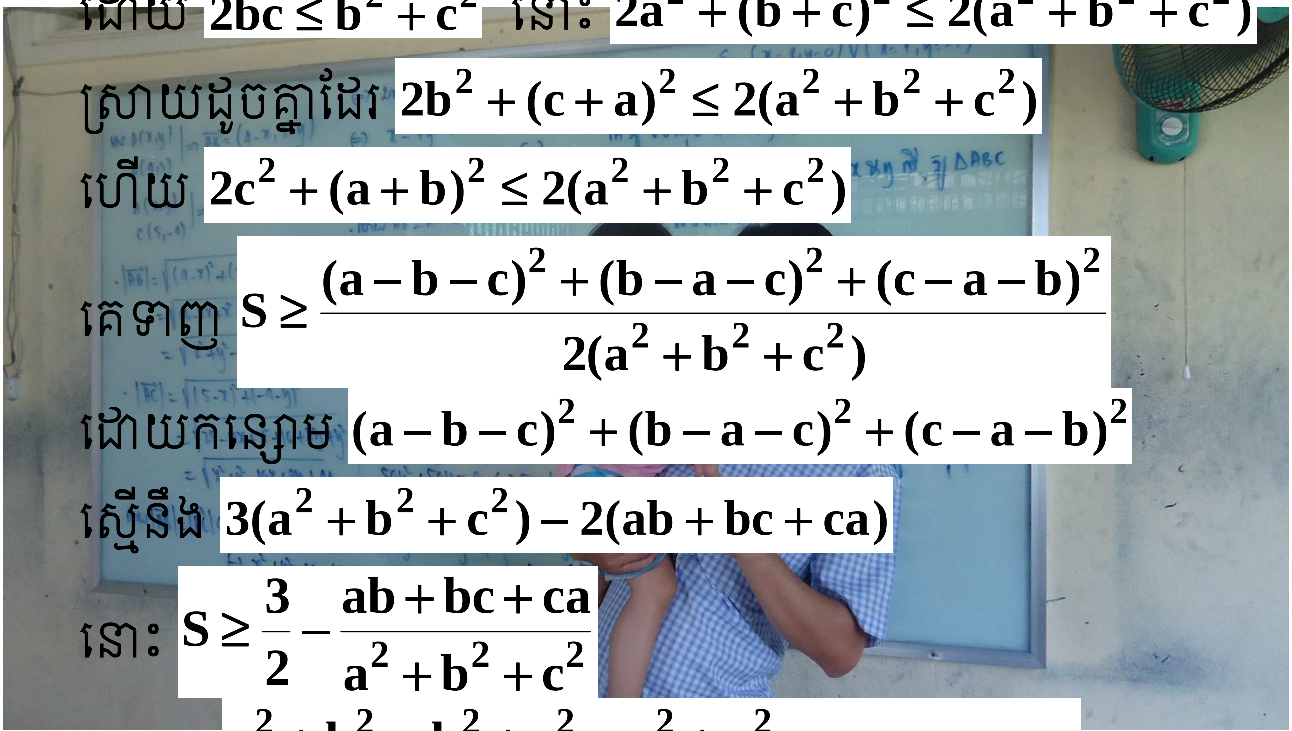
កន្សោម T អាចបំលែងជា ៖

$$T=9-2\left[\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-a-c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\right]$$

ដើម្បីស្រាយថា $T\le 8$ យើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា ៖

$$S=\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-a-c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{1}{2}$$

គេមាន $2a^2+(b+c)^2=2a^2+b^2+c^2+2bc$



ដោយ $2bc\le b^2+c^2$ នោះ $2a^2+(b+c)^2\le 2(a^2+b^2+c^2)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $2b^2+(c+a)^2\le 2(a^2+b^2+c^2)$

ហើយ $2c^2+(a+b)^2\le 2(a^2+b^2+c^2)$

គេទាញ $S\ge\dfrac{(a-b-c)^2+(b-a-c)^2+(c-a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$

ដោយកន្សោម $(a-b-c)^2+(b-a-c)^2+(c-a-b)^2$

ស្មើនឹង $3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

នោះ $S\ge\dfrac{3}{2}-\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

គេមាន $\dfrac{a^2+b^2}{2}+\dfrac{b^2+c^2}{2}+\dfrac{c^2+a^2}{2}\ge ab+bc+ca$

ឬ $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ នាំឱ្យ $S\ge\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$ ពិត ។

របៀបទី៤

ស្រាយថា

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

តាង $x=\dfrac{b+c}{a}$, $y=\dfrac{c+a}{b}$, $z=\dfrac{a+b}{c}$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1$$

វិសមភាពសមមូល $\dfrac{(2+x)^2}{2+x^2}+\dfrac{(2+y)^2}{2+y^2}+\dfrac{(2+z)^2}{2+z^2}\le 8$

យើងនឹងស្រាយថា $\dfrac{(2+u)^2}{2+u^2}-\dfrac{8}{3}\le\dfrac{1}{1+u}-\dfrac{1}{3}$ គ្រប់ $u>0$

គេមាន $\dfrac{(2+u)^2}{2+u^2}-\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{(u+5)(u-2)^2}{3(2+u^2)(1+u)}\le 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\dfrac{(2+u)^2}{2+u^2}\le\dfrac{1}{1+u}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{8}{3}$ (*)

តាម (*) គេបាន ៖

$$\frac{(2+x)^2}{2+x^2}+\frac{(2+y)^2}{2+y^2}+\frac{(2+z)^2}{2+z^2}\le\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}-1+8$$

ដូចនេះ

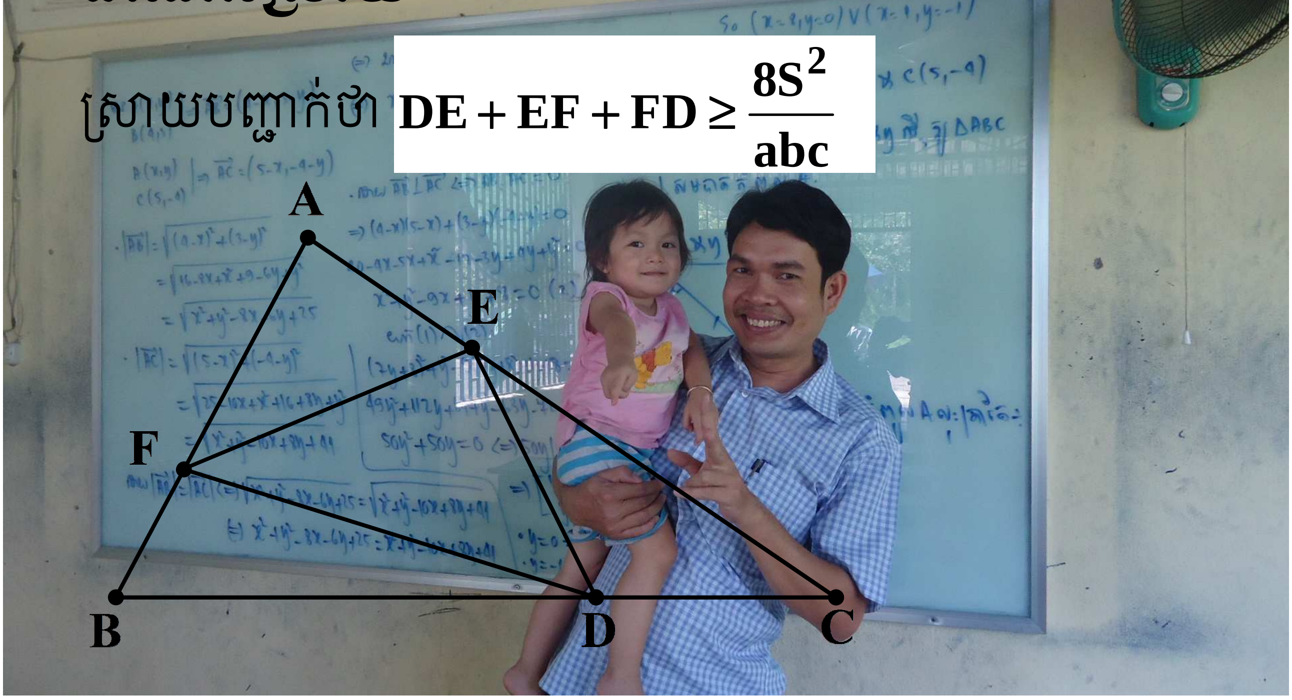
$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c និងមានផ្ទៃក្រឡា S ។ឧបមាថា DEF ជាត្រីកោណចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $DE+EF+FD\geq\dfrac{8S^2}{abc}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $DE+EF+FD\geq\dfrac{8S^2}{abc}$



តាង $BD=x$, $CE=y$, $AF=z$ នោះ $\begin{cases}0<x<a\\0<y<b\\0<z<c\end{cases}$

គេបាន $DC=a-x$, $AE=b-y$, $BF=c-z$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ BDF គេបាន ៖

$$DF^2=x^2+(c-z)^2-2x(c-z)\cos B$$

ដោយ $\cos B=\cos(\pi-(A+C))=-\cos(A+C)$

នោះ $DF^2=x^2+(c-z)^2+2x(c-z)\cos(A+C)$

$$=[x\cos A+(c-z)\cos C]^2+[x\sin A-(c-z)\sin C]^2$$

គេទាញបាន $DF\geq|x\cos A+(c-z)\cos C|$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $DE=|y\cos B+(a-x)\cos A|$

និង $EF=|z\cos C+(b-y)\cos B|$ ។

ដោយប្រើវិសមភាពត្រីកោណគេបាន ៖

$$DE+EF+FD\geq|a\cos A+b\cos B+c\cos C|\quad(1)$$

តាង $T=a\cos A+b\cos B+c\cos C$

$$=R\sin 2A+R\sin 2B+R\sin 2C$$

$$=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

$$=4R\sin A\sin B\sin C$$

$$=4R.\frac{abc}{8R^3}=\frac{abc}{2R^2}=\frac{abc}{2(\frac{abc}{4S})^2}=\frac{8S^2}{abc}$$

ដូចនេះ $DE+EF+FD\geq\dfrac{8S^2}{abc}$ ។

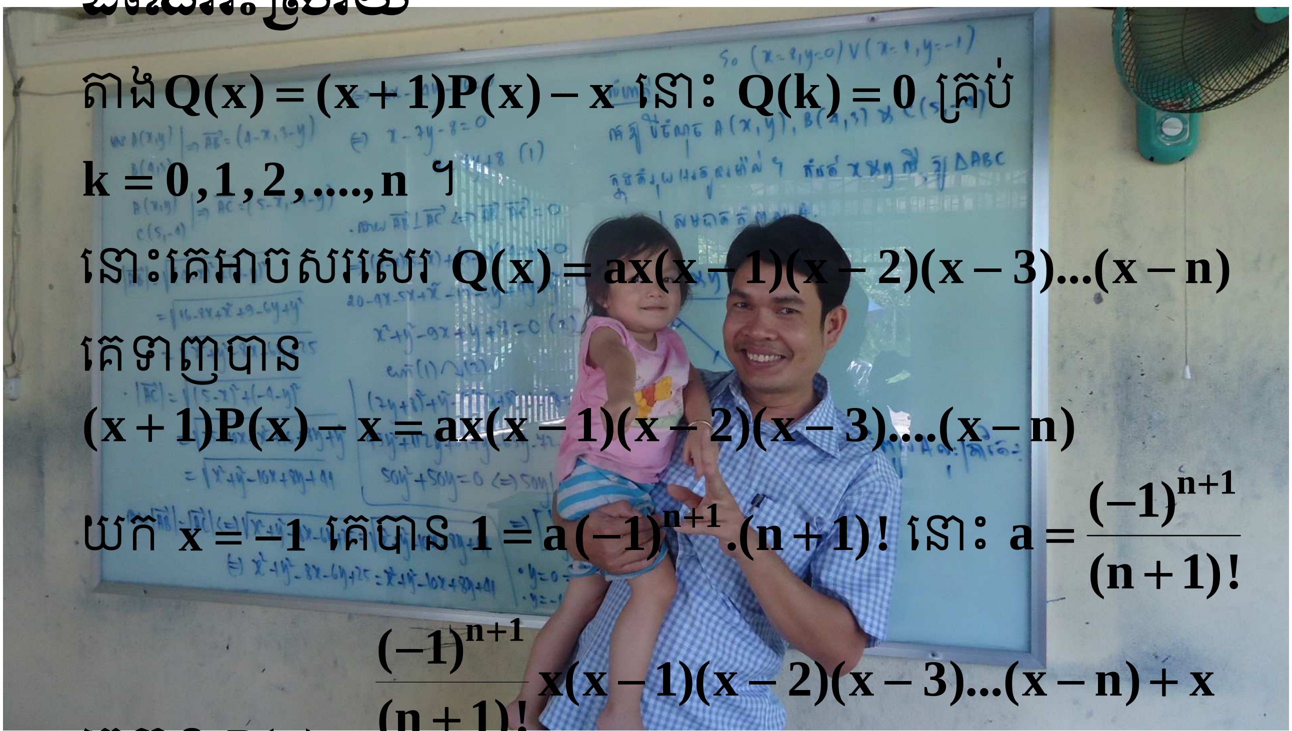
លំហាត់ទី៥០

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ។

គេដឹងថា $P(k)=\dfrac{k}{k+1}$ ចំពោះ $k=0,1,2,....,n$ ។

ចូរកំណត់ $P(n+1)$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង $Q(x)=(x+1)P(x)-x$ នោះ $Q(k)=0$ គ្រប់ $k=0,1,2,....,n$ ។

នោះគេអាចសរសេរ $Q(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)...(x-n)$

គេទាញបាន

$$(x+1)P(x)-x=ax(x-1)(x-2)(x-3)....(x-n)$$

យក $x=-1$ គេបាន $1=a(-1)^{n+1}.(n+1)!$ នោះ $a=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

គេបាន $P(x)=\dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-n)+x}{x+1}$

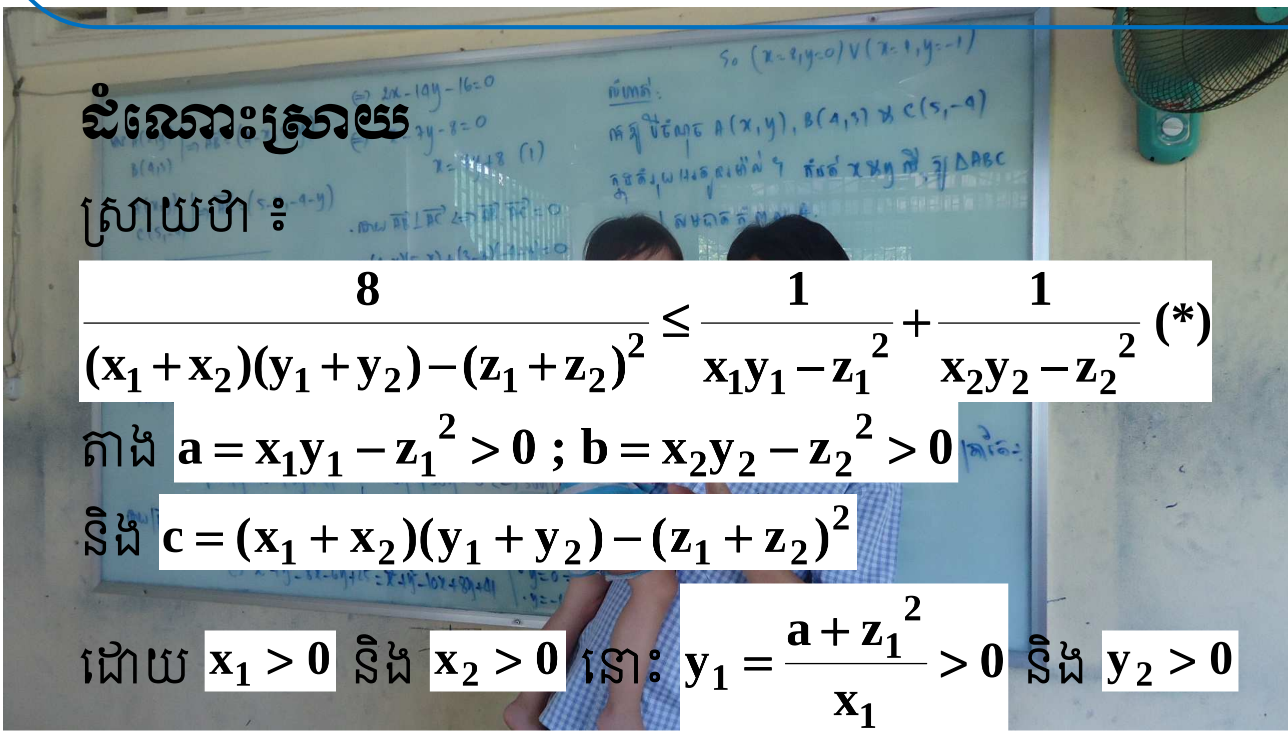
ដូចនេះ $P(n+1)=\begin{cases} 1 & \text{បើ } n \text{ គូ} \\ \dfrac{n}{n+2} & \text{បើ } n \text{ សេស} \end{cases}$

លំហាត់ទី៩១ (IMO 1969)

គេឱ្យចំនួនពិត $x_1 , x_2 , y_1 , y_2 , z_1 , z_2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 > 0 , x_2 > 0$
$x_1y_1 - z_1^2 > 0$ និង $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ ។

ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \le \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ៖

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \le \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \quad (*)$$

តាង $a = x_1y_1 - z_1^2 > 0 \; ; b = x_2y_2 - z_2^2 > 0$

និង $c = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2$

ដោយ $x_1 > 0$ និង $x_2 > 0$ នោះ $y_1 = \dfrac{a + z_1^2}{x_1} > 0$ និង $y_2 > 0$

$$c = (x_1y_1 - z_1^2) + (x_2y_2 - z_2^2) + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2$$
$$c = a + b + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2$$

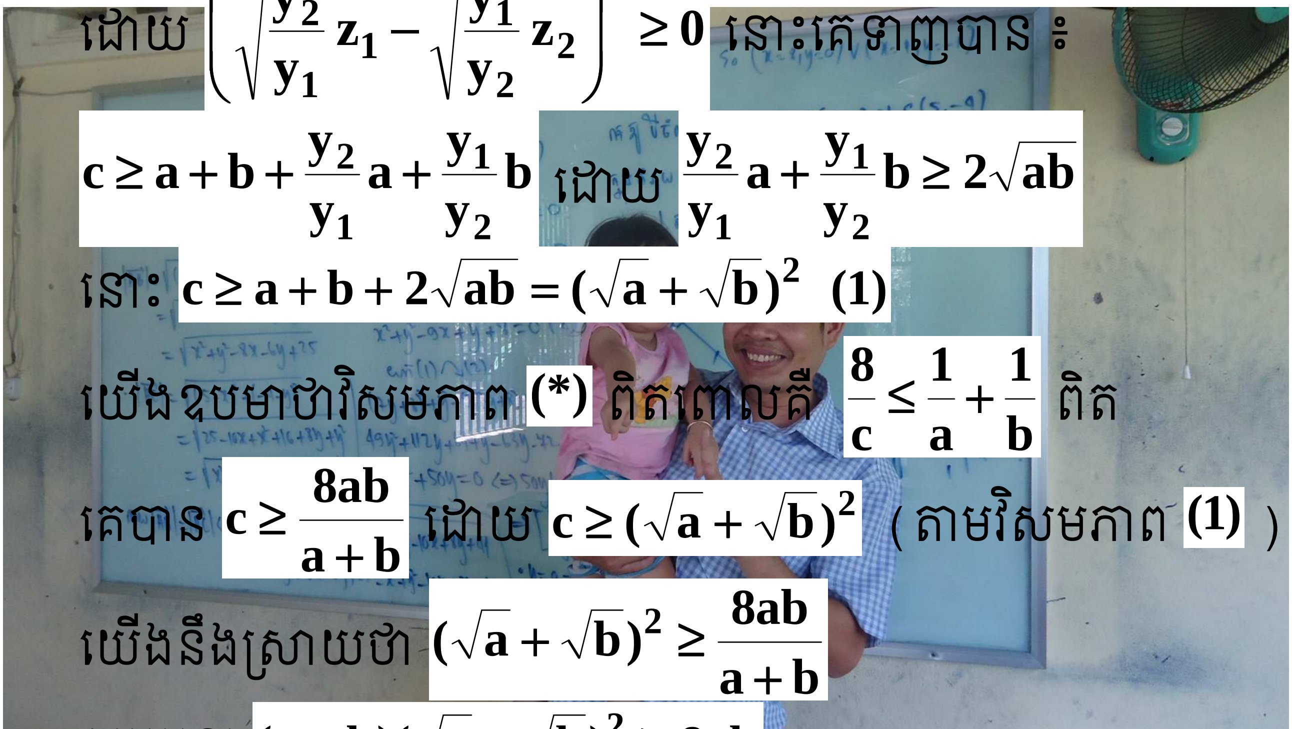
ដោយ $a = x_1y_1 - z_1^2$ នោះ $x_1 = \dfrac{a + z_1^2}{y_1}$

និង $b = x_2y_2 - z_2^2$ នោះ $x_2 = \dfrac{b + z_2^2}{y_2}$

គេបាន $c = a + b + y_2(\frac{a + z_1{}^2}{y_1}) + y_1(\frac{b + z_2{}^2}{y_2}) - 2z_1z_2$

$$= a + b + \frac{y_2}{y_1}a + \frac{y_1}{y_2}b + \frac{y_2}{y_1}z_1{}^2 - 2z_1z_2 + \frac{y_1}{y_2}z_2{}^2$$

$$= a + b + \frac{y_2}{y_1}a + \frac{y_1}{y_2}b + \left(\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}\, z_1 - \sqrt{\frac{y_1}{y_2}}\, z_2\right)^2$$



ដោយ $\left(\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}\, z_1 - \sqrt{\frac{y_1}{y_2}}\, z_2\right)^2 \geq 0$ នោះគេទាញបាន ៖

$c \geq a + b + \frac{y_2}{y_1}a + \frac{y_1}{y_2}b$ ដោយ $\frac{y_2}{y_1}a + \frac{y_1}{y_2}b \geq 2\sqrt{ab}$

នោះ $c \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \quad (1)$

យើងឧបមាថាវិសមភាព (*) ពិតពោលគឺ $\frac{8}{c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ពិត

គេបាន $c \geq \frac{8ab}{a+b}$ ដោយ $c \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (តាមវិសមភាព (1))

យើងនឹងស្រាយថា $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq \frac{8ab}{a+b}$

សមមូល $(a+b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 8ab$

ដោយ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ហើយ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab}$

នោះ $(a+b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 8ab$ ពិត។

វិសមភាពនេះក្លាយសមភាពលុះត្រាតែ ៖

$z_1\sqrt{\frac{y_2}{y_1}} = z_2\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}$ ឬ $z_1y_2 = z_2y_1$ និង $\frac{y_2}{y_1}a = \frac{y_1}{y_2}b$ ។

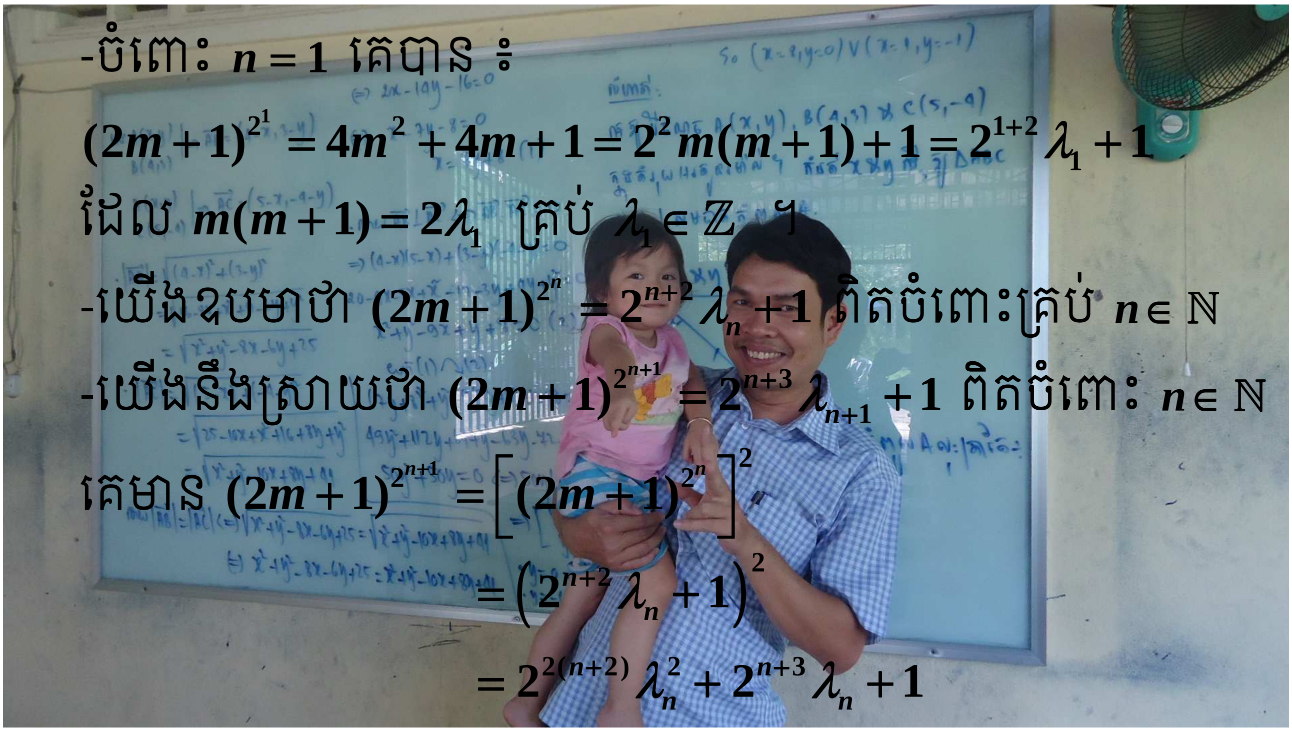
លំហាត់ទី៥២

ចូរបង្ហាញថា $(2m+1)^{2^n}=2^{n+2}\lambda_n+1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដែល $m,\lambda_n\in\mathbb{Z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(2m+1)^{2^n}=2^{n+2}\lambda_n+1$



-ចំពោះ $n=1$ គេបាន ៖

$(2m+1)^{2^1}=4m^2+4m+1=2^2m(m+1)+1=2^{1+2}\lambda_1+1$

ដែល $m(m+1)=2\lambda_1$ គ្រប់ $\lambda_1\in\mathbb{Z}$ ។

-យើងឧបមាថា $(2m+1)^{2^n}=2^{n+2}\lambda_n+1$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

-យើងនឹងស្រាយថា $(2m+1)^{2^{n+1}}=2^{n+3}\lambda_{n+1}+1$ ពិតចំពោះ $n\in\mathbb{N}$

គេមាន
$$\begin{aligned}(2m+1)^{2^{n+1}}&=\left[(2m+1)^{2^n}\right]^2\\&=\left(2^{n+2}\lambda_n+1\right)^2\\&=2^{2(n+2)}\lambda_n^2+2^{n+3}\lambda_n+1\\&=2^{n+3}(2^{n+1}\lambda_n^2+\lambda_n)+1\\&=2^{n+3}\lambda_{n+1}+1\end{aligned}$$

ដែល $\lambda_{n+1}=2^{n+1}\lambda_n^2+\lambda_n\in\mathbb{N}$ ។

ដូចនេះ $(2m+1)^{2^n}=2^{n+2}\lambda_n+1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ដែល $m,\lambda_n\in\mathbb{Z}$ ។

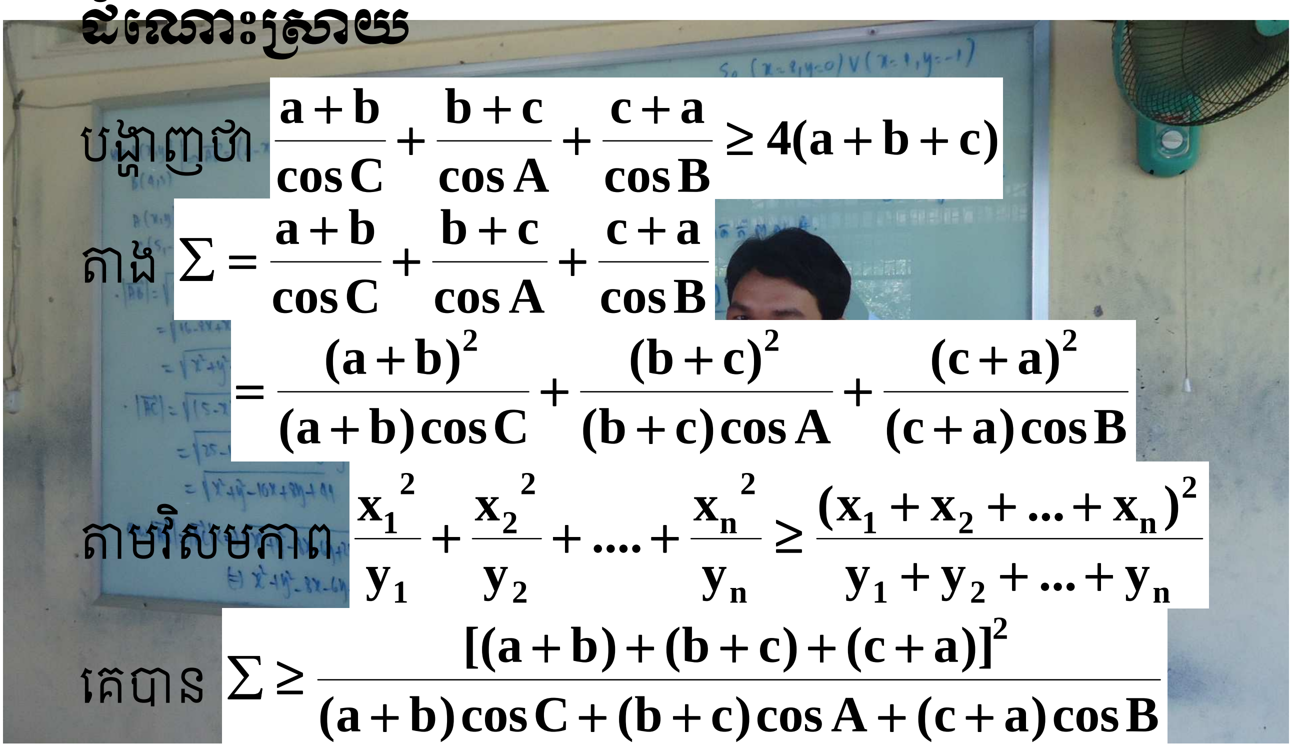
លំហាត់ទី៥៣

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$

ហើយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a+b}{\cos C}+\frac{b+c}{\cos A}+\frac{c+a}{\cos B}\geq 4(a+b+c)$

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $\frac{a+b}{\cos C}+\frac{b+c}{\cos A}+\frac{c+a}{\cos B}\geq 4(a+b+c)$

តាង $\Sigma=\frac{a+b}{\cos C}+\frac{b+c}{\cos A}+\frac{c+a}{\cos B}$

$$=\frac{(a+b)^2}{(a+b)\cos C}+\frac{(b+c)^2}{(b+c)\cos A}+\frac{(c+a)^2}{(c+a)\cos B}$$

តាមវិសមភាព $\frac{{x_1}^2}{y_1}+\frac{{x_2}^2}{y_2}+....+\frac{{x_n}^2}{y_n}\geq\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{y_1+y_2+...+y_n}$

គេបាន $\Sigma\geq\frac{[(a+b)+(b+c)+(c+a)]^2}{(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B}$

$$\Sigma\geq\frac{4(a+b+c)^2}{(b\cos C+c\cos B)+(c\cos A+a\cos C)+(a\cos B+b\cos A)}$$

$$\Sigma\geq\frac{4(a+b+c)^2}{a+b+c}=4(a+b+c)$$

ដូចនេះ: $\frac{a+b}{\cos C}+\frac{b+c}{\cos A}+\frac{c+a}{\cos B}\geq 4(a+b+c)$ ។

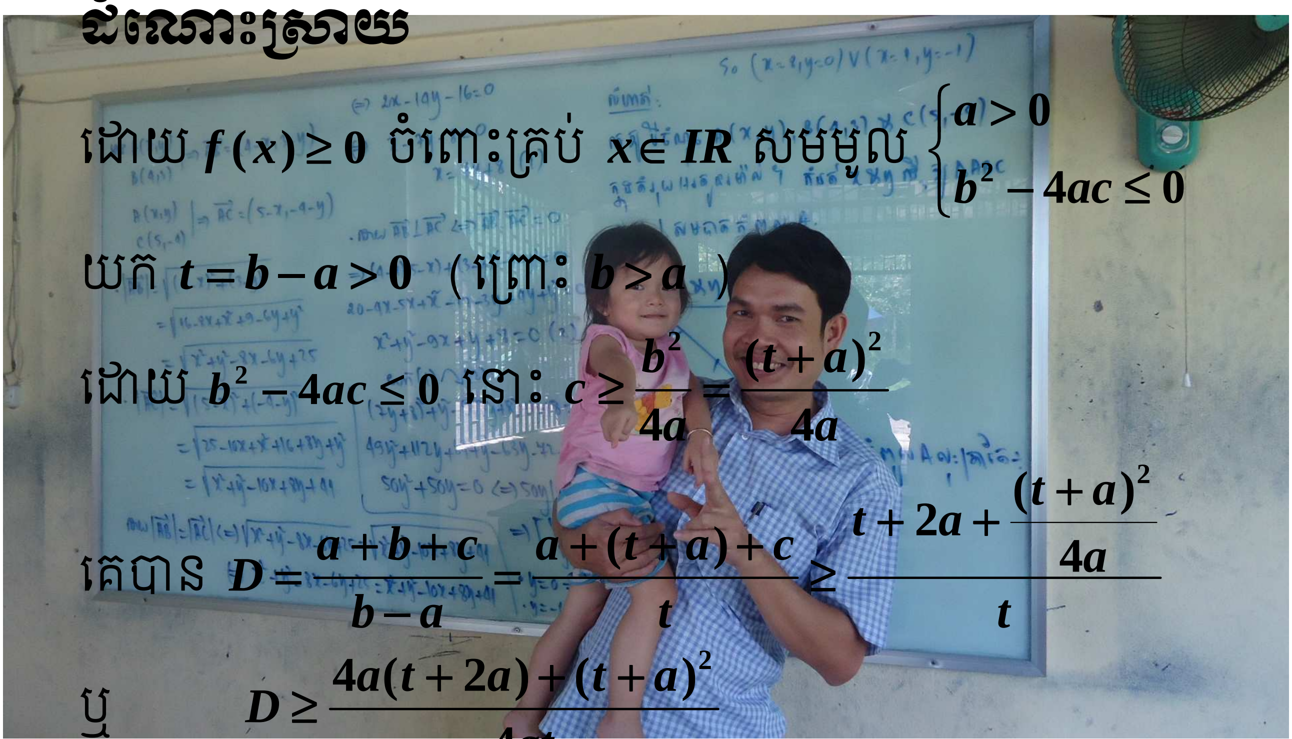
លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a<b$ និង $a,b,c\in IR$

បើ $f(x)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ នោះចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ

$D=\dfrac{a+b+c}{b-a}$ ។

ដំណោះស្រាយ



ដោយ $f(x)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ សមមូល $\begin{cases} a>0 \\ b^2-4ac\leq 0 \end{cases}$

យក $t=b-a>0$ (ព្រោះ $b>a$)

ដោយ $b^2-4ac\leq 0$ នោះ $c\geq \dfrac{b^2}{4a}=\dfrac{(t+a)^2}{4a}$

គេបាន $D=\dfrac{a+b+c}{b-a}=\dfrac{a+(t+a)+c}{t}\geq \dfrac{t+2a+\dfrac{(t+a)^2}{4a}}{t}$

ឬ $D\geq \dfrac{4a(t+2a)+(t+a)^2}{4at}$

តាង $f(t)=\dfrac{4a(t+2a)+(t+a)^2}{4at}=\dfrac{t^2+6at+9a^2}{4at}$

$=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{t}{a}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{a}{t}$

គេបាន $f(t)\geq \dfrac{3}{2}+2\sqrt{\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{t}{a}\cdot\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{a}{t}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}=3$

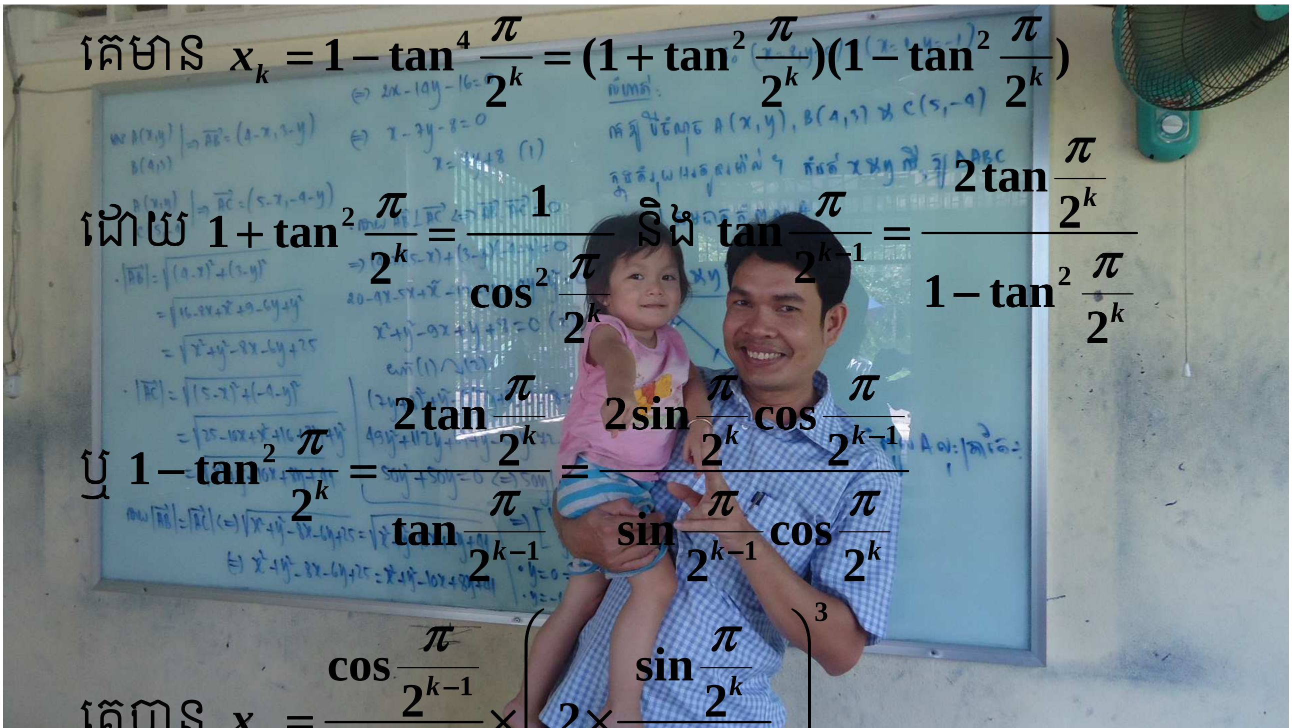
គេទាញបាន $D\geq 3$ នោះតម្លៃអប្បបរមានៃ D គឺ $D_{\min}=3$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គេឲ្យ $P_n=\prod_{k=3}^{n}\left[1-\tan^4\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\right]$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$?

