ជំពូក ៤ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

មេរៀនទី ១

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់ ១

១. និយមន័យ

– សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល គឺជាសមីការដែលមានអនុគមន៍ និងដេរីវេរបស់វាមួយ ឬច្រើន ។

– ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ជាអនុគមន៍មួយដែលអនុគមន៍នេះ និងដេរីវេរបស់វាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ។

– លំដាប់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺជាលំដាប់នៃដេរីវេខ្ពស់ជាងគេក្នុងសមីការ ។

ឧទាហរណ៍៖

១. $y' - 3y = 0$

២. $y' - 5y = 2x^2 + x - 3$

} ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ ១ ។

៣. $5y'' - y' - 2y = 0$

៤. $y'' + 2y' + y = e^{4x}$

} ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ ២ ។

លំហាត់គំរូ បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវគ្នារបស់វា៖

ក. អនុគមន៍ $y = ke^{-3x}$ សមីការ $y' + 3y = 0$ ។

ខ. អនុគមន៍ $y = 5\tan 5x$ សមីការ $y' - y^2 = 25$ ។

គ. អនុគមន៍ $y = ke^{-\frac{1}{2}x}$ សមីការ $2y' + y = 0$ ។

ចម្លើយ

បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវគ្នារបស់វា

ក. អនុគមន៍ $y = ke^{-3x}$ សមីការ $y' + 3y = 0$

យើងបាន $y' = k(-3x)'e^{-3x} = -3ke^{-3x}$

នោះ $y' + 3y = -3ke^{-3x} + 3ke^{-3x} = 0$

ដូចនេះអនុគមន៍ $y = ke^{-3x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y' + 3y = 0$ ។

ខ. អនុគមន៍ $y = 5\tan 5x$ សមីការ $y' - y^2 = 25$

យើងបាន $y' = 5 \cdot \dfrac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \dfrac{25}{\cos^2 5x}$

នោះ $y' - y^2 = \dfrac{25}{\cos^2 5x} - (5\tan 5x)^2 = \dfrac{25}{\cos^2 5x} - \dfrac{25\sin^2 5x}{\cos^2 5x}$

$$= \frac{25 - 25\sin^2 5x}{\cos^2 5x} = \frac{25(1 - \sin^2 5x)}{\cos^2 5x} = \frac{25\cos^2 5x}{\cos^2 5x} = 25$$

ដូចនេះអនុគមន៍ $y = 5\tan 5x$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y' - y^2 = 25$ ។

គ. អនុគមន៍ $y = ke^{-\frac{1}{2}x}$ សមីការ $2y' + y = 0$

យើងបាន $y' = k\left(-\dfrac{1}{2}x\right)' e^{-\frac{1}{2}x} = -\dfrac{1}{2}ke^{-\frac{1}{2}x}$

នោះ $2y' + y = 2\left(-\dfrac{1}{2}ke^{-\frac{1}{2}x}\right) + ke^{-\frac{1}{2}x} = -ke^{-\frac{1}{2}x} + ke^{-\frac{1}{2}x} = 0$

ដូចនេះអនុគមន៍ $y = ke^{-\frac{1}{2}x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $2y' + y = 0$ ។

ប្រតិបត្តិ បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោម ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលត្រូវគ្នារបស់វា៖

ក. អនុគមន៍ $y = x + e^x$ សមីការ $y' - y = 1 - x$ ។

ខ. អនុគមន៍ $y = e^{3x} - x - 1$ សមីការ $y' - 3y = 3x + 2$ ។

គ. អនុគមន៍ $y = \sin x + \cos x$ សមីការ $y' + y = 2\cos x$ ។

ឃ. អនុគមន៍ $y = \sin x - 3\cos x$ សមីការ $y' - 3y = 10\cos x$ ។

ង. អនុគមន៍ $y = x + \ln x$ សមីការ $xy' - y = 1 - \ln x$ ។

២. ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់មួយ

ក. ដំណោះស្រាយសមីការមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(x)$

ជាទូទៅ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ យើងត្រូវ៖

❶. សរសេរសមីការ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ជារាង $dy = f(x)\,dx$

❷. បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ៖ $\int dy = \int f(x)\,dx$

នាំឲ្យ $y = F(x) + c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ

❸. $y = F(x) + c$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(x)$

❹. រកចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_o) = y_o$ គឺយក x_o និង y_o ទៅជំនួសក្នុងសមីការទូទៅ រួចទាញរក $c = y_o - F(x_o)$ ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $y = \int f(x)\,dx + y_o - F(x_o)$ ជាចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_o) = y_o$ ។

លំហាត់គំរូទី១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' = 6x^2 + 4x + 5$ ខ. $y' = 2x^2 - x + 1$ គ. $y' = \frac{2x}{x^2+1}$

ឃ. $y' = x^2 + x + \frac{1}{3x}$ ង. $y' = \frac{4}{x^2}$ ច. $\frac{y'}{x^2-3} = x + 2$

ឆ. $y' = \frac{x^4 + 4x^2 - 2}{x^2}$ ជ. $y' = \sin x$ ឈ. $xy' = 1$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' = 6x^2 + 4x + 5$

– សមីការអាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 4x + 5$ ឬ $dy = (6x^2 + 4x + 5)dx$

– បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int (6x^2 + 4x + 5)\ dx$$

$$y = 6\left(\frac{x^3}{3}\right) + 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + 5x + c = 2x^3 + 2x^2 + 5x + c$$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $y = 2x^3 + 2x^2 + 5x + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ។

ខ. $y' = 2x^2 - x + 1$

– សមីការនោះអាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx} = 2x^2 - x + 1$ ឬ $dy = (2x^2 - x + 1)dx$

– បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ $\int dy = \int (2x^2 - x + 1)\ dx$

$$y = 2\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{x^2}{2} + x + c = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ។

គ. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

– សមីការនោះអាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ឬ $dy = \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)dx$

– បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right) dx \Rightarrow \int dy = \int \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)}\ dx$$

$$y = \ln(x^2 + 1) + c$$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $y = \ln(x^2 + 1) + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ។

ឃ. $y' = x^2 + x + \frac{1}{3x}$

– សមីការនោះអាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx} = x^2 + x + \frac{1}{3x}$ ឬ $dy = \left(x^2 + x + \frac{1}{3x}\right)dx$

– បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int \left(x^2 + x + \frac{1}{3x}\right) dx \Rightarrow \int dy = \int \left(x^2 + x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}\right) dx$$

$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\ln x + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ: $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\ln x + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ។

ង. $y' = \frac{4}{x^2}$

– សមីការនោះអាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^2}$ ឬ $dy = \left(\frac{4}{x^2}\right)dx$

– បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int \left(\frac{4}{x^2}\right) dx \Rightarrow \int dy = \int 4\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$y = 4\left(-\frac{1}{x}\right) + c = -\frac{4}{x} + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ: $y = -\frac{4}{x} + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ។

ច. $\frac{y'}{x^2 - 3} = x + 2$ នោះ: $y' = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$

– សមីការនោះអាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx} = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$