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$



គេមាន $x_k=1-\tan^4\frac{\pi}{2^k}=(1+\tan^2\frac{\pi}{2^k})(1-\tan^2\frac{\pi}{2^k})$

ដោយ $1+\tan^2\frac{\pi}{2^k}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2^k}}$ និង $\tan\frac{\pi}{2^{k-1}}=\frac{2\tan\frac{\pi}{2^k}}{1-\tan^2\frac{\pi}{2^k}}$

ឬ $1-\tan^2\frac{\pi}{2^k}=\frac{2\tan\frac{\pi}{2^k}}{\tan\frac{\pi}{2^{k-1}}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2^k}\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}\cos\frac{\pi}{2^k}}$

គេបាន $x_k=\frac{\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}}{\cos\frac{\pi}{2^k}}\times\left(2\times\frac{\sin\frac{\pi}{2^k}}{\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}}\right)^3$

គេទាញ $P_n=\prod_{k=3}^{n}(x_k)=\prod_{k=3}^{n}\frac{\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}}{\cos\frac{\pi}{2^k}}\times\prod_{k=3}^{n}\left(2\times\frac{\sin\frac{\pi}{2^k}}{\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}}\right)^3$

$$P_n = \frac{\cos\frac{\pi}{2^2}}{\cos\frac{\pi}{2^n}} \times 2^{3(n-3)} . \frac{\sin^3\frac{\pi}{2^n}}{\sin^3\frac{\pi}{2^2}} = \frac{1}{2^8} \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^n}} \times \left(2^n \sin\frac{\pi}{2^n}\right)^3$$

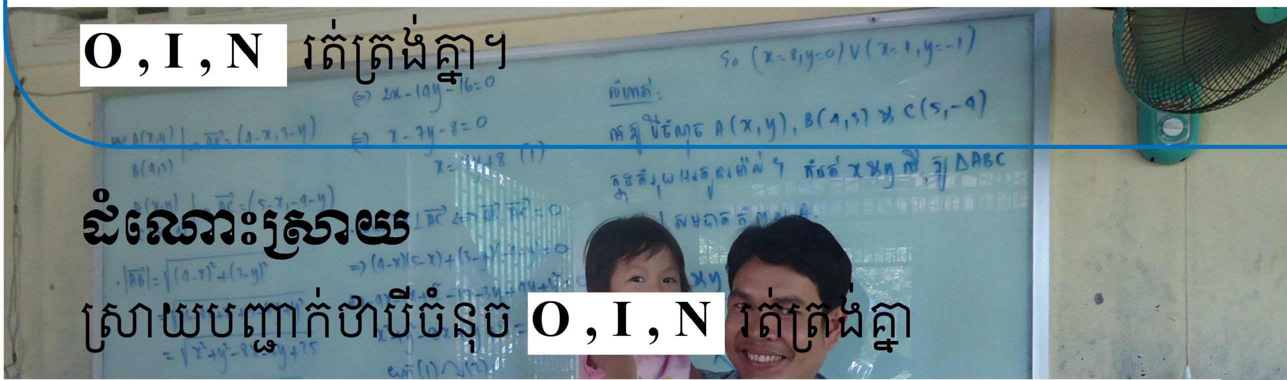
គេមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{\cos 0} = 1$

និង $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = \lim\limits_{x\to 0}(\pi . \frac{\sin x}{x}) = \pi$ ដែល $x = \frac{\pi}{2^n}$ ។

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{2^8} \times \pi^3 = \frac{\pi^3}{2^8}$ ។

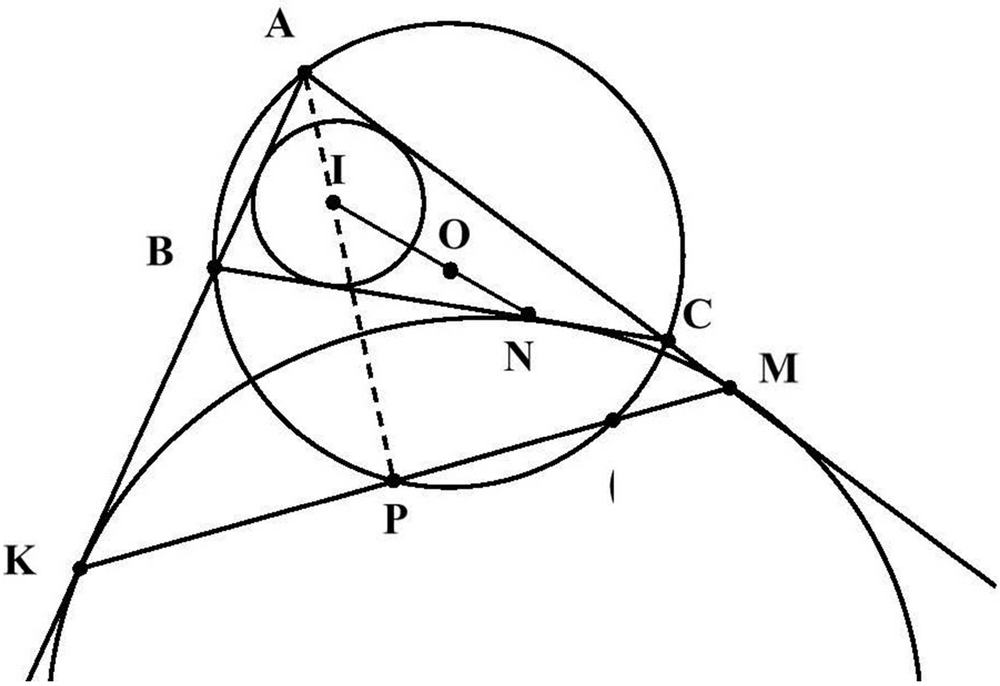
លំហាត់ទី៥៦

គេយក I និង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងចារឹកក្រៅនៃ ΔABC រង្វង់ ω_A ចារឹកក្នុងមុំ A វាប៉ះទៅនឹង AB , AC និង BC រៀងគ្នាត្រង់ចំនុច K,M និង N រៀងគ្នា ។
បើសិនជាចំនុចកណ្តាល P នៃអង្កត់ KM ស្ថិតនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC នោះចូរបង្ហាញថាបីចំនុច O , I , N រត់ត្រង់គ្នា។



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាបីចំនុច O , I , N រត់ត្រង់គ្នា

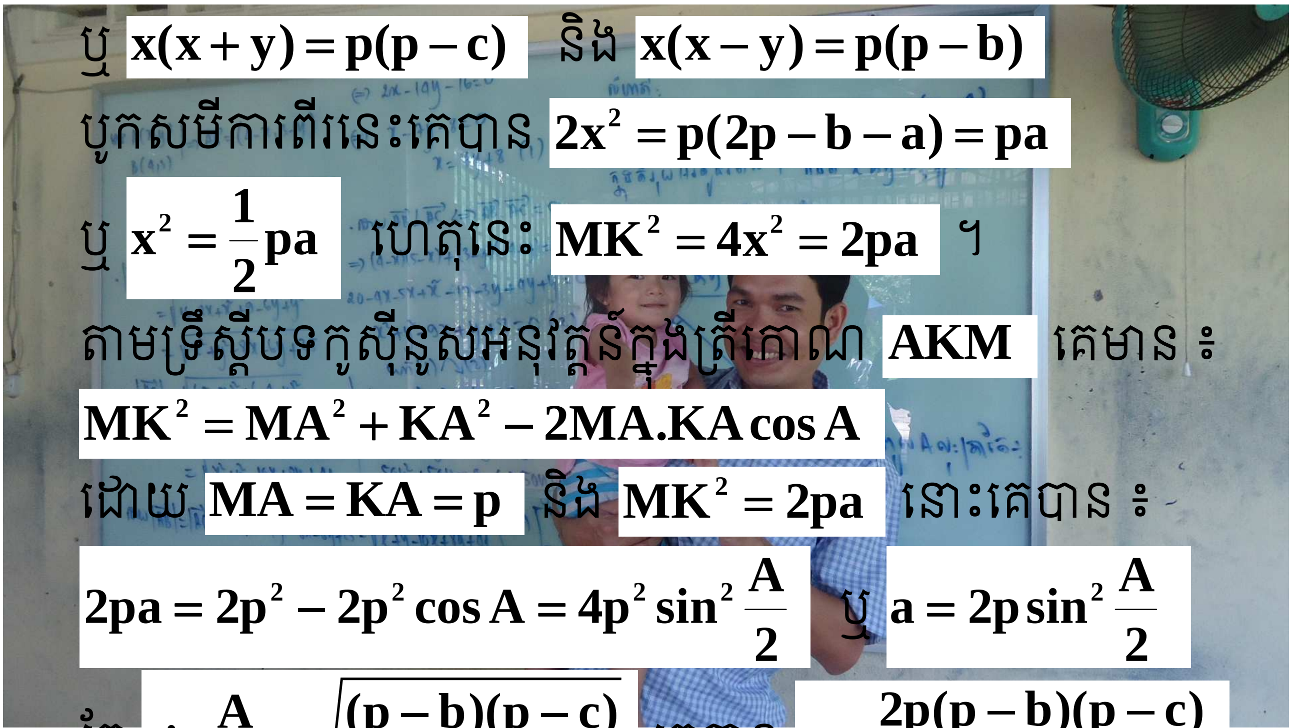


យក Q ជាចំនុចប្រសព្វទីពីររវាងបន្ទាត់ PM ជាមួយរង្វង់ (ABC) តាង $KP = PM = x$ និង $PQ = y$ ។

យើងមាន $KB = p - c$ និង $MC = p - b$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស្វ័យគុណនៃចំនុច K និង M ធៀបនឹងរង្វង់ (ABC) គេមាន $KP.KQ = KA.KB$

និង $MP.MQ = MC.MA$



ឬ $x(x+y) = p(p-c)$ និង $x(x-y) = p(p-b)$

បូកសមីការពីរនេះគេបាន $2x^2 = p(2p-b-a) = pa$

ឬ $x^2 = \frac{1}{2}pa$ ហេតុនេះ $MK^2 = 4x^2 = 2pa$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ AKM គេមាន ៖

$MK^2 = MA^2 + KA^2 - 2MA.KA\cos A$

ដោយ $MA = KA = p$ និង $MK^2 = 2pa$ នោះគេបាន ៖

$2pa = 2p^2 - 2p^2\cos A = 4p^2\sin^2\frac{A}{2}$ ឬ $a = 2p\sin^2\frac{A}{2}$

តែ $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ គេបាន $a = \frac{2p(p-b)(p-c)}{bc}$

ឬ $abc = 2p(p-b)(p-c)$ (1)

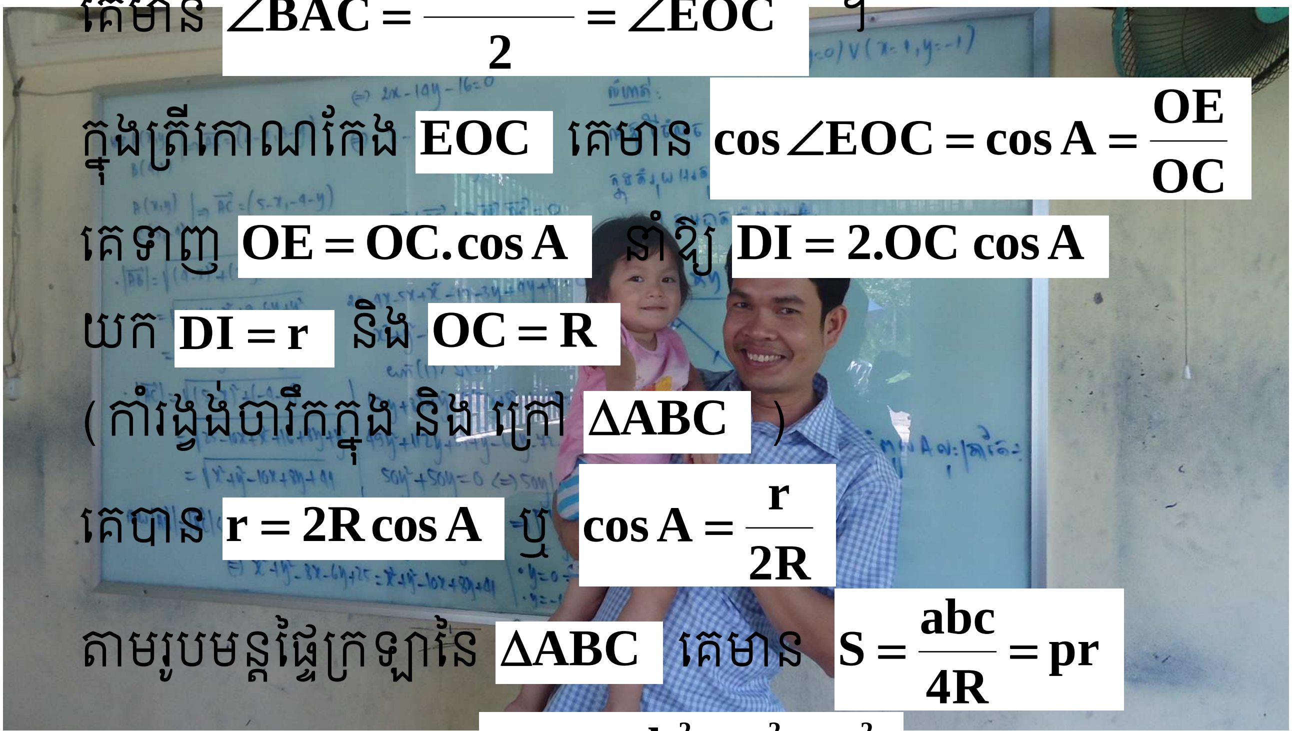
យក D ជាចំណោលកែងនៃ I លើ BC ហើយសន្មតថា N' ជាប្រសព្វរវាង (OI) ជាមួយ $[BC]$ និង តាង E ជាចំនុចកណ្តាលនៃ BC ។

ឧបមាថា $N' = N$ នោះគេបាន $N'C = NC = p - b$

ដោយ $BD = p - b$ នោះគេបាន $ED = EN'$ ឬ E ជាចំនុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ $[DN']$ ។

ត្រីកោណកែង $N'DI$ និងត្រីកោណកែង $N'EO$ មានមុំ $\angle DN'I$ រួមវាជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

ហេតុនេះគេបាន $\frac{DI}{EO} = \frac{DN'}{EN'} = \frac{2DE}{EN'} = 2$ ឬ $DI = 2.EO$



គេមាន $\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2} = \angle EOC$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង EOC គេមាន $\cos\angle EOC = \cos A = \frac{OE}{OC}$

គេទាញ $OE = OC.\cos A$ នាំឱ្យ $DI = 2.OC\cos A$

យក $DI = r$ និង $OC = R$

(កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ក្រៅ ΔABC)

គេបាន $r = 2R\cos A$ ឬ $\cos A = \frac{r}{2R}$

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC គេមាន $S = \frac{abc}{4R} = pr$

និងទ្រឹស្ដីបទកូស៊ីនូស $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

គេបាន $$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{S}{p}}{\frac{abc}{2S}} = \frac{2S^2}{abcp}$$

ឬ $4S^2 = ap(b^2 + c^2 - a^2)$ តែ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេបាន $4p(p-a)(p-b)(p-c)=ap(b^2+c^2-a^2)$

ឬ $4(p-a)(p-b)(p-c)=a(b^2+c^2-a^2)$

ដោយ $b^2+c^2-a^2=(b-c)^2-a^2+2bc$

$$=2bc+(b-c+a)(b-c-a)$$

$$=2bc-4(p-b)(p-c)$$

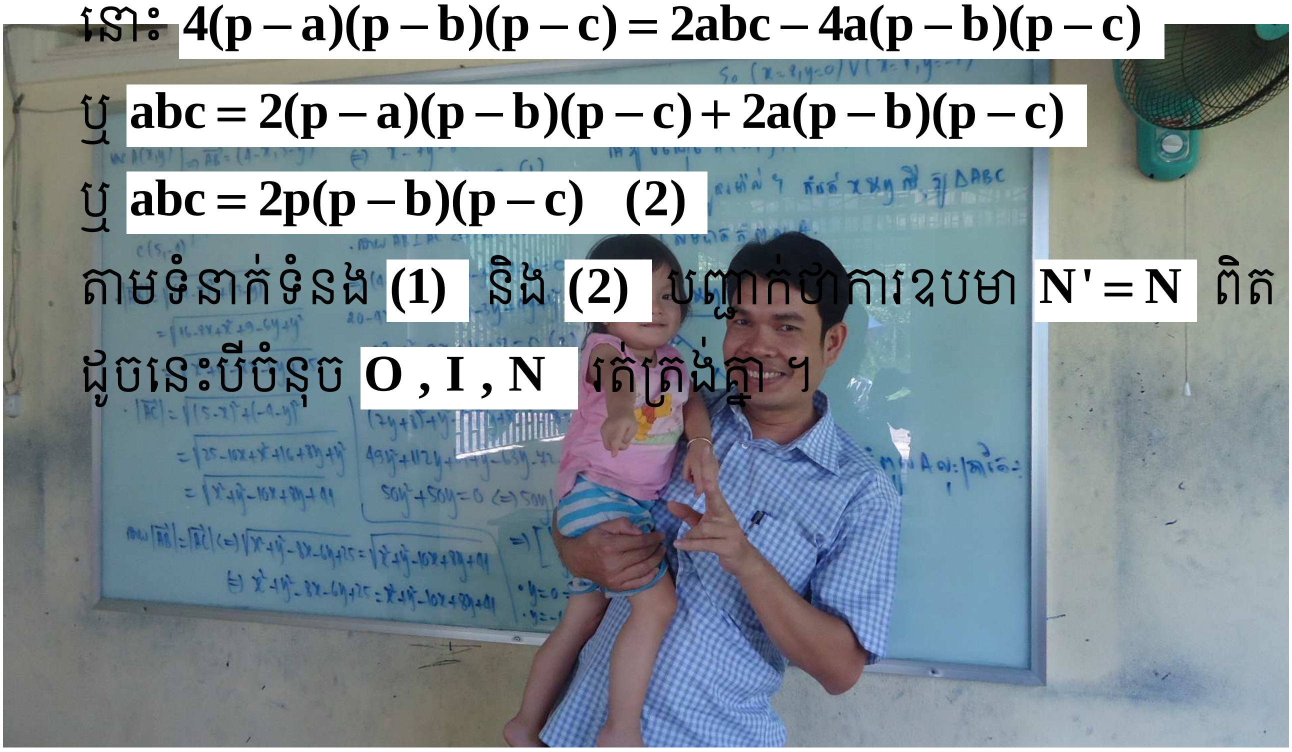
នោះ $4(p-a)(p-b)(p-c)=2abc-4a(p-b)(p-c)$

ឬ $abc=2(p-a)(p-b)(p-c)+2a(p-b)(p-c)$

ឬ $abc=2p(p-b)(p-c) \quad (2)$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) បញ្ជាក់ថាការឧបមា $N'=N$ ពិត

ដូចនេះបីចំនុច $O\ ,\ I\ ,\ N$ រត់ត្រង់គ្នា ។



លំហាត់ទី៥៧

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c,d គេឲ្យ ៖

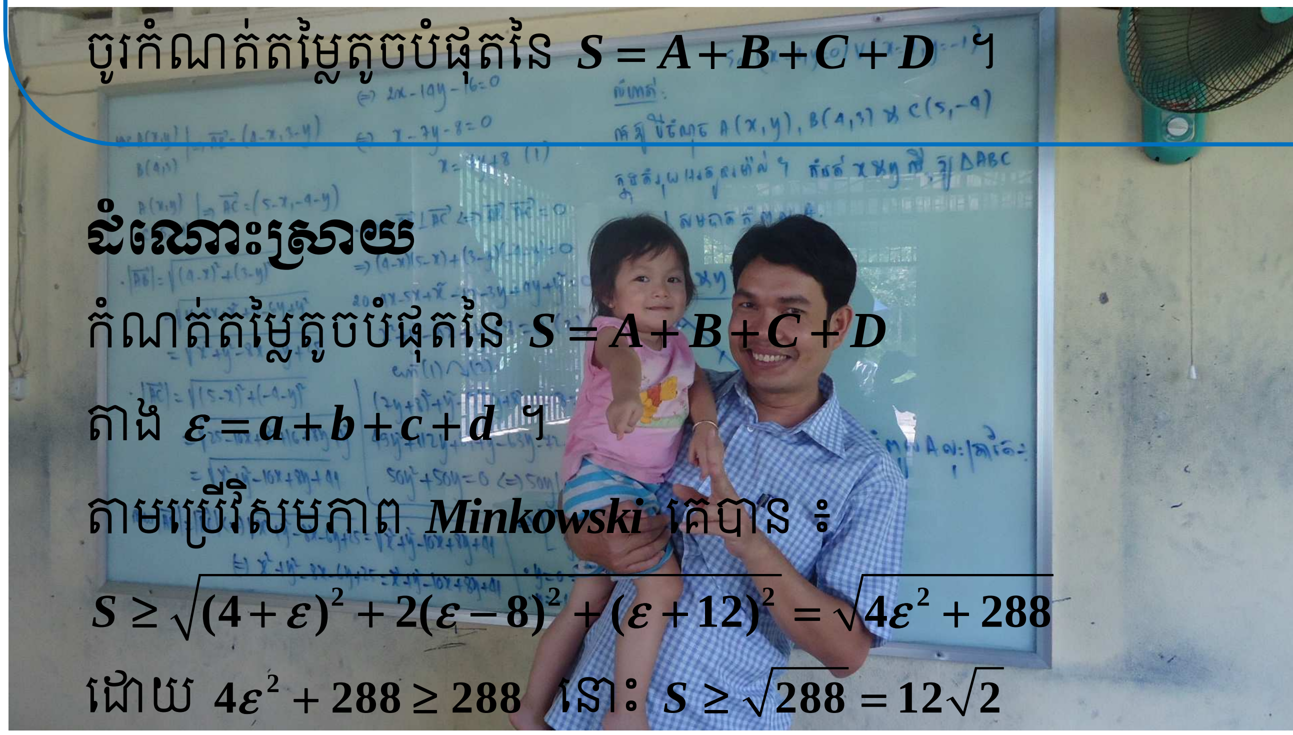
$$A=\sqrt{(a+1)^2+2(b-2)^2+(c+3)^2}$$

$$B=\sqrt{(b+1)^2+2(c-2)^2+(d+3)^2}$$

$$C=\sqrt{(c+1)^2+2(d-2)^2+(a+3)^2}$$

$$D=\sqrt{(d+1)^2+2(a-2)^2+(b+3)^2}$$

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $S=A+B+C+D$ ។



ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $S=A+B+C+D$

តាង $\varepsilon=a+b+c+d$ ។

តាមប្រើវិសមភាព *Minkowski* គេបាន ៖

$$S\ge\sqrt{(4+\varepsilon)^2+2(\varepsilon-8)^2+(\varepsilon+12)^2}=\sqrt{4\varepsilon^2+288}$$

ដោយ $4\varepsilon^2+288\ge 288$ នោះ $S\ge\sqrt{288}=12\sqrt{2}$

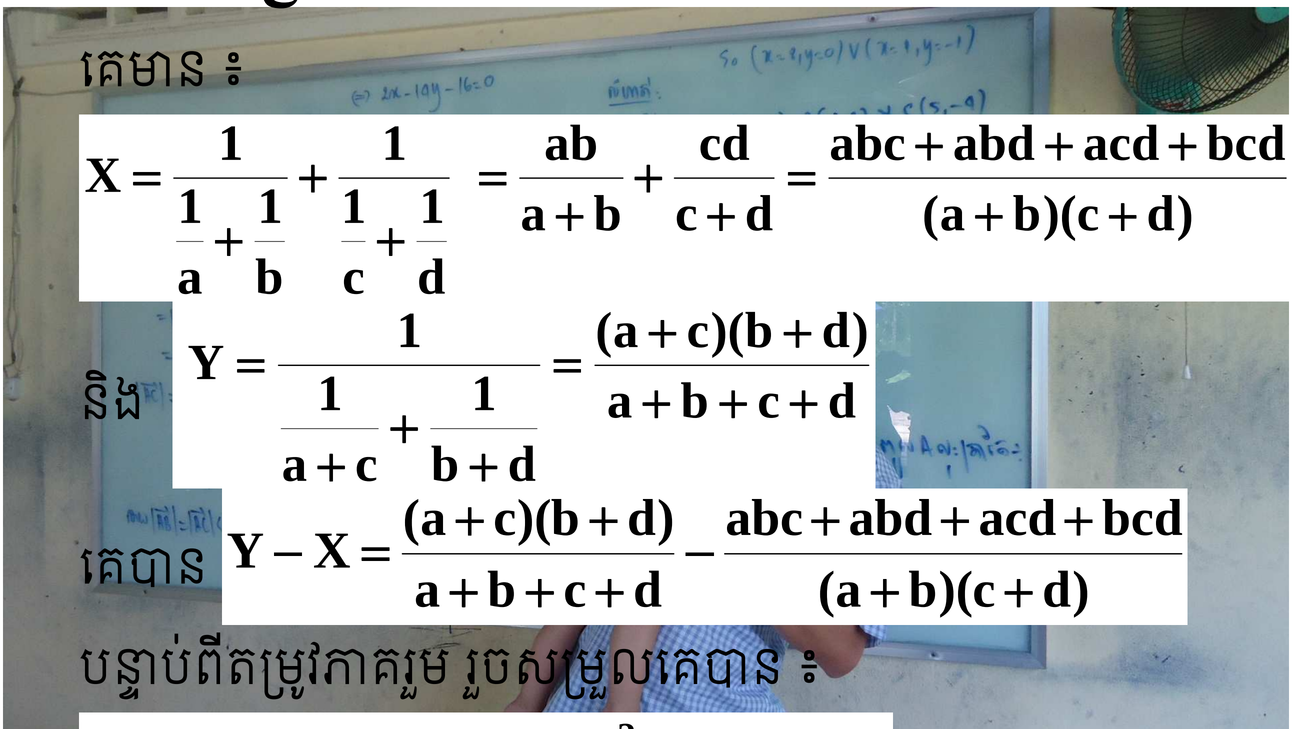
ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ S គឺ $S_{\min}=12\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៥៨

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}} \le \dfrac{1}{\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+d}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,d ។

ដំណោះស្រាយ



គេមាន ៖

$$X=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}=\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}$$

និង $$Y=\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}=\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}$$

គេបាន $$Y-X=\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}$$

បន្ទាប់ពីតម្រូវភាគរួម រួចសម្រួលគេបាន ៖

$$Y-X=\frac{(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+b+c+d)}\ge 0$$ នាំឱ្យ $Y \ge X$ ពិត។

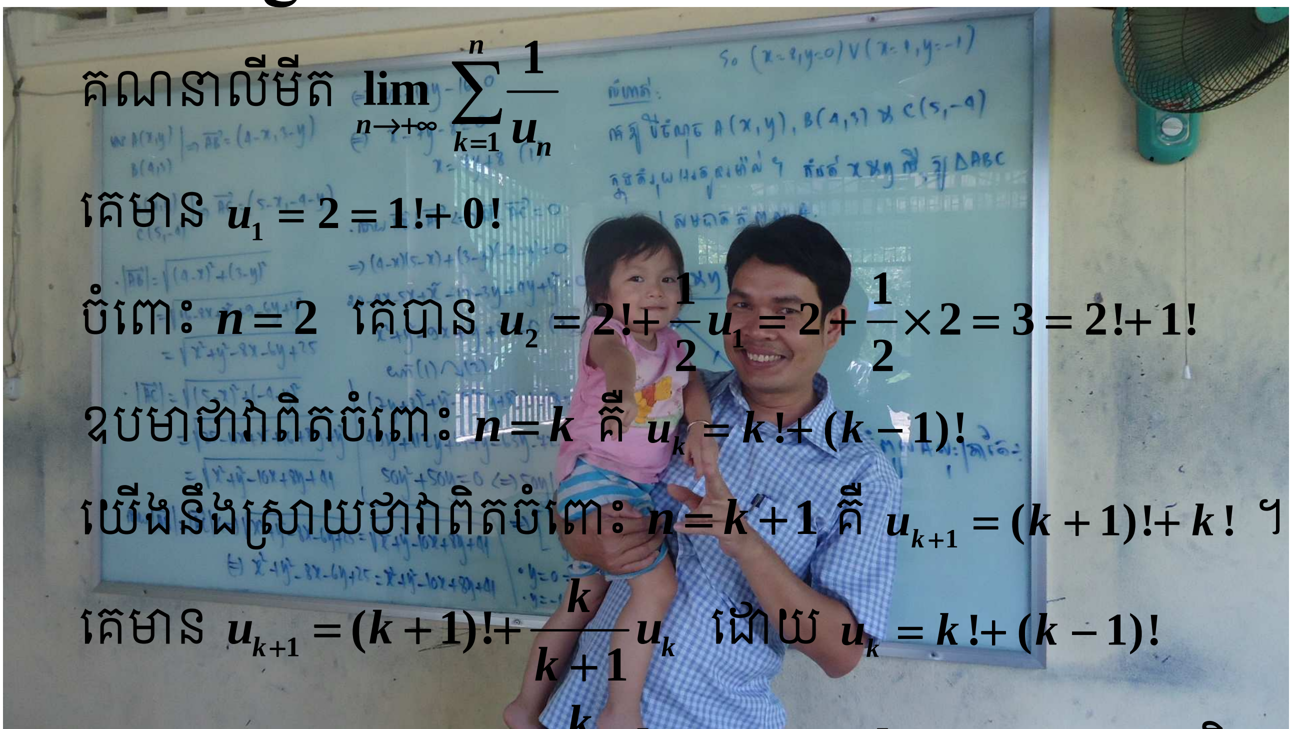
ដូចនេះ $$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$$

លំហាត់ទី៥៩

គេឲ្យស្វីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 2$ និង $u_n = n! + \frac{n-1}{n} u_{n-1}$

គ្រប់ $n = 2,3,4,...$ ។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{u_n}$?

ដំណោះស្រាយ



គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{u_n}$

គេមាន $u_1 = 2 = 1! + 0!$

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន $u_2 = 2! + \frac{1}{2} u_1 = 2 + \frac{1}{2} \times 2 = 3 = 2! + 1!$

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k = k! + (k-1)!$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k+1$ គឺ $u_{k+1} = (k+1)! + k!$ ។

គេមាន $u_{k+1} = (k+1)! + \frac{k}{k+1} u_k$ ដោយ $u_k = k! + (k-1)!$

គេបាន $u_{k+1} = (k+1)! + \frac{k}{k+1}\left[k! + (k-1)!\right] = (k+1)! + k!$ ពិត

ដូចនេះ $u_n = n! + (n-1)!$ ។

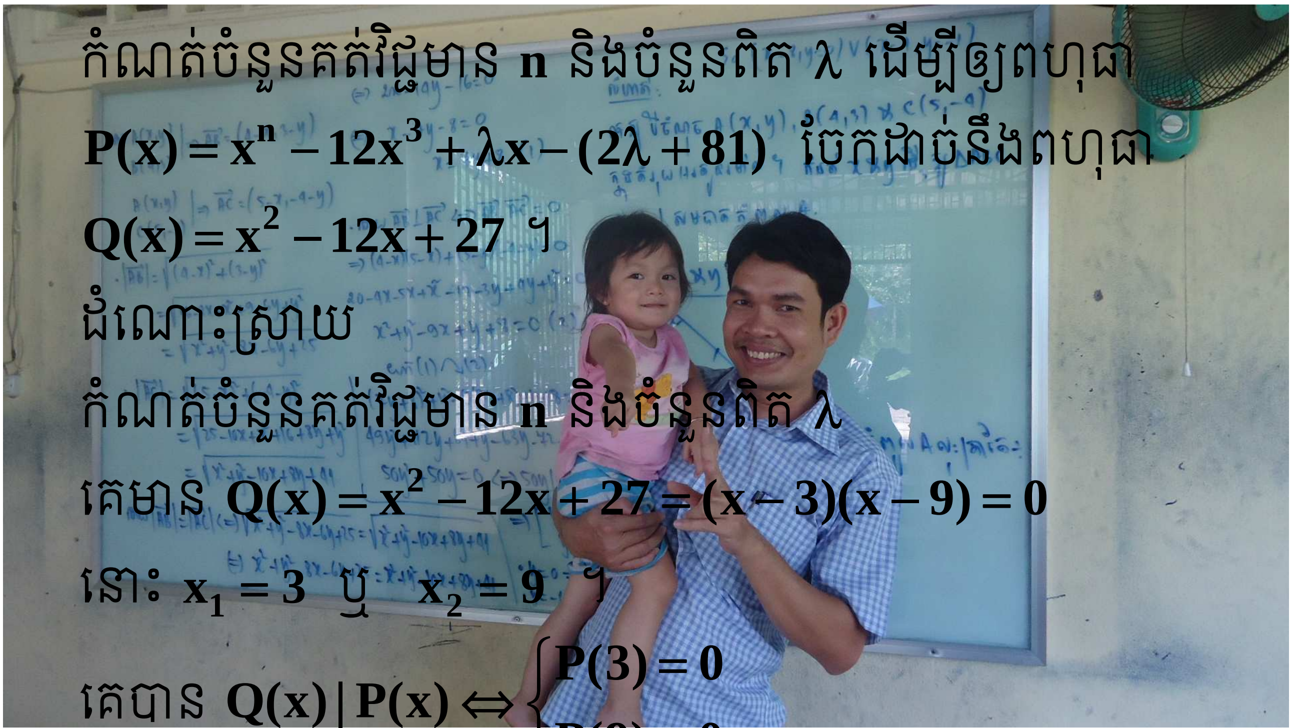
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k! + (k-1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 - \frac{1}{(n+1)!}\right] = 1$ ។

លំហាត់ទី៦០

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x)=x^n-12x^3+\lambda x-(2\lambda+81)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $Q(x)=x^2-12x+27$ ។

ដំណោះស្រាយ



កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x)=x^n-12x^3+\lambda x-(2\lambda+81)$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $Q(x)=x^2-12x+27$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងចំនួនពិត λ

គេមាន $Q(x)=x^2-12x+27=(x-3)(x-9)=0$

នោះ $x_1=3$ ឬ $x_2=9$ ។

គេបាន $Q(x)\,|\,P(x)\Leftrightarrow\begin{cases}P(3)=0\\P(9)=0\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}3^n+\lambda-405=0 & (1)\\9^n+7\lambda-8829=0 & (2)\end{cases}$

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការនេះគេបាន $n=4$, $\lambda=324$ ។

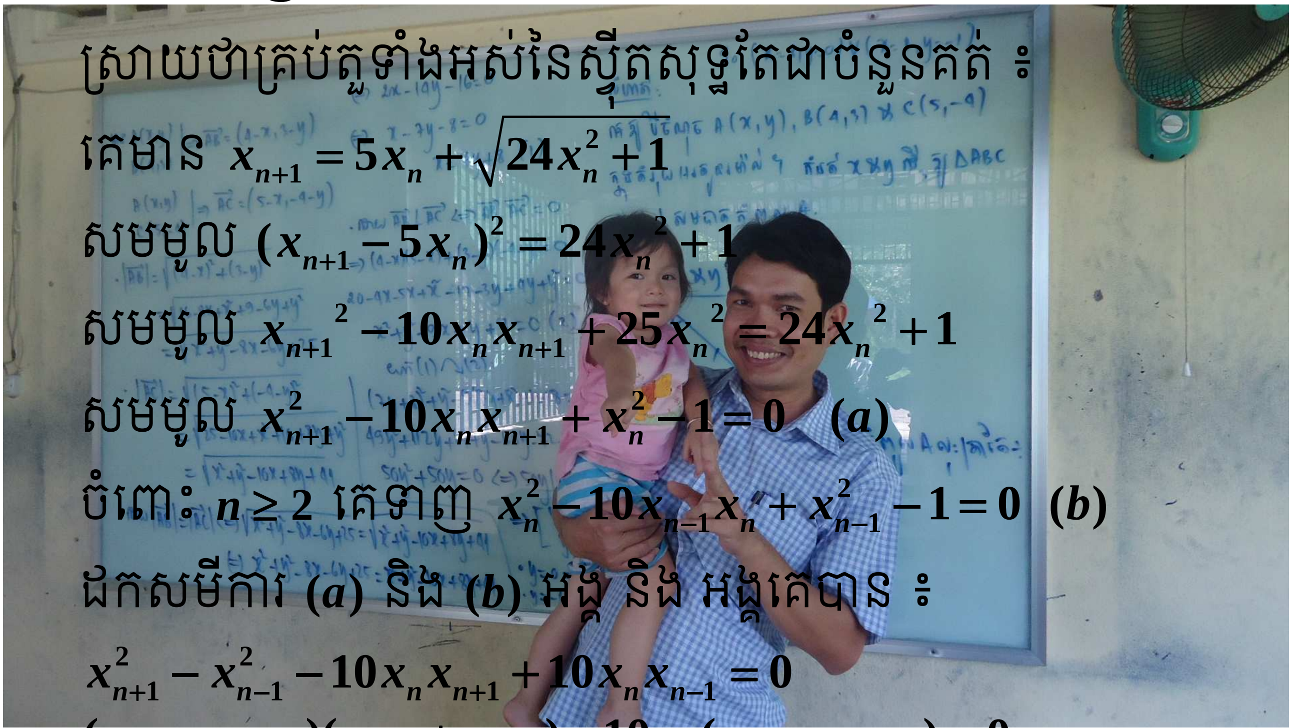
លំហាត់ទី៦១

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ ៖

$x_1 = 0$ និង $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$ គ្រប់ $n = 1, 2, 3, ...$

ចូរស្រាយថាគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតសុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថាគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតសុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ៖

គេមាន $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$

សមមូល $(x_{n+1} - 5x_n)^2 = 24x_n^{\ 2} + 1$

សមមូល $x_{n+1}^{\ \ 2} - 10x_n x_{n+1} + 25x_n^{\ 2} = 24x_n^{\ 2} + 1$

សមមូល $x_{n+1}^2 - 10x_n x_{n+1} + x_n^2 - 1 = 0 \quad (a)$

ចំពោះ $n \ge 2$ គេទាញ $x_n^2 - 10x_{n-1}x_n + x_{n-1}^2 - 1 = 0 \quad (b)$

ដកសមីការ (a) និង (b) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$x_{n+1}^2 - x_{n-1}^2 - 10x_n x_{n+1} + 10x_n x_{n-1} = 0$$

$$(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} + x_{n-1}) - 10x_n(x_{n+1} - x_{n-1}) = 0$$

$$(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} + x_{n-1} - 10x_n) = 0 \qquad (c)$$

ដោយ $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$

នោះ $x_{n+1} - x_n = 4x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1} > 0$ គ្រប់ $n \in IN$ និង $x_1 = 1$

នាំឲ្យ (x_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

ហេតុនេះ $x_{n+1} > x_n > x_{n-1}$ នោះ $x_{n+1} - x_{n-1} \ne 0$

តាមសមីការ (c) គ្រប់ $n\geq 2$ គេបាន $x_{n+1}+x_{n-1}-10x_n=0\ (d)$

គេមាន $x_1=0$ ហើយ $x_2=5x_1+\sqrt{1+24x_1^2}=0+\sqrt{1+0}=1$

តាម (d): $x_3+x_1-10x_2=0$ ឬ $x_3=10$

ហេតុនេះ $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z}$

គេមា $x_{n+1}+x_{n-1}-10x_n=0$ ឬ $x_{n+1}=10x_n-x_{n-1}$

បើ $x_{n-1},x_n\in Z$ នោះ $x_{n+1}=10x_n-x_{n-1}\in\mathbb{Z}$ ។

ដូចនេះគ្រប់តួទាំងអស់នៃស៊ីតសុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ។

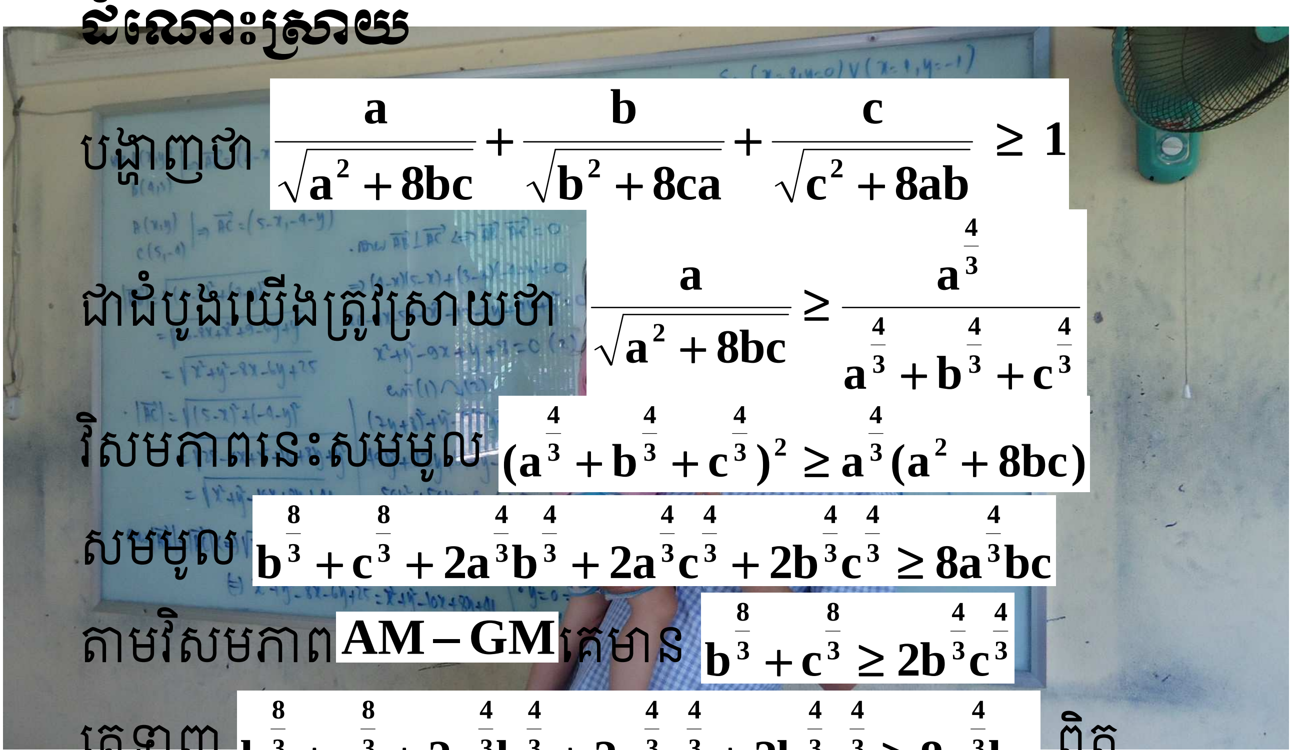
លំហាត់ទី៦២

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a\,,b\,,c$ ។

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយថា $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$

វិសមភាពនេះសមមូល $(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2\ge a^{\frac{4}{3}}(a^2+8bc)$

សមមូល $b^{\frac{8}{3}}+c^{\frac{8}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}+2b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}\ge 8a^{\frac{4}{3}}bc$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $b^{\frac{8}{3}}+c^{\frac{8}{3}}\ge 2b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}$

គេទាញ $b^{\frac{8}{3}}+c^{\frac{8}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}+2a^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}+2b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}\ge 8a^{\frac{4}{3}}bc$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}\quad(1)$

ដូចគ្នាដែរគេទាញ $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}\ge\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}\quad(2)$

ហើយ $\quad \dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge \dfrac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \quad (3)$

ដោយបូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គនិងអង្គគេបាន

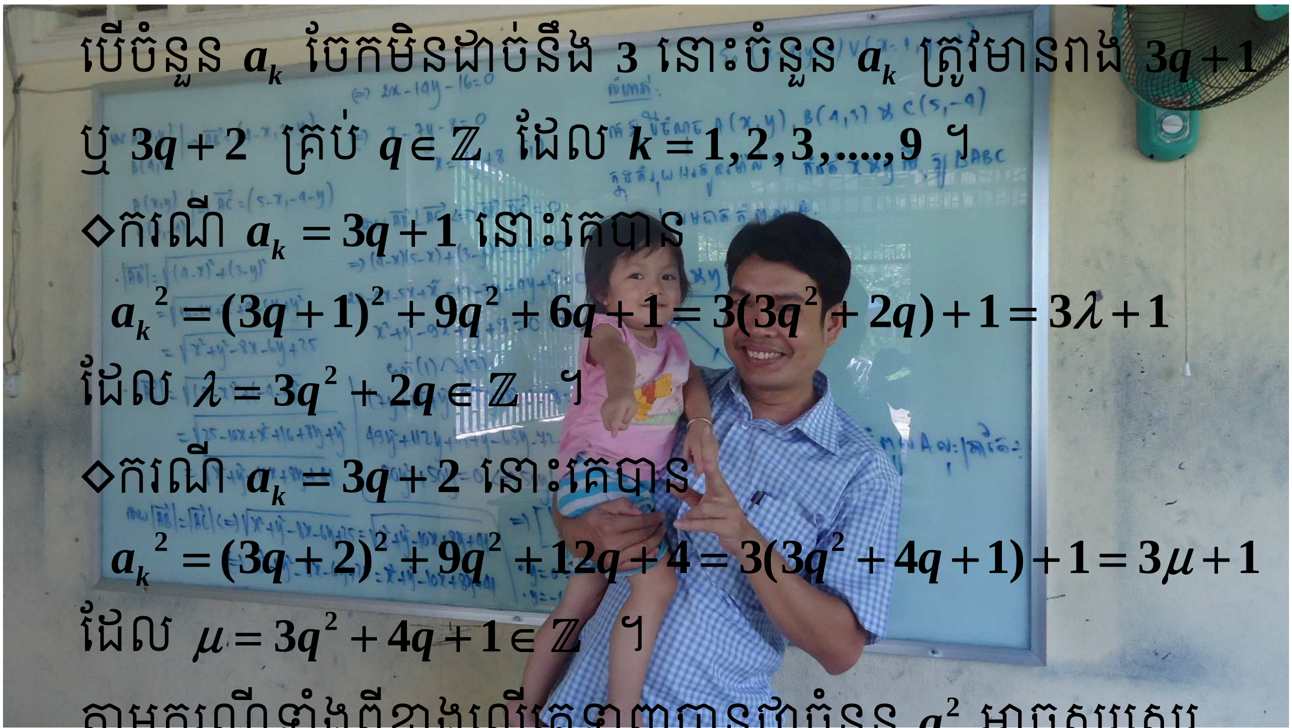
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1 \quad ។$$

លំហាត់ទី៦៣

ចូរបង្ហាញថាបើចំនួនគត់ $a_1, a_2, a_3, ..., a_9$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះ គេបាន $N = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_9^2$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $N = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_9^2$ ចែកដាច់នឹង 3



បើចំនួន a_k ចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះចំនួន a_k ត្រូវមានរាង $3q+1$ ឬ $3q+2$ គ្រប់ $q \in \mathbb{Z}$ ដែល $k = 1, 2, 3, ..., 9$ ។

◇ករណី $a_k = 3q+1$ នោះគេបាន

$$a_k{}^2 = (3q+1)^2 + 9q^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1 = 3\lambda + 1$$

ដែល $\lambda = 3q^2 + 2q \in \mathbb{Z}$ ។

◇ករណី $a_k = 3q+2$ នោះគេបាន

$$a_k{}^2 = (3q+2)^2 + 9q^2 + 12q + 4 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 1 = 3\mu + 1$$

ដែល $\mu = 3q^2 + 4q + 1 \in \mathbb{Z}$ ។

តាមករណីទាំងពីខាងលើគេទាញបានថាចំនួន a_k^2 អាចសរសេរជារាង $a_k{}^2 = 3p_k + 1$ គ្រប់ $p_k \in \mathbb{N}$ និង $k = 1, 2, 3, ..., 9$ ។

ហេតុនេះ $N = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_9^2$

$$= (3p_1 + 1)^2 + (3p_2 + 1)^2 + ... + (3p_9 + 1)^2$$

$$= 9(p_1{}^2 + p_2{}^2 + ... + p_9{}^2) + 3(2p_1 + ... + 2p_9) + 9$$

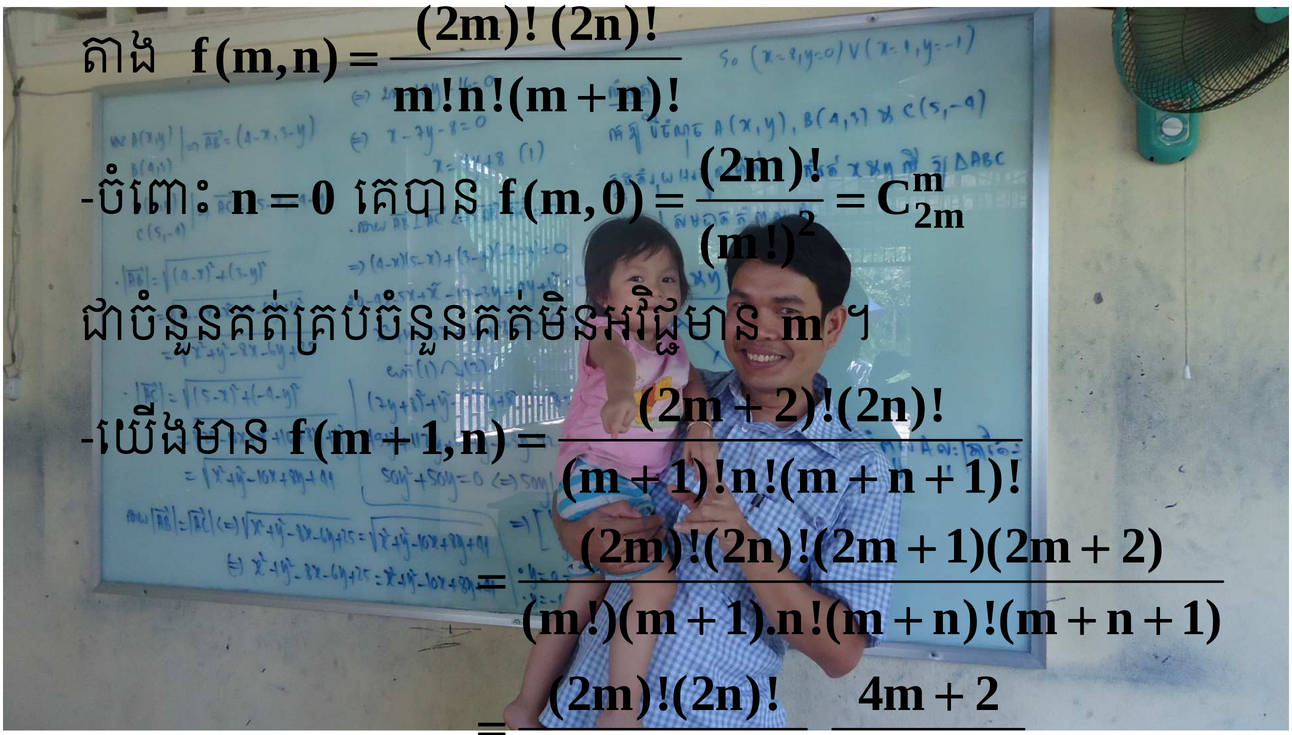
ដូចនេះ $N = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_9^2$ ចែកដាច់នឹង 9 ។

លំហាត់ទី៦៤ (IMO 1972)

គេឲ្យ $\mathbf{m}$ និង $\mathbf{n}$ ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង $f(m,n)=\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$

-ចំពោះ $n=0$ គេបាន $f(m,0)=\dfrac{(2m)!}{(m!)^2}=C_{2m}^{m}$

ជាចំនួនគត់គ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន m ។

-យើងមាន $f(m+1,n)=\dfrac{(2m+2)!(2n)!}{(m+1)!n!(m+n+1)!}$

$$=\frac{(2m)!(2n)!(2m+1)(2m+2)}{(m!)(m+1).n!(m+n)!(m+n+1)}$$

$$=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}\cdot\frac{4m+2}{m+n+1}$$

$$=\frac{4m+2}{m+n+1}f(m,n)$$

ស្រាយដូចគ្នា $f(m,n+1)=\dfrac{4n+2}{m+n+1}f(m,n)$

គេបាន $f(m+1,n)+f(m,n+1)=4f(m,n)$

គេទាញ $f(m,n+1)=4f(m,n)-f(m+1,n)$ (*) ,

យើងនឹងស្រាយតាមកំណើនតាម n ថា $f(m,n)$ ជាចំនួនគត់ ។

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $f(m,0)=C_{2m}^{m}$ ជាចំនួនគត់

ចំពោះគ្រប់ $m\in IN\cup\{0\}$ (សម្រាយខាងលើ)។

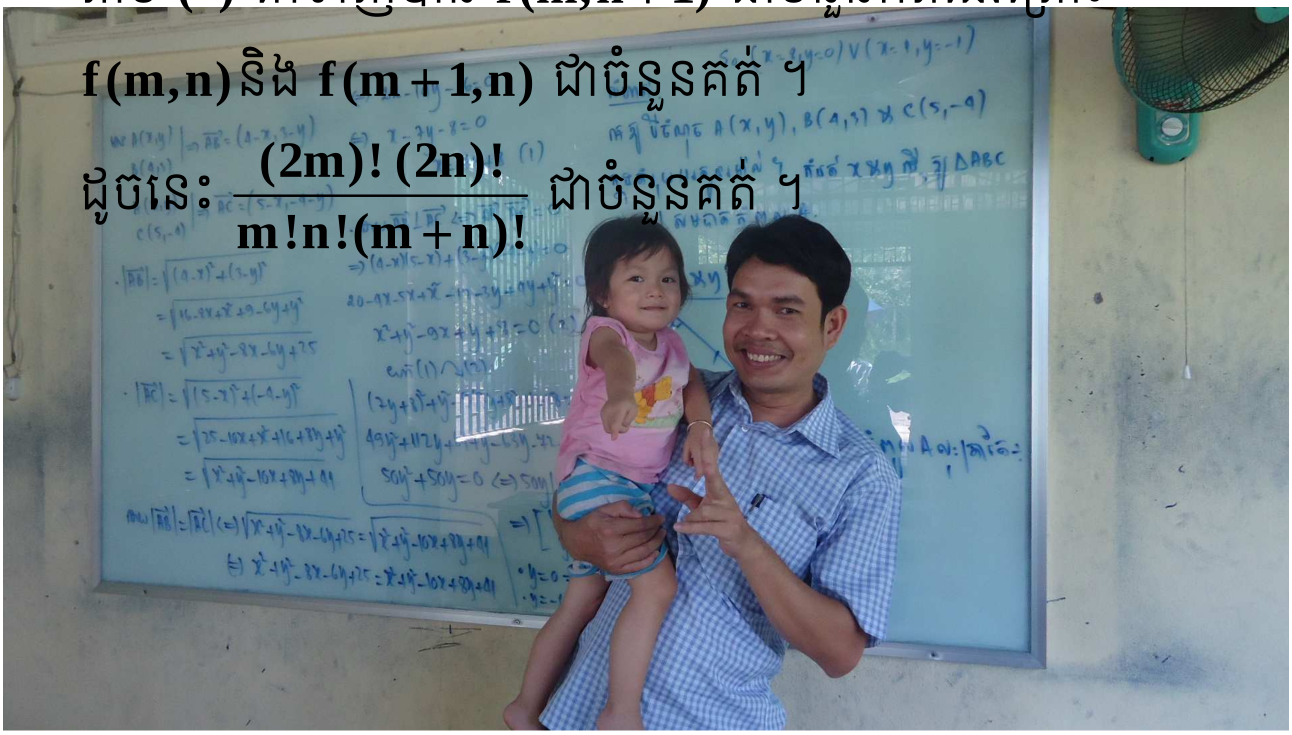
ឧបមាថា $f(m,n)$ ជាចំនួនគត់គ្រប់ $n\in IN\cup\{0\}$

យើងនឹងស្រាយថា $f(m+1,n)$ ជាចំនួនគត់ដែរ ។

តាម (*) គេទាញបាន $f(m,n+1)$ ជាចំនួនគត់ដែរព្រោះ

$f(m,n)$ និង $f(m+1,n)$ ជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះ $\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ ជាចំនួនគត់ ។



លំហាត់ទី៦៥

គេឲ្យចំនួនពិត α និង β ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-17=0$ និង $\beta^3-3\beta^2+5\beta+11=0$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃ $\alpha+\beta$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ $\alpha+\beta$

តាង $f(x)=x^3-3x^2+5x$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} f(\alpha)=\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=17 \\ f(\beta)=\beta^3-3\beta^2+5\beta=-11 \end{cases}$$

គេបាន $f(\alpha)+f(\beta)=6$ ។

ដោយ $f(x)=x^3-3x^2+5x=(x-1)^3+2(x-1)+3$

$$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha-1)^3+(\beta-1)^3+2(\alpha-1)+2(\beta-1)+6=6$$

គេទាញ $(\alpha-1)^3+(\beta-1)^3+2(\alpha-1)+2(\beta-1)=0$

ឬ $(\alpha+\beta-2)\left[(\alpha-1)^2+(\alpha-1)(\beta-1)+(\beta-1)^2+2\right]=0$

ដោយ $(\alpha-1)^2+(\alpha-1)(\beta-1)+(\beta-1)^2+2>0$

ដូចនេះ $\alpha+\beta=2$ ។

លំហាត់ទី៦៦

គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\ge\dfrac{3}{2}$

$$T=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$T=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+c)}+\frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{b(c+a)}+\frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{c(a+b)}\ge\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}$$

ដោយ $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2=\left(\dfrac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2=(ab+bc+ca)^2$

ហើយ $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=2(ab+bc+ca)$

គេទាញ $T\ge\dfrac{ab+bc+ca}{2}\ge\dfrac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2}=\dfrac{3}{2}$

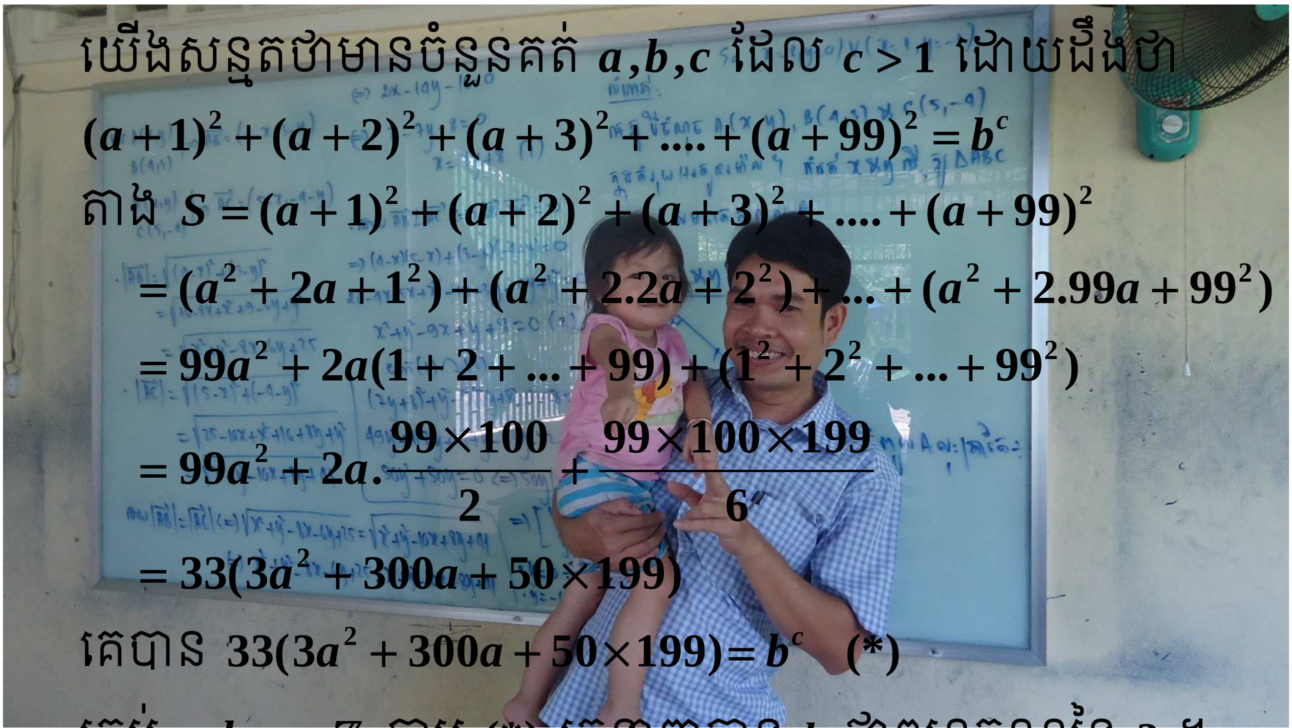
ដូចនេះ $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\ge\dfrac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦៧

គេឲ្យ a ជាចំនួនគត់មួយ ។ ចូរបង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ b និង c ($c>1$)ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ ៖

$(a+1)^2+(a+2)^2+(a+3)^2+....+(a+99)^2=b^c$ ។

ដំណោះស្រាយ



យើងសន្មតថាមានចំនួនគត់ a,b,c ដែល $c>1$ ដោយដឹងថា

$(a+1)^2+(a+2)^2+(a+3)^2+....+(a+99)^2=b^c$

តាង $S=(a+1)^2+(a+2)^2+(a+3)^2+....+(a+99)^2$

$$=(a^2+2a+1^2)+(a^2+2.2a+2^2)+...+(a^2+2.99a+99^2)$$

$$=99a^2+2a(1+2+...+99)+(1^2+2^2+...+99^2)$$

$$=99a^2+2a.\frac{99\times100}{2}+\frac{99\times100\times199}{6}$$

$$=33(3a^2+300a+50\times199)$$

គេបាន $33(3a^2+300a+50\times199)=b^c \quad (*)$

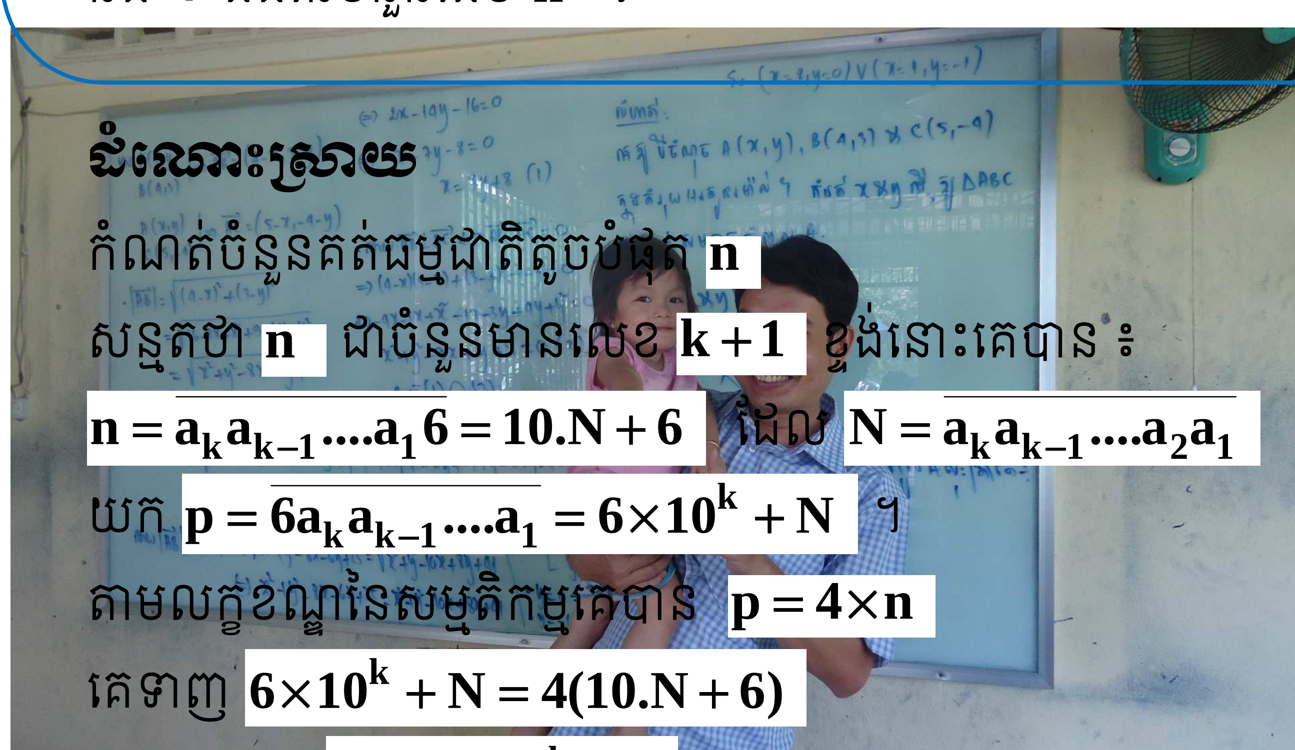
គ្រប់ $a,b,c\in\mathbb{Z}$ តាម (*) គេទាញបាន b ជាពហុគុណនៃ 3 ។

ដោយ $c=2,3,4,....$ នោះគេទាញបាន b^c ត្រូវចែកដាច់នឹង $3^2=9$ នោះគេទាញបាន $9\,|\,33(3a^2+300a+50\times199)$

ដោយ 33 ចែកដាច់នឹង 3 ហើយ $3a^2+300a+50\times199$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះ $33(3a^2+300a+50\times199)$ ចែកមិនដាច់នឹង 9 ។

លំហាត់ទី៦៨(IMO 1962)

ចូរកំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត **n** ដោយដឹងថា ក្នុងប្រពន្ធ័ដេស៊ីម៉ាល់ **n** មានលេខ **6** ជាលេខចុងក្រោយបំផុត ។ បើគេលុបលេខ **6** ចុងក្រោយនោះចោលហើយយកទៅសរសេរពីខាងមុខនៃលេខដែលនៅសល់នោះគេបានចំនួនមួយទៀតស្មើនឹង **4** ដងនៃចំនួនដើម **n** ។



ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត $\mathbf{n}$

សន្មតថា $\mathbf{n}$ ជាចំនួនមានលេខ $\mathbf{k+1}$ ខ្ទង់នោះគេបាន ៖

$\mathbf{n = \overline{a_k a_{k-1} ....a_1 6} = 10.N + 6}$ ដែល $\mathbf{N = \overline{a_k a_{k-1} ....a_2 a_1}}$

យក $\mathbf{p = \overline{6a_k a_{k-1} ....a_1} = 6\times 10^k + N}$ ។

តាមលក្ខខណ្ឌនៃសម្មតិកម្មគេបាន $\mathbf{p = 4\times n}$

គេទាញ $\mathbf{6\times 10^k + N = 4(10.N + 6)}$

គេទាញបាន $\mathbf{N = 2\times \frac{10^k - 4}{13}}$ ។

តម្លៃ **k** ដំបូងដែលធ្វើឱ្យ $\mathbf{10^k - 4}$

ចែកដាច់នឹង **13** គឺ $\mathbf{k = 5}$ ហើយ $\mathbf{N = 2\times \frac{10^5 - 4}{13} = 15384}$

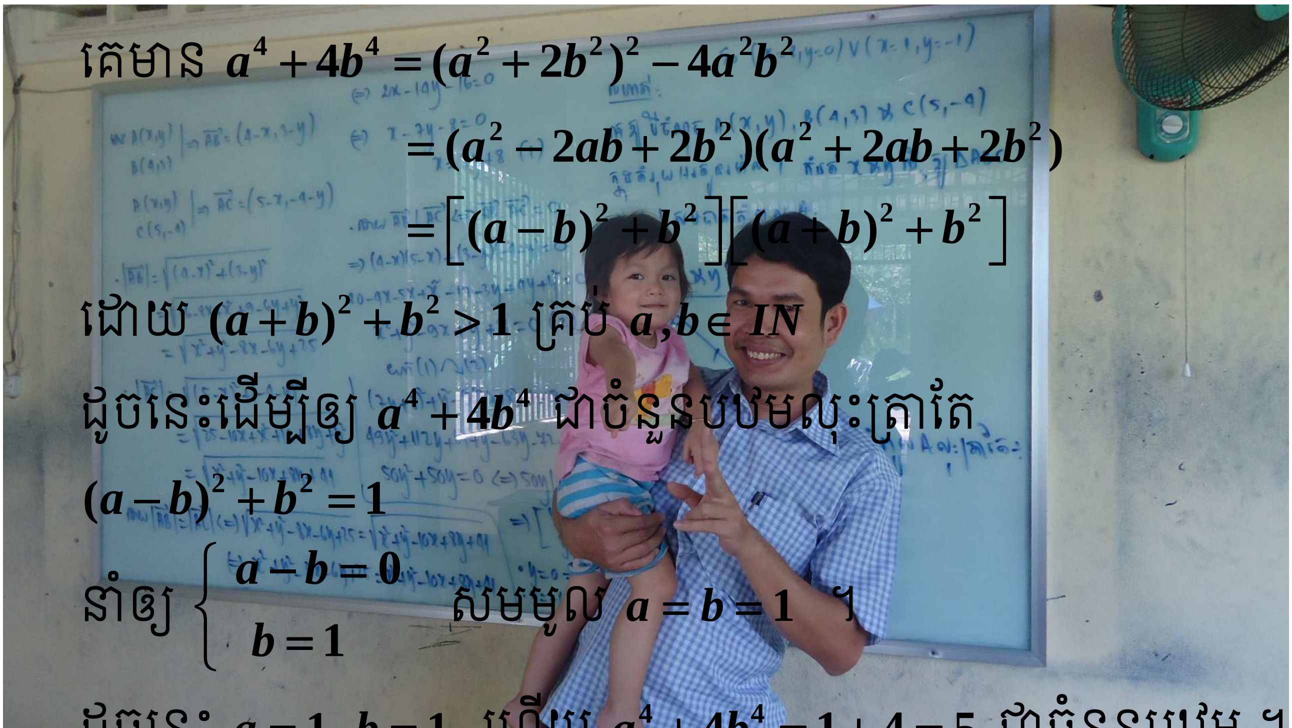
ដូចនេះ $\mathbf{n = 10N + 6 = 153846}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ដើម្បីឲ្យ a^4+4b^4 ជាចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b



គេមាន $a^4+4b^4=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2$

$$=(a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2)$$

$$=\left[(a-b)^2+b^2\right]\left[(a+b)^2+b^2\right]$$

ដោយ $(a+b)^2+b^2>1$ គ្រប់ $a,b\in IN$

ដូចនេះដើម្បីឲ្យ a^4+4b^4 ជាចំនួនបឋមលុះត្រាតែ

$(a-b)^2+b^2=1$

នាំឲ្យ $\begin{cases} a-b=0 \\ b=1 \end{cases}$ សមមូល $a=b=1$ ។

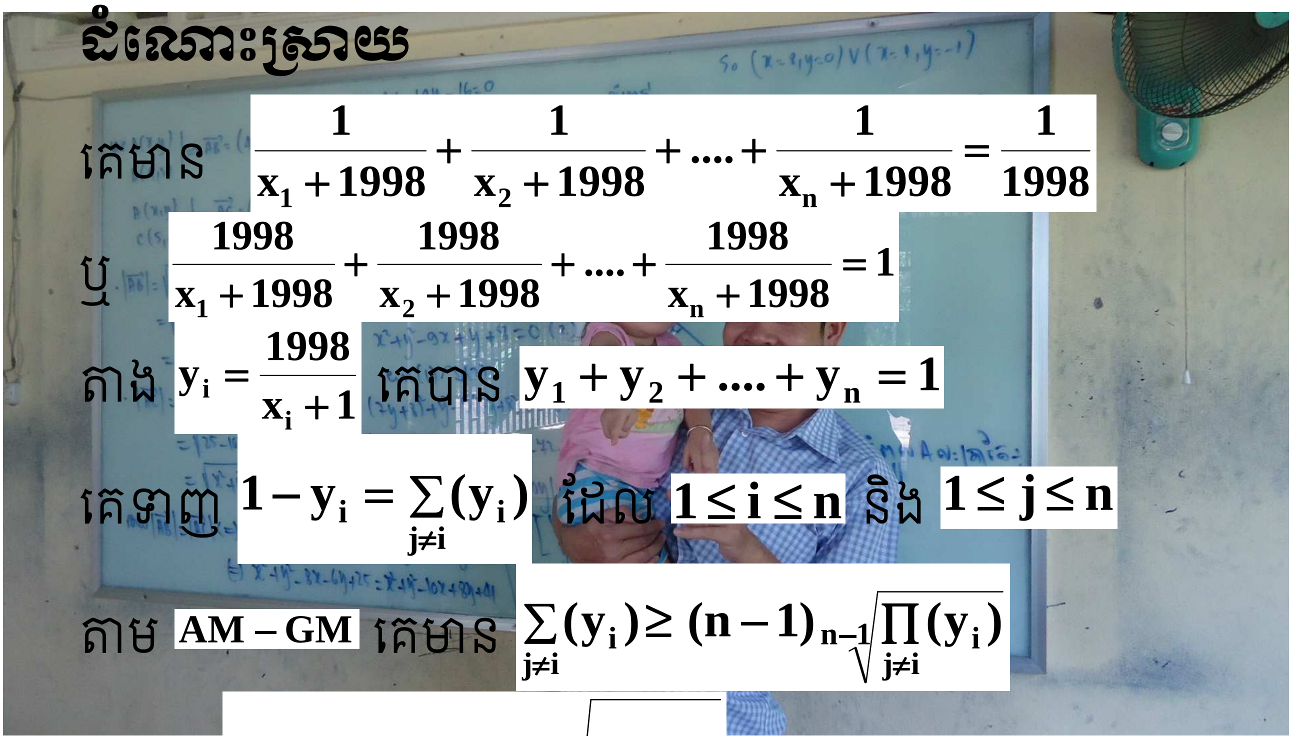
ដូចនេះ $a=1\,,b=1$ ហើយ $a^4+4b^4=1+4=5$ ជាចំនួនបឋម ។

លំហាត់ទី៧០

គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ (ដែល $n \geq 2$)ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1} \geq 1998$ ។



ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$

ឬ $\frac{1998}{x_1+1998}+\frac{1998}{x_2+1998}+....+\frac{1998}{x_n+1998}=1$

តាង $y_i=\frac{1998}{x_i+1}$ គេបាន $y_1+y_2+....+y_n=1$

គេទាញ $1-y_i=\sum_{j\neq i}(y_i)$ ដែល $1\leq i\leq n$ និង $1\leq j\leq n$

តាម $AM-GM$ គេមាន $\sum_{j\neq i}(y_i)\geq(n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i}(y_i)}$

គេបាន $1-y_i\geq(n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i}(y_i)}$

គេទាញ $\prod_{i=1}^{n}(1-y_i)\geq(n-1)^n\prod_{i=1}^{n}(y_i)$ ឬ $\prod_{i=1}^{n}(\frac{1-y_i}{y_i})\geq(n-1)^n$

តែ $\frac{1-y_i}{y_i}=\frac{x_i}{1998}$ នោះ $\frac{x_1x_2...x_n}{1998^n}\geq(n-1)^n$

ដូចនេះ $\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1}\geq 1998$ ។

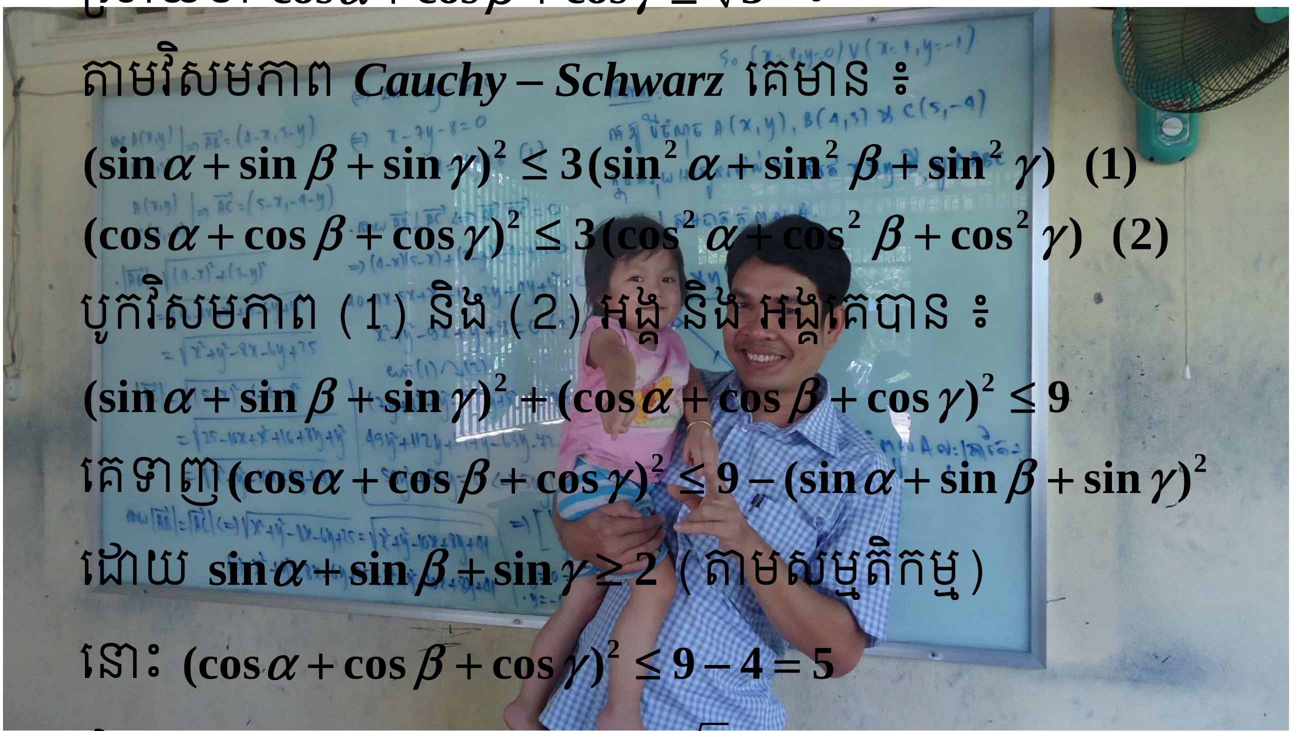
លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យ α,β,γ ជាបីចំនួនពិតដែល $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geq 2$ ។

ចូរស្រាយថា $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\sqrt{5}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\sqrt{5}$ ៖



តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេមាន ៖

$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2\leq 3(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)$ (1)

$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\leq 3(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$ (2)

បូកវិសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\leq 9$

គេទាញ $(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\leq 9-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2$

ដោយ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geq 2$ (តាមសម្មតិកម្ម)

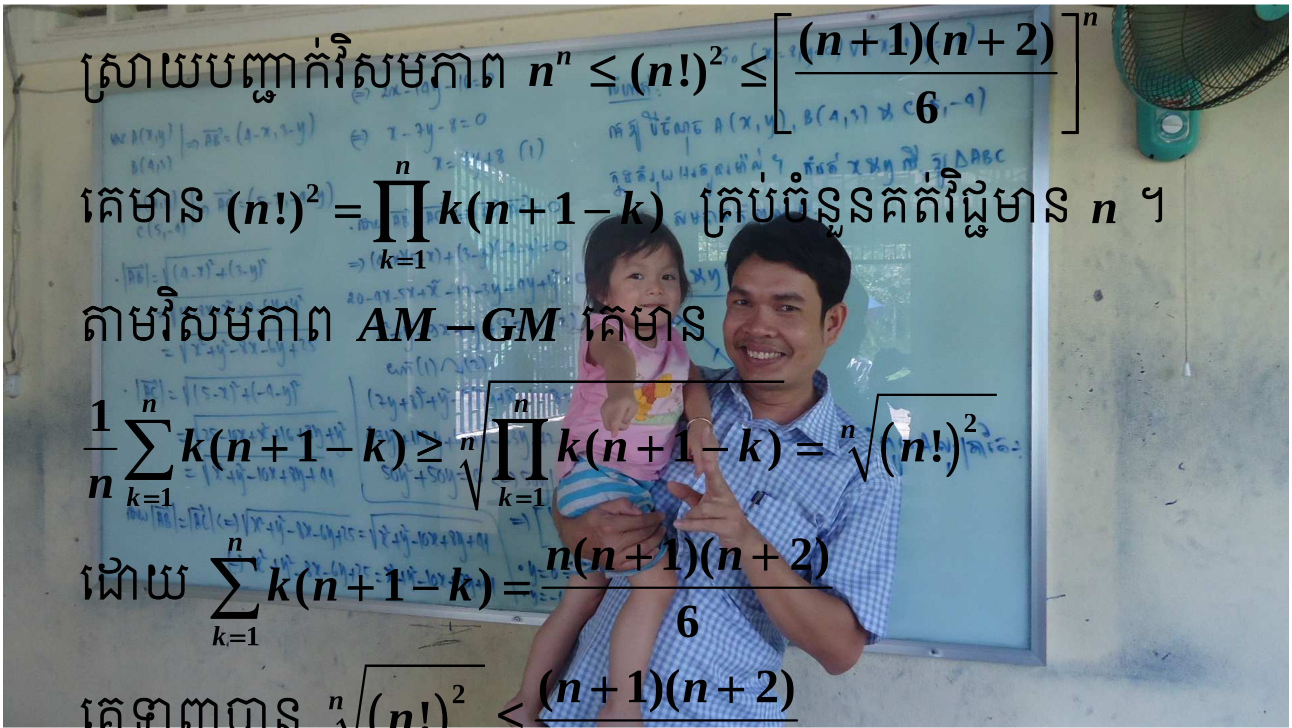
នោះ $(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\leq 9-4=5$

ដូចនេះ $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\sqrt{5}$ ។

លំហាត់ទី៧២

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $n^n \le (n!)^2 \le \left[\dfrac{(n+1)(n+2)}{6}\right]^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $n^n \le (n!)^2 \le \left[\dfrac{(n+1)(n+2)}{6}\right]^n$

គេមាន $(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)$ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) \ge \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)} = \sqrt[n]{(n!)^2}$$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

គេទាញបាន $\sqrt[n]{(n!)^2} \le \dfrac{(n+1)(n+2)}{6}$

សមមូល $(n!)^2 \le \left[\dfrac{(n+1)(n+2)}{6}\right]^n$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន $f(x) = x(n+1-x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើចន្លោះ $[1 , n]$ នោះវាមានតម្លៃអប្បបរមាតែត្រង់ចំណុច $x=1$ ឬ $x=n$ គឺ $f(1) = f(n) = n$ ។

ហេតុនេះគេទាញបានថា $f(k)=k(n+1-k)\geq n$

គ្រប់ $k=1,2,3,...,n$ ។

គេបាន $(n!)^2=\prod_{k=1}^{n}k(n+1-k)\geq\prod_{k=1}^{n}(n)=n^n$ (2)

តាម (1) និង (2) ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេទាញបាន ៖

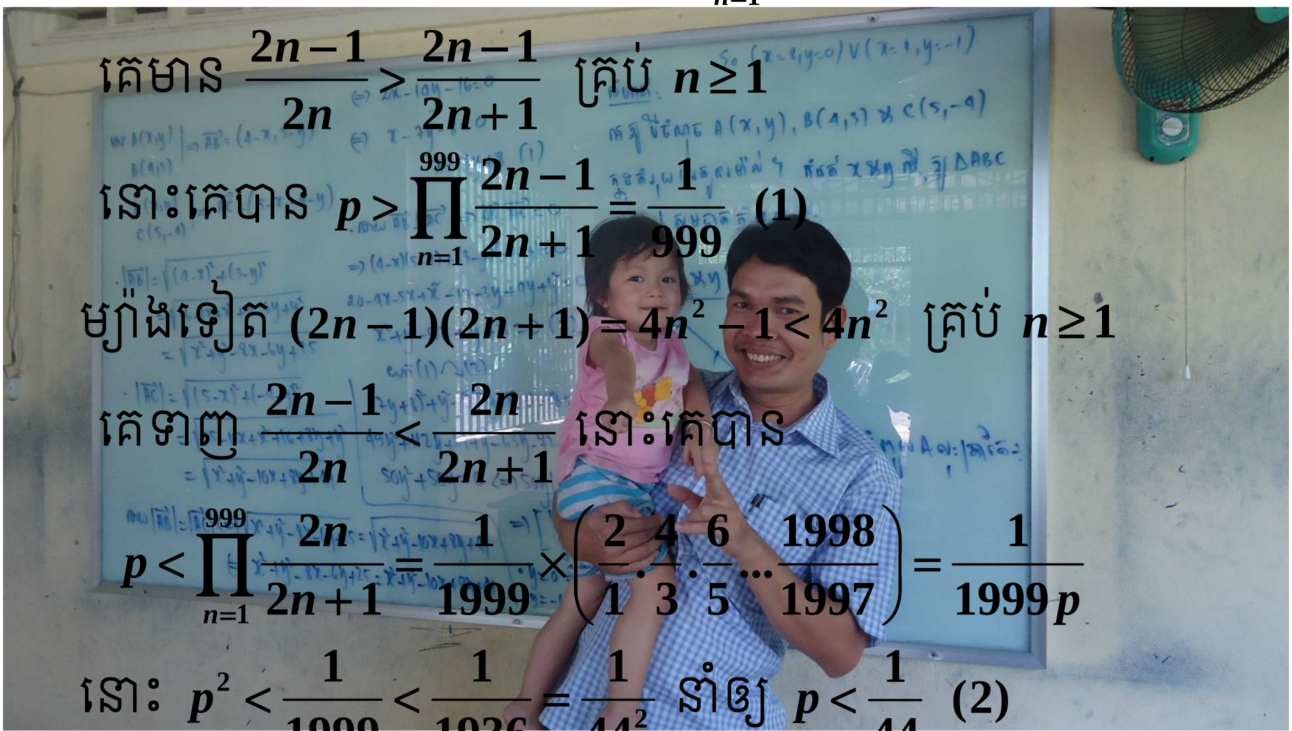
$n^n\leq(n!)^2\leq\left[\frac{(n+1)(n+2)}{6}\right]^n$ ។

លំហាត់ទី៧៣

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{199}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times....\times\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $p=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times....\times\frac{1997}{1998}=\prod_{n=1}^{999}\frac{2n-1}{2n}$



គេមាន $\frac{2n-1}{2n}>\frac{2n-1}{2n+1}$ គ្រប់ $n\geq 1$

នោះគេបាន $p>\prod_{n=1}^{999}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{999}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $(2n-1)(2n+1)=4n^2-1<4n^2$ គ្រប់ $n\geq 1$

គេទាញ $\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$ នោះគេបាន

$$p<\prod_{n=1}^{999}\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{1999}\times\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{1998}{1997}\right)=\frac{1}{1999\,p}$$

នោះ $p^2<\frac{1}{1999}<\frac{1}{1936}=\frac{1}{44^2}$ នាំឲ្យ $p<\frac{1}{44}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\frac{1}{1999}<p<\frac{1}{44}$ ។

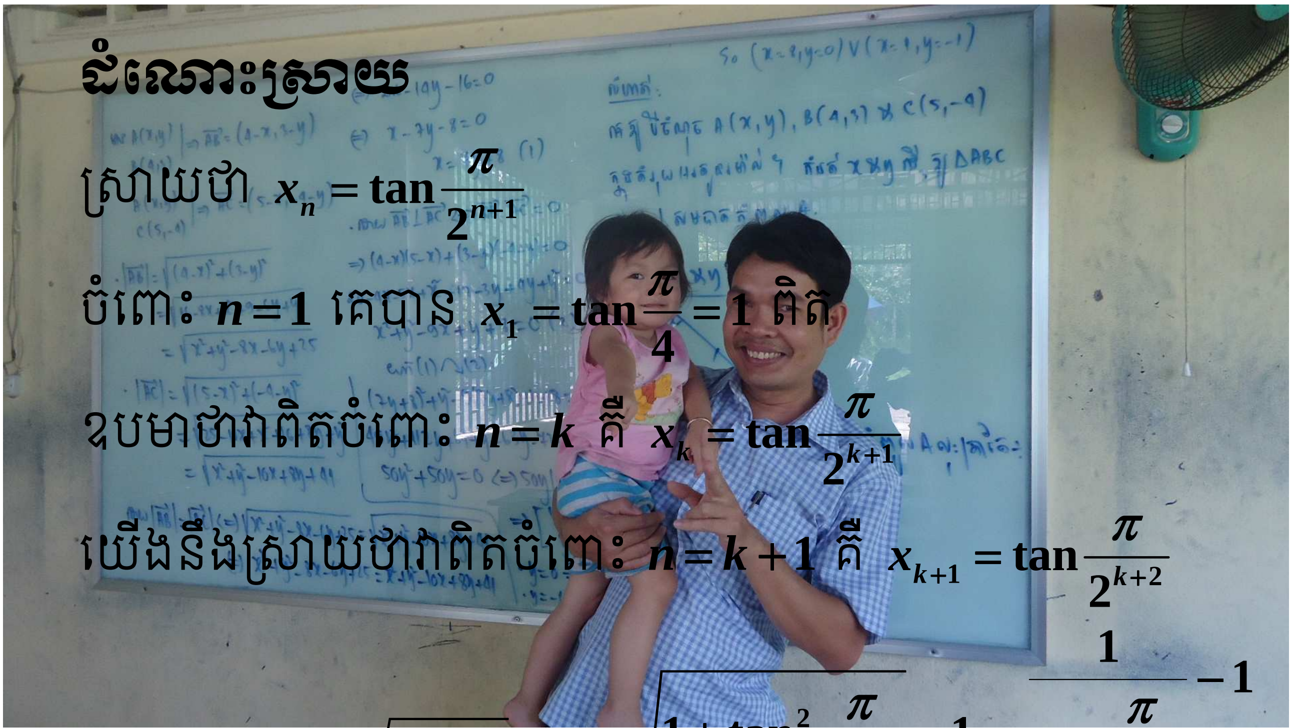
ដូចនេះ $\frac{1}{199}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times....\times\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ ៖

$x_1=1$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $x_{n+1}=\dfrac{\sqrt{1+x_n^2}-1}{x_n}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

ចូរស្រាយថា $x_n=\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)$ ។



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x_n=\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $x_1=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $x_k=\tan\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$ គឺ $x_{k+1}=\tan\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$

គេមាន $x_{k+1}=\dfrac{\sqrt{1+x_k^2}-1}{x_k}=\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}-1}{\tan\dfrac{x}{2^{k+1}}}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}-1}{\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}{\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}}$

$$x_{k+1}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}}=\tan\frac{\pi}{2^{k+2}}$$ ពិត

ដូចនេះ $x_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

រកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)$ ៖

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}2^n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$

តាង $y=\frac{\pi}{2^{n+1}}$ នោះ $2^n=\frac{\pi}{2y}$ កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $y\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}2^n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\pi}{2y}\tan y$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}=\frac{\pi}{2}$$

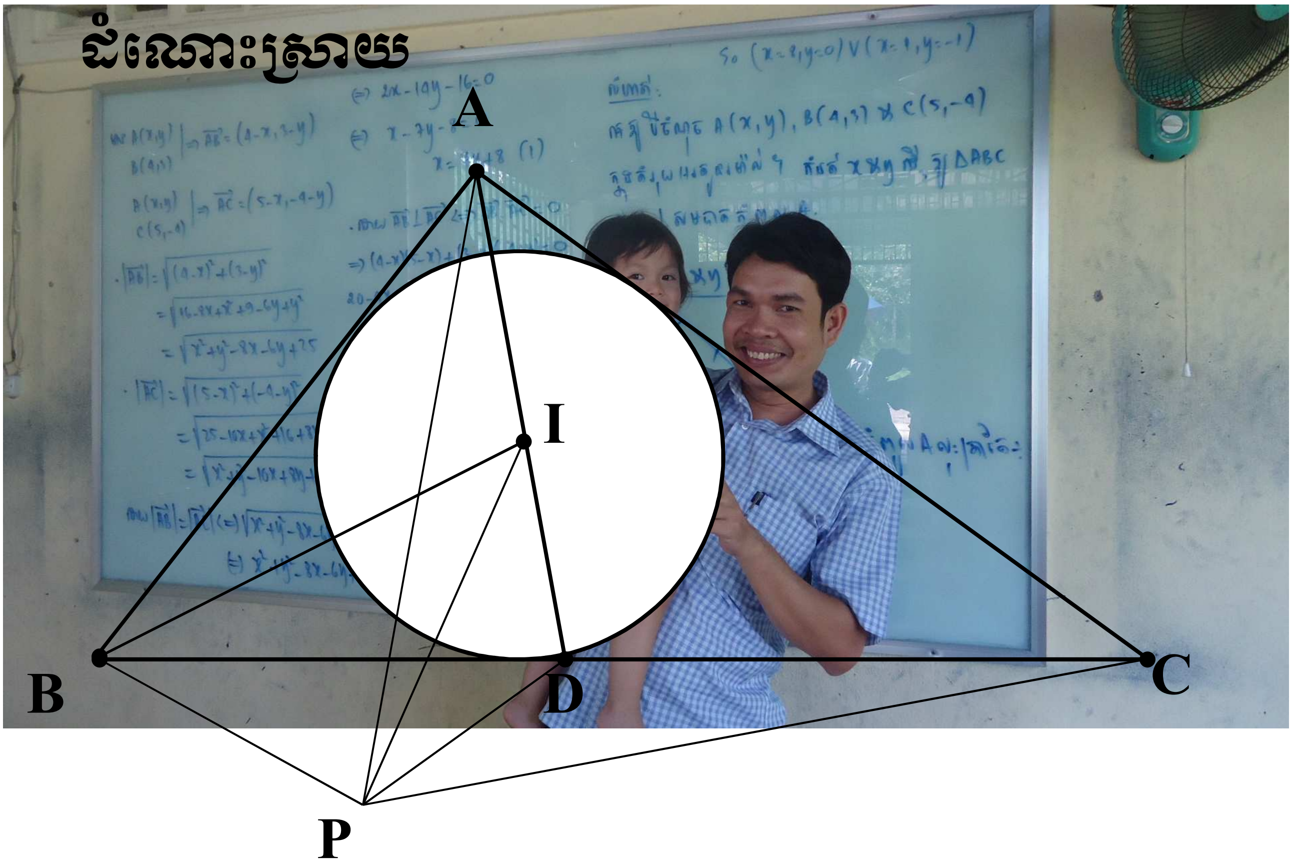
ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)=\frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ទី៧៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$ P ជាចំណុចមួយនៃប្លង់ ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោ ABC ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាព ៖

$$a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2=(a+b+c).PI^2+abc$$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC

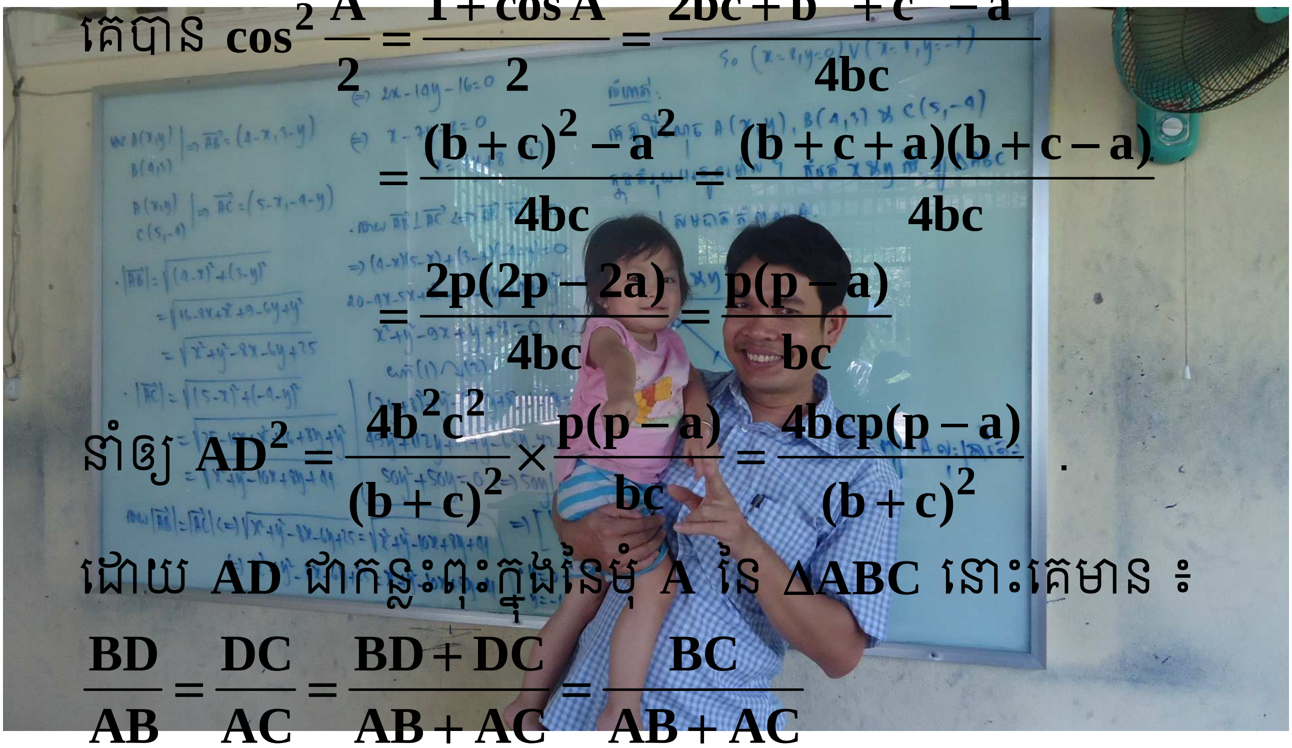
យក D ជាប្រសព្វរវាង AI និង BC នោះ AD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A របស់ត្រីកោណ ABC ។

គេមាន $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$

ឬ $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}c.AD\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}b.AD\sin\frac{A}{2}$

គេទាញ $AD = \frac{2bc}{b+c}.\cos\frac{A}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$



គេបាន $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$$

$$= \frac{2p(2p-2a)}{4bc} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

នាំឲ្យ $AD^2 = \frac{4b^2c^2}{(b+c)^2} \times \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$.