ឬ $dy = (x^3 + 2x^2 - 3x - 6)dx$

– បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int (x^3 + 2x^2 - 3x - 6)\, dx$$

$y=\frac{x^4}{4}+2\left(\frac{x^3}{3}\right)-3\left(\frac{x^2}{2}\right)-6x+c$

$=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+c$ ដែល $c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+c$ ដែល $c\in\mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅ ។

ឆ. $y'=\frac{x^4+4x^2-2}{x^2}$ នោះ $y'=x^2+4-\frac{2}{x^2}$

– សមីការនោះអាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx}=x^2+4-\frac{2}{x^2}$ ឬ $dy=\left(x^2+4-\frac{2}{x^2}\right)dx$

– បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$\int dy=\int\left(x^2+4-\frac{2}{x^2}\right)dx$

$y=\frac{1}{3}x^3+4x-2\left(-\frac{1}{x}\right)+c=\frac{1}{3}x^3+4x+\frac{2}{x}+c$ ដែល $c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $y=\frac{1}{3}x^3+4x+\frac{2}{x}+c$ ដែល $c\in\mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ។

ជ. $y'=\sin x$

– សមីការនោះអាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx}=\sin x$ ឬ $dy=(\sin x)dx$

– បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$\int dy=\int(\sin x)\,dx$

$y=-\cos x+c$ ដែល $c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $y=-\cos x+c$ ដែល $c\in\mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ។

ឈ. $xy'=1$ នោះ $y'=\frac{1}{x}$

– សមីការនោះអាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ ឬ $dy=\left(\frac{1}{x}\right)dx$

– បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int \left(\frac{1}{x}\right) dx \quad \Rightarrow \quad y = \ln x + c \text{ ដែល } c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $y = \ln x + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

លំហាត់គំរូទី២ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' = 3x^2 + 4x - 2$

ខ. $y' = 5x^4 + 1$ ដែល $y(0) = 2$

គ. $y' = xe^x$ ដែល $y(0) = -1$

ឃ. $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ ដែល $y(0) = 5$

ង. $y' = xe^{x^2}$

ច. $y' = e^{-2x}$

ឆ. $y' = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

ជ. $x^2 y' = 1$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' = 3x^2 + 4x - 2$

យើងបាន $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 2$ ឬ $dy = (3x^2 + 4x - 2)\, dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int (3x^2 + 4x - 2)\, dx$$

$$y = 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 2x + c = x^3 + 2x^2 - 2x + c \text{ ដែល } c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = x^3 + 2x^2 - 2x + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$ ។

ខ. $y' = 5x^4 + 1$ ដែល $y(0) = 2$

យើងបាន $\dfrac{dy}{dx} = 5x^4 + 1$ ឬ $dy = (5x^4 + 1)\, dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int (5x^4 + 1)\, dx$$

$y = 5\left(\frac{x^5}{5}\right) + x + c = x^5 + x + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដោយ $y(0) = 2$ យើងបាន $0^5 + 0 + c = 2$ នាំឲ្យ $c = 2$

ដូចនេះ $y = x^5 + x + 2$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y' = 5x^4 + 1$ តាមលក្ខខណ្ឌ $y(0) = 2$ ។

គ. $y' = e^x$ ដែល $y(0) = -1$

យើងបាន $\frac{dy}{dx} = e^x$ ឬ $dy = e^x\,dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$\int dy = \int e^x\,dx$ នោះ $y = e^x + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដោយ $y(0) = -1$ យើងបាន $e^0 + c = -1$ នាំឲ្យ $c = -1 - e^0 = -2$

ដូចនេះ $y = e^x - 2$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y(0) = -1$ ។

ឃ. $y' = \frac{2x}{x^2+1}$ ដែល $y(0) = 5$

– យើងបាន $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}$ ឬ $dy = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$

– បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$\int dy = \int \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$ នោះ $\int dy = \int \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\,dx$

$y = \ln|x^2+1| + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដោយ $y(0) = 5$ យើងបាន $\ln|0^2+1| + c = 5$ ឬ $\ln 1 + c = 5$ នោះ $c = 5$

ដូចនេះ $y = \ln|x^2+1| + 5$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y(0) = 5$ ។

ង. $y' = xe^{x^2}$

យើងបាន $\frac{dy}{dx} = xe^{x^2}$ ឬ $dy = \left(xe^{x^2}\right)dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int (xe^{x^2})\,dx \quad \text{នោះ} \quad \int dy = \int \left[\frac{1}{2}(x^2)'e^{x^2}\right] dx$$

$y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$ ។

ច. $y' = e^{-2x}$

យើងបាន $\frac{dy}{dx} = e^{-2x}$ ឬ $dy = (e^{-2x})\,dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int (e^{-2x})\,dx \quad \text{នោះ} \quad \int dy = \int \left[-\frac{1}{2}(-2x)'e^{-2x}\right] dx$$

$y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ឆ. $y' = \frac{x}{x^2 - 1}$

យើងបាន $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 - 1}$ ឬ $dy = \left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int \left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) dx \quad \text{នោះ} \quad \int dy = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1}\,dx$$

$y = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$ ។

ជ. $x^2y' = 1$ ឬ $y' = \frac{1}{x^2}$

យើងបាន $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}$ ឬ $dy = \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$ នោះ $y = -\frac{1}{x} + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y = -\frac{1}{x} + c$ ដែល $c \in \mathbb{R}$ ។

៩. ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ ១ ដែលអាចញែកអថេរបាន

$\left(\textbf{មានរាង } g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)\right)$

ជាទូទៅ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់១ដែលអាចញែកអថេរបាន យើងត្រូវ៖

❶. សរសេរសមីការឲ្យទៅជារាង $g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$ ឬ $g(y)\,dy = f(x)\,dx$

❷. ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹងអថេរ x ៖

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$ នាំឲ្យ $G(y) = F(x) + c$

ដែល $G(y)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(y)$, $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$, c ជាចំនួនថេរ

❸. $G(y) = F(x) + c$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់ $g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$ ។

លំហាត់គំរូទី១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $2y' = xy^2$ ខ. $y' = (x^2+1)y^2$ គ. $y' = x^2y^3$

ឃ. $y' = \frac{2x(y+1)}{y}$ ង. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ ច. $\frac{dy}{dx} = x^2 - 4$

ឆ. $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2y$ ដែល $y(1) = e$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $2y' = xy^2$

សមីការខាងលើអាចសរសេរជារាង $2\dfrac{dy}{dx} = xy^2 \Rightarrow 2\dfrac{dy}{y^2} = x\,dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int 2\frac{dy}{y^2} = \int x\,dx \quad \Rightarrow 2\int \frac{dy}{y^2} = \int x\,dx$$

$$2\left(-\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}x^2 + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}\,,\ \ \left(\text{ព្រោះ}\int \frac{1}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c\right)$$

$-\dfrac{2}{y} = \dfrac{(x^2 + 2c)}{2}$, $c \in \mathbb{R}$ នោះ $y = -\dfrac{4}{x^2 + 2c} = -\dfrac{4}{x^2 + k}$, $k = 2c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y = -\dfrac{4}{x^2 + k}$, $k \in \mathbb{R}$ ។