ដោយ AD ជាកន្លះពុះក្នុងនៃមុំ A នៃ ΔABC នោះគេមាន ៖

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD+DC}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC}$$

គេទាញ $BD = \frac{ac}{b+c}$, $DC = \frac{ab}{b+c}$ ។

ដូចគ្នាដែរ BI ជាកន្លះពុះក្នុងនៃមុំ B នៃ ΔABD នោះគេមាន ៖

$$\frac{AI}{AB} = \frac{ID}{BD} \text{ ឬ } \frac{AI}{c} = \frac{ID}{\frac{ac}{b+c}} \text{ ឬ } \frac{AI}{b+c} = \frac{ID}{a} = \frac{AI+ID}{b+c+a} = \frac{AD}{2p}$$

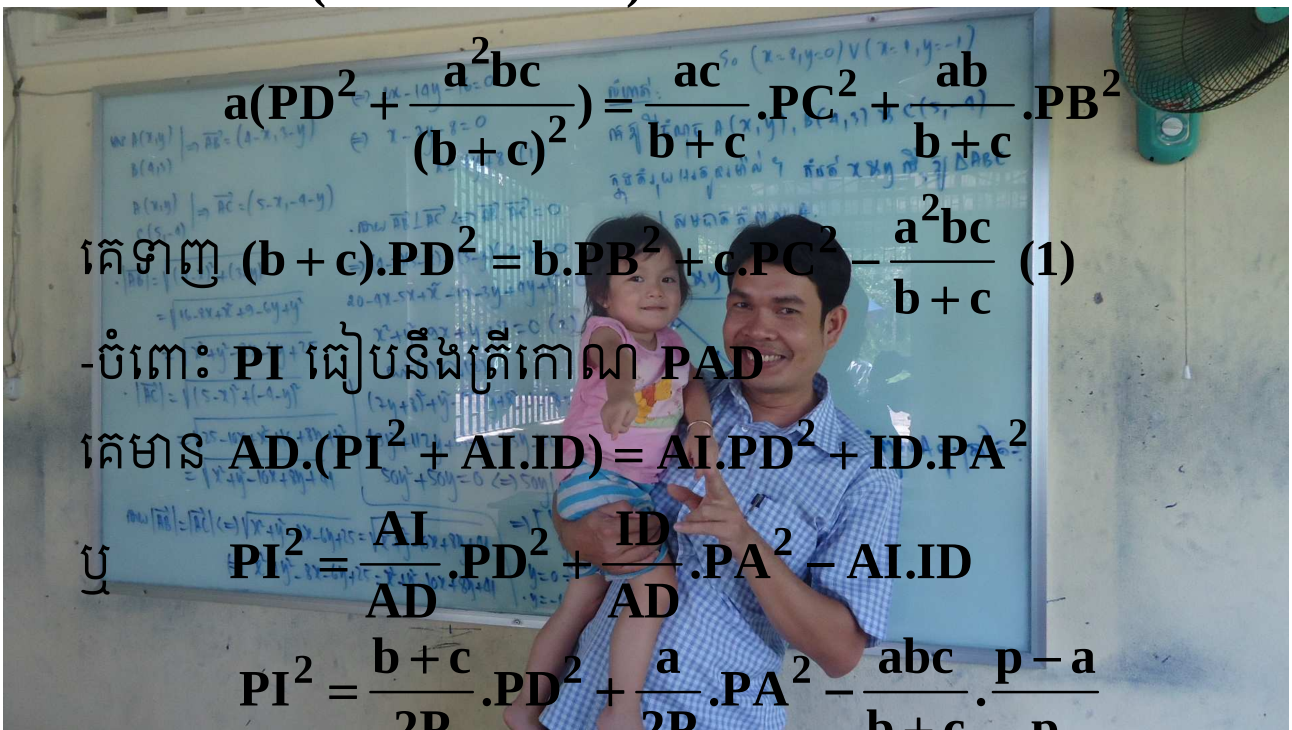
គេទាញ $\frac{AI}{AD}=\frac{b+c}{2p}$, $\frac{ID}{AD}=\frac{a}{2p}$

និង $AI.ID=\frac{a(b+c)}{4p^2}.AD^2=\frac{abc}{b+c}.\frac{p-a}{p}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Stewart គេបាន ៖

-ចំពោះ **PD** ជៀបនឹងត្រីកោណ **PBC**

គេមាន $BC.(PD^2+BD.DC)=BD.PC^2+DC.PB^2$



$$a(PD^2+\frac{a^2bc}{(b+c)^2})=\frac{ac}{b+c}.PC^2+\frac{ab}{b+c}.PB^2$$

គេទាញ $(b+c).PD^2=b.PB^2+c.PC^2-\frac{a^2bc}{b+c}$ (1)

-ចំពោះ **PI** ជៀបនឹងត្រីកោណ **PAD**

គេមាន $AD.(PI^2+AI.ID)=AI.PD^2+ID.PA^2$

ឬ $PI^2=\frac{AI}{AD}.PD^2+\frac{ID}{AD}.PA^2-AI.ID$

$$PI^2=\frac{b+c}{2P}.PD^2+\frac{a}{2P}.PA^2-\frac{abc}{b+c}.\frac{p-a}{p}$$

$$2p.PI^2=(b+c).PD^2+a.PA^2-\frac{2abc(p-a)}{b+c}$$

$$2p.PI^2=(b+c).PD^2+a.PA^2-\frac{abc(b+c-a)}{b+c} \quad (2)$$

យក(1) ជួសក្នុង (2) បន្ទាប់ពីបង្រួមគេបាន ៖

$$a.PA^2+b.PB^2+c.PC^2=(a+b+c).PI^2+abc \text{ ។}$$

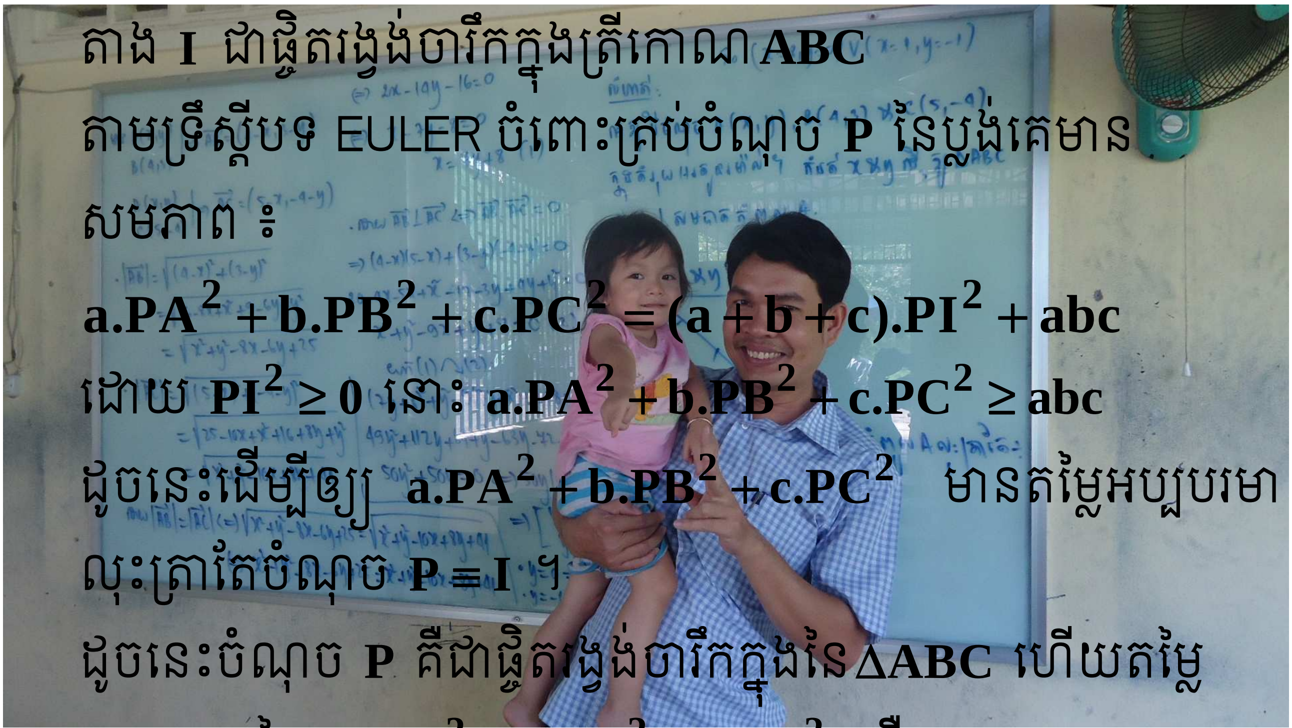
លំហាត់ទី៧៦ (Korea National Olympiad 1993)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a , AC = b , AB = c$

ចូរកំណត់ចំណុច P នៃប្លង់ដើម្បីឲ្យ $a.PA^2 + b.PB^2 + c.PC^2$

មានតម្លៃអប្បបរមា រួចកំណត់តម្លៃអប្បបរមានេះ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC

តាមទ្រឹស្តីបទ EULER ចំពោះគ្រប់ចំណុច P នៃប្លង់គេមាន

សមភាព ៖

$$a.PA^2 + b.PB^2 + c.PC^2 = (a + b + c).PI^2 + abc$$

ដោយ $PI^2 \geq 0$ នោះ $a.PA^2 + b.PB^2 + c.PC^2 \geq abc$

ដូចនេះដើម្បីឲ្យ $a.PA^2 + b.PB^2 + c.PC^2$ មានតម្លៃអប្បបរមា

លុះត្រាតែចំណុច $P = I$ ។

ដូចនេះចំណុច P គឺជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ ΔABC ហើយតម្លៃ

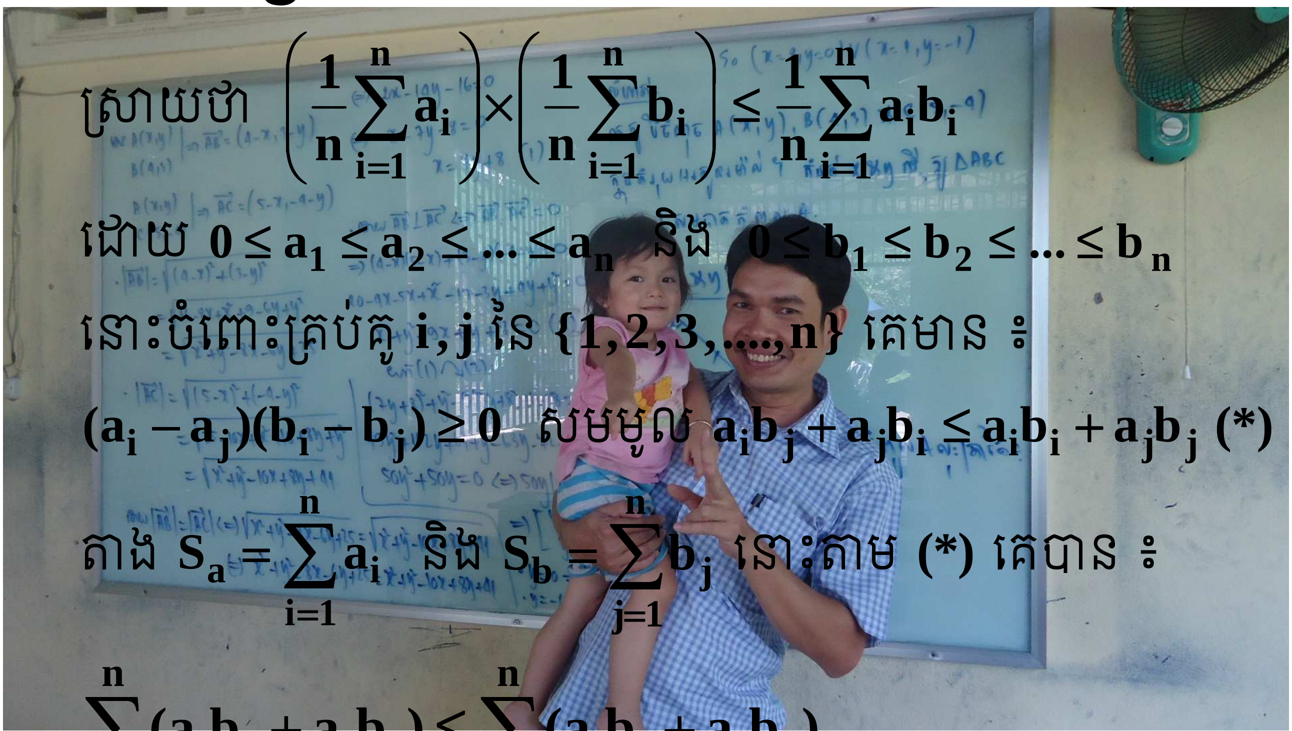
អប្បបរមានៃ $a.PA^2 + b.PB^2 + c.PC^2$ គឺ abc ។

លំហាត់ទី៧៧

បើ $0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ និង $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$

ចូរស្រាយថា $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

ដោយ $0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ និង $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$

នោះចំពោះគ្រប់គូ i,j នៃ $\{1,2,3,\ldots,n\}$ គេមាន ៖

$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0$ សមមូល $a_i b_j + a_j b_i \le a_i b_i + a_j b_j$ (*)

តាង $S_a = \sum_{i=1}^{n} a_i$ និង $S_b = \sum_{j=1}^{n} b_j$ នោះតាម (*) គេបាន ៖

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i b_j + a_j b_i) \le \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i + a_j b_j)$$

$$b_j . S_a + a_j S_b \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + n\, a_j b_j \quad (**)$$

តាមទំនាក់ទំនង (**) យើងធ្វើផលបូកតាម j គេបាន ៖

$$\sum_{j=1}^{n}(b_jS_a + a_jS_b) \le \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + na_jb_j\right]$$

$$S_b.S_a + S_a.S_b \le n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + n\sum_{j=1}^{n} a_jb_j$$

$$2S_aS_b \le 2n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

$$\sum_{i=1}^{a} a_i \times \sum_{i=1}^{n} b_i \le n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង n^2 គេបាន ៖

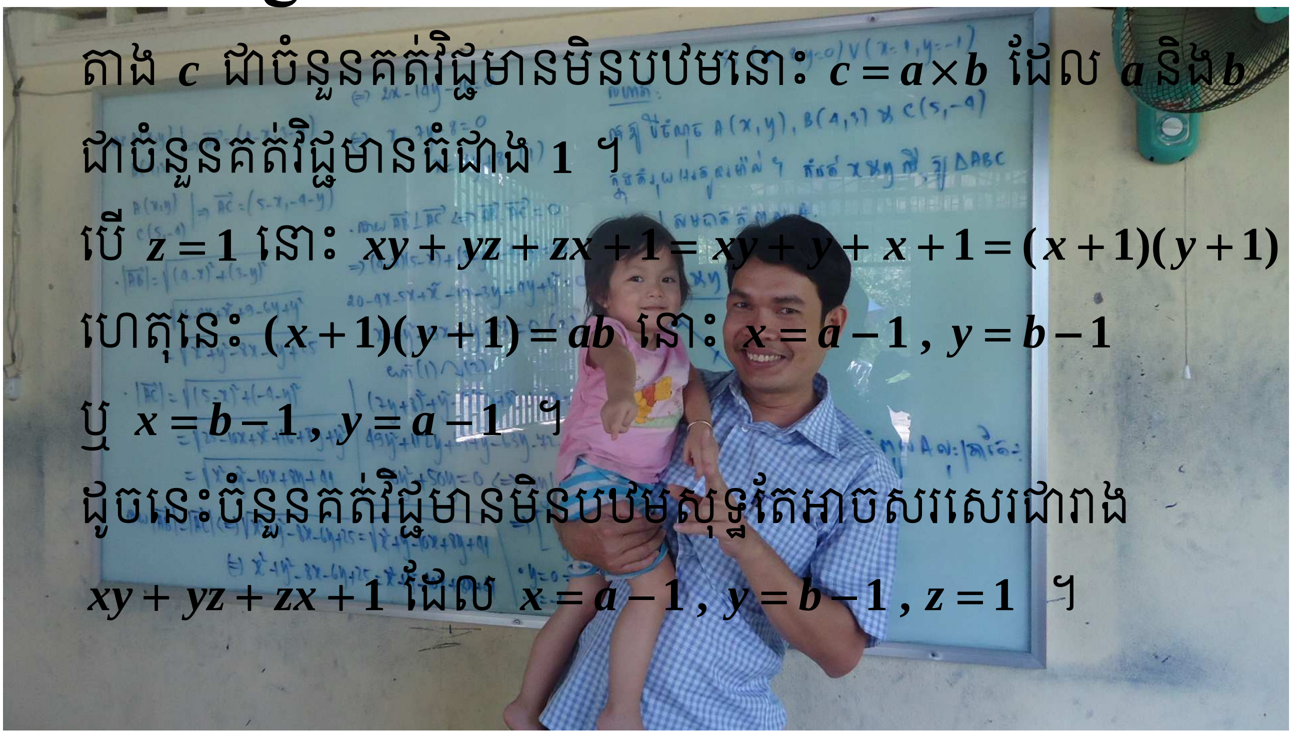
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$ ពិត

ដូចនេះ $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ ។

លំហាត់ទី៧៨

ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនបឋមសុទ្ធតែអាចសរសេរ
ជារាង $xy+yz+zx+1$ ដែល $x,y,z\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនបឋមនោះ $c=a\times b$ ដែល a និង b
ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំជាង 1 ។

បើ $z=1$ នោះ $xy+yz+zx+1=xy+y+x+1=(x+1)(y+1)$

ហេតុនេះ $(x+1)(y+1)=ab$ នោះ $x=a-1\,,\ y=b-1$

ឬ $x=b-1\,,\ y=a-1$ ។

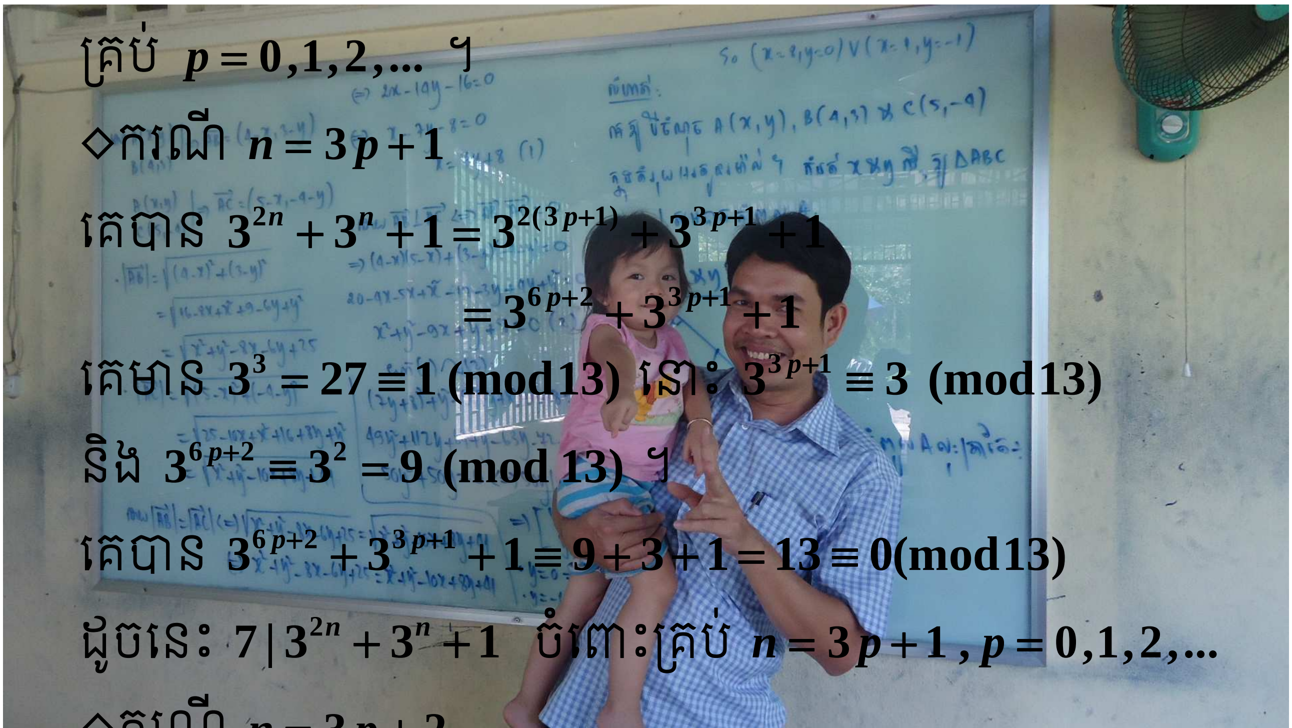
ដូចនេះចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនបឋមសុទ្ធតែអាចសរសេរជារាង
$xy+yz+zx+1$ ដែល $x=a-1\,,\ y=b-1\,,\ z=1$ ។

លំហាត់ទី៧៩

ចូរបង្ហាញថាបើ n ចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះ $3^{2n}+3^{n}+1$ ចែកដាច់នឹង 13 ជានិច្ចគ្រប់ $n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

បើn ចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះ $n=3p+1$ ឬ $n=3p+2$



គ្រប់ $p=0,1,2,...$ ។

◇ករណី $n=3p+1$

គេបាន $3^{2n}+3^{n}+1=3^{2(3p+1)}+3^{3p+1}+1$

$$=3^{6p+2}+3^{3p+1}+1$$

គេមាន $3^{3}=27\equiv 1\ (\text{mod}13)$ នោះ $3^{3p+1}\equiv 3\ (\text{mod}13)$

និង $3^{6p+2}\equiv 3^{2}=9\ (\text{mod } 13)$ ។

គេបាន $3^{6p+2}+3^{3p+1}+1\equiv 9+3+1=13\equiv 0(\text{mod}13)$

ដូចនេះ $7\,|\,3^{2n}+3^{n}+1$ ចំពោះគ្រប់ $n=3p+1\,,p=0,1,2,...$

◇ករណី $n=3p+2$

គេបាន $3^{2n}+3^{n}+1=3^{2(3p+2)}+3^{3p+2}+1=3^{6p+4}+3^{3p+2}+1$

គេមាន $3^{3}=27\equiv 1\ (\text{mod}13)$ នោះ $3^{3p+2}\equiv 9\ (\text{mod}13)$

និង $3^{6p+4}\equiv 9^{2}=81\equiv 3\ (\text{mod } 13)$ ។

គេបាន $3^{6p+2}+3^{3p+1}+1\equiv 9+3+1=13\equiv 0(\text{mod}13)$

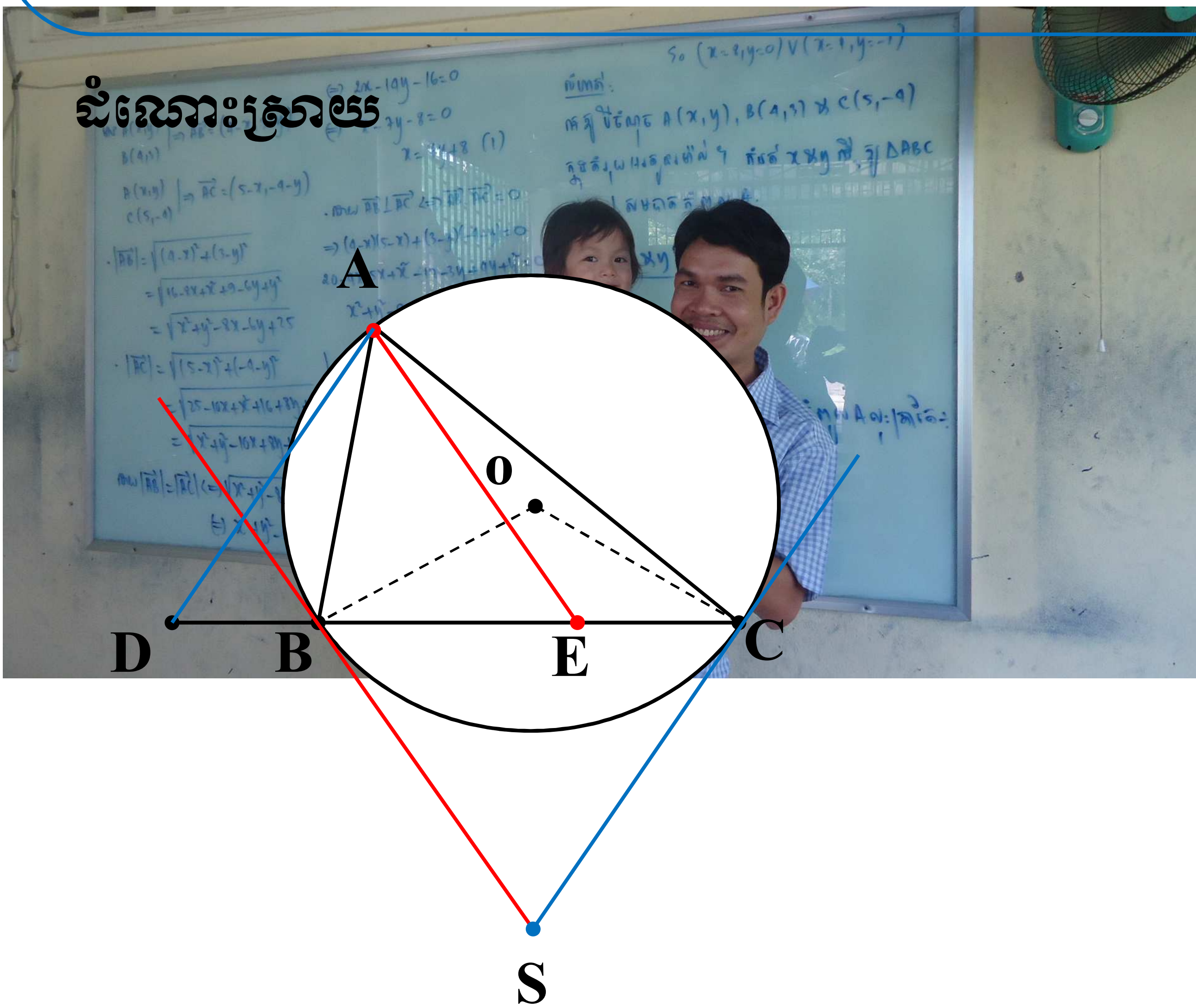
ដូចនេះ $7\,|\,3^{2n}+3^{n}+1$ ចំពោះគ្រប់ $n=3p+2\,,p=0,1,2,...$

លំហាត់ទី៨០ (Spain Mathematical Olympiad 1998)

គេឲ្យត្រីកោណ **A** មួយ ។ ចំណុច **D** និង **E** ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់**BC**ដោយដឹងថាបន្ទាត់ **AD** និង **F** ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ **ABC** ត្រង់ **B** និង **C** រៀងគ្នា

ចូរស្រាយថា $\frac{BE}{CD}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$?

ដំណោះស្រាយ



តាង **S** ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រី

កោណ ABC ត្រង់ B និង C រៀងគ្នា ។

គេបាន $\angle SBC = \angle BAC$

ដោយ $AE//SB$ នោះ $\angle SBC = \angle AEB$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)

គេទាញ $\angle SBC = \angle BAC = \angle AEB$

ហើយ $\angle ABC = \angle ABE$ (មុំរួម) នាំឲ្យ ΔAEB ដូច ΔCAB ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BC}$ ឬ $BE = \frac{AB^2}{BC}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $CD = \frac{AC^2}{BC}$ (2)

ចែកសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន

$$\frac{BE}{CD} = \frac{\frac{AB^2}{BC}}{\frac{AC^2}{BC}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

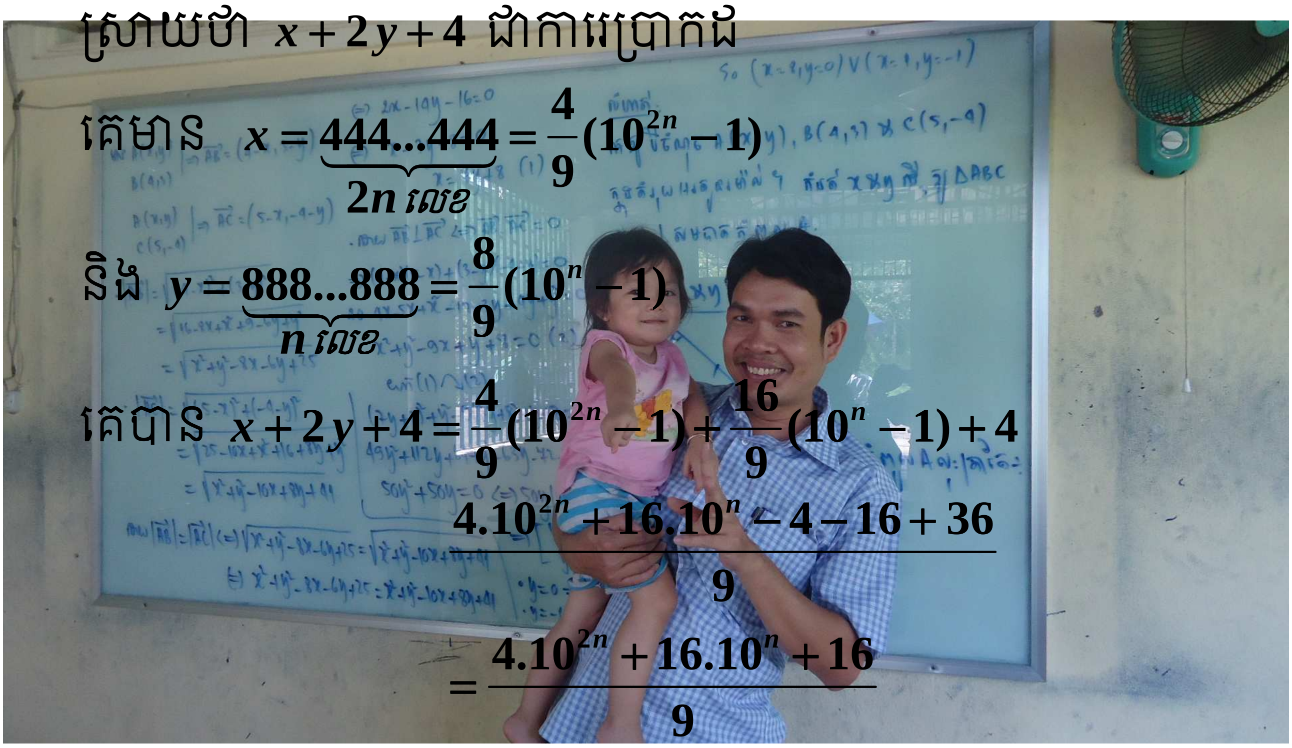
ដូចនេះ $\frac{BE}{CD} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេឲ្យចំនួន $x=\underbrace{444...444}_{2n\text{ លេខ}}$ និង $y=\underbrace{888...888}_{n\text{ លេខ}}$

ចូរស្រាយថា $x+2y+4$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $x+2y+4$ ជាការេប្រាកដ

គេមាន $x=\underbrace{444...444}_{2n\text{ លេខ}}=\frac{4}{9}(10^{2n}-1)$

និង $y=\underbrace{888...888}_{n\text{ លេខ}}=\frac{8}{9}(10^{n}-1)$

គេបាន $x+2y+4=\frac{4}{9}(10^{2n}-1)+\frac{16}{9}(10^{n}-1)+4$

$$=\frac{4.10^{2n}+16.10^{n}-4-16+36}{9}$$

$$=\frac{4.10^{2n}+16.10^{n}+16}{9}$$

$$=\frac{(2.10^{n}+4)^2}{9}=\left(2\times\frac{10^{n}+2}{3}\right)^2$$

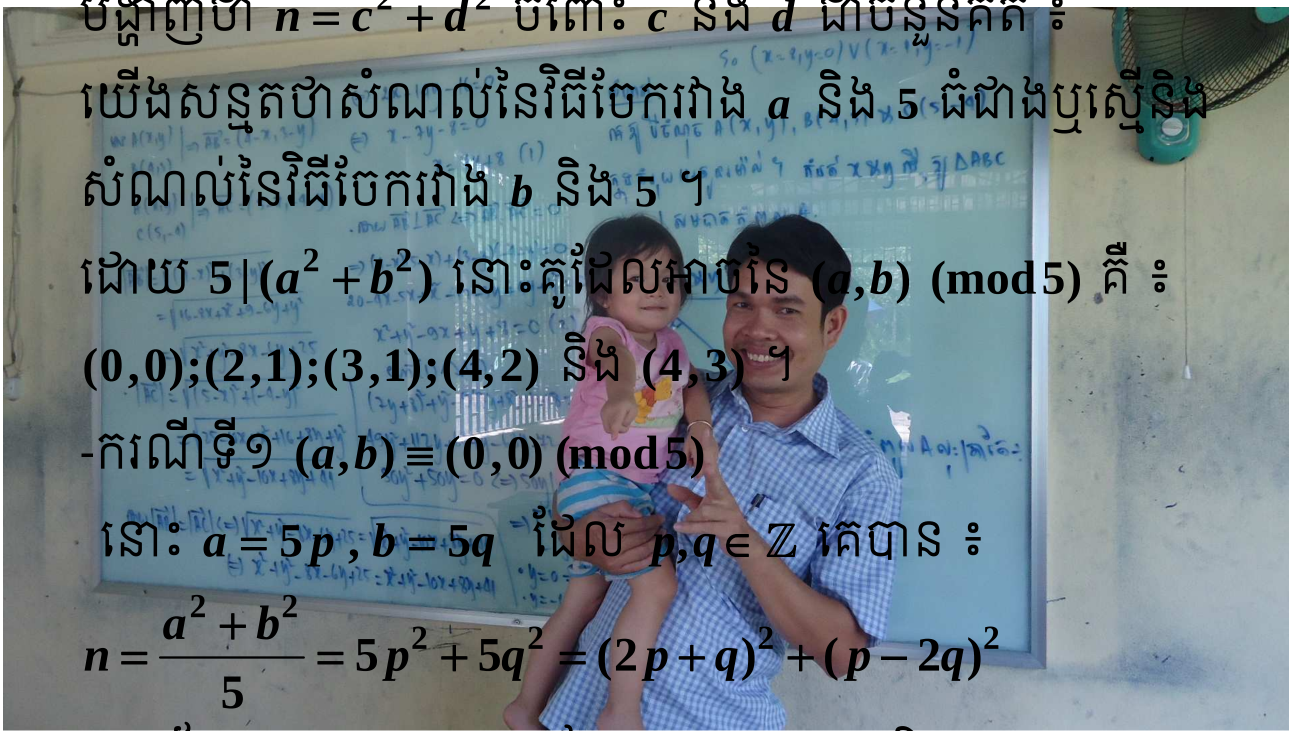
ដោយ $3|10^{n}+2$ គ្រប់តម្លៃ n នោះ $x+2y+4$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ ។

លំហាត់ទី៨២

គេឲ្យ a,b និង n ជាចំនួនគត់ដែល $\frac{a^2+b^2}{2}=n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $n=c^2+d^2$ ចំពោះ c និង d ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $n=c^2+d^2$ ចំពោះ c និង d ជាចំនួនគត់ ៖

យើងសន្មតថាសំណល់នៃវិធីចែករវាង a និង 5 ធំជាងឬស្មើនិង សំណល់នៃវិធីចែករវាង b និង 5 ។

ដោយ $5\,|\,(a^2+b^2)$ នោះគូដែលអាចនៃ $(a,b)\ (\text{mod}\,5)$ គឺ ៖

$(0,0);(2,1);(3,1);(4,2)$ និង $(4,3)$ ។

-ករណីទី១ $(a,b)\equiv(0,0)\ (\text{mod}\,5)$

នោះ $a=5p\,,\,b=5q$ ដែល $p,q\in\mathbb{Z}$ គេបាន ៖

$$n=\frac{a^2+b^2}{5}=5p^2+5q^2=(2p+q)^2+(p-2q)^2$$

មានន័យថា $n=c^2+d^2$ ដែល $c=2p+q$ និង $d=p-2q$ ។

-ករណីទី២ $(a,b)\equiv(2,1)\ (\text{mod}\,5)$

នោះ $a=5p+2\,,\,b=5q+1$ ដែល $p,q\in\mathbb{Z}$ គេបាន ៖

$$n=\frac{a^2+b^2}{5}=5p^2+5q^2+4p+2q+1=(2p+q+1)^2+(p-2q)^2$$

មានន័យថា $n=c^2+d^2$ ដែល $c=2p+q+1$ និង $d=p-2q$

-ករណីទី៣ $(a,b)\equiv(3,1)\ (\text{mod}\,5)$

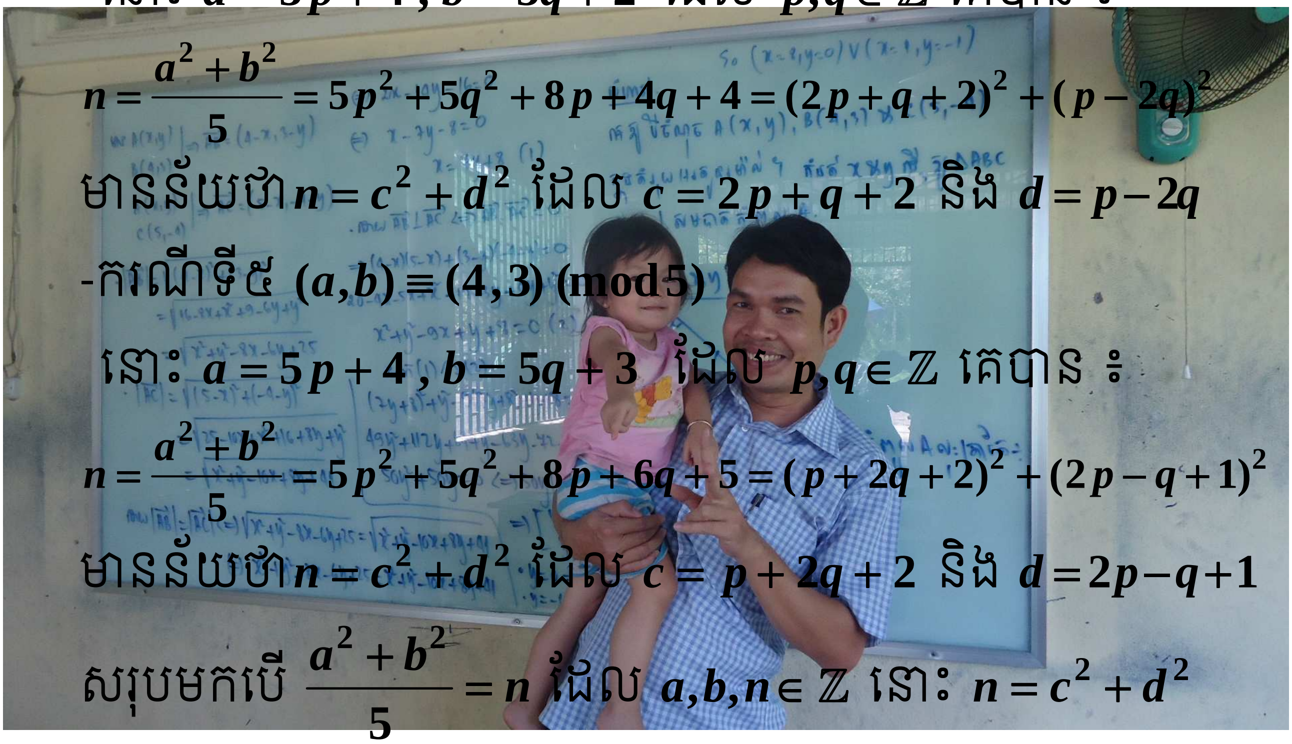
នោះ៖ $a=5p+3\ ,\ b=5q+1$ ដែល $p,q\in\mathbb{Z}$ គេបាន ៖

$$n=\frac{a^2+b^2}{5}=5p^2+5q^2+6p+2q+2=(2p-q+1)^2+(p+2q+1)^2$$

មានន័យថា $n=c^2+d^2$ ដែល $c=2p-q+1$ និង $d=p+2q+1$

-ករណីទី៤ $(a,b)\equiv(4,2)\ (\text{mod}\,5)$

នោះ៖ $a=5p+4\ ,\ b=5q+2$ ដែល $p,q\in\mathbb{Z}$ គេបាន ៖



$$n=\frac{a^2+b^2}{5}=5p^2+5q^2+8p+4q+4=(2p+q+2)^2+(p-2q)^2$$

មានន័យថា $n=c^2+d^2$ ដែល $c=2p+q+2$ និង $d=p-2q$

-ករណីទី៥ $(a,b)\equiv(4,3)\ (\text{mod}\,5)$

នោះ៖ $a=5p+4\ ,\ b=5q+3$ ដែល $p,q\in\mathbb{Z}$ គេបាន ៖

$$n=\frac{a^2+b^2}{5}=5p^2+5q^2+8p+6q+5=(p+2q+2)^2+(2p-q+1)^2$$

មានន័យថា $n=c^2+d^2$ ដែល $c=p+2q+2$ និង $d=2p-q+1$

សរុបមកបើ $\dfrac{a^2+b^2}{5}=n$ ដែល $a,b,n\in\mathbb{Z}$ នោះ៖ $n=c^2+d^2$

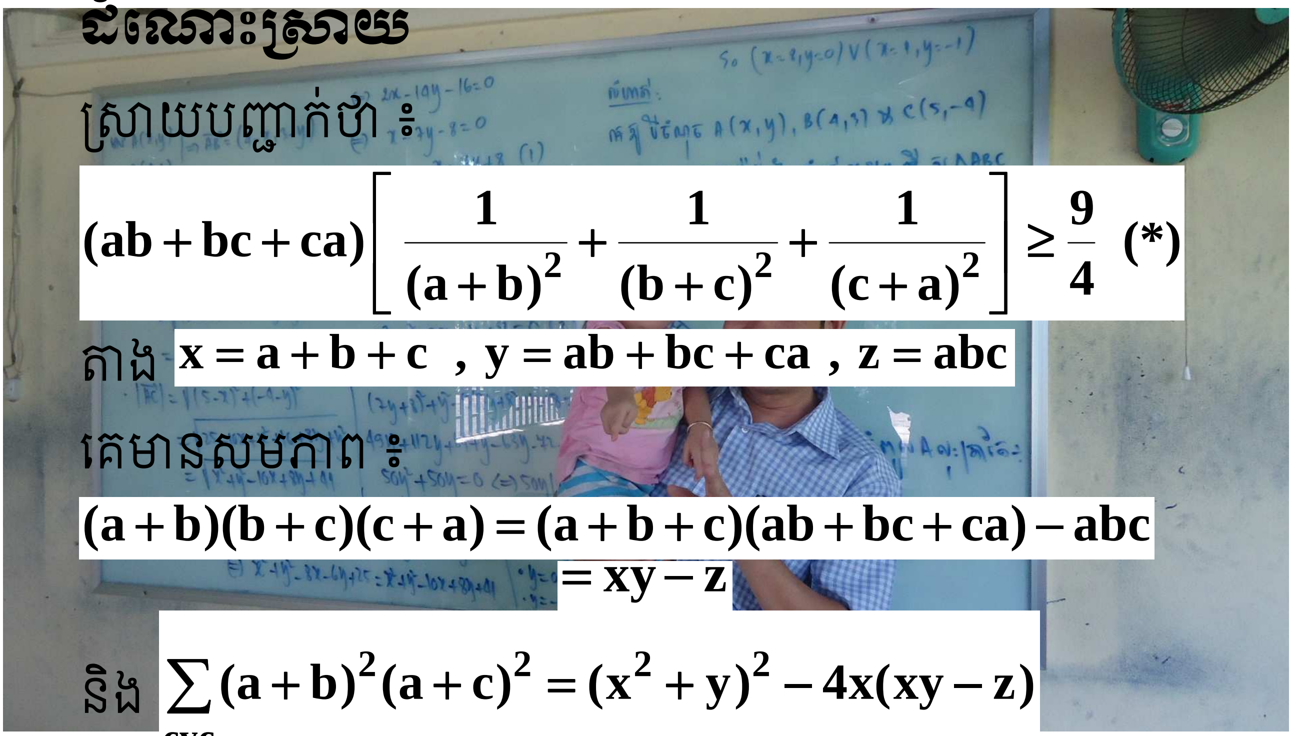
ដែល $c,d\in\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ទី៨៣ (Iran 1996)

គេឱ្យបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a,b,c និងមិនសូន្យព្រមគ្នាពីរ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}\quad(*)$$

តាង $x=a+b+c\ \ ,\ y=ab+bc+ca\ ,\ z=abc$

គេមានសមភាព ៖

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$
$$=xy-z$$

និង $\sum\limits_{cyc}(a+b)^2(a+c)^2=(x^2+y)^2-4x(xy-z)$

វិសមភាព (*) ខាងលើសមមូល

$$y\left[\frac{(x^2+y)^2-4x(xy-z)}{(xy-z)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$

សមមូល $4x^4y-17x^2y^2+4y^3+34xyz-9z^2\geq 0$

$$xy(x^3-4xy+9z)+y(x^4-5x^2y+4y^2+6xz)+z(xy-9z)\geq 0\ (**)$$

តាមវិសមភាព Schur ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន x,y,z គេមាន ៖

$$\sum_{cyc} x(x-y)(x-z)\geq 0 \Leftrightarrow x^3-4xy+9z\geq 0 \quad (1)$$

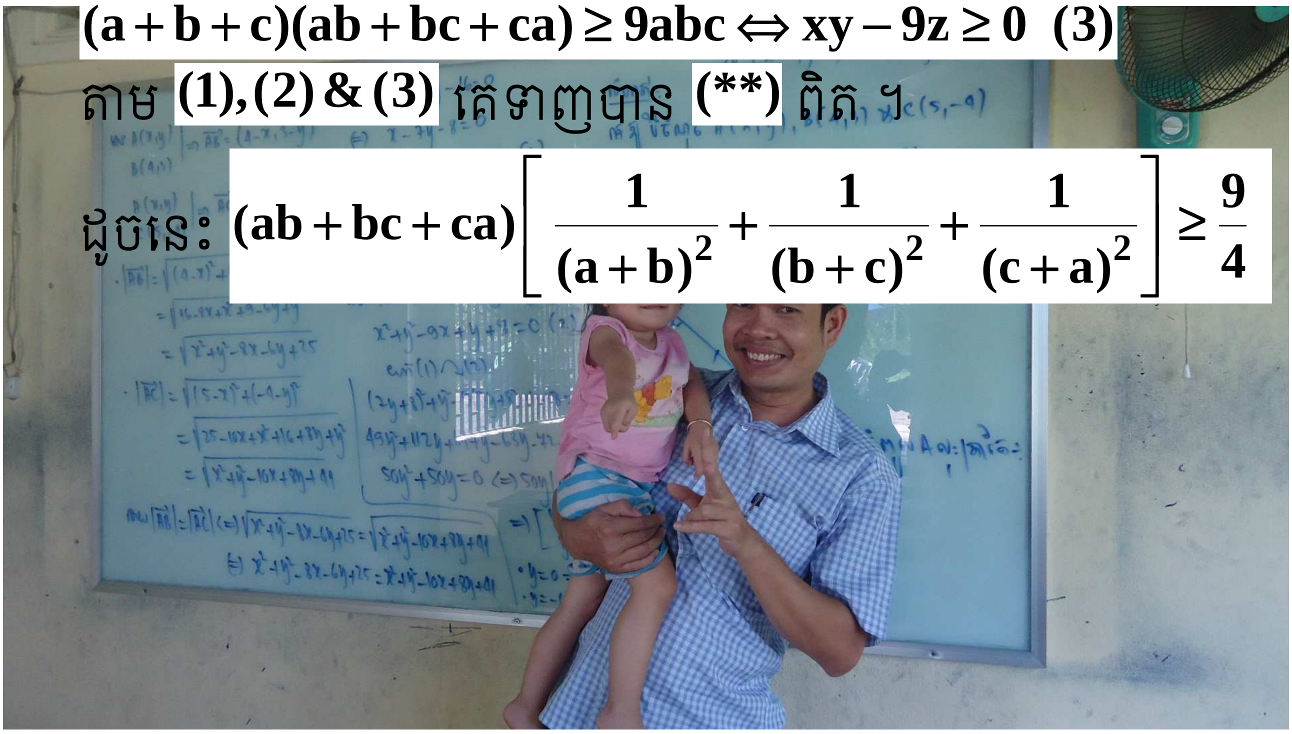
$$\sum_{cyc} x^2(x-y)(x-z)\geq 0 \Leftrightarrow x^4-5x^2y+4y^2+6xz\geq 0 \quad (2)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\geq 9abc \Leftrightarrow xy-9z\geq 0 \quad (3)$$

តាម $(1),(2)\ \&\ (3)$ គេទាញបាន $(**)$ ពិត ។

ដូចនេះ: $(ab+bc+ca)\left[\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(b+c)^2}+\dfrac{1}{(c+a)^2}\right]\geq \dfrac{9}{4}$

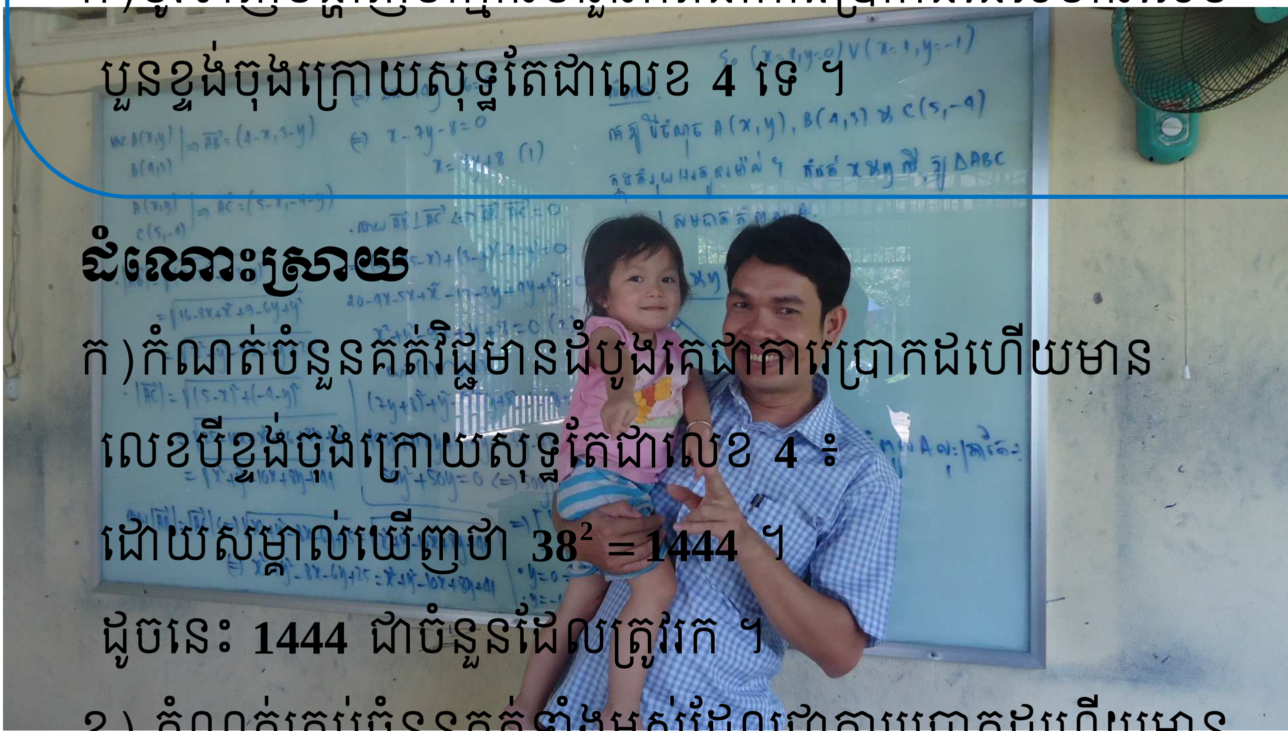


លំហាត់ទី៨៤

ក)ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូងគេជាការេប្រាកដហើយមាន លេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយសុទ្ធតែជាលេខ 4 ។

ខ)ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ដែលជាការេប្រាកដហើយ មានលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយសុទ្ធតែជាលេខ 4 ។

គ)ចូរទាញបង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ជាការេប្រាកដដែលមានលេខ បួនខ្ទង់ចុងក្រោយសុទ្ធតែជាលេខ 4 ទេ ។



ដំណោះស្រាយ

ក)កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូងគេជាការេប្រាកដហើយមាន លេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយសុទ្ធតែជាលេខ 4 ៖

ដោយសម្គាល់ឃើញថា $38^2 = 1444$ ។

ដូចនេះ 1444 ជាចំនួនដែលត្រូវរក ។

ខ) កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ទាំងអស់ដែលជាការេប្រាកដហើយមាន លេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយសុទ្ធតែជាលេខ 4 ៖

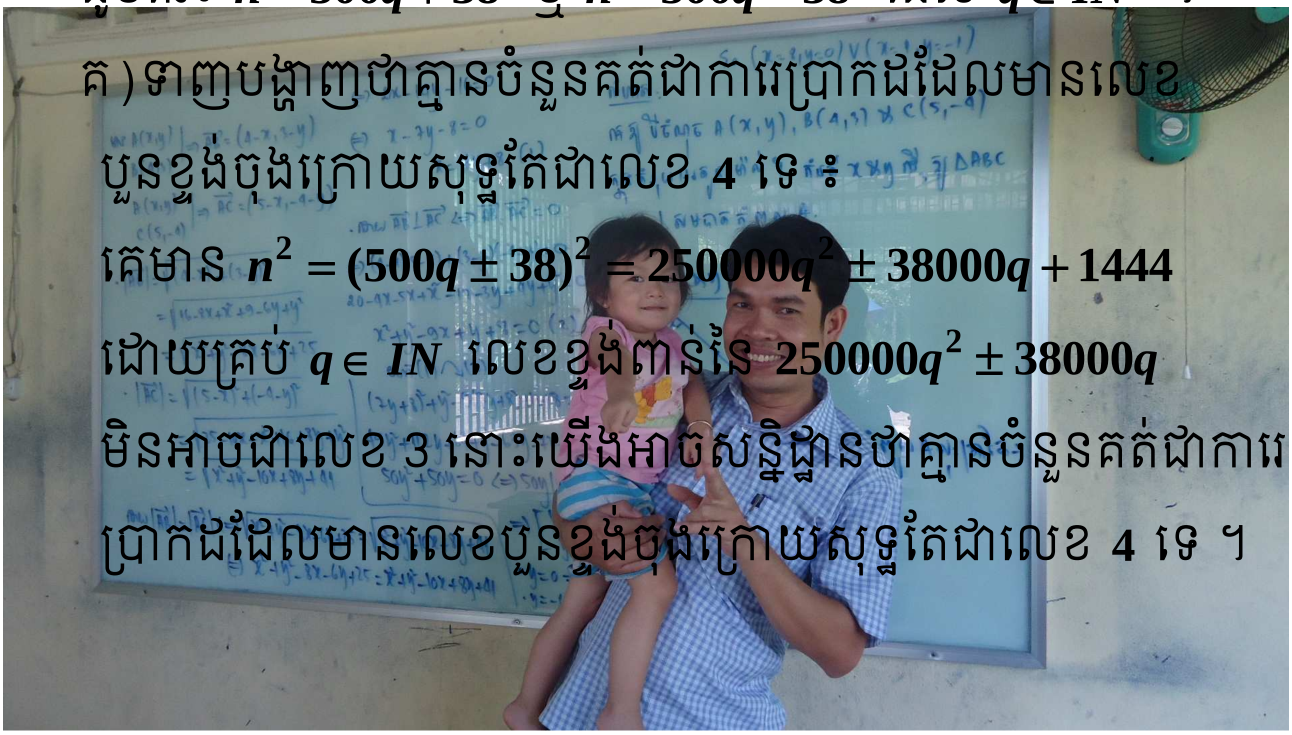
តាង n^2 ជាចំនួគត់វិជ្ជមានដែលមានលេខបីខ្ទង់ចុងក្រោយសុទ្ធ តែជាលេខ 4 នោះគេបាន $n^2 - 1444 = (n-38)(n+38)$ ជាពហុ គុណនៃ $1000 = 2^3 \times 5^3$ ។

គេទាញបាន $n-38, n+38$ យ៉ាងតិចមានមួយត្រូវចែកដាច់នឹង 4 ។

ដោយ $(n+38)-(n-38)=76=4\times19$ និង 76 ចែកមិនដាច់នឹង 5 នោះដើម្បីឲ្យ $(n-38)(n+38)$ ជាពហុគុណនៃ 5^3 លុះត្រាតែមានយ៉ាងតិចមួយនៃ $n-38$, $n+38$ ចែកដាច់នឹង 5^3 ។

សរុបមកគេត្រូវឲ្យយ៉ាងតិចមួយនៃ $n-38$, $n+38$ ជាពហុគុណនៃ $4\times5^3=500$ ។

ដូចនេះ $n=500q+38$ ឬ $n=500q-38$ ដែល $q\in IN$ ។



គ) ទាញបង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ជាការេប្រាកដដែលមានលេខបួនខ្ទង់ចុងក្រោយសុទ្ធតែជាលេខ 4 ទេ ៖

គេមាន $n^2=(500q\pm38)^2=250000q^2\pm38000q+1444$

ដោយគ្រប់ $q\in IN$ លេខខ្ទង់ពាន់នៃ $250000q^2\pm38000q$ មិនអាចជាលេខ 3 នោះយើងអាចសន្និដ្ឋានថាគ្មានចំនួនគត់ជាការេប្រាកដដែលមានលេខបួនខ្ទង់ចុងក្រោយសុទ្ធតែជាលេខ 4 ទេ ។

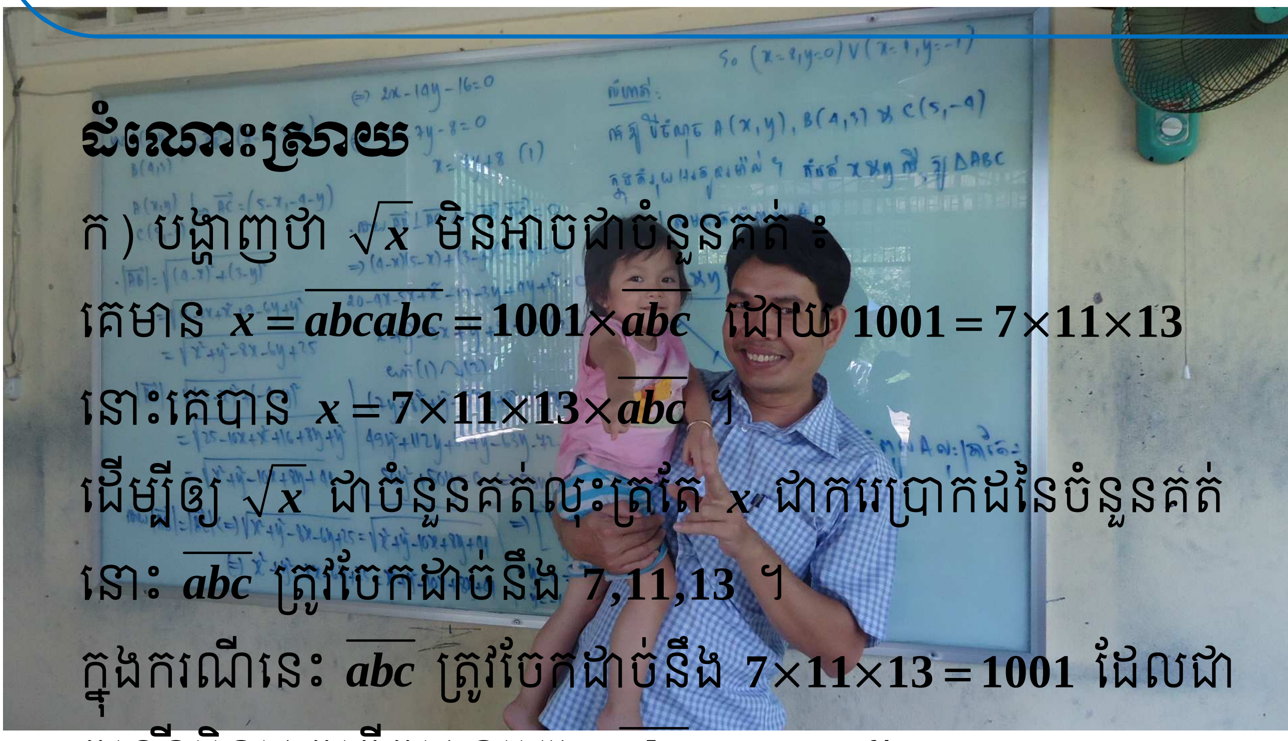
លំហាត់ទី៨៥

គេឲ្យ $x=\overline{abcabc}$ និង $y=\overline{d00d}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានក្នុងប្រព័ន្ធដេស៊ីម៉ាល់ ដែល $a,b,c,d\in\{1,2,3,...,9\}$ និង $d\neq 0$, $a\neq 0$ ។

ក)ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{x}$ មិនអាចជាចំនួនគត់ ។

ខ)ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x និង y ដោយដឹងថា $\sqrt{x+y}\in IN$

គ)ចូរកំណត់គូ (x,y) ដោយដឹងថា $\sqrt{xy}$ ជាចំនួនគត់ធំជាងគេ ។



ដំណោះស្រាយ

ក) បង្ហាញថា $\sqrt{x}$ មិនអាចជាចំនួនគត់ ៖

គេមាន $x=\overline{abcabc}=1001\times\overline{abc}$ ដោយ $1001=7\times 11\times 13$

នោះគេបាន $x=7\times 11\times 13\times\overline{abc}$ ។

ដើម្បីឲ្យ $\sqrt{x}$ ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ x ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

នោះ $\overline{abc}$ ត្រូវចែកដាច់នឹង $7,11,13$ ។

ក្នុងករណីនេះ $\overline{abc}$ ត្រូវចែកដាច់នឹង $7\times 11\times 13=1001$ ដែលជាករណីមិនអាចកើតមានព្រោះ $\overline{abc}<1001$ ។

ដូចនេះ$\sqrt{x}$ មិនអាចជាចំនួនគត់ ។

ខ) កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ x និង y ដោយដឹងថា $\sqrt{x+y}\in IN$

គេមាន $x=\overline{abcabc}=1001\times\overline{abc}$ និង $y=\overline{d00d}=1001\times d$

គេបាន $x+y=1001(\overline{abc}+d)=7\times 11\times 13\,(\overline{abc}+d)$

ដើម្បីឲ្យ $\sqrt{x+y}$ ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $x+y$ ជាការេប្រាកដ

នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះគេត្រូវឲ្យ $\overline{abc}+d=1001$ ។

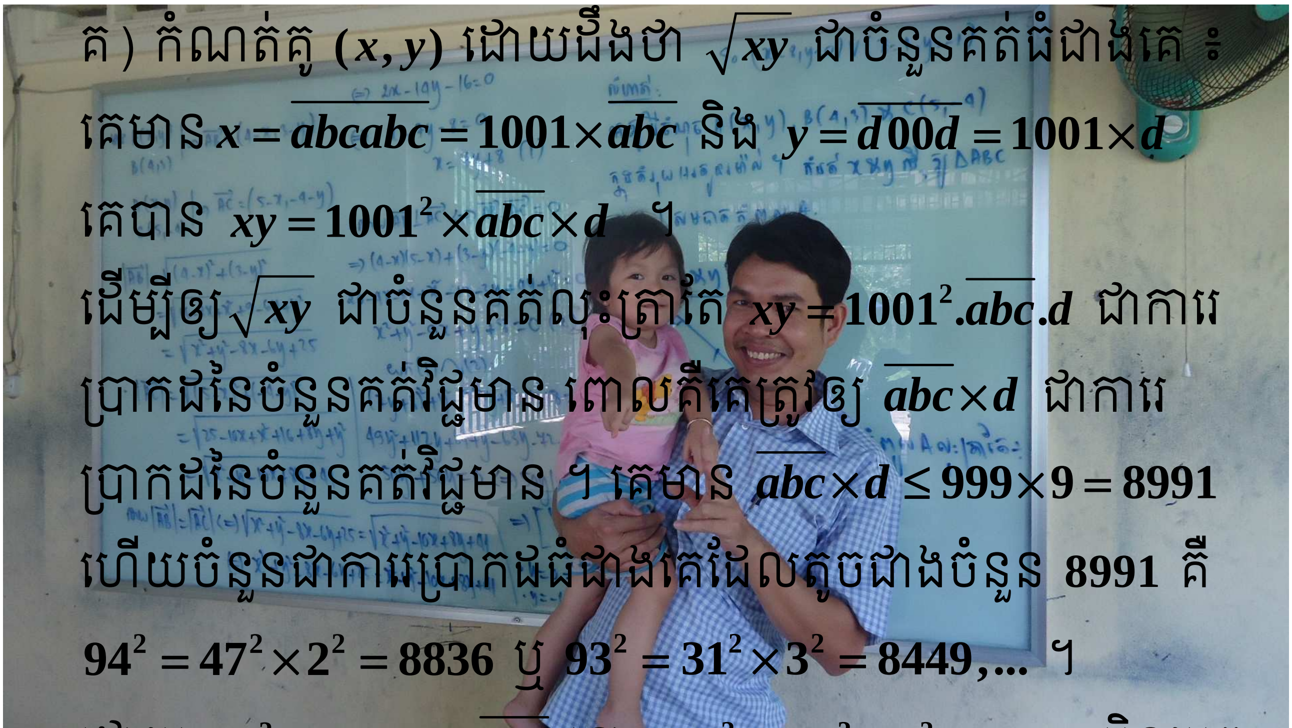
តាមសមភាព $\overline{abc}+d=1001$ គេត្រូវឲ្យ $a=9$, $b=9$

ព្រោះបើ $a<9,b<9$ នោះ $\overline{abc}+d<10000$ ។

គេបាន $\overline{99c}+d=1001$ សមមូល $990+c+d=1001$

សមមូល $c+d=1001-990=11$ ។

គេទាញបានគូចម្លើយ $(c,d),(d,c)\in\{(2,9),(3,8),(4,7),(5,6)\}$ ។



គ) កំណត់គូ (x,y) ដោយដឹងថា $\sqrt{xy}$ ជាចំនួនគត់ធំជាងគេ ៖

គេមាន $x=\overline{abcabc}=1001\times\overline{abc}$ និង $y=\overline{d00d}=1001\times d$

គេបាន $xy=1001^2\times\overline{abc}\times d$ ។

ដើម្បីឲ្យ $\sqrt{xy}$ ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $xy=1001^2.\overline{abc}.d$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ពោលគឺគេត្រូវឲ្យ $\overline{abc}\times d$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ គេមាន $\overline{abc}\times d\le 999\times 9=8991$ ហើយចំនួនជាការេប្រាកដធំជាងគេដែលតូចជាងចំនួន 8991 គឺ

$94^2=47^2\times 2^2=8836$ ឬ $93^2=31^2\times 3^2=8449,...$ ។

ដោយ $47^2=2209>\overline{abc}$ នោះ $94^2=47^2\times 2^2=8836$ មិនយក

ហើយ $31^2=961$ មានរាង $\overline{abc}$ នោះ $\overline{abc}\times d=961\times 9=93^2$

ដែល $\overline{abc}=961$, $d=9$ ។ ដូចនេះ $x=961961$, $y=9009$

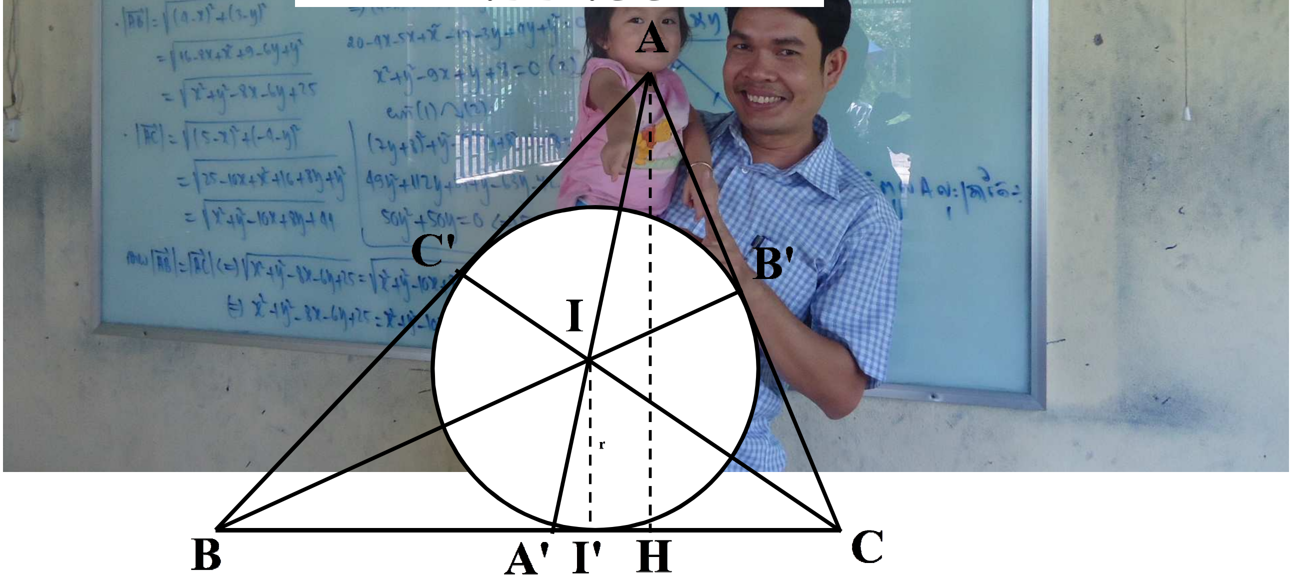
លំហាត់ទី៨៦

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ គេតាង **I** ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនេះ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ **A , B , C** កាត់ជ្រុងឈមរៀងគ្នាត្រង់ **A' , B' , C'** ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$

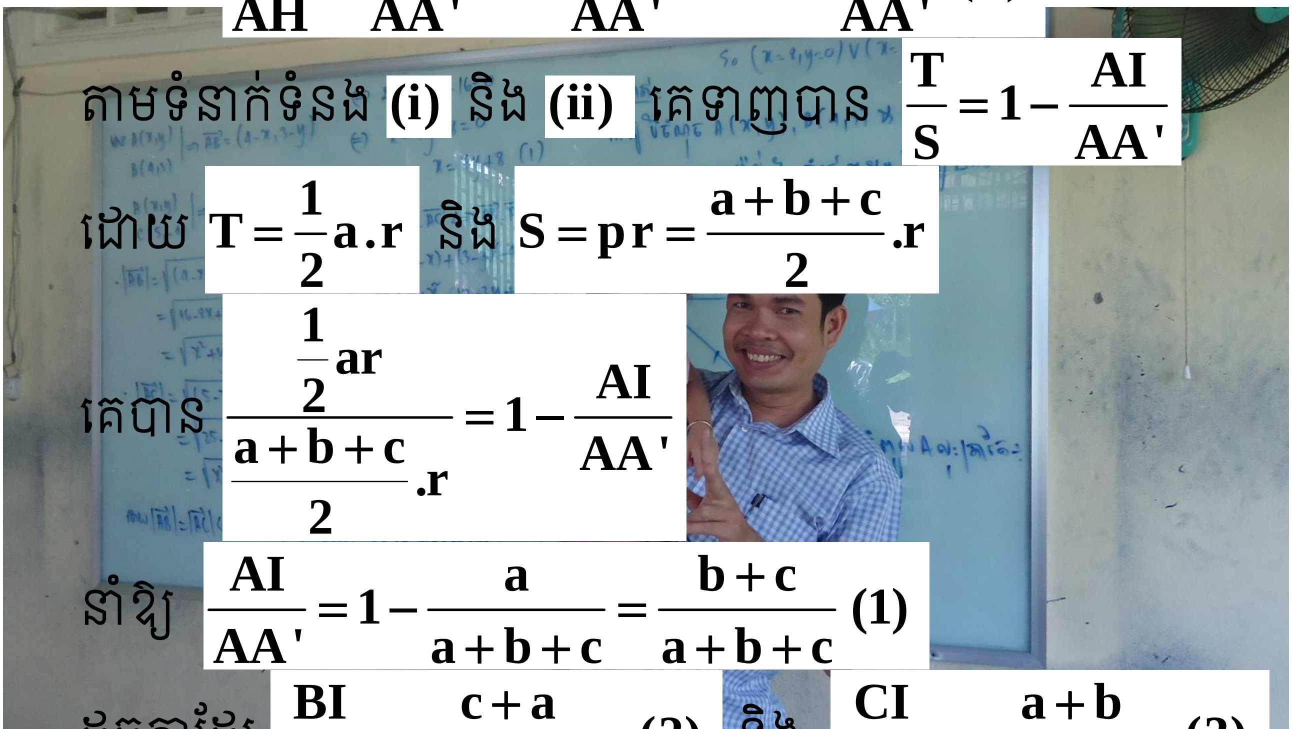


តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ និង **r** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ហើយ **S** និង **T** រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ **ABC** និង **IBC** ។

យើងមាន $S=\frac{1}{2}AH.BC$ និង $T=\frac{1}{2}II'.BC$

គេបាន $\frac{T}{S}=\frac{II'}{AH}$ (i)

ត្រីកោណកែង $AA'H$ និង $IA'I'$ មានមុំ $\angle A'AH=\angle A'II'$ (មុំត្រូវគ្នា) ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។



គេបាន $\frac{II'}{AH}=\frac{IA'}{AA'}=\frac{AA'-AI}{AA'}=1-\frac{AI}{AA'}$ (ii)

តាមទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន $\frac{T}{S}=1-\frac{AI}{AA'}$

ដោយ $T=\frac{1}{2}a.r$ និង $S=pr=\frac{a+b+c}{2}.r$

គេបាន $\dfrac{\frac{1}{2}ar}{\frac{a+b+c}{2}.r}=1-\frac{AI}{AA'}$

នាំឱ្យ $\frac{AI}{AA'}=1-\frac{a}{a+b+c}=\frac{b+c}{a+b+c}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{BI}{BB'}=\frac{c+a}{a+b+c}$ (2) និង $\frac{CI}{CC'}=\frac{a+b}{a+b+c}$ (3)

ធ្វើវិធីគុណទំនាក់ទំនង (1) , (2) និង (3) គេបាន ៖

$$\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \quad (4)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$2(a+b+c)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

គេទាញ $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$

ហេតុនេះ $\dfrac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\leq\dfrac{8}{27}$ (*)

ម្យ៉ាងទៀតយើងសន្មតថា $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}>\dfrac{1}{4}$ ពិត

យើងបាន $4(a+b)(b+c)(c+a)>(a+b+c)^3$

ដោយ $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$$4(a+b)(b+c)(c+a)>a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)-a^3-b^3-c^3>0$$

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+4abc>0$$

ដោយ $a\,,b\,,c$ ជាជ្រុងត្រីកោណមួយនោះ $\begin{cases}a+b>c\\ a+c>b\\ b+c>a\end{cases}$

គេទាញ $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+4abc>0$ ពិត

ហេតុនេះ $\dfrac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}>\dfrac{1}{4}$ (**)

តាម (*) និង (**) គេបាន $\dfrac{1}{4}<\dfrac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\leq\dfrac{8}{27}$ ។

ដូចនេះ $\dfrac{1}{4}<\dfrac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\leq\dfrac{8}{27}$ ។

លំហាត់ទី៨៧

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{2bc}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{2ca}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2ab}}\geq\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ដាដំបូងយើងនឹងស្រាយថា $\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{2bc}\leq\sqrt{2}(b+c)$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$$(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{2bc})^2\leq 2(b+c)^2$$

$$b^2+c^2+2\sqrt{2bc(b^2+c^2)}+2bc\leq 2b^2+4bc+2c^2$$

$$2\sqrt{2bc(b^2+c^2)}\leq b^2+c^2+2bc$$

$$(\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{2bc})^2\geq 0 \text{ ពិត}$$

គេបាន $\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{2bc}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ពិត

ព្រោះ $\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}$ (វិសមភាព Nesbit) ។

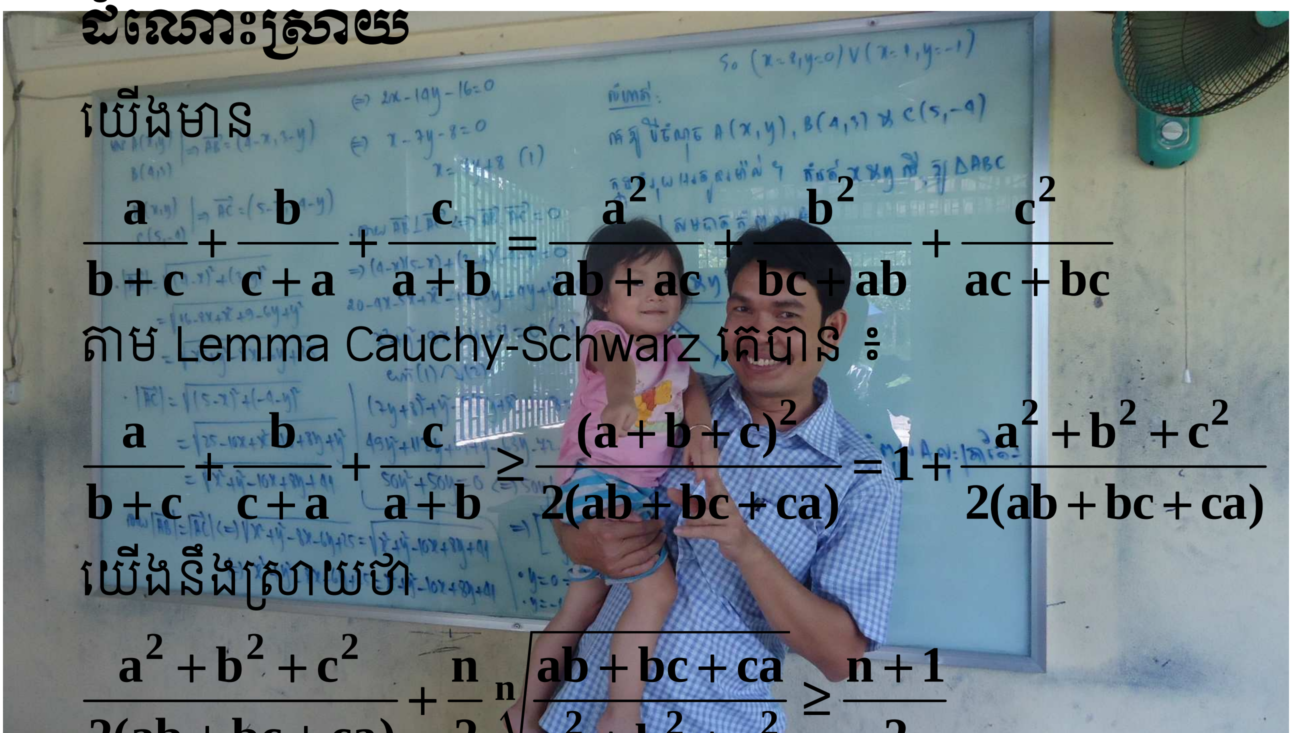
លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{n+3}{2}$$

ដែល $n\geq 2\,,\, n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ



យើងមាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}$$

តាម Lemma Cauchy-Schwarz គេបាន ៖

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}=1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}$$

យើងនឹងស្រាយថា

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+\frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{n+1}{2}$$

តាង $t=\sqrt[n]{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}\geq 1$ គេបាន $\dfrac{t^n}{2}+\dfrac{n}{2t}\geq\dfrac{n+1}{2}$

សមមូល $t^n+\dfrac{n}{t}\geq n+1$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

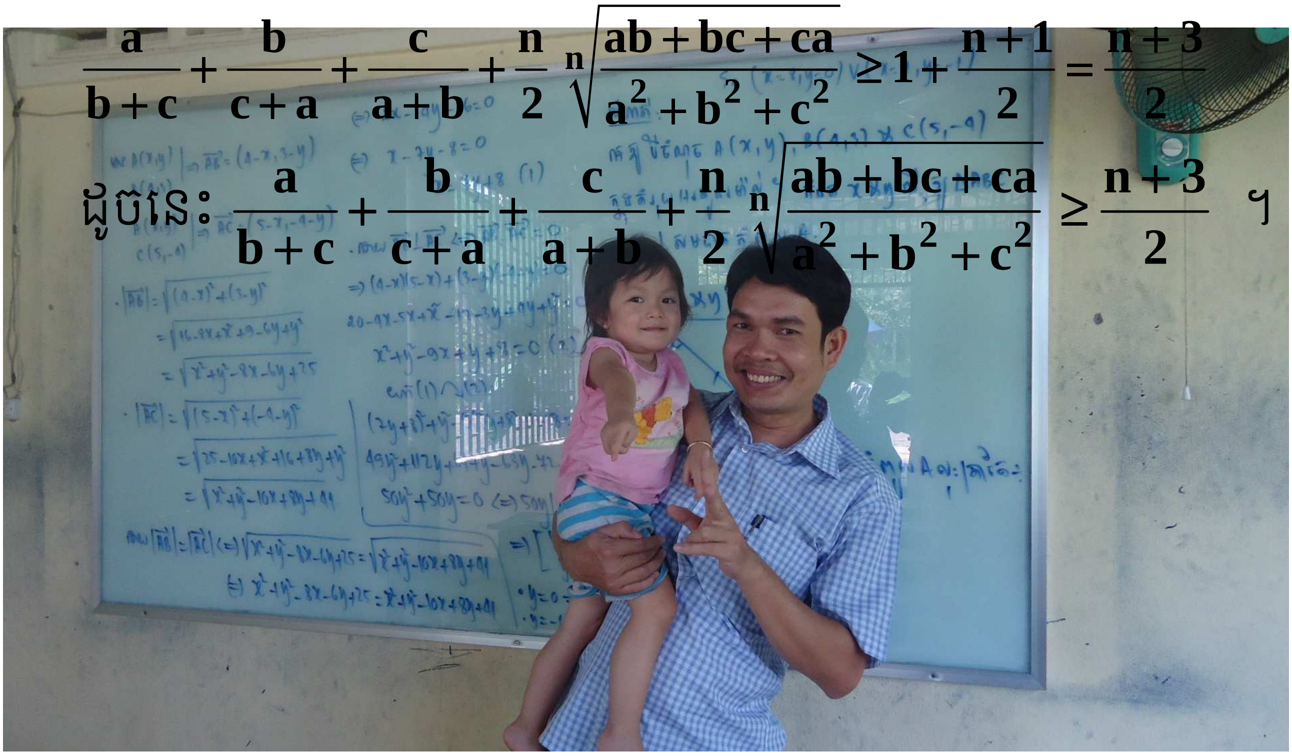
$$t^n+\underbrace{\frac{1}{t}+\frac{1}{t}+....+\frac{1}{t}}_{n}\ge (n+1)\sqrt[n+1]{t^n.\frac{1}{t^n}}=n+1$$

ឬ $t^n+\frac{n}{t}\ge n+1$ ពិត

ហេតុនេះ

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\ge 1+\frac{n+1}{2}=\frac{n+3}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{n}{2}\sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{n+3}{2}$ ។



លំហាត់ទី៨៩

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : Q^+ \to Q^+$ ដោយដឹងថា ៖

$f(x+\frac{y}{x}) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y$ ចំពោះគ្រប់ $x, y \in Q^+$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ f

គេមាន $f(x+\frac{y}{x}) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y \quad (*)$

យក $(x,y) = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$ ជំនួសក្នុង $(*)$ គេបាន ៖

$$\begin{cases} f(2) = f(1) + 3 \\ f(3) = f(1) + \frac{f(2)}{f(1)} + 4 \\ f(3) = f(2) + 5 \end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$

តាមលទ្ធផលនេះយើងឧបមាថា $f(n) = n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

យើងនឹងស្រាយថា $f(n+1) = (n+1)^2$ ។

យក $x = y = n$ ជំនួសក្នុង $(*)$ គេបាន $f(n+1) = f(n) + 1 + 2n$

ដោយ $f(n) = n^2$ គេបាន $f(n+1) = n^2 + 1 + 2n = (n+1)^2$

យើងនឹងស្រាយថា $f(x) = x^2 \ \forall x \in Q^+$ ជាចម្លើយតែមួយគត់របស់សមីការ ។

-យក $x = n , y = m$ គ្រប់ $m,n \in IN$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$$f(n+\frac{m}{n}) = f(n) + \frac{f(m)}{f(n)} + 2m = n^2 + \frac{m^2}{n^2} + 2m \ (1)$$

-យក $x = \frac{m}{n} , y = m$ គ្រប់ $m,n \in IN$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$$f(\frac{m}{n}+n) = f(\frac{m}{n}) + \frac{f(m)}{f(\frac{m}{n})} + 2m = f(\frac{m}{n}) + \frac{m^2}{f(\frac{m}{n})} + 2m \ \ (2)$$

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$f(\frac{m}{n}) + \frac{m^2}{f(\frac{m}{n})} = n^2 + \frac{m^2}{n^2}$$

ឬ $[f(\frac{m}{n}) - \frac{m^2}{n^2}][1 - \frac{n^2}{f(\frac{m}{n})}] = 0 \ (**)$

តាង $\frac{p}{q} \in Q^+$ ដែល $p \in IN$ និង $q \in IN$ ។

-បើ $1 - \frac{q^2}{f(\frac{p}{q})} \neq 0$ នោះតាម (**) យក $m = p , n = q$

គេទាញបាន $f(\frac{p}{q}) = \frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ ។

ដូចនេះ $f(x) = x^2 \ , \forall x \in Q^+$ ។

-បើ $1-\frac{q^2}{f(\frac{p}{q})}=0$ នោះ $\frac{f(2q)}{f(\frac{2p}{2q})}=\frac{4q^2}{f(\frac{p}{q})}\neq\frac{q^2}{f(\frac{p}{q})}=1$

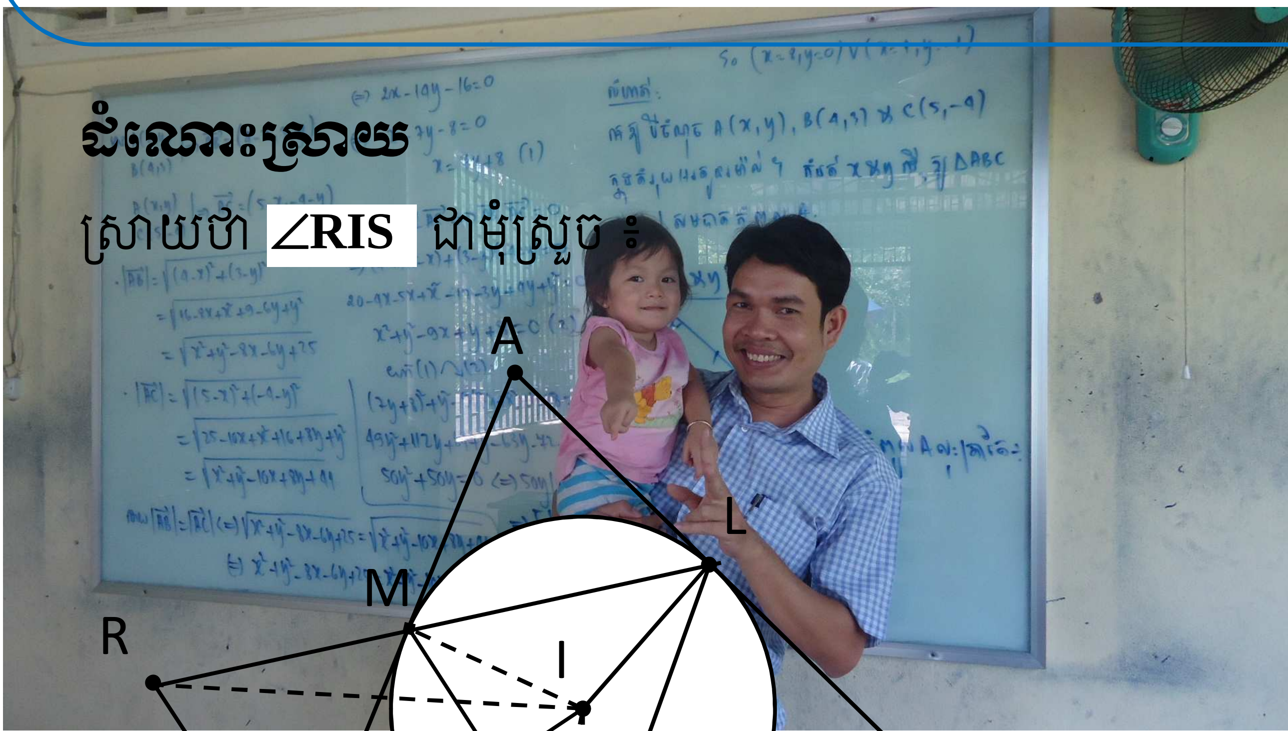
តាម **(**)** យក $m=2p\,,n=2q$ គេទាញបាន

$$f(\frac{p}{q})=f(\frac{2p}{2q})=\frac{(2p)^2}{(2q)^2}=\left(\frac{p}{q}\right)^2$$