ខ. $y' = (x^2 + 1)y^2$

សមីការខាងលើអាចសរសេរជារាង $\dfrac{dy}{dx} = (x^2 + 1)y^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{y^2} = (x^2 + 1)\,dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (x^2 + 1)\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^3 + x + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\text{ព្រោះ}\int \frac{1}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c\right)$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{(x^3 + 3x + 3c)}{3}\,,\ \ c \in \mathbb{R}$$

$$y = -\frac{3}{x^3 + 3x + 3c} = -\frac{3}{x^3 + 3x + k}\,,\ \ k = 3c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = -\dfrac{3}{x^3 + 3x + k}$, $k \in \mathbb{R}$ ។

គ. $y' = x^2y^3$

សមីការខាងលើអាចសរសេរជារាង $\frac{dy}{dx} = x^2y^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3} = x^2\,dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{3}x^3 + c\,,\ c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\text{ព្រោះ}\int \frac{1}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c\right)$$

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{x^3+3c}{3}\,,\ c \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = -\frac{3}{2(x^3+3c)} = -\frac{3}{2(x^3+k)}\,,\ k = 3c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y^2 = -\frac{3}{2(x^3+k)}\,,\ k \in \mathbb{R}$ ។

ឃ. $y' = \frac{2x(y+1)}{y}$

សមីការអាចសរសេរជារាង $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y+1)}{y} \Rightarrow \frac{y}{y+1}dy = (2x)\,dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int \frac{y}{y+1}dy = \int (2x)dx \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)dy = \int (2x)\,dx$$

$$y - \ln|y+1| = x^2 + c\,,\ c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y - \ln|y+1| = x^2 + c\,,\ c \in \mathbb{R}$ ។

ង. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

សមីការអាចសរសេរជារាង $\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y \Rightarrow \frac{1}{e^y}dy = e^x\,dx$

ឬ $e^{-y}dy = e^x\,dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int e^{-y}dy = \int e^{x}dx \quad \Rightarrow -\int (e^{-y})'dy = \int e^{x}\,dx$$

$-e^{-y} = e^{x} + c\,,\ c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow e^{-y} = -e^{x} - c\,,\ c \in \mathbb{R}$

$\ln e^{-y} = \ln(-e^{x} - c)\,,\ c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow -y = \ln(-e^{x} - c)\,,\ c \in \mathbb{R}$

$y = -\ln(-e^{x} - c)\,,\ c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = -\ln(-e^{x} - c)\,,\ c \in \mathbb{R}$ ។

ប. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 4$

សមីការអាចសរសេរជារាង $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 4 \Rightarrow dy = (x^2 - 4)\,dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int (x^2 - 4)dx \quad \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + c\,,\ c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x + c\,,\ c \in \mathbb{R}$ ។

ធ. $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2y$ ដែល $y(1) = e$

សមីការអាចសរសេរជារាង $x\dfrac{dy}{dx} = 2x^2y + y \Rightarrow x\dfrac{dy}{dx} = y(2x^2 + 1)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x^2 + 1}{x}\,dx \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx$$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx \quad \Rightarrow \ln|y| = x^2 + \ln|x| + c\,,\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y| = e^{x^2 + \ln|x| + c}\,,\ c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow |y| = e^{c} \cdot e^{x^2 + \ln|x|}\,,\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^{c} \cdot e^{x^2 + \ln|x|}\,,\ c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow y = k \cdot e^{x^2 + \ln|x|}\,,\ k = \pm e^{c} \in \mathbb{R}$$

ដោយ $y(1) = e$ យើងបាន $e = k \cdot e^{1 + \ln|1|} \Rightarrow k = 1$

ដូចនេះ $y = e^{x^2 + \ln|x|}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y(1) = e$ ។

លំហាត់គំរូទី២ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' = x^3y^6$

ខ. $5\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$

គ. $\dfrac{y'}{y} = \cos x$ ដែល $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$

ឃ. $\dfrac{dy}{dx} = 4x$

ង. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x-1}{y-2}$

ច. $\dfrac{dy}{dx} = 4xy$ ដែល $(x\,,y) = (0\,,3)$

ឆ. $x\dfrac{dy}{dx} = (x+2)(y-1)$ ដែល $y(1) = e+1$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' = x^3y^6$

សមីការខាងលើអាចសរសេរជារាង $\dfrac{dy}{dx} = x^3y^6 \Rightarrow \dfrac{dy}{y^6} = x^3dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int\frac{dy}{y^6} = \int x^3dx \Rightarrow -\frac{1}{5y^5} = \frac{1}{4}x^4 + c\,,\quad c\in\mathbb{R}$$

$$\frac{1}{y^5} = -5\left(\frac{x^4+4c}{4}\right)\,,\ c\in\mathbb{R}\,,\quad \left(\text{ព្រោះ}\int\frac{1}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c\right)$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $\dfrac{1}{y^5} = -5\left(\dfrac{x^4+4c}{4}\right), c\in\mathbb{R}$ ។

ខ. $5\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$

សមីការអាចសរសេរជា $5\dfrac{dy}{dx} = e^x\cdot e^y$ ឬ $5\dfrac{1}{e^y}dy = e^xdx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$5\int\frac{1}{e^y}dy = \int e^xdx \quad \Rightarrow 5\int e^{-y}dy = \int e^xdx$$

$$\Rightarrow -5\int (-y)'e^{-y}dy = \int e^{x}dx \qquad \Rightarrow -5e^{-y} = e^{x} + c$$

$$\Rightarrow \ e^{-y} = \frac{-e^{x}-c}{5} \qquad \Rightarrow \ln e^{-y} = \ln\left(\frac{-e^{x}-c}{5}\right)$$

$$\Rightarrow -y = \ln\left(\frac{-e^{x}-c}{5}\right)$$ នោះ $y = -\ln\left(\frac{-e^{x}-c}{5}\right)$, $c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y = -\ln\left(\frac{-e^{x}-c}{5}\right), c \in \mathbb{R}$ ។

គ. $\frac{y'}{y} = \cos x$ ដែល $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

សមីការអាចសរសេរជា $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \cos x$ ឬ $\frac{1}{y}dy = \cos x\,dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \cos x\,dx \qquad \Rightarrow \ln|y| = \sin x + c$$

$$\Rightarrow \ |y| = e^{\sin x + c} = e^{\sin x}\cdot e^{c}$$

$$\Rightarrow \ y = \pm e^{c}\cdot e^{\sin x}$$ នោះ $y = k\cdot e^{\sin x}$, $k = \pm e^{c} \in \mathbb{R}$

ដោយ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ យើងបាន $k\cdot e^{\sin\frac{\pi}{2}} = e \ \Rightarrow k\cdot e = e$ នោះ $k = 1$

ដូចនេះ $y = e^{\sin x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ ។

ឃ. $\frac{dy}{dx} = 4x$

សមីការអាចសរសេរជា $dy = 4x\,dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int dy = \int 4x\,dx \qquad \Rightarrow y = 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + c = 2x^2 + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $y = 2x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។

ង. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{y-2}$

សមីការអាចសរសេរជា $(y-2)dy = -(x-1)dx$

ឬ $(y-2)dy = (1-x)dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int (y-2)dy = \int (1-x)dx \quad \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 - 2y = x - \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - 4y = 2x - x^2 + 2c$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - 4y = 2x - x^2 + k\,, \quad k = 2c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $y^2 - 4y = 2x - x^2 + k\,, \quad k \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ។

ច. $\frac{dy}{dx} = 4xy$ ដែល $(x\,,y) = (0\,,3)$

សមីការអាចសរសេរជា $\frac{1}{y}dy = 4x\,dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 4x\,dx \quad \Rightarrow \ln|y| = 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + c = 2x^2 + c$$

$$\Rightarrow \quad |y| = e^{2x^2+c} = e^c \cdot e^{2x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm e^c \cdot e^{2x^2} = k \cdot e^{2x^2}\,, \quad k = \pm e^c \in \mathbb{R}$$

ដោយ $(x\,,y) = (0\,,3)$ យើងបាន $3 = k \cdot e^{2(0)^2} \quad \Rightarrow 3 = k$

ដូចនេះ $y = 3 \cdot e^{2x^2}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាម $(x\,,y) = (0\,,3)$ ។

ឆ. $x\frac{dy}{dx} = (x+2)(y-1)$ ដែល $y(1) = e + 1$

សមីការអាចសរសេរជា $\frac{1}{y-1}dy = \frac{x+2}{x}dx$ ឬ $\frac{1}{y-1}dy = \left(1 + \frac{2}{x}\right)dx$

បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int \frac{1}{y-1}dy = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right)dx \quad \Rightarrow \int \frac{(y-1)'}{y-1}dy = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right)dx$$

$\Rightarrow \ln|y-1| = x + 2\ln|x| + c$

$\Rightarrow |y-1| = e^{x+2\ln|x|+c}$

$\Rightarrow |y-1| = e^c \cdot e^x \cdot e^{2\ln|x|} = e^c \cdot e^x \cdot e^{\ln x^2} = e^c \cdot x^2 e^x$

$\Rightarrow y - 1 = \pm e^c \cdot x^2 e^x$

$\Rightarrow y = k \cdot x^2 e^x + 1\,,\ \ k = \pm e^c \in \mathbb{R}$

ដោយ $y(1) = e + 1$ យើងបាន $e + 1 = k \cdot 1^2 e^1 + 1 \ \Rightarrow k = 1$

ដូចនេះ $y = x^2 e^x + 1$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y(1) = e + 1$ ។

៣. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់១ មេគុណថេរអូម៉ូសែន (អង្គទី២ស្មើសូន្យ)

ក. សមីការមានទម្រង់ $y' + ay = 0$

ជាទូទៅ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់១ មេគុណថេរអូម៉ូសែន (អង្គទី២ស្មើសូន្យ) ដែលមានរាង $y' + ay = 0$ គេត្រូវ៖

❶. សរសេរសមីការតាមវិធីញែកអថេរគឺ

$$y' + ay = 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -ay \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a\,dx$$

❷. បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int \frac{dy}{y} = \int -a\,dx \quad \Rightarrow \ln|y| = -ax + c \quad \Rightarrow |y| = e^{-ax+c}$$

$$\Rightarrow \ y = \pm e^{-ax+c} = \pm e^c \cdot e^{-ax}$$

យើងបាន $y = A \cdot e^{-ax}$ ដែល $A = \pm e^c \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $y = A \cdot e^{-ax}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' + ay = 0$ ។

សម្គាល់ ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលរាង $y' + ay = 0$ ដែល a ជាចំនួនថេរ មានចម្លើយទូទៅ $y = Ae^{-ax}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូទី១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $3y' + 9y = 0$

ខ. $-y' + 2y = 0$

គ. $\frac{1}{2}y' - 4y = 0$ ដែល $y(0) = 1$

ឃ. $7y' + 4y = 0$ ដែល $y(7) = e^5$

ង. $2y' + y = 0$ ដែល $y(\ln 4) = \frac{1}{5}$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $3y' + 9y = 0$

$$3\frac{dy}{dx} = -9y \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3y \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = -3\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-3)dx \quad \Rightarrow \ln|y| = -3x + c \quad \Rightarrow |y| = e^{-3x+c}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^{-3x+c} = \pm e^c \cdot e^{-3x} = k \cdot e^{-3x} \text{ ដែល } k = \pm e^c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $y = k \cdot e^{-3x}$ ដែល $k \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ។

ខ. $-y' + 2y = 0$

$$\Rightarrow y' = 2y \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2y \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2\,dx \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 2x + c \quad \Rightarrow |y| = e^{2x+c} \quad \Rightarrow y = \pm e^{2x+c} = \pm e^c \cdot e^{2x}$$

$$\Rightarrow y = k \cdot e^{2x} \text{ ដែល } k = \pm e^c \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $y = k \cdot e^{2x}$ ដែល $k \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ ។

គ. $\frac{1}{2}y' - 4y = 0$ ដែល $y(0) = 1$

សមីការអាចសរសេរជា $y' - 8y = 0$

យើងបាន $y = ke^{8x}$ ដែល $k \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ

ដោយ $y(0) = 1$ យើងបាន $ke^0 = 1$ នោះ $k = 1$

ដូចនេះ $y = e^{8x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y(0) = 1$ ។

ឃ. $7y' + 4y = 0$ ដែល $y(7) = e^5$

សមីការអាចសរសេរជា $y' + \frac{4}{7}y = 0$

យើងបាន $y = ke^{-\frac{4}{7}x}$ ដែល $k \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ

ដោយ $y(7) = e^5$ យើងបាន $ke^{-\frac{4}{7}(7)} = e^5 \Rightarrow ke^{-\frac{4}{7}(7)} = e^5$

$\Rightarrow ke^{-4} = e^5 \quad \Rightarrow k = \frac{e^5}{e^{-4}} = e^{5+4} = e^9$

ដូចនេះ $y = e^{-\frac{4}{7}x+9}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y(7) = e^5$ ។

ង. $2y' + y = 0$ ដែល $y(\ln 4) = \frac{1}{5}$

សមីការអាចសរសេរជា $y' + \frac{1}{2}y = 0$

នោះ $y = ke^{-\frac{1}{2}x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ

ដោយ $y(\ln 4) = \frac{1}{5}$

យើងបាន $\frac{1}{5} = ke^{-\frac{1}{2}(\ln 4)} = ke^{\ln 4^{-\frac{1}{2}}} = ke^{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}k$ នោះ $k = \frac{2}{5}$

ដូចនេះ $y = \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{2}x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y(\ln 4) = \frac{1}{5}$ ។

លំហាត់គំរូទី២ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' - 6y = 0$ ខ. $y' + 12y = 0$

គ. $\sqrt{5}y' - 4y = 0$ ឃ. $3y' + \sqrt{2}y = 0$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' - 6y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{6x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{6x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ។