ដូចនេះ $f(x)=x^2\ ,\forall x\in Q^+$ ជាចម្លើយតែមួយគត់។

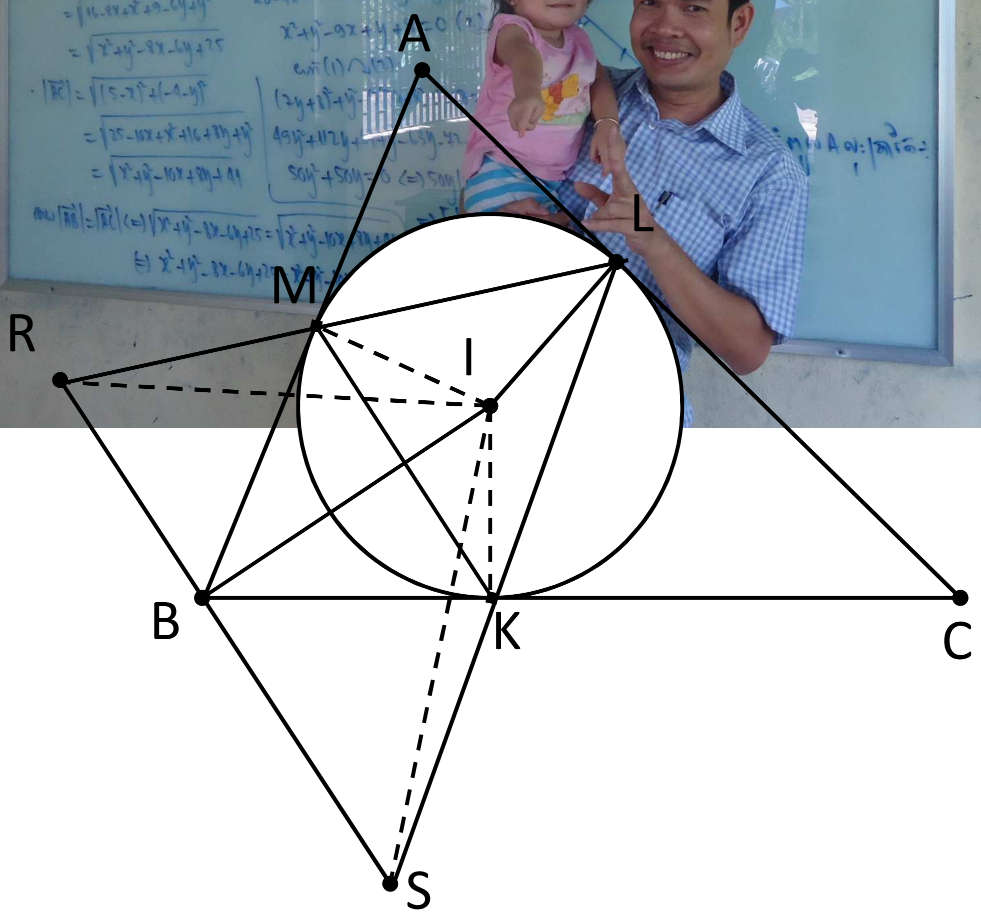
លំហាត់ទី៩០ (IMO 1998)

គេតាង **I** ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ ឧបមាថារង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** ប៉ះជ្រុងទាំងបី **[BC],[CA],[AB]** រៀងគ្នាត្រង់ **K,L,M** ។ បន្ទាត់មួយគូសចេញពីចំនុច **B** ស្របនឹង **(MK)** កាត់**(LM)** និង**(LK)** រៀងគ្នាត្រង់ **R** និង **S** ។ ចូរស្រាយថា **∠RIS** ជាមុំស្រួច ។



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា **∠RIS** ជាមុំស្រួច ៖

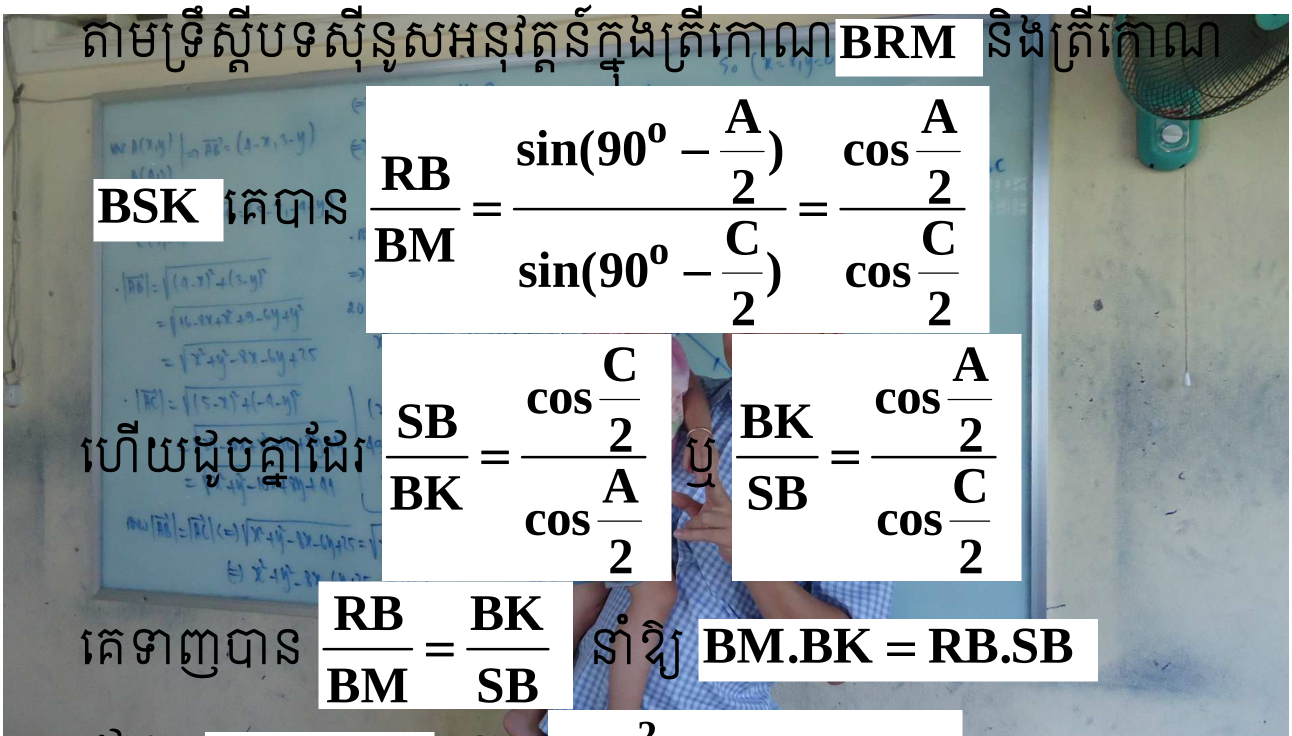


គេមាន $\angle AML = \angle BMR = 90^o - \frac{A}{2}$

ដូចគ្នាដែរ $\angle CKL = \angle BKS = 90^o - \frac{C}{2}$

និង $\angle BKM = \angle BMK = 90^o - \frac{B}{2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\angle LMK = \angle MRS = 90^o - \frac{B}{2}$ ។



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ BRM និងត្រីកោណ BSK គេបាន $\frac{RB}{BM} = \frac{\sin(90^o - \frac{A}{2})}{\sin(90^o - \frac{C}{2})} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

ហើយដូចគ្នាដែរ $\frac{SB}{BK} = \frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ ឬ $\frac{BK}{SB} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

គេទាញបាន $\frac{RB}{BM} = \frac{BK}{SB}$ នាំឱ្យ $BM.BK = RB.SB$

ដោយ $BM = BK$ នោះ $BM^2 = RB.SB$ (1)

គេមាន $(RS)//(MK)$ ហើយ $(IB) \perp (KM)$ នោះ $(IB) \perp (RS)$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគរ័អនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណកែង RIB និង SIB

គេបាន $IR^2 = RB^2 + IB^2$ (2)

និង $IS^2 = SB^2 + IB^2$ (3)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ **RIS** គេបាន ៖

$$RS^2 = IR^2 + IS^2 - 2IR.IS.\cos\angle RIS \quad (4)$$

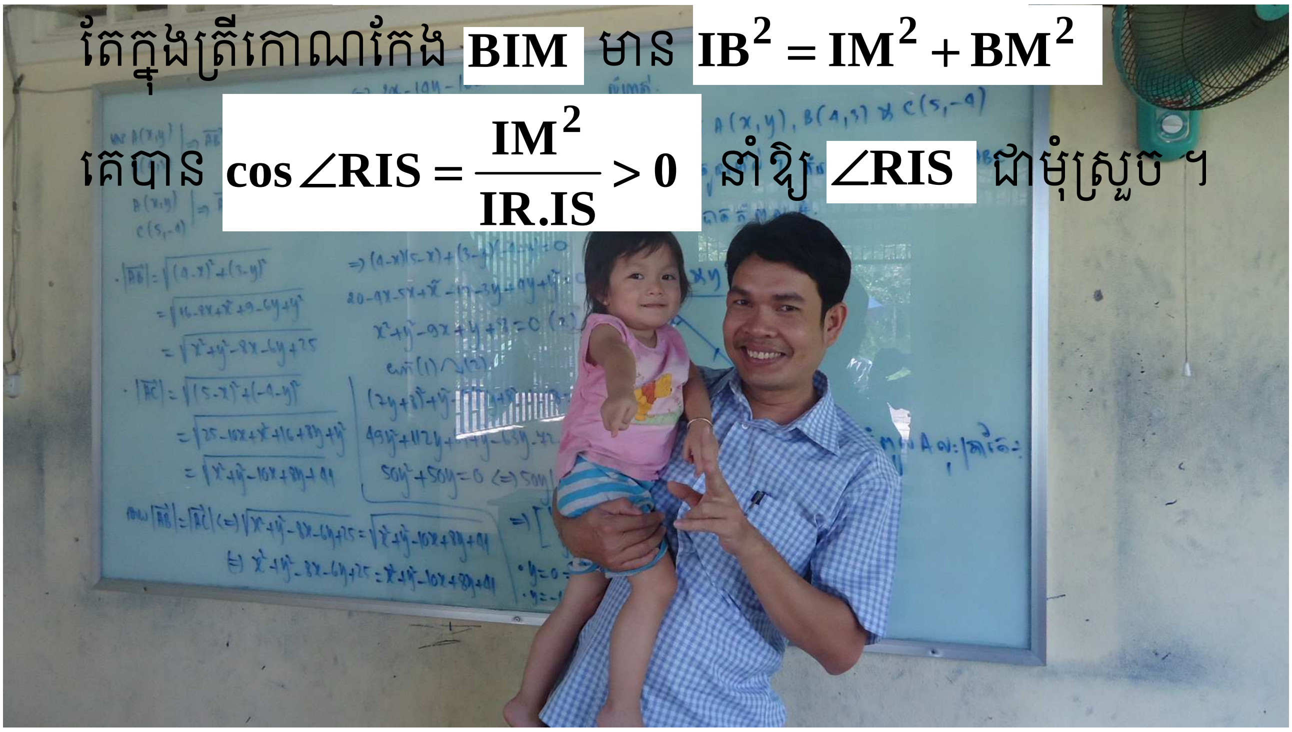
យកទំនាក់ទំនង (1),(2),(3) មកជំនួសក្នុង (4) គេបាន ៖

$$\cos\angle RIS = \frac{RB^2+SB^2+2IB^2-(RB+SB)^2}{2IR.IS}$$

$$= \frac{2IB^2-2RB.SB}{2IR.IS} = \frac{IB^2-BM^2}{IR.IS}$$

តែក្នុងត្រីកោណកែង **BIM** មាន $IB^2 = IM^2 + BM^2$

គេបាន $\cos\angle RIS = \frac{IM^2}{IR.IS} > 0$ នាំឱ្យ $\angle RIS$ ជាមុំស្រួច ។

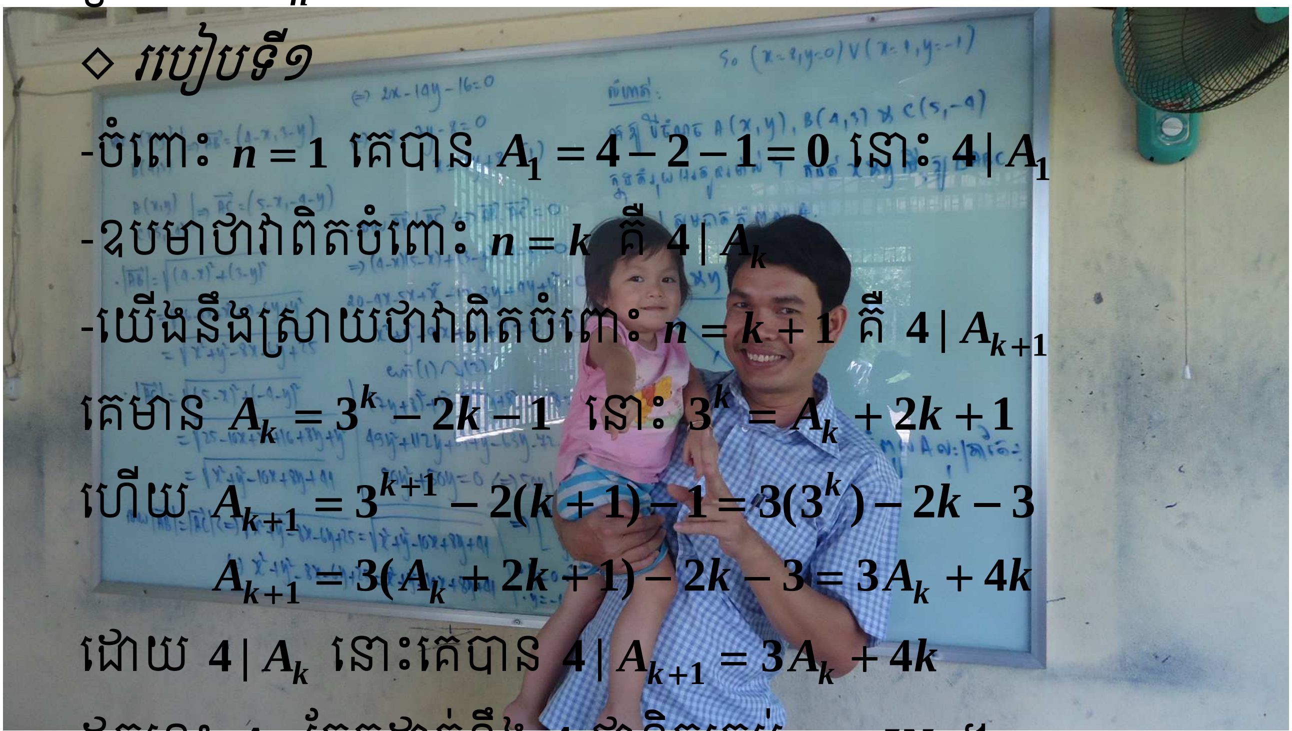


លំហាត់ទី៩១

ចូរស្រាយថា $A_n = 3^n - 2n - 1$ ចែកដាច់នឹង 4 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $A_n = 3^n - 2n - 1$ ចែកដាច់នឹង 4



◇ *របៀបទី១*

-ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $A_1 = 4 - 2 - 1 = 0$ នោះ $4 | A_1$

-ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $4 | A_k$

-យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k + 1$ គឺ $4 | A_{k+1}$

គេមាន $A_k = 3^k - 2k - 1$ នោះ $3^k = A_k + 2k + 1$

ហើយ $A_{k+1} = 3^{k+1} - 2(k+1) - 1 = 3(3^k) - 2k - 3$

$$A_{k+1} = 3(A_k + 2k + 1) - 2k - 3 = 3A_k + 4k$$

ដោយ $4 | A_k$ នោះគេបាន $4 | A_{k+1} = 3A_k + 4k$

ដូចនេះ A_n ចែកដាច់នឹង 4 ជានិច្ចគ្រប់ $n \in IN$ ។

◇ *របៀបទី២*

យើងសិក្សា២ករណីដូចតទៅ ៖

-ករណី $n = 2p$ (ចំនួនគូ)

គេបាន ៖

$$A_{2p} = 3^{2p} - 4p - 1 = (3^{2p} - 1) - 4p = (3^p - 1)(3^p + 1) - 4p$$

ដោយ 3^p-1 និង 3^p+1 សុទ្ធតែជាចំនួនគូនោះគេបាន

$4|(3^p-1)(3^p+1)$ នាំឲ្យ $4|A_{2p}$ ។

-ករណី $n=2p+1$ (ចំនួនសេស)

គេបាន $A_{2p+1}=3^{2p+1}-2(2p+1)-1$

$$=3^{2p+1}-4p-3$$

$$=3(3^{2p}-1)-4p$$

$$=3(3^p+1)(3^p-1)-4p$$

ដោយ 3^p-1 និង 3^p+1 សុទ្ធតែជាចំនួនគូនោះគេបាន

$4|(3^p-1)(3^p+1)$ នាំឲ្យ $4|A_{2p+1}$ ។

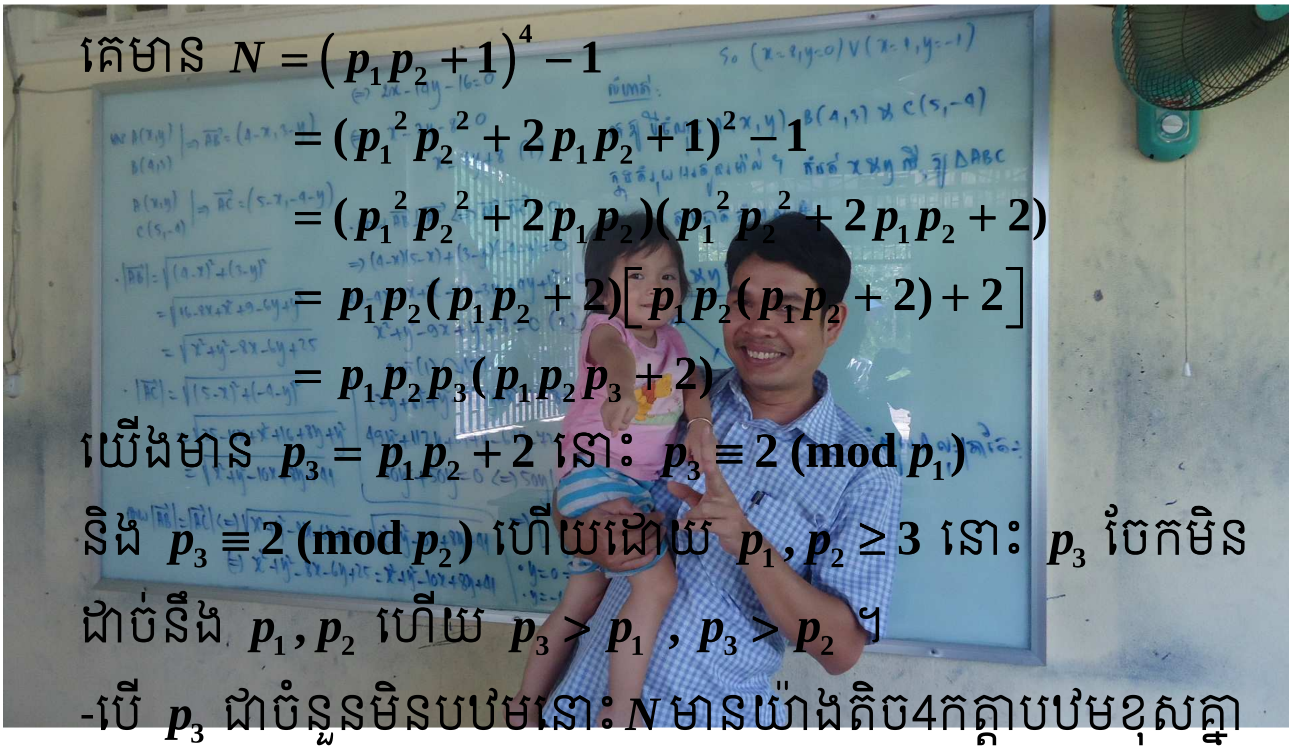
ដូចនេះ $A_n=3^n-2n-1$ ចែកដាច់នឹង 4 គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

លំហាត់ទី៩២

បើ p_1 និង p_2 ជាចំនួនបឋមសេសផ្សេងគ្នានោះបង្ហាញថា ៖
$N=(p_1p_2+1)^4-1$ យ៉ាងតិចមាន4តួចែកបឋមផ្សេងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $p_3=p_1p_2+2$



គេមាន
$$\begin{aligned} N &= (p_1p_2+1)^4-1 \\ &= (p_1^2p_2^2+2p_1p_2+1)^2-1 \\ &= (p_1^2p_2^2+2p_1p_2)(p_1^2p_2^2+2p_1p_2+2) \\ &= p_1p_2(p_1p_2+2)\left[p_1p_2(p_1p_2+2)+2\right] \\ &= p_1p_2p_3(p_1p_2p_3+2) \end{aligned}$$

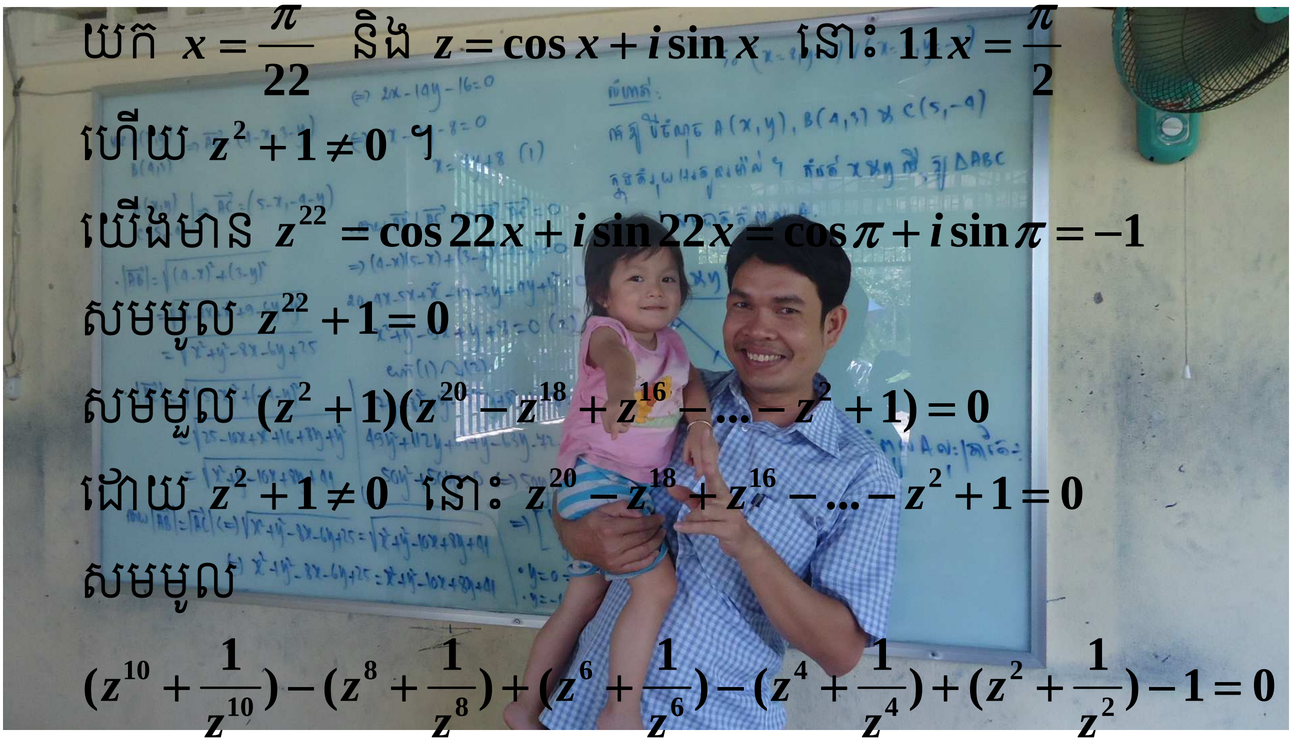
យើងមាន $p_3=p_1p_2+2$ នោះ $p_3\equiv 2\ (\text{mod}\ p_1)$
និង $p_3\equiv 2\ (\text{mod}\ p_2)$ ហើយដោយ $p_1,p_2\geq 3$ នោះ p_3 ចែកមិនដាច់នឹង p_1,p_2 ហើយ $p_3>p_1$, $p_3>p_2$ ។
-បើ p_3 ជាចំនួនមិនបឋមនោះ N មានយ៉ាងតិច4កត្តាបឋមខុសគ្នា
-បើ p_3 ជាចំនួនបឋមនោះមាន $p_4=p_1p_2p_3+2$
ដែល $p_4\equiv 2(\text{mod}\ p_1), p_4\equiv 2(\text{mod}\ p_2)$ និង $p_4\equiv 2\ (\text{mod}\ p_3)$
មានន័យថា p_4 ចែកមិនដាច់នឹង p_1,p_2,p_3 នោះយើងអាចសន្និដ្ឋានថា N មានយ៉ាងតិច4កត្តាបឋមខុសគ្នា ។

លំហាត់ទី៩៣

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{\pi}{22}-4\cos\frac{3\pi}{22}=\sqrt{11}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cot\frac{\pi}{22}-4\cos\frac{3\pi}{22}=\sqrt{11}$



យក $x=\frac{\pi}{22}$ និង $z=\cos x+i\sin x$ នោះ $11x=\frac{\pi}{2}$

ហើយ $z^2+1\neq 0$ ។

យើងមាន $z^{22}=\cos 22x+i\sin 22x=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

សមមូល $z^{22}+1=0$

សមមូល $(z^2+1)(z^{20}-z^{18}+z^{16}-...-z^2+1)=0$

ដោយ $z^2+1\neq 0$ នោះ $z^{20}-z^{18}+z^{16}-...-z^2+1=0$

សមមូល

$$(z^{10}+\frac{1}{z^{10}})-(z^8+\frac{1}{z^8})+(z^6+\frac{1}{z^6})-(z^4+\frac{1}{z^4})+(z^2+\frac{1}{z^2})-1=0$$

$\forall n\in\mathbb{Z}:\ z^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$

និង $\frac{1}{z^n}=\cos(nx)-i\sin(nx)$

នោះ $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(nx)$ ។ ហេតុនេះគេបាន ៖

$2\cos 10x-2\cos 8x+2\cos 6x-2\cos 4x+2\cos 2x-1=0$ (*)

ម្យ៉ាងទៀតឧបមាថា $\cot\frac{\pi}{22}-4\cos\frac{3\pi}{22}=\sqrt{11}$ ពិត

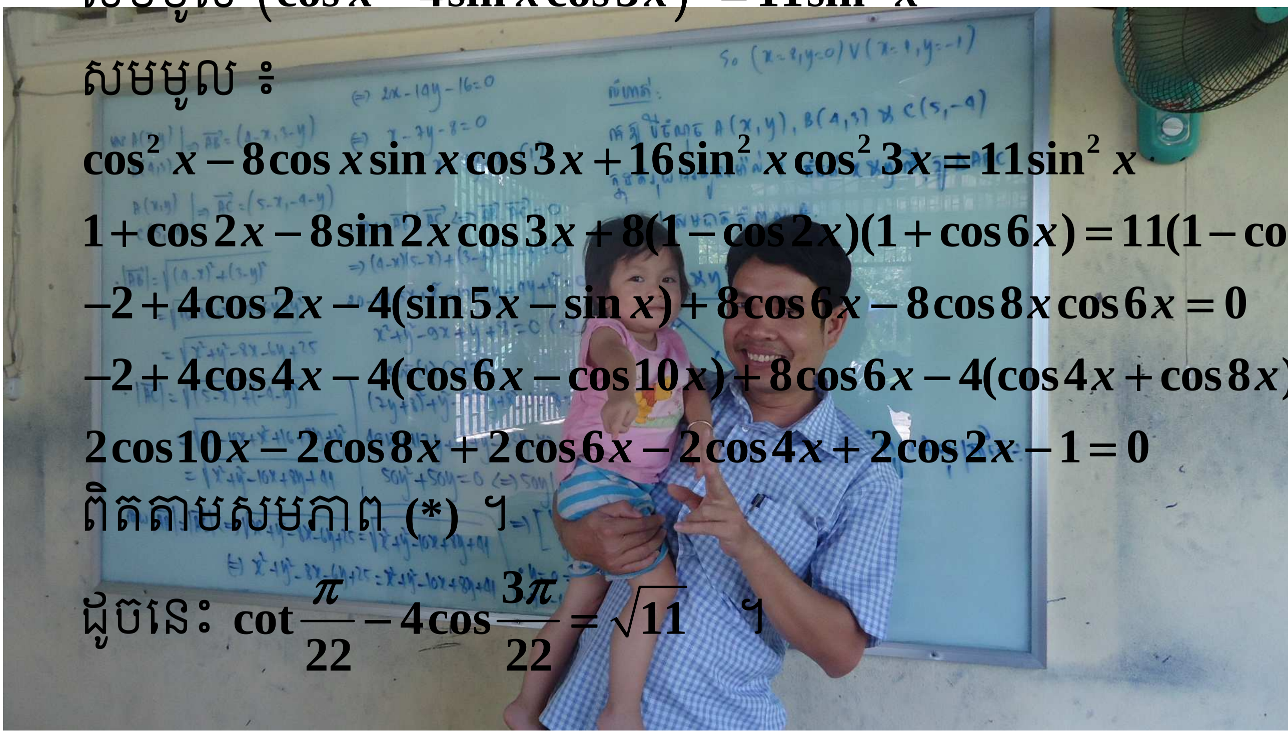
ឬ $\cot x - 4\cos 3x = \sqrt{11}$ ដែល $x = \frac{\pi}{22}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$(\cot x - 4\cos 3x)^2 = 11$ ដោយ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos 3x\right)^2 = 11$$

សមមូល $(\cos x - 4\sin x\cos 3x)^2 = 11\sin^2 x$



សមមូល ៖

$$\cos^2 x - 8\cos x\sin x\cos 3x + 16\sin^2 x\cos^2 3x = 11\sin^2 x$$

$$1 + \cos 2x - 8\sin 2x\cos 3x + 8(1-\cos 2x)(1+\cos 6x) = 11(1-\cos 2x)$$

$$-2 + 4\cos 2x - 4(\sin 5x - \sin x) + 8\cos 6x - 8\cos 8x\cos 6x = 0$$

$$-2 + 4\cos 4x - 4(\cos 6x - \cos 10x) + 8\cos 6x - 4(\cos 4x + \cos 8x) = 0$$

$$2\cos 10x - 2\cos 8x + 2\cos 6x - 2\cos 4x + 2\cos 2x - 1 = 0$$

ពិតតាមសមភាព (*) ។

ដូចនេះ៖ $\cot\frac{\pi}{22} - 4\cos\frac{3\pi}{22} = \sqrt{11}$ ។

លំហាត់ទី៩៤

គេឲ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៖

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2+\left(\frac{y}{z}+\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2+\left(\frac{z}{x}+\frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2\geq 12$$

ដំណោះស្រាយ

តាង $T=\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2+\left(\frac{y}{z}+\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2+\left(\frac{z}{x}+\frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2$

ដោយប្រើវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រគេបាន ៖

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 2\sqrt{\frac{xz}{y\sqrt[3]{xyz}}}$$

$$\frac{y}{z}+\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 2\sqrt{\frac{yx}{z\sqrt[3]{xyz}}}$$

$$\frac{z}{x}+\frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 2\sqrt{\frac{zy}{x\sqrt[3]{xyz}}}$$

គេបាន $T\geq 4\left(\frac{xz}{y\sqrt[3]{xyz}}+\frac{yx}{z\sqrt[3]{xyz}}+\frac{zy}{x\sqrt[3]{xyz}}\right)\geq 12\sqrt[3]{\frac{x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}}=12$

ដូចនេះ $\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2+\left(\frac{y}{z}+\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2+\left(\frac{z}{x}+\frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2\geq 12$ ។

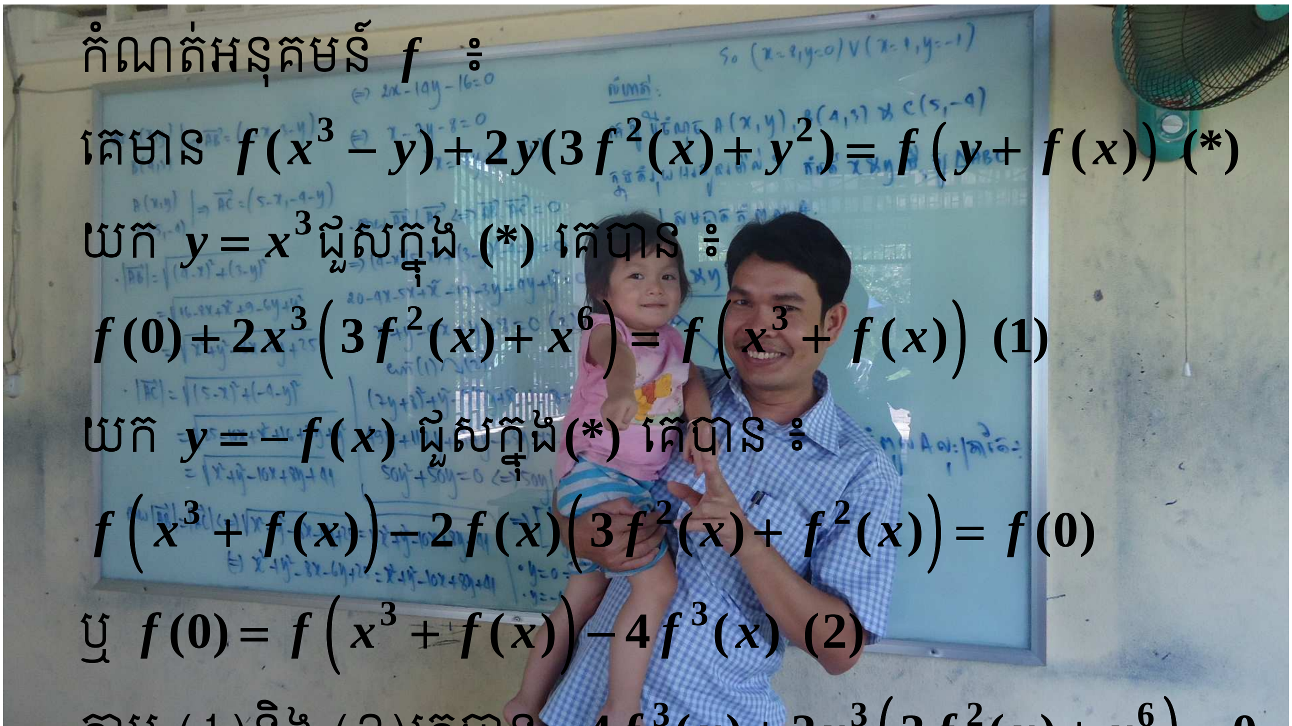
លំហាត់ទី៩៥

គេឲ្យអនុគមន៍ $f: IR \to IR$ ដែលចំពោះគ្រប់ $x, y \in IR$ គេមាន

$f(x^3 - y) + 2y(3f^2(x) + y^2) = f\left(y + f(x)\right)$ ។

ចូរកំណត់អនុគមន៍ f ។

ដំណោះស្រាយ



កំណត់អនុគមន៍ f ៖

គេមាន $f(x^3 - y) + 2y(3f^2(x) + y^2) = f\left(y + f(x)\right)$ (*)

យក $y = x^3$ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$f(0) + 2x^3\left(3f^2(x) + x^6\right) = f\left(x^3 + f(x)\right)$ (1)

យក $y = -f(x)$ ជួសក្នុង(*) គេបាន ៖

$f\left(x^3 + f(x)\right) - 2f(x)\left(3f^2(x) + f^2(x)\right) = f(0)$

ឬ $f(0) = f\left(x^3 + f(x)\right) - 4f^3(x)$ (2)

តាម (1)និង (2)គេបាន $-4f^3(x) + 2x^3\left(3f^2(x) + x^6\right) = 0$

សមមូល $\left(f(x) - x^3\right)\left[4f^2(x) + x^3 f(x) + x^6\right] = 0$

គ្រប់$x \in IR$ ។ ដោយ $4f^2(x) + x^3 f(x) + x^6 > 0$ គ្រប់ $x \neq 0$

ព្រោះ $a = 4 > 0$ និង $\Delta = x^6 - 16x^6 = -15x^6 < 0$ គ្រប់ $x \neq 0$

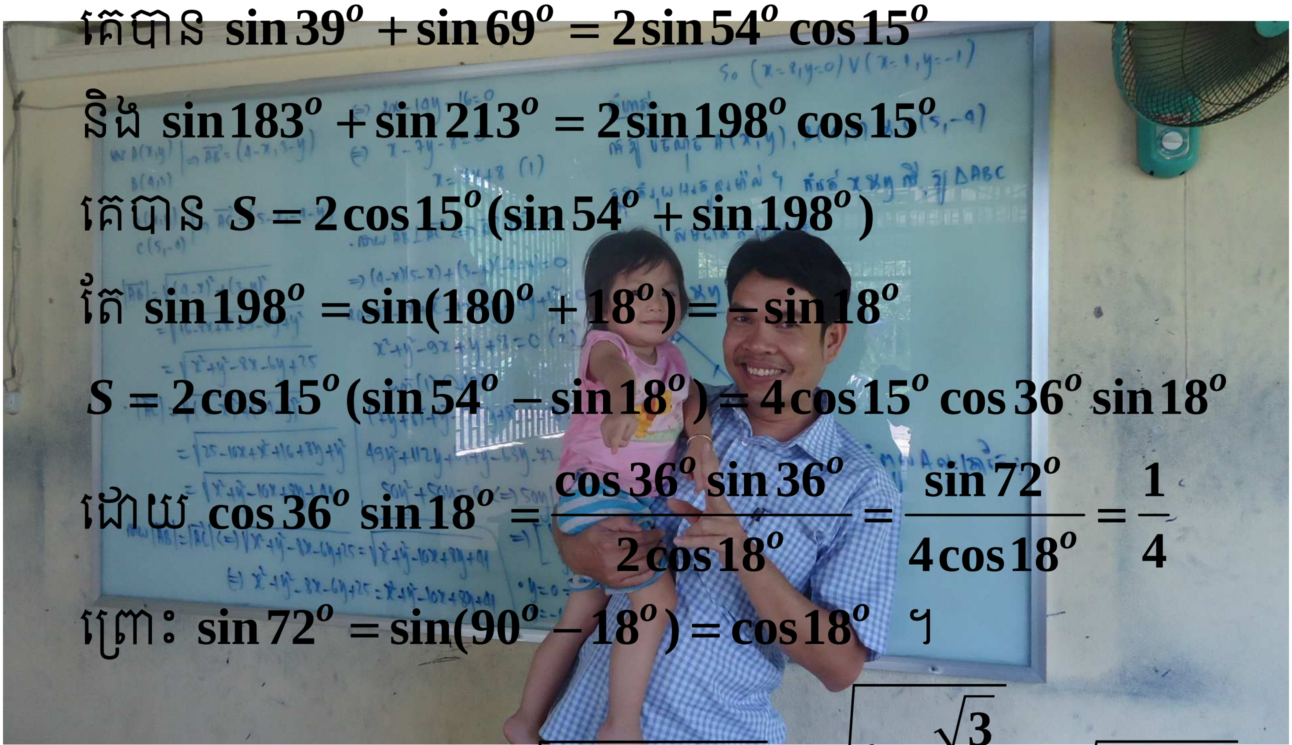
ដូចនេះ $f(x) = x^3$ ។

លំហាត់ទី៩៦

គណនាតម្លៃ $S = \sin 39^o + \sin 69^o + \sin 183^o + \sin 213^o$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$



គេបាន $\sin 39^o + \sin 69^o = 2\sin 54^o \cos 15^o$

និង $\sin 183^o + \sin 213^o = 2\sin 198^o \cos 15^o$

គេបាន $S = 2\cos 15^o(\sin 54^o + \sin 198^o)$

តែ $\sin 198^o = \sin(180^o + 18^o) = -\sin 18^o$

$S = 2\cos 15^o(\sin 54^o - \sin 18^o) = 4\cos 15^o \cos 36^o \sin 18^o$

ដោយ $\cos 36^o \sin 18^o = \frac{\cos 36^o \sin 36^o}{2\cos 18^o} = \frac{\sin 72^o}{4\cos 18^o} = \frac{1}{4}$

ព្រោះ $\sin 72^o = \sin(90^o - 18^o) = \cos 18^o$ ។

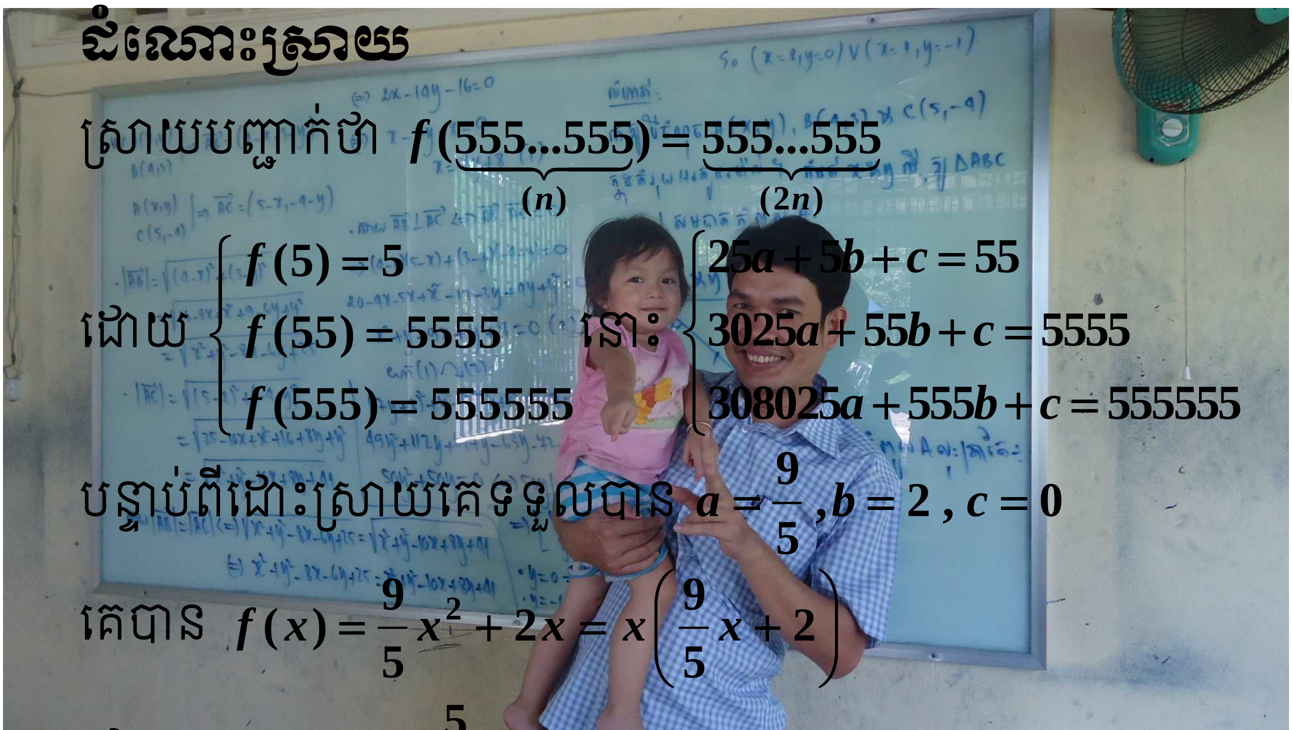
គេបាន $S = \cos 15^o = \sqrt{\frac{1+\cos 30^o}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

ដូចនេះ $S = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

លំហាត់ទី៩៧

គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} f(5)=5 \\ f(55)=5555 \\ f(555)=555555 \end{cases}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\underbrace{555...555}_{(n)})=\underbrace{555...555}_{(2n)}$ ។



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\underbrace{555...555}_{(n)})=\underbrace{555...555}_{(2n)}$

ដោយ $\begin{cases} f(5)=5 \\ f(55)=5555 \\ f(555)=555555 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} 25a+5b+c=55 \\ 3025a+55b+c=5555 \\ 308025a+555b+c=555555 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបាន $a=\frac{9}{5}, b=2, c=0$

គេបាន $f(x)=\frac{9}{5}x^2+2x=x\left(\frac{9}{5}x+2\right)$

ដោយ $\underbrace{555...555}_{(n)}=\frac{5}{9}(10^n-1)$ នោះគេបាន ៖

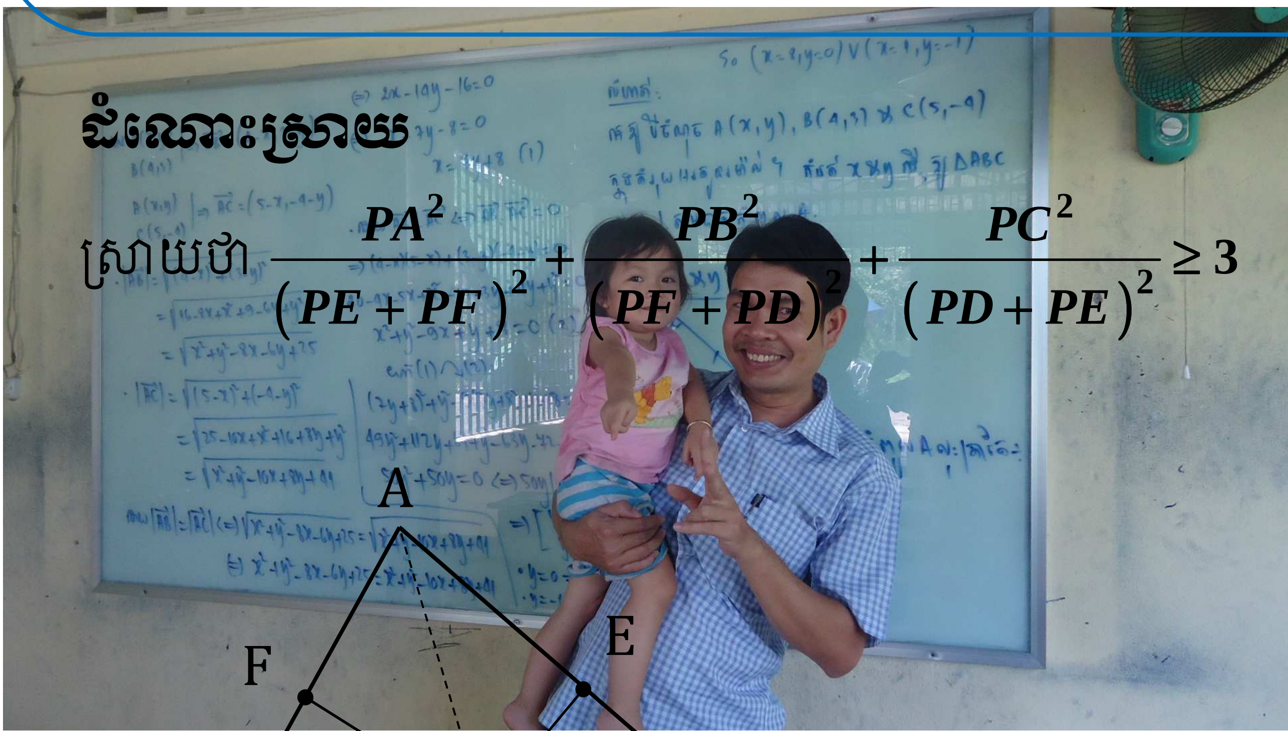
$$f\left(\underbrace{555...555}_{(n)}\right)=\frac{5}{9}(10^n-1)\left[\frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(10^n-1)\right)+2\right]=\frac{5}{9}(10^{2n}-1)$$

$$=\left(\underbrace{555....555}_{(2n)}\right)$$ ពិត

លំហាត់ទី៩៨

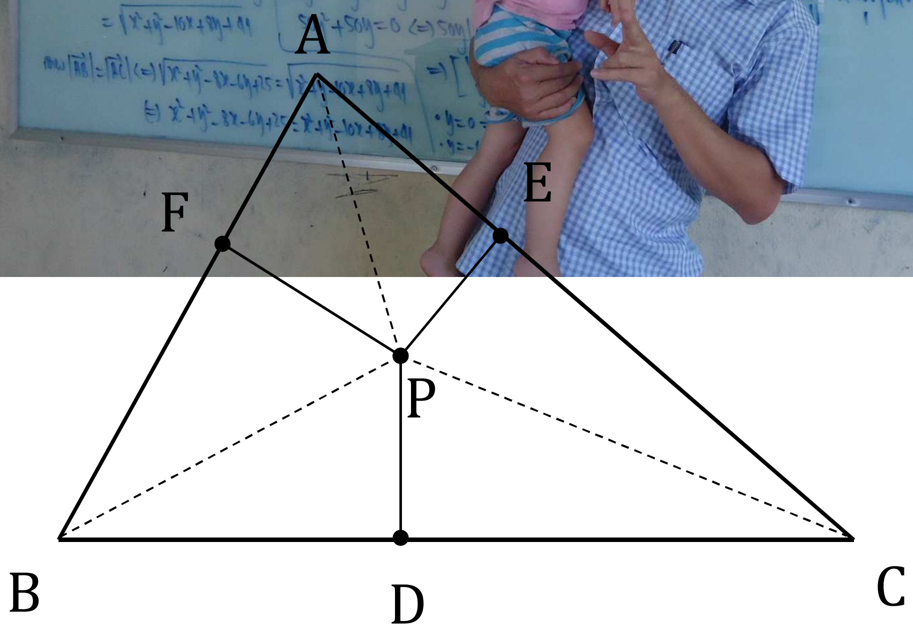
គេឲ្យ P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយ D, E និង F ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ P លើជ្រុង BC, CA, AB រៀងគ្នា ចូរស្រាយថា

$$\frac{PA^2}{(PE+PF)^2}+\frac{PB^2}{(PF+PD)^2}+\frac{PC^2}{(PD+PE)^2}\geq 3 \text{ ។}$$



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{PA^2}{(PE+PF)^2}+\dfrac{PB^2}{(PF+PD)^2}+\dfrac{PC^2}{(PD+PE)^2}\geq 3$



គេមាន $\dfrac{PE+PF}{PA}=\dfrac{PE}{PA}+\dfrac{PF}{PA}=\sin\angle PAE+\sin\angle PAF$

$\sin\angle PAE+\sin\angle PAF=2\sin\dfrac{\angle PAE+\angle PAF}{2}.\cos\dfrac{\angle PAE-\angle PAF}{2}$

ដោយ $\cos\dfrac{\angle PAE-\angle PAF}{2}\le 1$ នោះគេបាន ៖

$\sin\angle PAE+\sin\angle PAF\le 2\sin\dfrac{\angle PAE+\angle PAF}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}$

គេទាញបាន $\dfrac{PE+PF}{PA}\le 2\sin\dfrac{A}{2}$

ឬ $\dfrac{PA}{PE+PF}\ge\dfrac{1}{2\sin\dfrac{A}{2}}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\dfrac{PB}{PF+PD}\ge\dfrac{1}{2\sin\dfrac{B}{2}}$

និង $\dfrac{PC}{PD+PE}\ge\dfrac{1}{2\sin\dfrac{C}{2}}$

តាង $\sum=\dfrac{PA^2}{(PE+PF)^2}+\dfrac{PB^2}{(PF+PD)^2}+\dfrac{PC^2}{(PD+PE)^2}$

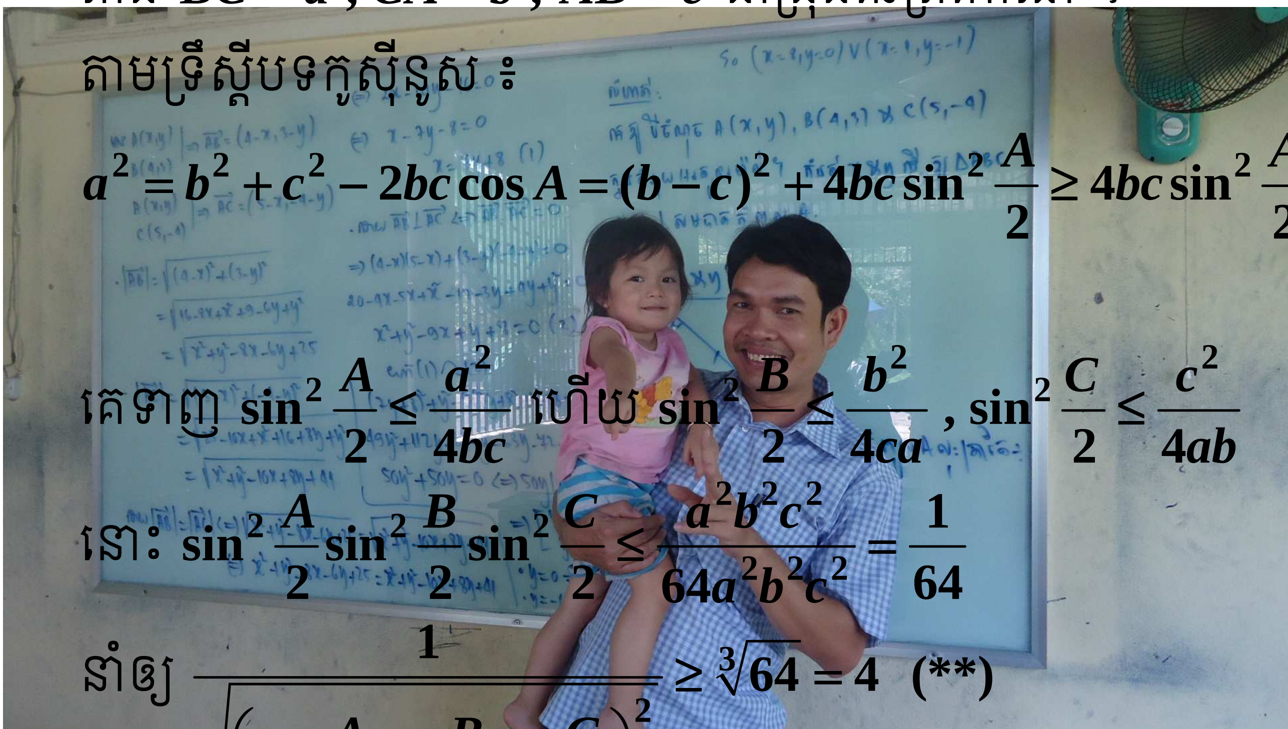
គេបាន $\sum\ge\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{C}{2}}\right)$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^3}}$$

គេទាញ $\sum\ge\frac{3}{4}.\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^3}}$ (*)

តាង $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណ ។



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស ៖

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{A}{2}\ge 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2}\le\frac{a^2}{4bc}$ ហើយ $\sin^2\frac{B}{2}\le\frac{b^2}{4ca}$, $\sin^2\frac{C}{2}\le\frac{c^2}{4ab}$

នោះ $\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\le\frac{a^2b^2c^2}{64a^2b^2c^2}=\frac{1}{64}$

នាំឲ្យ $\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}}\ge\sqrt[3]{64}=4$ (**)

តាម (*) និង (**) គេទាញ $\sum\ge\frac{3}{4}\times4=3$ ។

ដូចនេះ $\frac{PA^2}{(PE+PF)^2}+\frac{PB^2}{(PF+PD)^2}+\frac{PC^2}{(PD+PE)^2}\ge3$ ។

លំហាត់ទី៩៩

សមីការ $x^2-2013x+q=0$ មានឫសពីរ α និង β ជាចំនួនពិត។ គេដឹងថា $\alpha^3+\beta^3=2013^2$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ q ?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ q

ដោយ α និង β ជាឫសសមីការនោះ $\begin{cases}\alpha+\beta=2013\\ \alpha\beta=q\end{cases}$

គេដឹងថា $\alpha^3+\beta^3=2013^2$

នោះយើងបាន $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2013^2$

$$2013^3-3q(2013)=2013^2$$

គេទាញ

$$q=\frac{2013^3-2013^2}{3(2013)}=\frac{2013^2\times 2012}{3\times 2013}=671\times 2012=1350052$$

ដូចនេះ $q=1350052$ ។

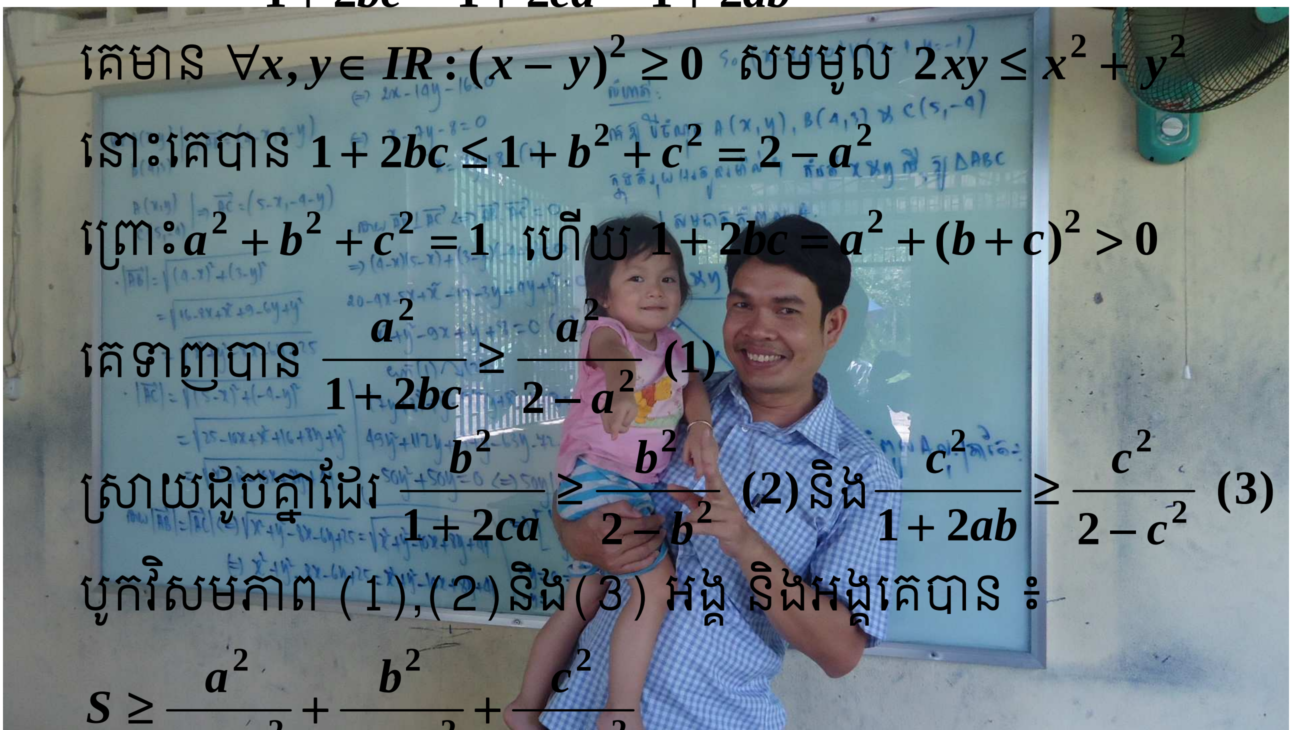
លំហាត់ទី១០០

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតដែល $a^2+b^2+c^2=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a^2}{1+2bc}+\dfrac{b^2}{1+2ca}+\dfrac{c^2}{1+2ab}\geq\dfrac{3}{5}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $S=\dfrac{a^2}{1+2bc}+\dfrac{b^2}{1+2ca}+\dfrac{c^2}{1+2ab}$ ។



គេមាន $\forall x,y\in IR:(x-y)^2\geq 0$ សមមូល $2xy\leq x^2+y^2$

នោះគេបាន $1+2bc\leq 1+b^2+c^2=2-a^2$

ព្រោះ $a^2+b^2+c^2=1$ ហើយ $1+2bc=a^2+(b+c)^2>0$

គេទាញបាន $\dfrac{a^2}{1+2bc}\geq\dfrac{a^2}{2-a^2}\ (1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\dfrac{b^2}{1+2ca}\geq\dfrac{b^2}{2-b^2}\ (2)$ និង $\dfrac{c^2}{1+2ab}\geq\dfrac{c^2}{2-c^2}\ (3)$

បូកវិសមភាព $(1),(2)$ និង (3) អង្គ និងអង្គគេបាន ៖

$$S\geq\frac{a^2}{2-a^2}+\frac{b^2}{2-b^2}+\frac{c^2}{2-c^2}$$

តាងអនុគមន៍ $f:(0,1)\to IR$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x}{2-x}$ គេបាន

$$f'(x)=\frac{2}{(2-x)^2}\quad\text{និង}\quad f''(x)=\frac{4}{(2-x)^3}>0\ \forall x\in(0,1)$$

នោះ f ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមវិសមភាព ***Jensen*** យើងបាន ៖

$$\frac{f(a^2)+f(b^2)+f(c^2)}{3}\geq f\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)=f(\frac{1}{3})$$

ដោយ $f(\frac{1}{3})=\frac{\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$ គេទាញ $f(a^2)+f(b^2)+f(c^2)\geq\frac{3}{5}$

ឬ $\frac{a^2}{2-a^2}+\frac{b^2}{2-b^2}+\frac{c^2}{2-c^2}\geq\frac{3}{5}$ នោះ $S\geq\frac{3}{5}$ ។

ដូចនេះ $\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab}\geq\frac{3}{5}$ ។

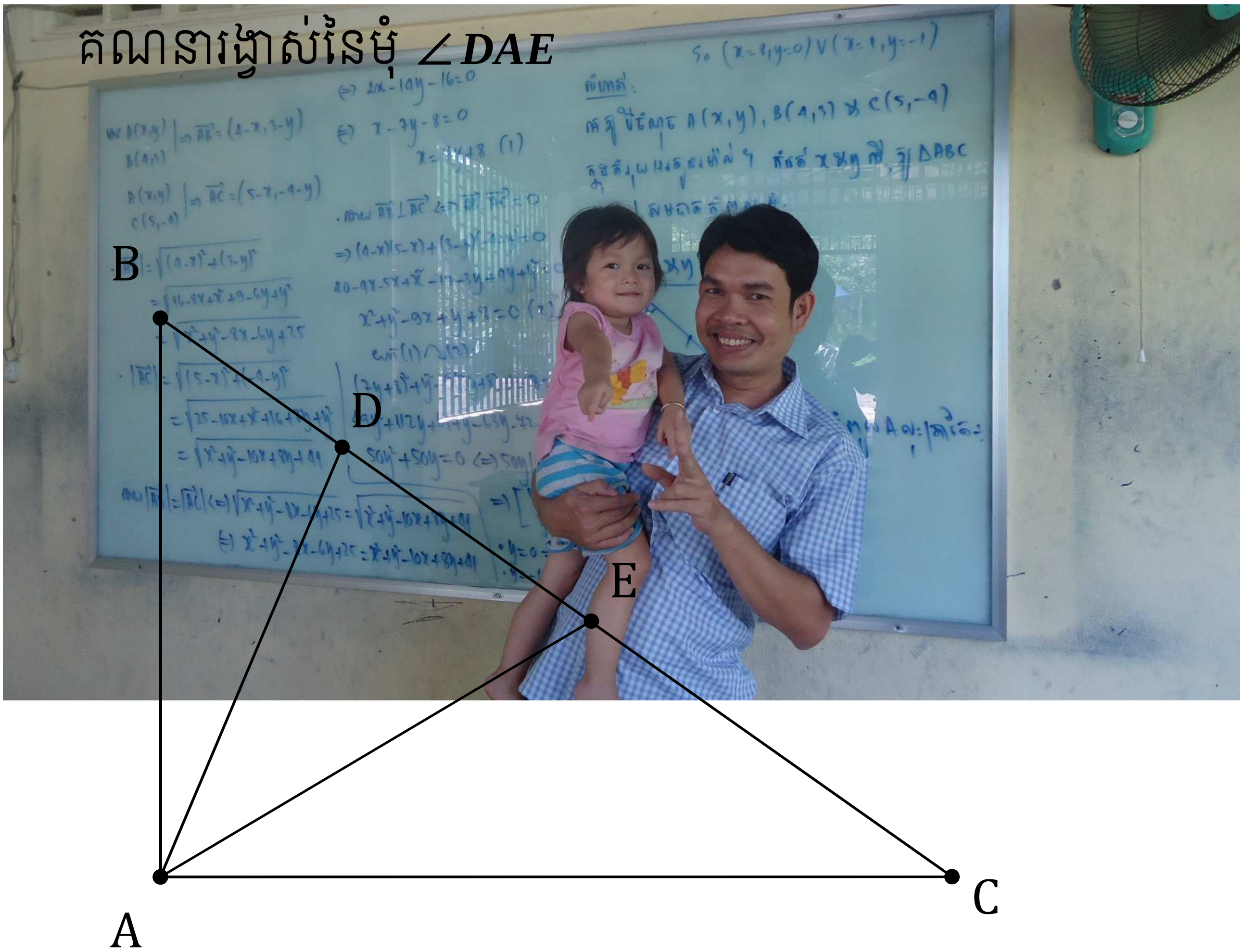
លំហាត់ទី១០១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $AB = 20$, $AC = 21$ និង $BC = 29$ ។ D និង E ជាពីរចំណុចស្ថិតនៅលើអង្កត់ $[BC]$ ដែល $BD = 8$ និង $EC = 9$ ។

ចូរគណនារង្វាស់នៃមុំ $\angle DAE$?

ដំណោះស្រាយ

គណនារង្វាស់នៃមុំ $\angle DAE$



តាង $\angle BAD = \alpha$, $\angle DAE = \beta$ និង $\angle EAC = \gamma$

ដោយ $BE = BC - EC = 29 - 9 = 20 = AB$ នោះ IBE

ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល B គេបាន $\angle AEB = \angle BAE = \alpha + \beta$

ហើយ $CD = BC - BD = 29 - 8 = 21 = CA$ នោះ $\Delta\, CAD$

ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល C គេបាន $\angle ADC = \angle DAC = \beta + \gamma$

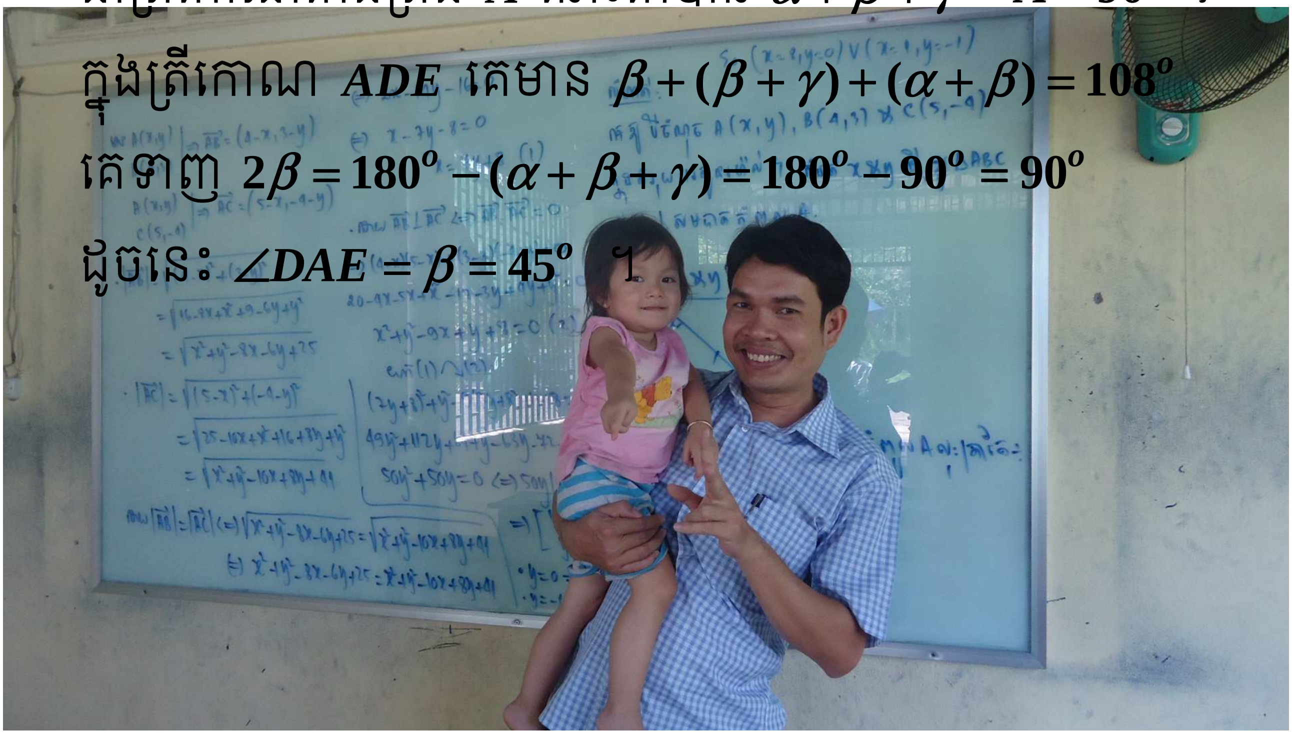
ដោយ $AB^2 + AC^2 = 20^2 + 21^2 = 29^2 = BC^2$ នោះ $\Delta\, ABC$

ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A នោះគេបាន $\alpha + \beta + \gamma = A = 90^o$ ។

ក្នុងត្រីកោណ ADE គេមាន $\beta + (\beta + \gamma) + (\alpha + \beta) = 108^o$

គេទាញ $2\beta = 180^o - (\alpha + \beta + \gamma) = 180^o - 90^o = 90^o$

ដូចនេះ $\angle DAE = \beta = 45^o$ ។



លំហាត់ទី១០២

បន្ទាត់សេរ៉ាពីរ AP និង AQ ខុសគ្នានៃ ΔABC ដែល $AB \neq AC$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $AQ^2 = AP^2 + (AC - AB)^2$ ។

បង្ហាញថា AP ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle BAC$ លុះត្រាតែ $BP = CQ$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីបង្ហាញថាសំណើនេះពិតយើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ពីរករណី ៖

◇ ករណីទី១

បើ $BP = CQ$ នាំឲ្យ AP ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle BAC$

តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ និងយក $BP = CQ = x$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេបាន ៖

$$AQ^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos C = b^2 + x^2 - \frac{x}{a}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$AP^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos B = c^2 + x^2 - \frac{x}{a}(a^2 + c^2 - b^2)$$

នោះ $AQ^2 - AP^2 = (b^2 - c^2)(1 - \frac{2x}{a})$ ។

ដោយ $AQ^2 = AP^2 + (AC - AB)^2$ (សម្មតិកម្ម)

គេទាញ $(b - c)^2 = (b^2 - c^2)(1 - \frac{2x}{a})$ ដោយ $b \neq c$

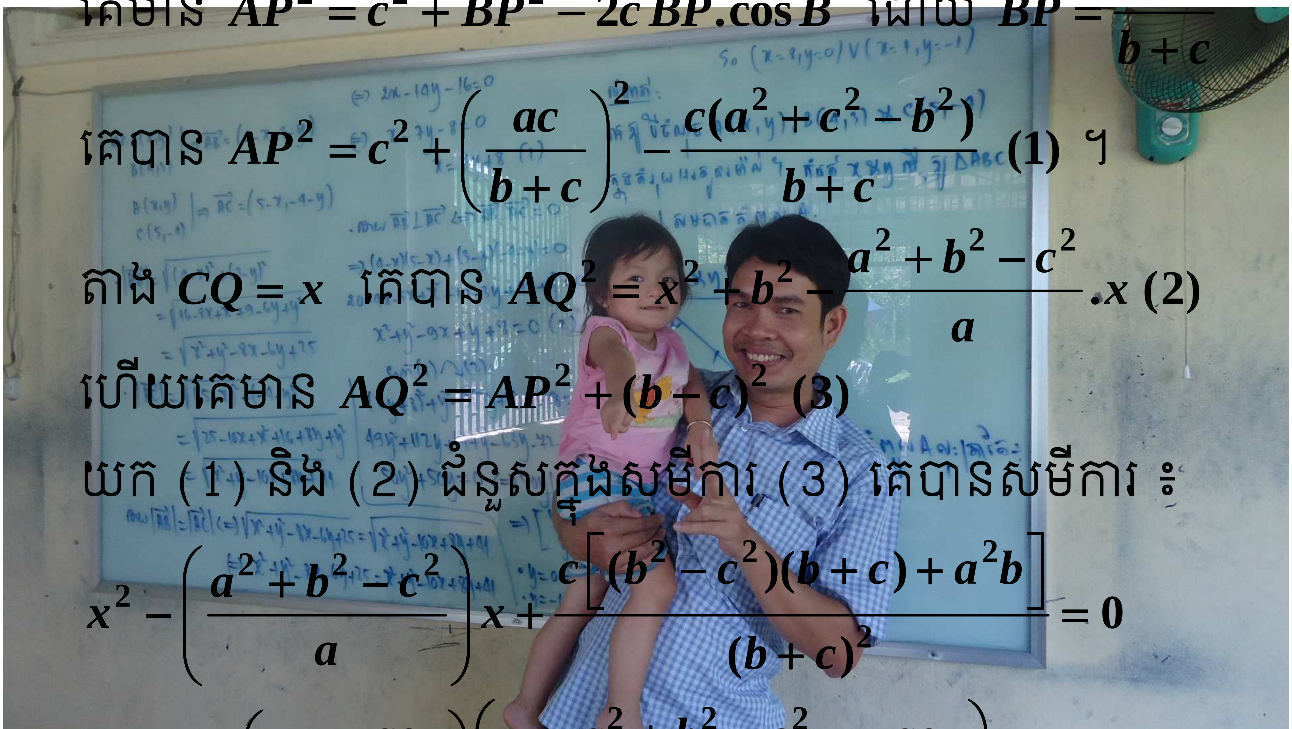
នោះគេបាន $b - c = (b + c)(1 - \frac{2x}{a})$

សមមូល $\frac{b}{c}=\frac{a-x}{x}$ ឬ $\frac{AC}{AB}=\frac{CP}{PB}$ នោះ AP ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle BAC$ របស់ត្រីកោណ ABC ។

◇ ករណីទី២

បើ AP ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle BAC$ នាំឲ្យ $BP=CQ$

តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$



គេមាន $AP^2=c^2+BP^2-2c\,BP.\cos B$ ដោយ $BP=\frac{ac}{b+c}$

គេបាន $AP^2=c^2+\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2-\frac{c(a^2+c^2-b^2)}{b+c}$ (1) ។

តាង $CQ=x$ គេបាន $AQ^2=x^2+b^2-\frac{a^2+b^2-c^2}{a}.x$ (2)

ហើយគេមាន $AQ^2=AP^2+(b-c)^2$ (3)

យក (1) និង (2) ជំនួសក្នុងសមីការ (3) គេបានសមីការ ៖

$$x^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{a}\right)x+\frac{c\left[(b^2-c^2)(b+c)+a^2b\right]}{(b+c)^2}=0$$

សមមូល $\left(x-\frac{ac}{b+c}\right)\left(x-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}+\frac{ac}{b+c}\right)=0$

គេទាញឫស

$$x=\frac{ac}{b+c}=BP\ ,\ x=\frac{a^2+b^2-c^2}{a}-\frac{ac}{b+c}=2b\cos C-BP$$

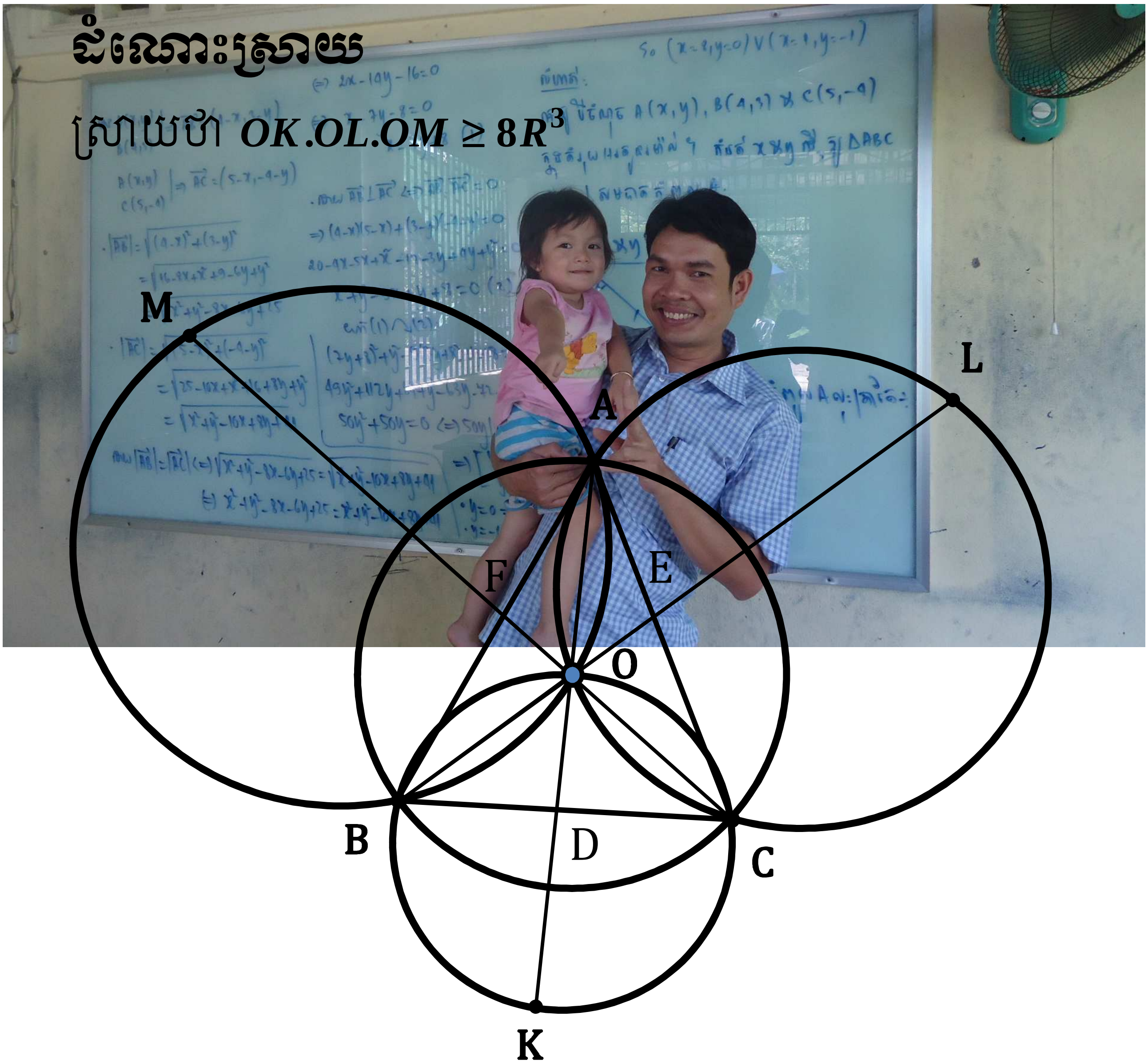
ឫសទីពីរនេះបញ្ជាក់ទីតាំងពីរនៃ Q ដែលឆ្លុះគ្នាទៅនឹងកម្ពស់គូសពីកំពូល A ទៅជ្រុង BC នៃ ΔABC ។

លំហាត់ទី១០៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។ បន្ទាត់ $(AO),(BO),(CO)$ កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔOBC ΔOAC , ΔOAB ជាថ្មីរៀងគ្នាត្រង់ចំណុច K , L , M ។
ចូរស្រាយថា $OK.OL.OM \geq 8R^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $OK.OL.OM \geq 8R^3$



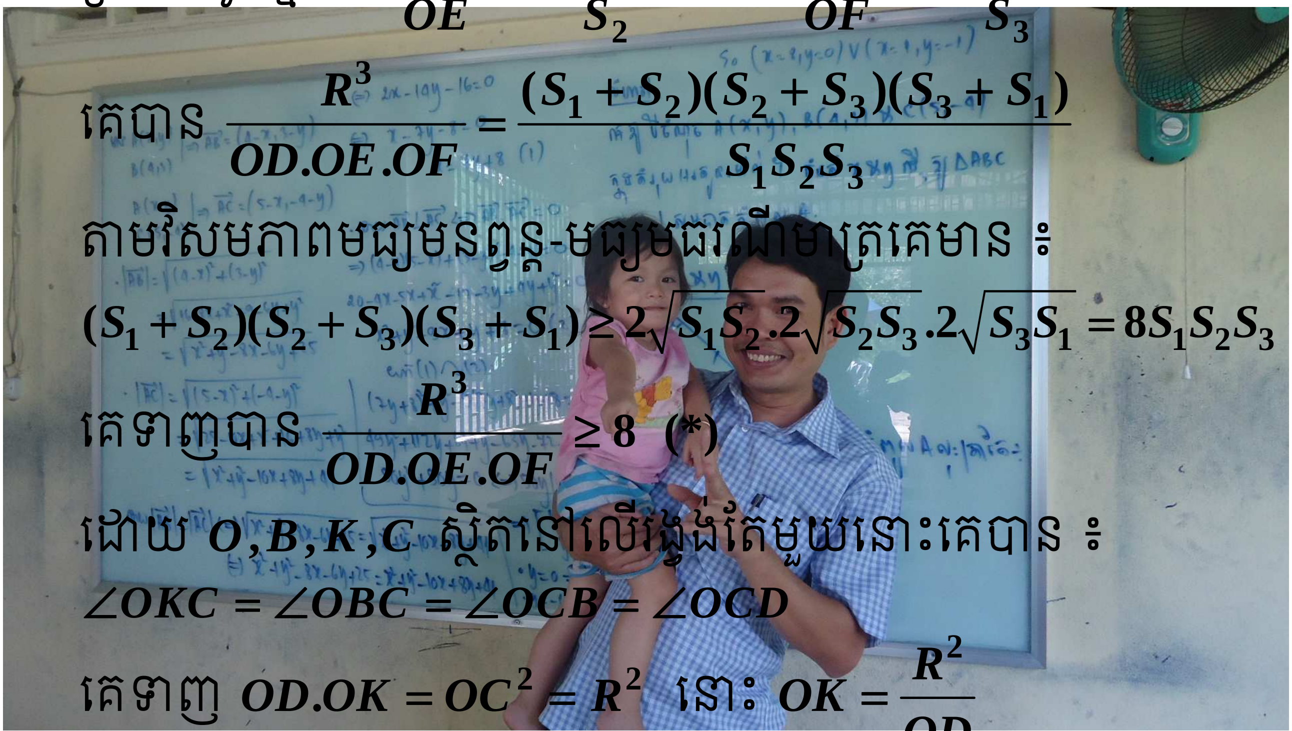
តាង S_1,S_2,S_3 រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\Delta OBC,\Delta OAC,\Delta OAB$

និង $S=S_1+S_2+S_3$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

យើងមាន $\frac{S}{S_1}=\frac{AD}{OD}=\frac{OA+OD}{OD}=\frac{OA}{OD}+1$

គេទាញ $\frac{OA}{OD}=\frac{S}{S_1}-1=\frac{S-S_1}{S_1}=\frac{S_2+S_3}{S_1}$ ឬ $\frac{R}{OD}=\frac{S_2+S_3}{S_1}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{R}{OE}=\frac{S_3+S_1}{S_2}$ និង $\frac{R}{OF}=\frac{S_1+S_2}{S_3}$



គេបាន $\frac{R^3}{OD.OE.OF}=\frac{(S_1+S_2)(S_2+S_3)(S_3+S_1)}{S_1S_2S_3}$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន ៖

$(S_1+S_2)(S_2+S_3)(S_3+S_1)\ge 2\sqrt{S_1S_2}.2\sqrt{S_2S_3}.2\sqrt{S_3S_1}=8S_1S_2S_3$

គេទាញបាន $\frac{R^3}{OD.OE.OF}\ge 8$ (*)

ដោយ O,B,K,C ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយនោះគេបាន ៖

$\angle OKC=\angle OBC=\angle OCB=\angle OCD$

គេទាញ $OD.OK=OC^2=R^2$ នោះ $OK=\frac{R^2}{OD}$

ដូចគ្នាដែរ $OL=\frac{R^2}{OE}$ និង $OM=\frac{R^2}{OF}$

គេបាន $OK.OL.OM=\frac{R^6}{OD.OE.OF}$ (**)

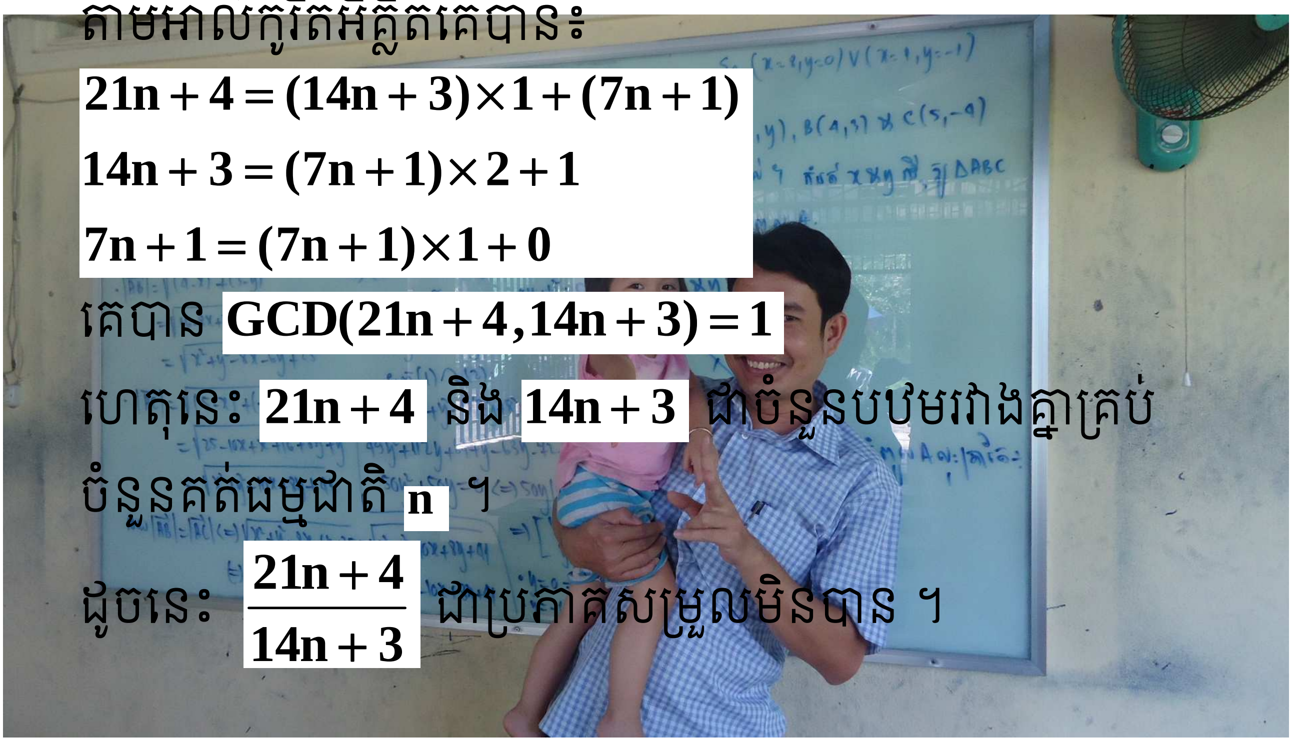
តាម (*) និង (**) គេទាញបាន $OK.OL.OM\ge 8R^3$ ពិត

ដូចនេះ $OK.OL.OM\ge 8R^3$ ។

លំហាត់ទី១០៤ (IMO 1959)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដំណោះស្រាយ



តាមអាល់កូរីតអឺគ្លីតគេបាន៖

$$21n+4=(14n+3)\times 1+(7n+1)$$

$$14n+3=(7n+1)\times 2+1$$

$$7n+1=(7n+1)\times 1+0$$

គេបាន $GCD(21n+4,14n+3)=1$

ហេតុនេះ $21n+4$ និង $14n+3$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដូចនេះ $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

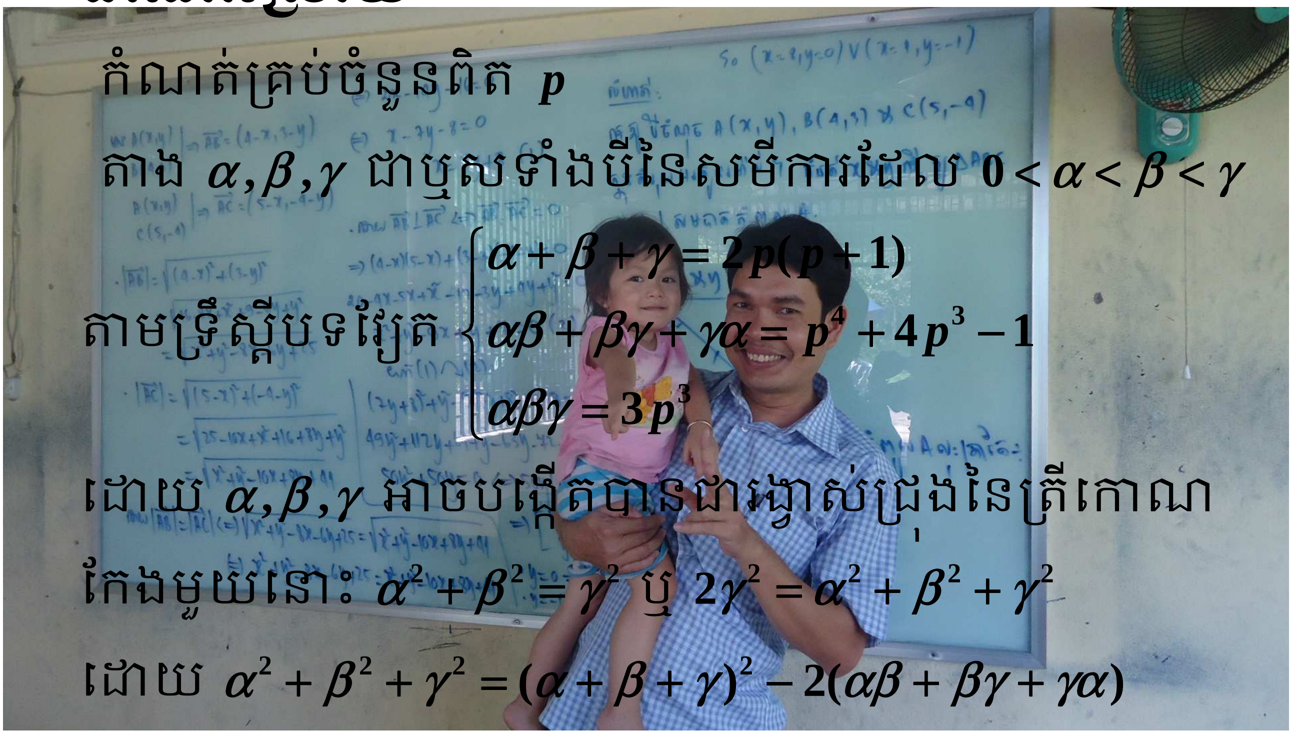
លំហាត់ទី១០៥

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនពិត p ដើម្បីឲ្យសមីការ ៖

$x^3-2p(p+1)x^2+(p^4+4p^3-1)x^2-3p^3=0$ មានឬសបី

ផ្សេងគ្នាបង្កើតបានជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែងមួយ ។

ដំណោះស្រាយ



កំណត់គ្រប់ចំនួនពិត p

តាង α,β,γ ជាឫសទាំងបីនៃសមីការដែល $0<\alpha<\beta<\gamma$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2p(p+1)\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p^4+4p^3-1\\ \alpha\beta\gamma=3p^3\end{cases}$