ខ. $y' + 12y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{-12x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{-12x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ។

គ. $\sqrt{5}y' - 4y = 0$

សមីការអាចសរសេរជា $y' - \frac{4\sqrt{5}}{5}y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{\frac{4\sqrt{5}}{5}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{\frac{4\sqrt{5}}{5}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ។

ឃ. $3y' + \sqrt{2}y = 0$

សមីការអាចសរសេរជា $y' + \frac{\sqrt{2}}{3}y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{-\frac{\sqrt{2}}{3}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{-\frac{\sqrt{2}}{3}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ។

លំហាត់គំរូទី៣ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' + 5y = 0$	ខ. $y' + \sqrt{2}\,y = 0$
គ. $3\frac{dy}{dx} + 7y = 0$	ឃ. $y' = 3y$ ដែល $y(0) = 2$
ង. $2y' = 3y$ ដែល $y(0) = -1$	ច. $-y' + 2y = 0$ ដែល $y(3) = 2$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' + 5y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{-5x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{-5x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ។

ខ. $y' + \sqrt{2}\,y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{-\sqrt{2}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{-\sqrt{2}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ។

គ. $3\frac{dy}{dx}+7y=0$

សមីការអាចសរសេរជា $y'+\frac{7}{3}y=0$

យើងបាន $y=Ae^{-\frac{7}{3}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y=Ae^{-\frac{7}{3}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ។

ឃ. $y'=3y$ ដែល $y(0)=2$

សមីការអាចសរសេរជា $y'-3y=0$

យើងបាន $y=Ae^{3x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដោយ $y(0)=2$ នោះ $Ae^{0}=2$ នាំឲ្យ $A=2$

ដូចនេះ $y=2e^{3x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y(0)=2$ ។

ង. $2y'=3y$ ដែល $y(0)=-1$

សមីការអាចសរសេរជា $y'-\frac{3}{2}y=0$

យើងបាន $y=Ae^{\frac{3}{2}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដោយ $y(0)=-1$ នោះ $Ae^{0}=-1$ នាំឲ្យ $A=-1$

ដូចនេះ $y=-e^{\frac{3}{2}x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y(0)=-1$ ។

ច. $-y'+2y=0$ ដែល $y(3)=2$

សមីការអាចសរសេរជា $y'-2y=0$

យើងបាន $y=Ae^{2x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដោយ $y(3)=2$ នោះ $Ae^{6}=2$ នាំឲ្យ $A=\frac{2}{e^{6}}=2e^{-6}$

ដូចនេះ $y=2e^{2x-6}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y(3)=2$។

លំហាត់គំរូទី៤ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y'+y=0$ ខ. $y'+\sqrt{5}y=0$ គ. $2y'+6y=0$

ឃ. $-y'+\sqrt{2}y=0$ ង. $\frac{dy}{dx}+3y=0$ ច. $3\frac{dy}{dx}+y=0$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' + y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{-x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{-x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ។

ខ. $y' + \sqrt{5}y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{-\sqrt{5}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{-\sqrt{5}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ។

គ. $2y' + 6y = 0$

សមីការអាចសរសេរជា $y' + 3y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{-3x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{-3x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

ឃ. $-y' + \sqrt{2}y = 0$

សមីការអាចសរសេរជា $y' - \sqrt{2}y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{\sqrt{2}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{\sqrt{2}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

ង. $\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{-3x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{-3x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

ច. $3\frac{dy}{dx} + y = 0$

សមីការអាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{-\frac{1}{3}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{-\frac{1}{3}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

ប្រតិបត្តិ ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' - 3y = 0$ ខ. $\sqrt{5}\,y' + 5y = 0$ គ. $y' + 4y = 0$

ឃ. $y' + \frac{1}{2}y = 0$ ង. $2y' + 4y = 0$ ច. $3y' - 5y = 0$ ។

ខ. សមីការមានទម្រង់ $y' + p(x)y = 0$

ជាទូទៅ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់១ មេគុណថេរអូម៉ូសែន (អង្គទី២ស្មើសូន្យ) ដែលមានរាង $y' + p(x)y = 0$ គេត្រូវ៖

❶. សរសេរសមីការតាមវិធីញែកអថេរគឺ

$$y' + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

❷. បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

$$\int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx \quad \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx \, + c$$

$$\Rightarrow |y| = e^{-\int p(x)dx + c}$$

$$\Rightarrow \; y = \pm e^{-\int p(x)dx + c} = \pm e^{c} \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

យើងបាន $y = A \cdot e^{-\int p(x)dx}$ ដែល $A = \pm e^{c} \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $y = A \cdot e^{-\int p(x)dx}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' + p(x)y = 0$ ។

លំហាត់គំរូទី១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' + xy = 0$ ខ. $y' - 3x^2y = 0$ គ. $xy' - 2y = 0$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' + xy = 0$

យើងបាន $y = Ae^{-\int x dx} = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

ខ. $y' - 3x^2y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{\int 3x^2 dx} = Ae^{x^3}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{x^3}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

គ. $xy' - 2y = 0$

សមីការអាចសរសេរជា $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$

យើងបាន $y = Ae^{\int \frac{2}{x} dx} = Ae^{2\ln|x|} = Ae^{\ln x^2} = Ax^2$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ax^2$ ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

៣. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់១ មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន (អង្គទី២មិនស្មើសូន្យ)

ក. សមីការមានទម្រង់ $y' + ay = p(x)$

ជាទូទៅ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់១មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន (អង្គទី២ខុសពីសូន្យ) ដែលមានរាង $y' + ay = p(x)$, ដែល $p(x) \neq 0$ គេត្រូវ៖

❶. រកអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' + ay = 0$ តាងដោយ $y = ke^{-ax}$ ដែល k ជាចំនួនថេរ ។

❷. រកអនុគមន៍ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y' + ay = p(x)$ ដែលតាងដោយ y_p ។

❸. ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' + ay = p(x)$ គឺជាអនុគមន៍ $y = y_c + y_p$ ។

សម្គាល់៖

ដើម្បីរកអនុគមន៍ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y' + ay = p(x)$ យើងត្រូវ៖

- តាងចម្លើយពិសេស $y_p = a$ បើ $p(x) = m$
- តាងចម្លើយពិសេស $y_p = ax + b$ បើ $p(x) = mx + n$
- តាងចម្លើយពិសេស $y_p = ax^2 + bx + c$ បើ $p(x) = mx^2 + nx + p$
- តាងចម្លើយពិសេស $y_p = ae^{kx}$ បើ $p(x) = me^{kx}$
- តាងចម្លើយពិសេស $y_p = (ax + b)e^{kx}$ បើ $p(x) = (mx + n)e^{kx}$
- តាងចម្លើយពិសេស $y_p = a\sin(\beta x) + b\cos(\beta x)$

  បើ $p(x) = m\sin(\beta x)$ ឬ $p(x) = m\,cos(\beta x)$

  ឬ $p(x) = m\sin(\beta x) + n\cos(\beta x)$
- តាងចម្លើយពិសេស $y_p = (ax + b)\sin(\beta x) + (cx + d)\cos(\beta x)$