ដោយ α,β,γ អាចបង្កើតបានជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ

កែងមួយនោះ $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ ឬ $2\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

ដោយ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$$=4p^2(p+1)^2-2(p^4+4p^3-1)$$

$$=4p^4+8p^3+4p^2-2p^4-8p^3+2$$

$$=2(p^2+1)^2$$

គេទាញបាន $\gamma=p^2+1$ ។

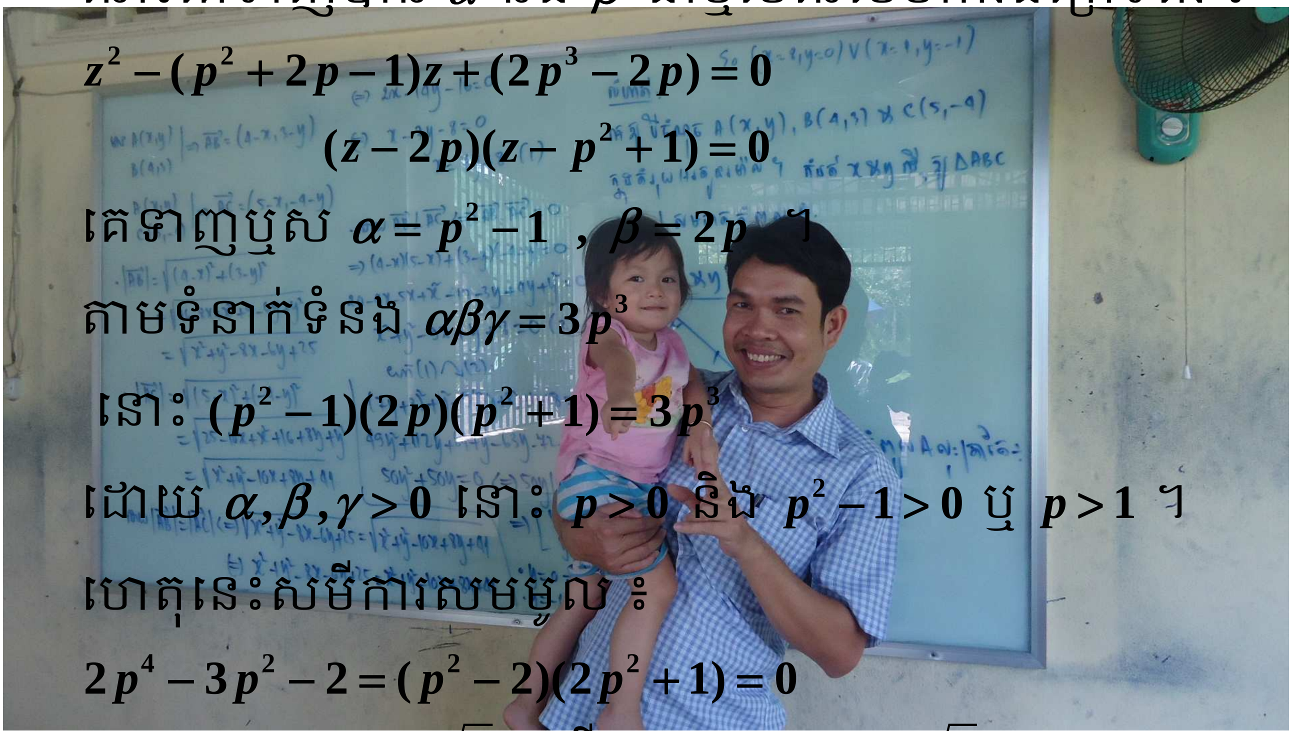
គេមាន $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2p(p+1)\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p^4+4p^3-1\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} \alpha+\beta = 2p(p+1)-\gamma \\ \alpha\beta = p^4+4p^3-1-(\alpha+\beta) \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} \alpha+\beta = 2p(p+1)-(p^2+1) \\ \alpha\beta = p^4+4p^3-1-(p^2+1)(p^2+2p-1) \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} \alpha+\beta = p^2+2p-1 \\ \alpha\beta = 2p^3-2p \end{cases}$

នោះគេទាញបាន α និង β ជាឬសនៃសមីការដឺក្រេទីពីរ ៖



$$z^2-(p^2+2p-1)z+(2p^3-2p)=0$$

$$(z-2p)(z-p^2+1)=0$$

គេទាញឬស $\alpha = p^2-1$, $\beta = 2p$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $\alpha\beta\gamma = 3p^3$

នោះ $(p^2-1)(2p)(p^2+1) = 3p^3$

ដោយ $\alpha,\beta,\gamma > 0$ នោះ $p>0$ និង $p^2-1>0$ ឬ $p>1$ ។

ហេតុនេះសមីការសមមូល ៖

$$2p^4-3p^2-2 = (p^2-2)(2p^2+1) = 0$$

គេទាញបាន $p=\sqrt{2}$ ហើយ $\alpha = 1$, $\beta = 2\sqrt{2}$, $\gamma = 3$ ។

ដូចនេះ $p=\sqrt{2}$ ។

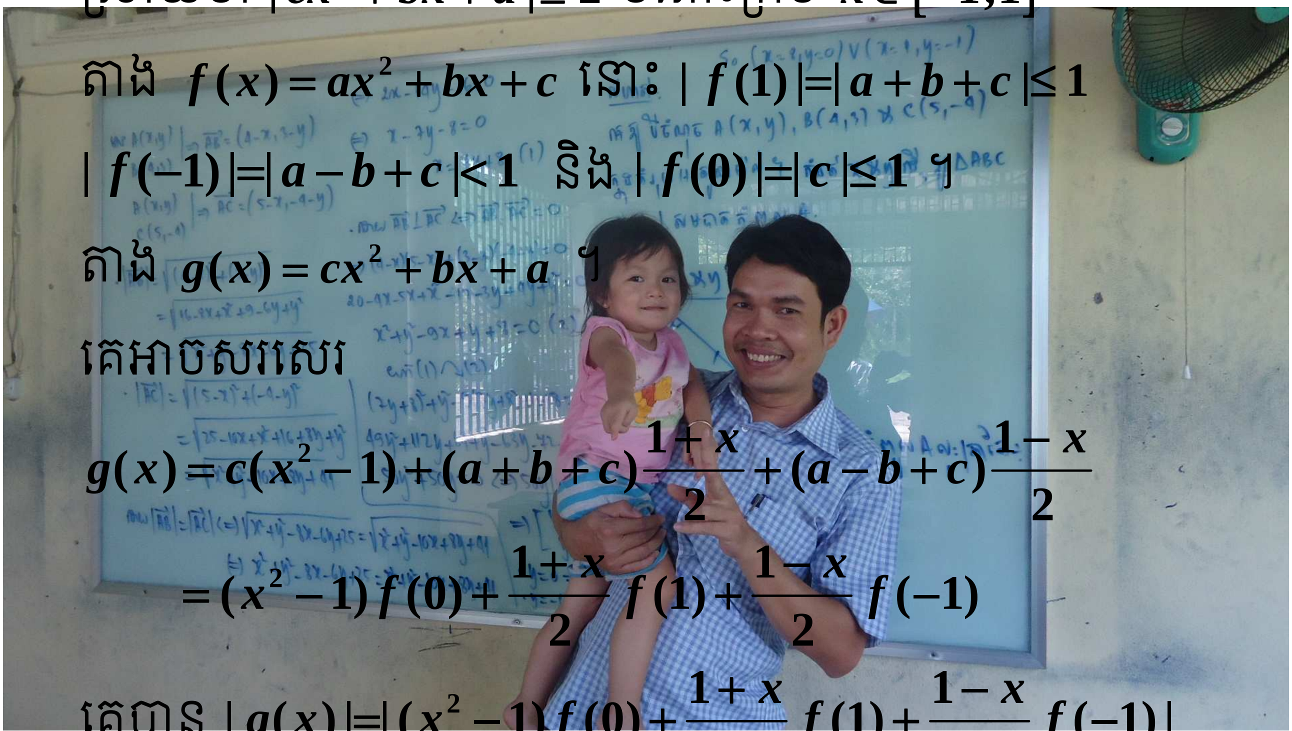
លំហាត់ទី១០៦

គេឲ្យ $a,b,c\in IR$ ។ បើ $|ax^2+bx+c|\le 1$ គ្រប់ $x\in[-1,1]$

ចូរស្រាយថា $|cx^2+bx+a|\le 2$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|cx^2+bx+a|\le 2$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,1]$



តាង $f(x)=ax^2+bx+c$ នោះ $|f(1)|=|a+b+c|\le 1$

$|f(-1)|=|a-b+c|\le 1$ និង $|f(0)|=|c|\le 1$ ។

តាង $g(x)=cx^2+bx+a$ ។

គេអាចសរសេរ

$$g(x)=c(x^2-1)+(a+b+c)\frac{1+x}{2}+(a-b+c)\frac{1-x}{2}$$

$$=(x^2-1)f(0)+\frac{1+x}{2}f(1)+\frac{1-x}{2}f(-1)$$

គេបាន $|g(x)|=|(x^2-1)f(0)+\dfrac{1+x}{2}f(1)+\dfrac{1-x}{2}f(-1)|$

ដោយប្រើវិសមភាពត្រីកោណគេបាន ៖

$$|g(x)|\le|x^2-1|.|f(0)|+\frac{|1+x|}{2}|f(1)|+\frac{|1-x|}{2}|f(-1)|$$

ដោយ $|f(1)|\le 1$, $|f(-1)|\le 1$ និង $|f(0)|\le 1$

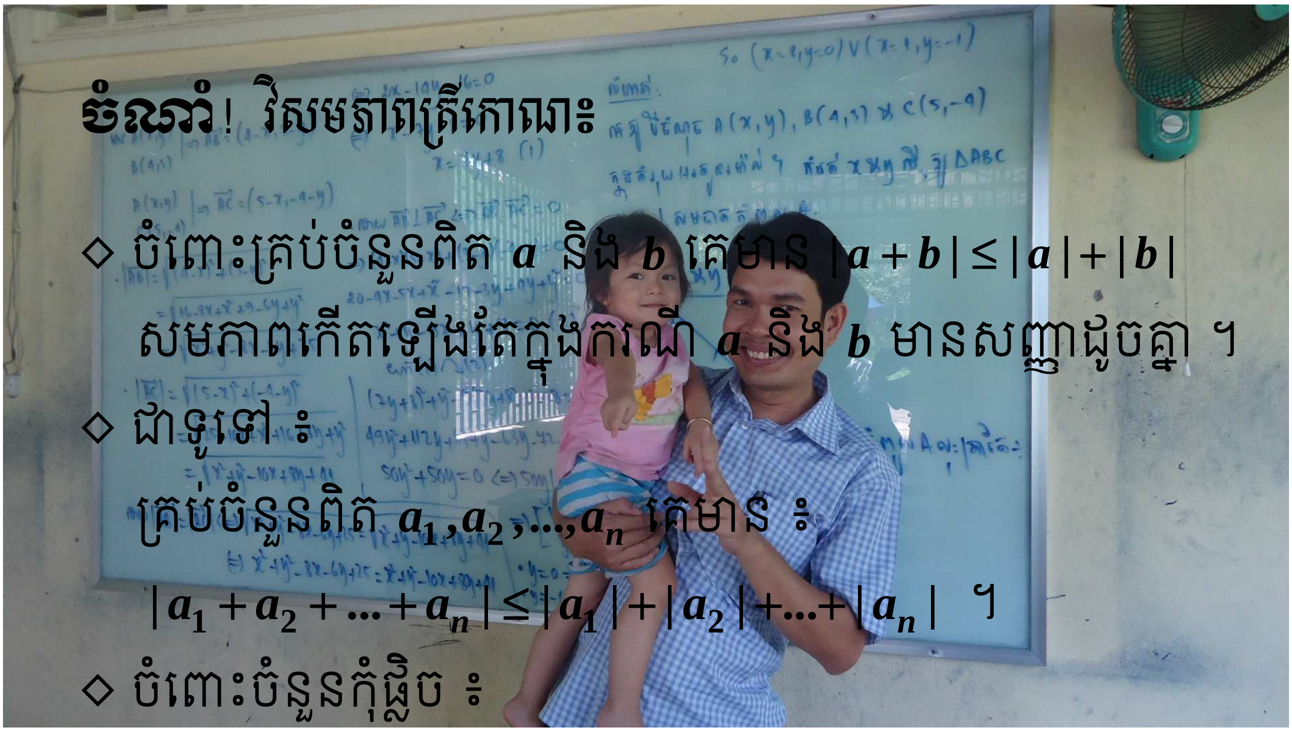
នោះគេបាន ៖

$$|g(x)|\le|x^2-1|+|\frac{1+x}{2}|+|\frac{1-x}{2}|=-x^2+1+\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}=2-x^2$$

ដោយ $2-x^2\le 2$ នោះ $|g(x)|\le 2$ ។

ដូចនេះ បើ $|ax^2+bx+c|\le 1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,1]$

នោះ $|cx^2+bx+a|\le 2$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,1]$ ។



ចំណាំ! វិសមភាពត្រីកោណ៖

◇ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b គេមាន $|a+b|\le|a|+|b|$

សមភាពកើតឡើងតែក្នុងករណី a និង b មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

◇ ជាទូទៅ ៖

គ្រប់ចំនួនពិត $a_1,a_2,...,a_n$ គេមាន ៖

$|a_1+a_2+...+a_n|\le|a_1|+|a_2|+...+|a_n|$ ។

◇ ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច ៖

គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច $z_1,z_2,...,z_n$ គេមាន ៖

$|z_1+z_2+...+z_n|\le|z_1|+|z_2|+...+|z_n|$ ។

(ដែល $|z|$ តាងឲ្យម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច z)

◇ ចំពោះវ៉ិចទ័រក្នុងប្លង់ ឬ ក្នុងលំហ ៖

$|\vec{u_1}+\vec{u_2}+....+\vec{u_n}|\le|\vec{u_1}|+|\vec{u_2}|+....+|\vec{u_n}|$ ។

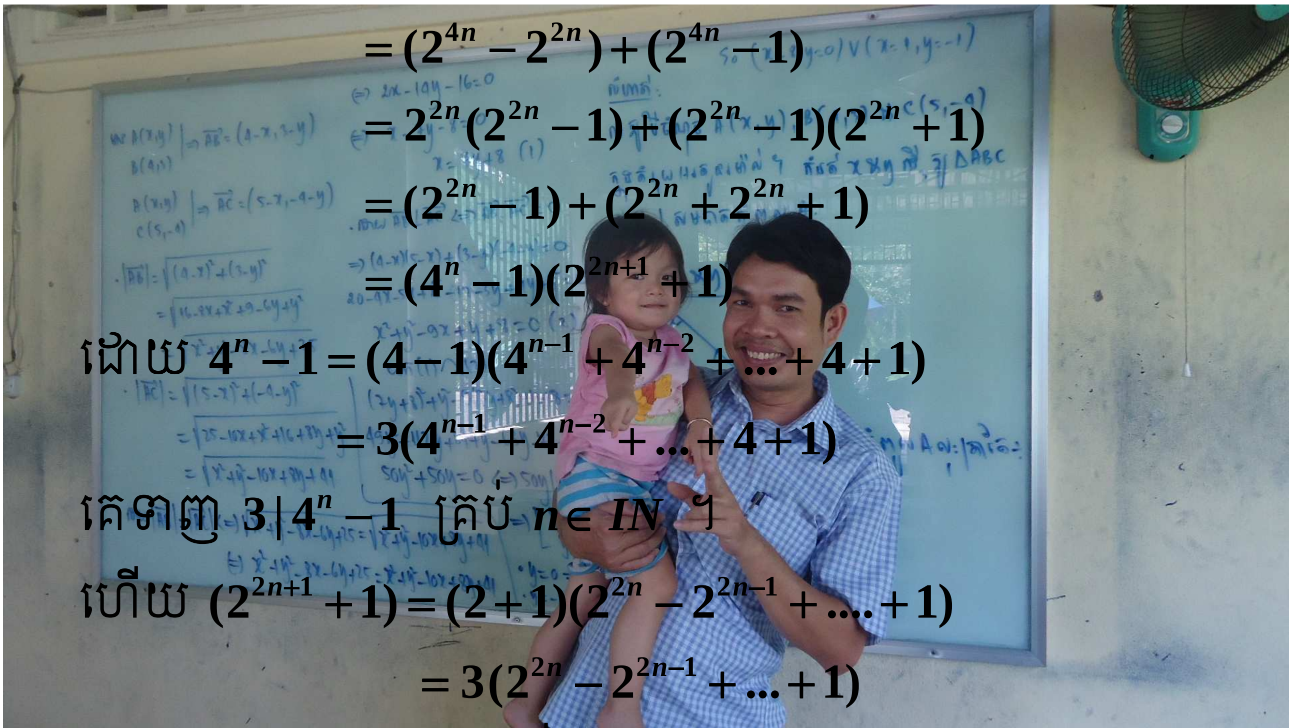
លំហាត់ទី១០៧

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តម្លៃនៃកន្សោម ៖

$A_n = 2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$ ចែកដាច់នឹង 9 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $A_n = 2^{4n+1} - 2^{2n} - 1 = 2^{4n}.2 - 2^{2n} - 1$



$$= (2^{4n} - 2^{2n}) + (2^{4n} - 1)$$

$$= 2^{2n}(2^{2n} - 1) + (2^{2n} - 1)(2^{2n} + 1)$$

$$= (2^{2n} - 1) + (2^{2n} + 2^{2n} + 1)$$

$$= (4^n - 1)(2^{2n+1} + 1)$$

ដោយ $4^n - 1 = (4-1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 4 + 1)$

$$= 3(4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 4 + 1)$$

គេទាញ $3 | 4^n - 1$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ហើយ $(2^{2n+1} + 1) = (2+1)(2^{2n} - 2^{2n-1} + ... + 1)$

$$= 3(2^{2n} - 2^{2n-1} + ... + 1)$$

គេទាញ $3 | 2^{2n+1} + 1$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ដូចនេះ $A_n = 2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$ ចែកដាច់នឹង 9 ។

សម្គាល់ ៖ *ចំនួនគត់ a ចែកដាច់នឹងចំនួនគត់ b លុះត្រាតែមាន ចំនួនគត់ q ដែល $a = bq$ ។*

គេកំណត់សរសេរ $b | a$ អានថា b ចែកដាច់ a ។

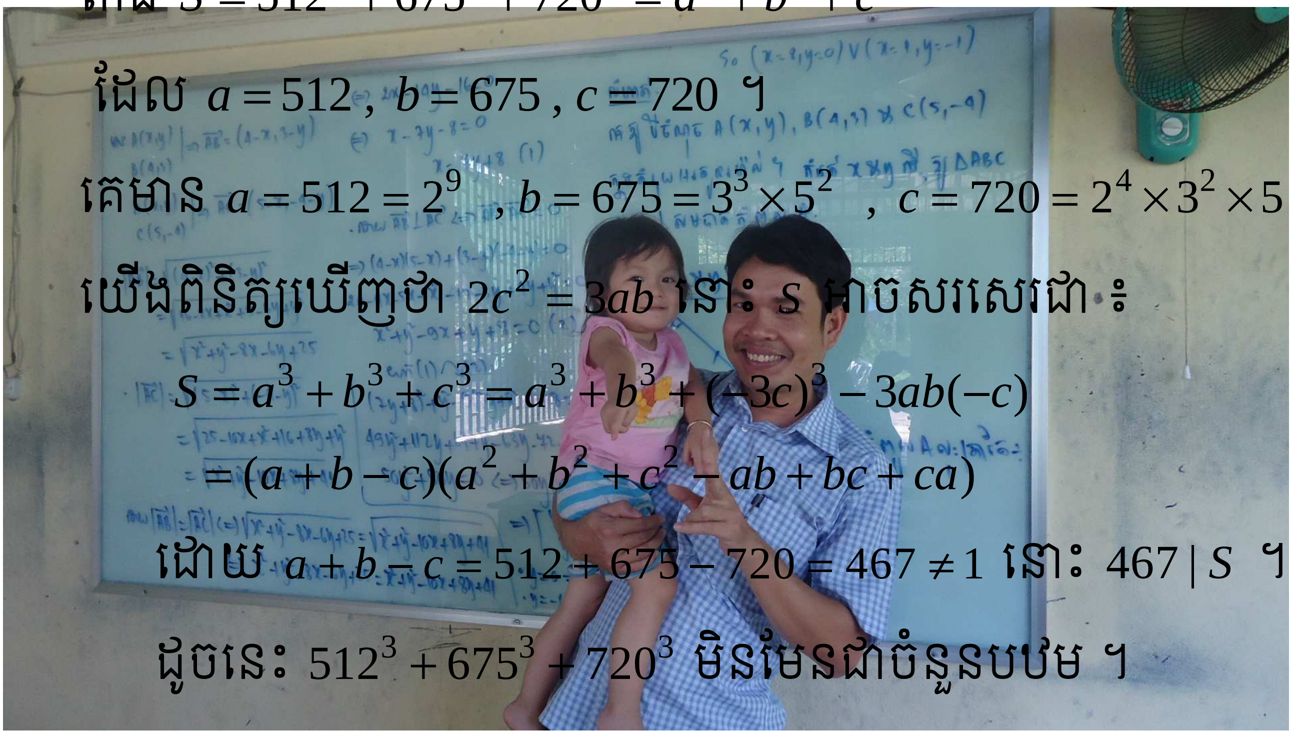
លំហាត់ទី១០៨

ចូរបង្ហាញថា $512^3+675^3+720^3$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $512^3+675^3+720^3$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ៖

តាង $S=512^3+675^3+720^3=a^3+b^3+c^3$



ដែល $a=512$, $b=675$, $c=720$ ។

គេមាន $a=512=2^9$, $b=675=3^3\times5^2$, $c=720=2^4\times3^2\times5$

យើងពិនិត្យឃើញថា $2c^2=3ab$ នោះ S អាចសរសេរជា ៖

$$S=a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+(-3c)^3-3ab(-c)$$
$$=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$$

ដោយ $a+b-c=512+675-720=467\neq1$ នោះ $467\,|\,S$ ។

ដូចនេះ $512^3+675^3+720^3$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

លំហាត់ទី១០៩

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1$, $u_2=5$

និង $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}^2+4}{u_n}$ ដែល $n\in IN$ ។

ចូរស្រាយថាគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត(u_n)សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ រួចគណនាតួទូទៅ u_n នៃស្វ៊ីតជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត(u_n)សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ៖

គេមាន $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}^2+4}{u_n}$ នោះ $u_{n+2}u_n=u_{n+1}^2+4$ (1)

ហើយ $u_{n+3}u_{n+1}=u_{n+2}^2+4$ (2)

ដកសមីការ (1) និង (2) គេបាន

$$u_{n+2}u_n-u_{n+3}u_{n+1}=u_{n+1}^2-u_{n+2}^2$$

សមមូល $u_{n+2}u_n+u_{n+2}^2=u_{n+3}u_{n+1}+u_{n+1}^2$

ឬ $u_{n+2}(u_n+u_{n+2})=u_{n+1}(u_{n+3}+u_{n+1})$

សមមូល $\dfrac{u_{n+3}+u_{n+1}}{u_{n+2}}=\dfrac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}}$ (3)

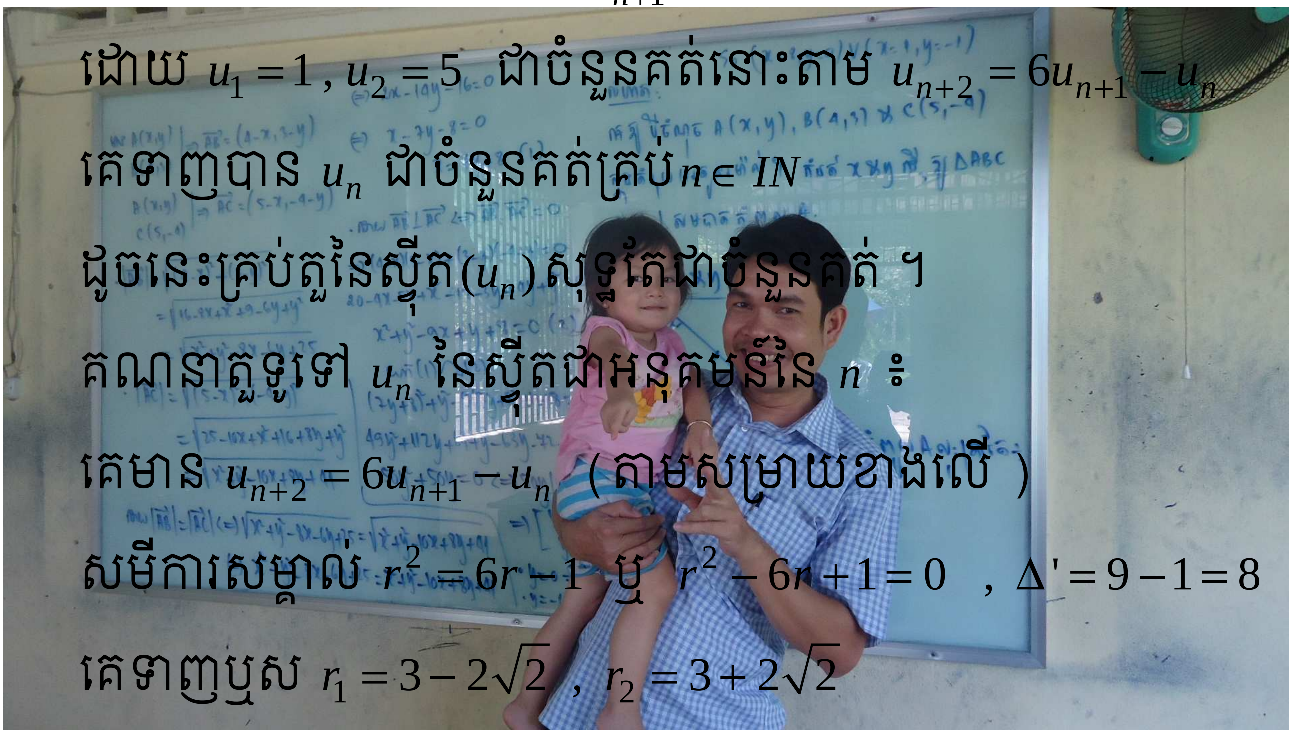
តាង $V_n=\dfrac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}}$ នោះ $V_{n+1}=\dfrac{u_{n+3}+u_{n+1}}{u_{n+2}}=V_n$

(តាមទំនាក់ទំនង(3)) នោះ (V_n) ជាស្វ៊ីតថេរ ។

គេបាន $V_n=V_1=\dfrac{u_3+u_1}{u_2}$ តែ $u_1=1\,,\,u_2=5$

និង $u_3=\dfrac{u_2^2+4}{u_1}=\dfrac{25+4}{1}=29$

នោះ $V_n=\dfrac{29+1}{5}=6$ ឬ $\dfrac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}}=6$ នាំឲ្យ $u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n$



ដោយ $u_1=1\,,\,u_2=5$ ជាចំនួនគត់នោះតាម $u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n$

គេទាញបាន u_n ជាចំនួនគត់គ្រប់ $n\in IN$

ដូចនេះគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត (u_n) សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ។

គណនាតួទូទៅ u_n នៃស្វ៊ីតជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

សមីការសម្គាល់ $r^2=6r-1$ ឬ $r^2-6r+1=0$, $\Delta'=9-1=8$

គេទាញឫស $r_1=3-2\sqrt{2}$, $r_2=3+2\sqrt{2}$

តួទូទៅនៃស្វ៊ីតមានរាង

$$u_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n=\alpha\left(3-2\sqrt{2}\right)^n+\beta\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$$

ដោយ $u_1=1\,,\,u_2=5$ នោះ: $\begin{cases}\alpha(3-2\sqrt{2})+\beta(3+2\sqrt{2})=1\\ \alpha(3-2\sqrt{2})^2+\beta(3+2\sqrt{2})^2=5\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រពន្ធ័នេះគេបាន

$$\alpha = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \ , \beta = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

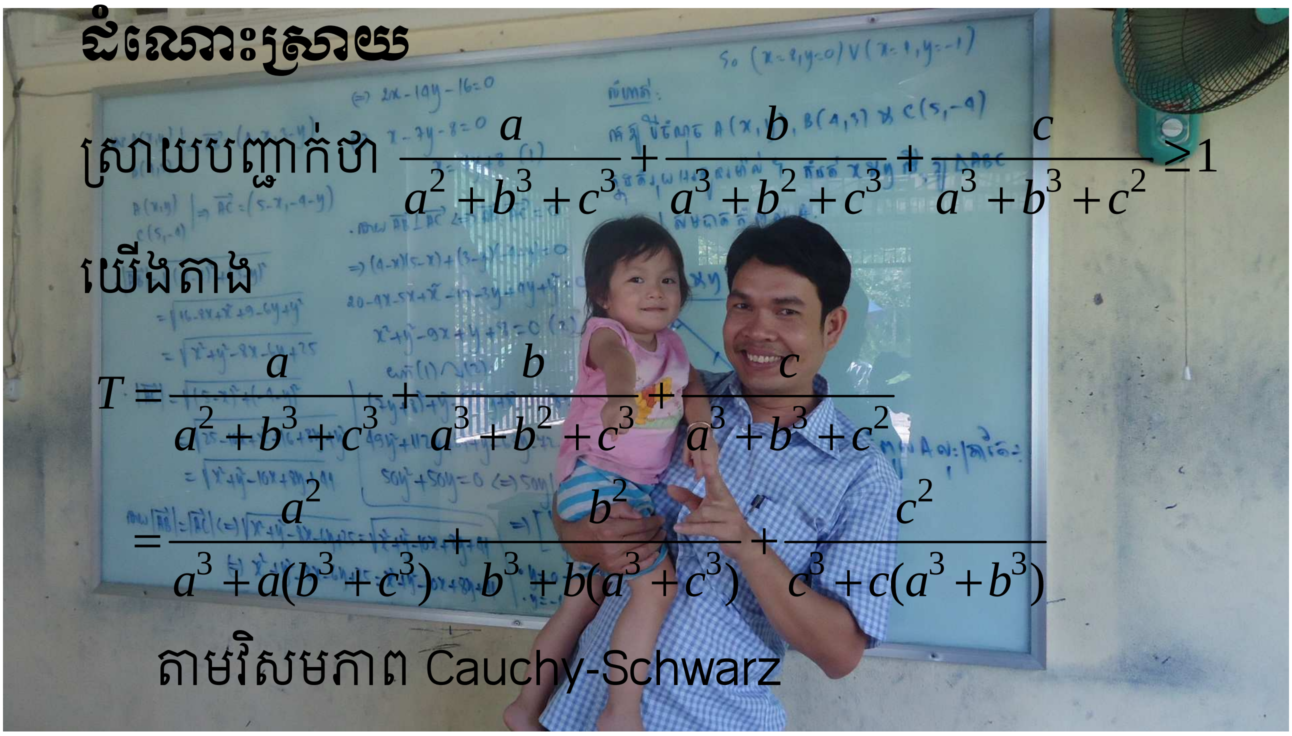
ដូចនេះ $u_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$ ។

លំហាត់ទី១១០

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$a^3+b^3+c^3=a^4+b^4+c^4$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{a^2+b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+b^2+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3+c^2}\geq 1 \text{ ។}$$



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{a^2+b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+b^2+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3+c^2}\geq 1$

យើងតាង

$$T=\frac{a}{a^2+b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+b^2+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3+c^2}$$

$$=\frac{a^2}{a^3+a(b^3+c^3)}+\frac{b^2}{b^3+b(a^3+c^3)}+\frac{c^2}{c^3+c(a^3+b^3)}$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \quad (*)$$

$$a_1=\frac{a}{\sqrt{a^3+a(b^3+c^3)}}\ ,\ a_2=\frac{b}{\sqrt{b^3+b(a^3+c^3)}}$$

$$a_3=\frac{c}{\sqrt{c^3+c(a^3+b^3)}}$$

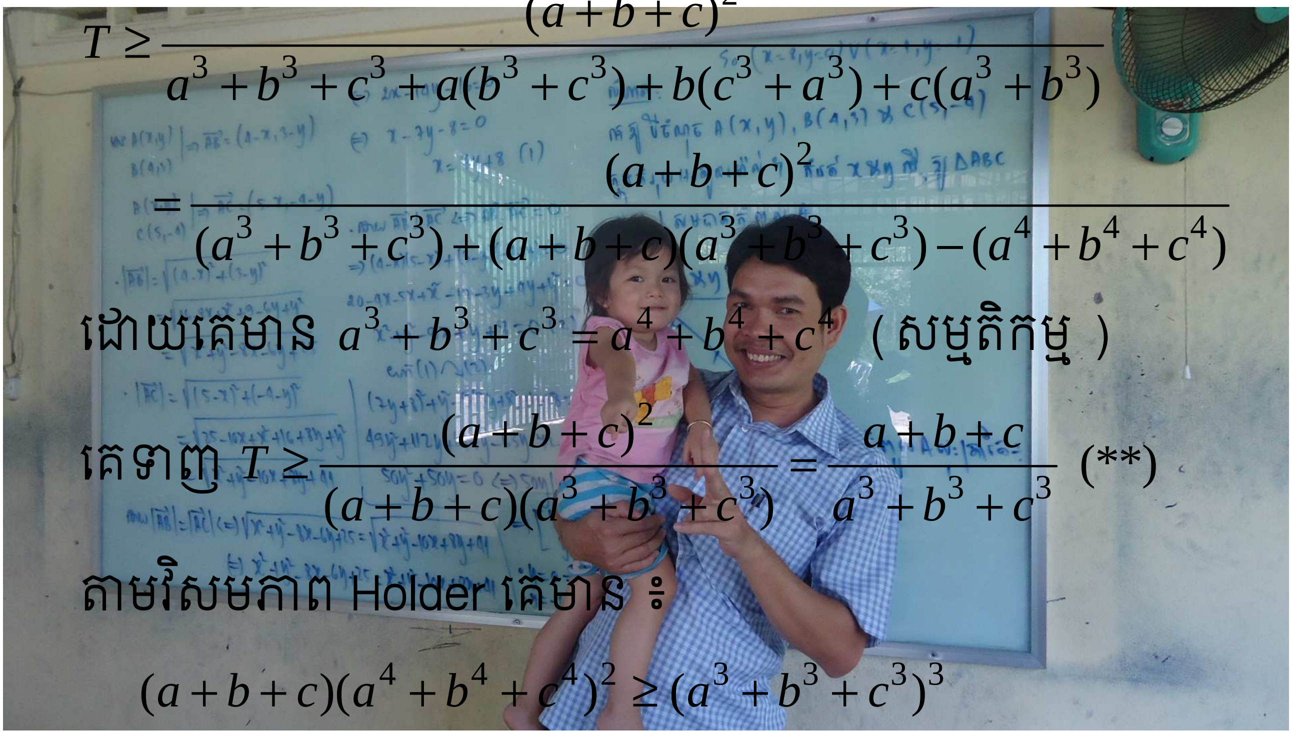
$b_1 = \sqrt{a^3 + a(b^3 + c^3)}$, $b_2 = \sqrt{b^3 + b(a^3 + c^3)}$

$b_3 = \sqrt{c^3 + c(a^3 + b^3)}$

ដែល $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a + b + c$, $a_1{}^2 + a_2^2 + a_3^2 = T$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a^3 + b^3 + c^3 + a(b^3 + c^3) + b(c^3 + a^3) + c(a^3 + b^3)$$

ជំនួសក្នុង (*) គេទាញបាន



$$T \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + a(b^3 + c^3) + b(c^3 + a^3) + c(a^3 + b^3)}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{(a^3 + b^3 + c^3) + (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4)}$$

ដោយគេមាន $a^3 + b^3 + c^3 = a^4 + b^4 + c^4$ (សម្មតិកម្ម)

គេទាញ $T \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3)} = \dfrac{a+b+c}{a^3 + b^3 + c^3}$ (**)

តាមវិសមភាព Holder គេមាន ៖

$$(a+b+c)(a^4 + b^4 + c^4)^2 \geq (a^3 + b^3 + c^3)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a^3 + b^3 + c^3} \geq \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2}{(a^4 + b^4 + c^4)^2} = 1 \quad (***)$$

តាម (**) និង (***) គេទាញបាន $T \geq 1$ ពិត ។

ដូចនេះ $\dfrac{a}{a^2 + b^3 + c^3} + \dfrac{b}{a^3 + b^2 + c^3} + \dfrac{c}{a^3 + b^3 + c^2} \geq 1$ ។

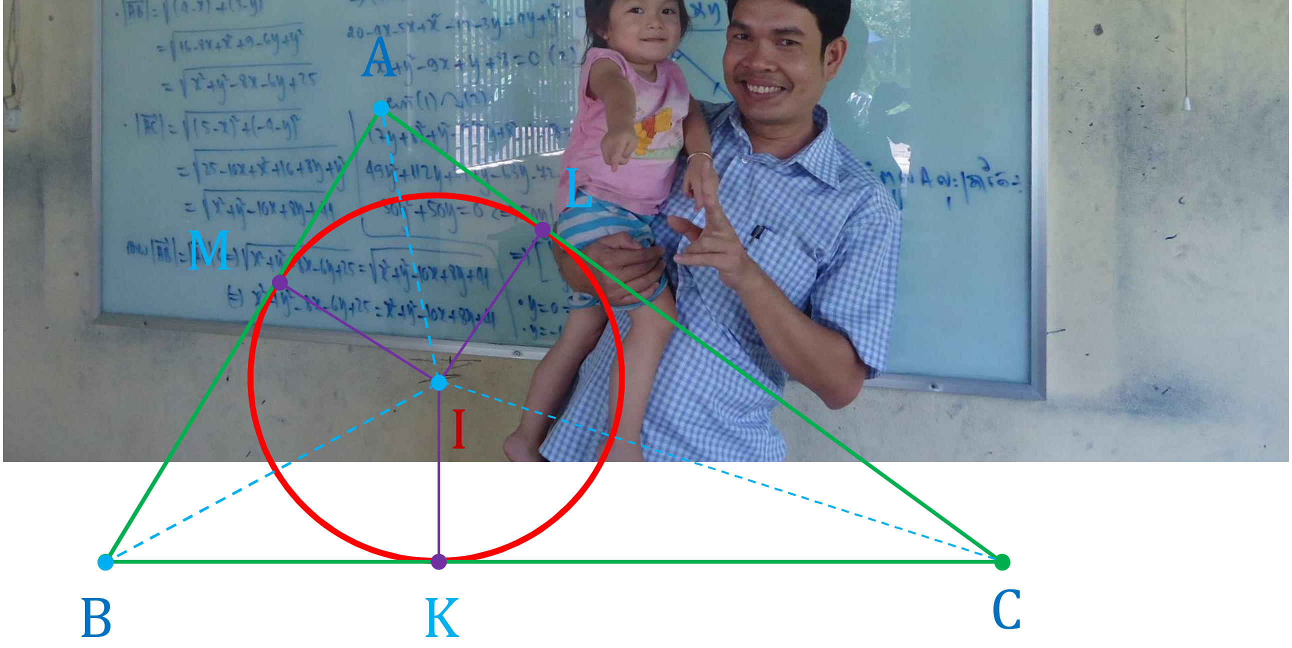
លំហាត់ទី១១១

រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC មួយប៉ះជ្រុង BC , CA និង AB រៀងគ្នាត្រង់ K , L និង M ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{\dfrac{AL}{AB}}+\sqrt{\dfrac{BM}{BC}}+\sqrt{\dfrac{CK}{CA}}\le\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{\dfrac{AL}{AB}}+\sqrt{\dfrac{BM}{BC}}+\sqrt{\dfrac{CK}{CA}}\le\dfrac{3}{\sqrt{2}}$



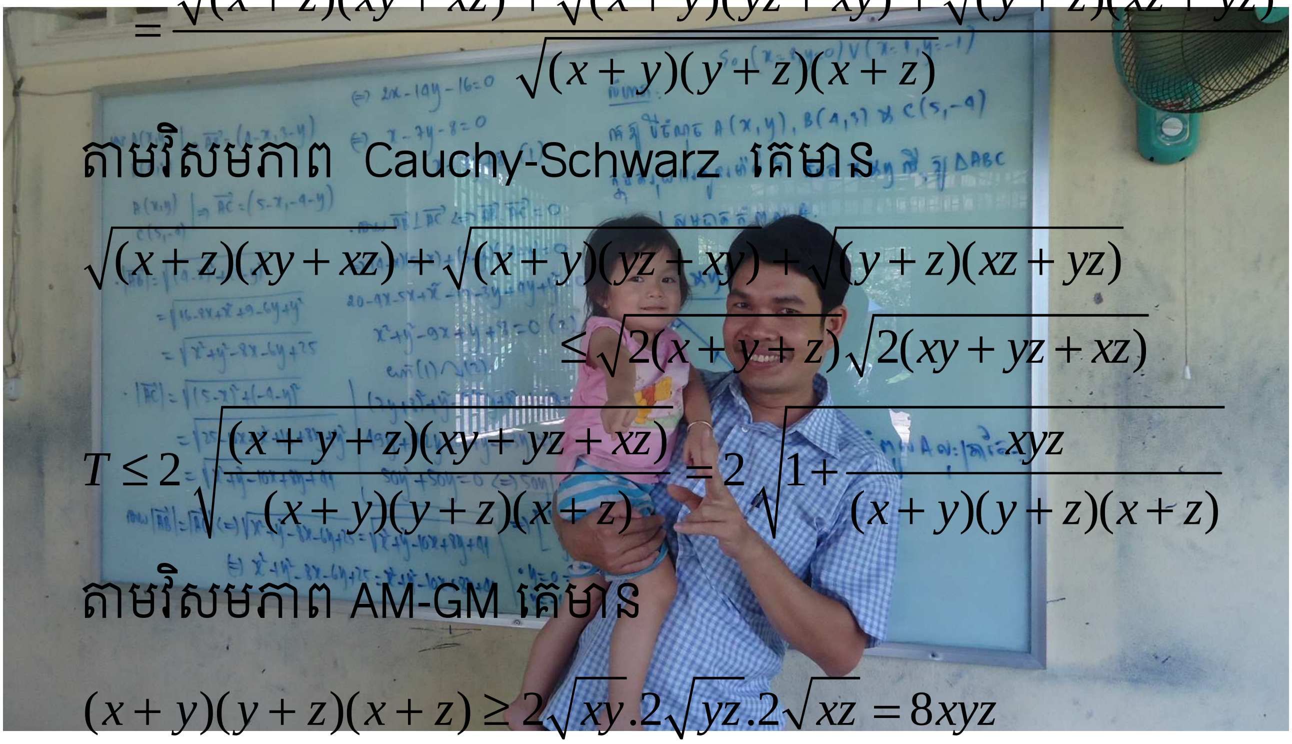
តាង $AM=AL=x$, $BM=BK=y$, $CK=CL=z$ នោះ

$BC=y+z$, $CA=z+x$, $AB=x+y$

$$\sqrt{\frac{AL}{AB}}+\sqrt{\frac{BM}{BC}}+\sqrt{\frac{CK}{CA}}=\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}} \quad (*)$$

តាង $T=\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}$

$$=\frac{\sqrt{x(y+z)(z+x)}+\sqrt{y(x+y)(z+x)}+\sqrt{z(x+y)(y+z)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(x+z)}}$$



$$=\frac{\sqrt{(x+z)(xy+xz)}+\sqrt{(x+y)(yz+xy)}+\sqrt{(y+z)(xz+yz)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(x+z)}}$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz គេមាន

$$\sqrt{(x+z)(xy+xz)}+\sqrt{(x+y)(yz+xy)}+\sqrt{(y+z)(xz+yz)}$$
$$\leq\sqrt{2(x+y+z)}\sqrt{2(xy+yz+xz)}$$

$$T\leq 2\sqrt{\frac{(x+y+z)(xy+yz+xz)}{(x+y)(y+z)(x+z)}}=2\sqrt{1+\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}}$$

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន

$$(x+y)(y+z)(x+z)\geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{xz}=8xyz$$

នោះគេទាញ $\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}\leq\frac{1}{8}$

ហេតុនេះ $T\leq 2\sqrt{1+\frac{1}{8}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{\frac{AL}{AB}}+\sqrt{\frac{BM}{BC}}+\sqrt{\frac{CK}{CA}}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$ ។

ឯកសារយោង

1) S.L.Greitzer, International Mathematical Olympiads 1959-77
2) M.S.Klamkin, International Mathematical Olympiads 1978-85
3) M.S .Klamkin , USA Mathematical Olympiads 1972-85
4) C.R .Pranesachar,B.J.Venkatachala,C.S.Yoganada ,Problem Primer For the Olympiads.
5) Crux Mathematicorum 1999-2000.