  បើ $p(x) = (mx + n)\sin(\beta x)$ ឬ $p(x) = (mx + n)\,cos(\beta x)$

  ឬ $p(x) = (mx + n)\sin(\beta x) + (px + q)\cos(\beta x)$ ។

លំហាត់គំរូទី១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $11y' - 6y = 2x^2 + 4x - 5$ ខ. $y' + y = 2x + 5$

គ. $y' + \sqrt{6}y = x\sin x$ ឃ. $2y' + 3y = 2xe^{5x}$ ។

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $11y' - 6y = 2x^2 + 4x - 5 \quad (E)$

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $11y' - 6y = 0 \qquad (1)$

យើងមាន $11y' - 6y = 0 \iff y' - \dfrac{6}{11}y = 0$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{\frac{6}{11}x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = 2ax + b$

តាម (E): $11(2ax + b) - 6(ax^2 + bx + c) = 2x^2 + 4x - 5$

$22ax + 11b - 6ax^2 - 6bx - 6c = 2x^2 + 4x - 5$

$-6ax^2 + (22a - 6b)x - (6c - 11b) = 2x^2 + 4x - 5$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរយើងបាន

$$\begin{cases} -6a = 2 \\ 22a - 6b = 4 \\ 6c - 11b = 5 \end{cases} \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{17}{9} \\ c = -\dfrac{71}{27} \end{cases}$$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{17}{9}x - \frac{71}{27}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = y_c + y_p = Ae^{\frac{6}{11}x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{17}{9}x - \frac{71}{27}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

ខ. $y' + y = 2x + 5 \quad (E)$

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' + y = 0 \qquad (1)$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{-x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = a$

តាម (E): $a + (ax + b) = 2x + 5$

$ax + (a + b) = 2x + 5$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរយើងបាន

$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 5 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = 2x + 3$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = y_c + y_p = Ae^{-x} + 2x + 3$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

គ. $y' + \sqrt{6}y = x \sin x$

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' + \sqrt{6}y = 0 \qquad (1)$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{-\sqrt{6}\,x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = (ax + b)\sin x + (cx + d)\cos x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = a \sin x + (ax + b)\cos x + c \cos x - (cx + d)\sin x$

$y_p' = (ax + b + c)\cos x - (cx + d - a)\sin x$

តាម (E): $(ax + b + c)\cos x - (cx + d - a)\sin x$

$+\sqrt{6}[(ax + b)\sin x + (cx + d)\cos x] = x \sin x$

$[(\sqrt{6}a - c)x + (a + \sqrt{6}b - d)]\sin x$

$+[(a + \sqrt{6}c)x + (b + c + \sqrt{6}d)]\cos x = x \sin x$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរយើងបាន

$$\begin{cases} \sqrt{6}a - c = 1 \\ a + \sqrt{6}b - d = 0 \\ a + \sqrt{6}c = 0 \\ b + c + \sqrt{6}d = 0 \end{cases} \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{6}}{7} \\ b = -\dfrac{5}{49} \\ c = -\dfrac{1}{7} \\ d = \dfrac{2\sqrt{6}}{49} \end{cases}$$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ

$$y_p = \left(\frac{\sqrt{6}}{7}x - \frac{5}{49}\right)\sin x + \left(-\frac{1}{7}x + \frac{2\sqrt{6}}{49}\right)\cos x$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = y_c + y_p$

$= Ae^{-\sqrt{6}\,x} + \left(\frac{\sqrt{6}}{7}x - \frac{5}{49}\right)\sin x + \left(-\frac{1}{7}x + \frac{2\sqrt{6}}{49}\right)\cos x$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

ឃ. $2y' + 3y = 2xe^{5x}$

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $2y' + 3y = 0$ (1)

នោះ $y' + \frac{3}{2}y = 0$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{-\frac{3}{2}x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = (ax + b)e^{5x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = ae^{5x} + 5(ax + b)e^{5x} = (5ax + a + 5b)e^{5x}$

តាម (E): $2(5ax + a + 5b)e^{5x} + 3(ax + b)e^{5x} = 2xe^{5x}$

$[13ax + (2a + 13b)]e^{5x} = 2xe^{5x}$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរយើងបាន

$\begin{cases} 13a = 2 \\ 2a + 13b = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} a = \frac{2}{13} \\ b = -\frac{4}{169} \end{cases}$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = \left(\frac{2}{13}x - \frac{4}{169}\right)e^{5x}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = y_c + y_p = Ae^{-\frac{3}{2}x} + \left(\frac{2}{13}x - \frac{4}{169}\right)e^{5x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់គំរូទី២ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' + y = 1$ ខ. $y' + 3y = 2x + 5$ គ. $y' - 2y = 8x^2 - 8x$

ឃ. $y' + 2y = x^2$ ង. $y' + y = 2e^x$ ច. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{3x}$

ឆ. $y' + y = \sin x$ ជ. $y' + y = 2\cos x$ ឈ. $y' + y = \cos x + \sin x$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' + y = 1 \quad (E)$

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' + y = 0 \qquad (1)$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{-x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = a$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = 0$

តាម $(E): 0 + a = 1 \implies a = 1$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = 1$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)គឺ $y = y_c + y_p = Ae^{-x} + 1$ ដែល $A \in \mathbb{R}$។

ខ. $y' + 3y = 2x + 5 \qquad (E)$

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' + 3y = 0 \qquad (1)$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{-3x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = a$

តាម $(E): a + 3(ax + b) = 2x + 5$

$3ax + (a + 3b) = 2x + 5$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរយើងបាន

$\begin{cases} 3a = 2 \\ a + 3b = 5 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{13}{9} \end{cases}$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = \frac{2}{3}x + \frac{13}{9}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = y_c + y_p = Ae^{-3x} + \frac{2}{3}x + \frac{13}{9}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

គ. $y' - 2y = 8x^2 - 8x \qquad (E)$

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' - 2y = 0 \qquad (1)$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{2x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = 2ax + b$

តាម (E): $(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = 8x^2 - 8x$

$-2ax^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c) = 8x^2 - 8x$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរយើងបាន

$\begin{cases} -2a = 8 \\ 2a - 2b = -8 \\ b - 2c = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = -4x^2$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = y_c + y_p = Ae^{2x} - 4x^2$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

ឃ. $y' + 2y = x^2 \qquad$ (E)

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' + 2y = 0 \qquad (1)$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{-2x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = 2ax + b$

តាម (E): $(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2$

$2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c) = x^2$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរយើងបាន

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = y_c + y_p = Ae^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

ង. $y' + y = 2e^x$

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' + y = 0$ (1)

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{-x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = ae^x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = ae^x$

តាម (E): $ae^x + ae^x = 2e^x \implies 2ae^x = 2e^x$ នោះ $a = 1$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = e^x$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(E)គឺ $y = y_c + y_p = Ae^{-x} + e^x$ដែល $A \in \mathbb{R}$។

ប. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{3x}$ (E)

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $\dfrac{dy}{dx} - y = 0$ (1)

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = ae^{3x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = 3ae^{3x}$

តាម (E): $3ae^{3x} - ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow 2ae^{3x} = e^{3x}$ នោះ $a = \dfrac{1}{2}$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = \dfrac{1}{2}e^{3x}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = y_c + y_p = Ae^{x} + \dfrac{1}{2}e^{x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$។

ឆ. $y' + y = \sin x$ (E)

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' + y = 0$ (1)

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{-x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = a\sin x + b\cos x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = a\cos x - b\sin x$

តាម (E): $(a\cos x - b\sin x) + (a\sin x + b\cos x) = \sin x$

$\Rightarrow (a-b)\sin x + (a+b)\cos x = \sin x$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរយើងបាន

$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = y_c + y_p = Ae^{-x} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$ ដែល $A \in \mathbb{R}$។

ជ. $y' + y = 2\cos x \quad (E)$

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' + y = 0 \quad (1)$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{-x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = a\sin x + b\cos x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = a\cos x - b\sin x$

តាម (E): $(a\cos x - b\sin x) + (a\sin x + b\cos x) = 2\cos x$

$\Rightarrow (a-b)\sin x + (a+b)\cos x = 2\cos x$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរយើងបាន

$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = \sin x + \cos x$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = y_c + y_p = Ae^{-x} + \sin x + \cos x$ ដែល $A \in \mathbb{R}$។

ឈ. $y' + y = \cos x + \sin x \quad (E)$

– រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y' + y = 0 \quad (1)$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = Ae^{-x}$ ដែល $A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = a\sin x + b\cos x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ $y_p' = a\cos x - b\sin x$

តាម (E): $(a\cos x - b\sin x) + (a\sin x + b\cos x) = \cos x + \sin x$

$\Rightarrow (a-b)\sin x + (a+b)\cos x = \cos x + \sin x$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរយើងបាន

$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=1 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

យើងបានចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = \sin x$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = y_c + y_p = Ae^{-x} + \sin x$ ដែល $A \in \mathbb{R}$។

លំហាត់គំរូទី៣ គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $y' - 3y = 3x + 2 \quad (E)$

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' - 3y = 0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y' - 3y = 3x + 2$ ។

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

ចម្លើយ

យើងមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $y' - 3y = 3x + 2 \quad (E)$

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' - 3y = 0$

ដូចនេះសមីការ $y' - 3y = 0$ មានចម្លើយទូទៅ $y_c = ke^{3x}$ ដែល $k \in \mathbb{R}$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y' - 3y = 3x + 2 \quad (E)$

តាង $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

$\Rightarrow y_p' = a$

យក y_p និង y_p' ជំនួសក្នុងសមីការ (E)

$a - 3(ax + b) = 3x + 2$

$a - 3ax - 3b = 3x + 2$

$-3ax + a - 3b = 3x + 2$

យើងទាញបាន $\begin{cases} -3a = 3 \\ a - 3b = 2 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

ដូចនេះ $y_p = -x - 1$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ។

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

យើងបាន $y = y_c + y_p = ke^{3x} - x - 1$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

ប្រតិបត្តិទី១ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' + 3y = 1$

ខ. $y' + 7y = x^2 - 1$

គ. $3y' + 2y = x^2$

ឃ. $y' + y = x + 2e^x$

ង. $2y' + y = xe^{-x}$

ច. $y' - y = e^{3x}$

ឆ. $y' - 2y = 3\cos 2x$

ជ. $y' - 3y = 7\sin 3x - 6\cos 3x$

ឈ. $y' + y = \sin x - 2\cos x$

ញ. $3y' + y = 1 - 4\cos 2x$

ឪ. $y' - 3y = 2\sin x$ ។

ប្រតិបត្តិទី២ គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $y' + 7y = 5x + 3 \quad (E)$

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y' + 7y = 0$ ។

ខ. រកតម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅ y នៃសមីការ (E) ។

ប្រតិបត្តិទី៣ គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $y' - 3y = 3x^2 + 4x + 1 \quad (E)$

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y' - 3y = 0$ ។

ខ. រកតម្លៃ a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $y_p = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅ y នៃសមីការ (E) ។

ប្រតិបត្តិទី៤ គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $y' - 5y = x^2 + 3x + 7 \quad (E)$

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y' - 5y = 0$ ។

ខ. រកតម្លៃ a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $y_p = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

គ. ទាញរកចម្លើយទូទៅ y នៃសមីការ (E) ។

លំហាត់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១ ធ្លាប់ចេញប្រឡងបាក់ឌុប ថ្នាក់ វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម (២០១១~២០១៩)

លំហាត់ទី ១

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

1. $y' + x^3 - \cos x = 0$
2. $y' + 3y = 2x + 1$ ។

(ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ឆ្នាំ ២០១១)

លំហាត់ទី ២

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(x+1)^2y' = 4x - 1$ ចំពោះ $x \neq -1$

ដោយដឹងថា $y(0) = 2012$ ។

(ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ឆ្នាំ ២០១២)

លំហាត់ទី ៣

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): (e^x + 2013)y' = e^x$ ។
2. រកចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ដោយដឹងថា ក្រាបចម្លើយកាត់តាមគល់អរដោនេ O នៃតម្រុយ ។

(ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ឆ្នាំ ២០១៣)

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី ១

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

1. $y' + x^3 - \cos x = 0$ 2. $y' + 3y = 2x + 1$ ។

(ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (ថ្នាក់ជាតិ) ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ឆ្នាំ ២០១១)

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

1. $y' + x^3 - \cos x = 0$

យើងបាន $y' + x^3 - \cos x = 0$ នាំឱ្យ $y' = -x^3 + \cos x$

$\Rightarrow \ y = \int (-x^3 + \cos x)\,dx = -\frac{x^4}{4} + \sin x + C\,,\ \ C \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $y = -\frac{x^4}{4} + \sin x + C\,,\ \ C \in \mathbb{R}$ ។

2. $y' + 3y = 2x + 1$ ។

– សមីការអូម៉ូសែន $y' + 3y = 0$

មានចម្លើយទូទៅ $y_c = Ae^{-ax} = Ae^{-3x}\,,\ \ A \in \mathbb{R}$ ។

– រកចម្លើយពិសេសនៃ $y' + 3y = 2x + 1$

តាង $y_p = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y' + 3y = 2x + 1$

យើងបាន $y_p' + 3y_p = 2x + 1$

$(ax + b)' + 3(ax + b) = 2x + 1$

$a + 3ax + 3b = 2x + 1$

$3ax + (a + 3b) = 2x + 1$

យើងទាញបាន $\begin{cases} 3a = 2 \\ a + 3b = 1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ 3b = 1 - \frac{2}{3} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{9} \end{cases}$

នោះ $y_p = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = y_c + y_p = Ae^{-3x} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$, $A \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី ២

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(x+1)^2y' = 4x - 1$ ចំពោះ $x \neq -1$

ដោយដឹងថា $y(0) = 2012$ ។

(ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (ឆ្នាក់ឌុប) ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ឆ្នាំ ២០១២)

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(x+1)^2y' = 4x - 1$ ចំពោះ $x \neq -1$

យើងមាន សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(x+1)^2y' = 4x - 1$

យើងបាន $y' = \frac{4x-1}{(x+1)^2}$

នាំឱ្យ $y = \int \frac{4x-1}{(x+1)^2}dx = \int \left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}\right]dx$

$$= \int \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}dx$$

$$y = \int \frac{4x-1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}dx$$

នាំឱ្យ $\begin{cases} A = 4 \\ A + B = -1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} A = 4 \\ B = -5 \end{cases}$

នោះ $y = \int \left[\frac{4}{x+1} - \frac{5}{(x+1)^2}\right]dx = 4\int \frac{1}{x+1}dx - 5\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$

$$y = 4\int \frac{1}{x+1}dx - 5\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= 4\int \frac{(x+1)'}{x+1}dx - 5\int \frac{(x+1)'}{(x+1)^2}dx$$

$$y = 4\ln|x+1| - 5\left(-\frac{1}{x+1}\right) + C = 4\ln|x+1| + \frac{5}{x+1} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

ដោយដឹងថា $y(0) = 2012$ យើងបាន $4\ln|0+1| + \dfrac{5}{0+1} + C = 2012$

នាំឱ្យ $C = 2012 - 5 = 2007$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y = 4\ln|x+1| + \dfrac{5}{x+1} + 2007$ ។

លំហាត់ទី ៣

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): (e^x + 2013)y' = e^x$
2. រកចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ដោយដឹងថា ក្រាបចម្លើយកាត់តាមគល់អរដោនេ O នៃតម្រុយ ។

(ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ (បាក់ឌុប) ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ឆ្នាំ ២០១៣)

ចម្លើយ

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): (e^x + 2013)y' = e^x$

យើងមាន $(E): (e^x + 2013)y' = e^x$

យើងបាន $y' = \dfrac{e^x}{e^x + 2013}$

$$y = \int \frac{e^x}{e^x + 2013}\,dx = \int \frac{(e^x + 2013)'}{e^x + 2013}\,dx = \ln|e^x + 2013| + C\,,\quad C \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) គឺ

$y = \ln(e^x + 2013) + C\,,\quad C \in \mathbb{R}$ ។

2. រកចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)

ដោយដឹងថា ក្រាបចម្លើយកាត់តាមគល់អរដោនេ O នៃតម្រុយ

យើងបាន $y(0) = 0$ នាំឱ្យ $\ln|e^0 + 2013| + C = 0$

នាំឱ្យ $\ln(2014) + C = 0$ នាំឱ្យ $C = -\ln 2014$

ដូចនេះ ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ដែលក្រាបនៃចម្លើយកាត់តាមគល់ O គឺ

$$y = \ln(e^x + 2013) - \ln 2014 = \ln\left(\frac{e^x + 2013}{2014}\right)$$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

I. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

1. $y' + x^3 - 2022\cos x = 0$ 2. $y' + 3y = 2x + 2022$ ។

II. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(x+1)^2 y' = 4x - 1$ ចំពោះ $x \neq -1$ ដោយដឹងថា $y(0) = 2022$ ។

III. 1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): (e^x + 2022)y' = e^x$ ។

2. រកចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ដោយដឹងថា ក្រាបចម្លើយកាត់តាមគល់អរដោនេ O នៃតម្រុយ ។

IV. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ ក. $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$ ខ. $y' = 6x^2 + 4x + 5$

គ. $y = xe^{x^2}$ ឃ. $y' = 2x^2 - x + 1$ ង. $y' = e^{-2x}$ ច. $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

ឆ. $y' = \dfrac{x}{x^2-1}$ កំណត់លើ $(-1,1)$ ជ. $xy' = 1$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ។

V. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ៖

ក. $\dfrac{y'}{y} = \cos x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$ ខ. $y' = e^{2x}$, $y(0) = 5$

គ. $(3x^2 - 2)y' = 6x$, $y(1) = 4$ ឃ. $\dfrac{y'}{\tan x} = 1$, $y(0) = 0$ ។

VI. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១

ក. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ ខ. $3\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ គ. $2y' - 3y = 0$ ឃ. $y' + y\sqrt{2} = 0$ ។

VII. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១ តាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ

ក. $-y' + 2y = 0$, $y(3) = -2$ ខ. $2y' + y = 0$, $y(\ln 4) = \dfrac{1}{5}$

គ. $7y'+4y=0$, $y(7)=e^{-4}$ ឃ. $2y'-5y=0$, $y(1)=-3$ ។

VIII.រកអនុគមន៍ចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $x\dfrac{dy}{dx}-y=2x^2y$ ដែលក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយនោះកាត់តាមចំណុច $(x=1, y=e)$ ។

IX. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $-y'+2y=0$ តាមលក្ខខណ្ឌ $y(3)=-2$

X.រកអនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការ $3y'+6y=0$ ដែលខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច $(-4,2)$ ។

XI.ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោមនេះជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅខាងស្តាំ

ក. $y=x+e^x$, $y'-y=1-x$ ខ. $y=e^{3x}-x-1$, $y'-3y=3x+2$

គ. $y=\sin x+\cos x$, $y'+y=2\cos x$ ឃ. $y=x+\ln x$, $xy'-y=1-\ln x$

XII. គេមានសមីការ $y'-3y=3x+2$ (E) ។

ក. កំណត់រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$g(x)=ax+b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ. បើ h ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'-3y=0$ បង្ហាញថា $f=h+g$ ជាចម្លើយទូទៅ នៃសមីការ (E) ។

គ. រកចម្លើយ h នៃសមីការ $y'-3y=0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅ f នៃសមីការ (E) ។

XIII. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'+2y=x^2$ ។

ក. កំណត់ពហុធា g មានដឺក្រេទីពីរដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ. តាង h ជាអនុគមន៍ដែល $h(x)=f(x)-g(x)$ ។ បើ h ជាចម្លើយនៃ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+2y=0$ នោះបង្ហាញថា f ជាចម្លើយនៃ សមីការ (E) ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'+2y=0$ រួចទាញរកអនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយ ទូទៅនៃ (E)

XIV. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'-2y=8x^2-8x$ ។

XV. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+2y=3e^{-3x}$ (E) ។

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+2y=0$ (E') ។

ខ. តាងអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=e^{-2x}g(x)$ ។ គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$ និង $g'(x)$ ។ គណនា $g'(x)$ បើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

គ. ទាញរក $g(x)$ រួច $f(x)$ ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

XVI. ដោះស្រាយសមីការ៖ ក. $y'+y=2e^x$ ខ. $y'+y=\cos x+\sin x$

គ. $y'+2y=x^2$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=2$ ។

XVII. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ ក. $\frac{dy}{dx}-y=e^{3x}$

ខ. $\frac{dy}{dx}+y=e^x$ គ. $y'+y=1$ ឃ. $y'+y=\sin x$ ។

XVIII. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដើម៖

ក. $y'-y=1$, $y(0)=1$ ខ. $y'+2y=1$, $y(0)=0$ ។