



ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

Ministry of Education Youth and Sport

កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ

គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ និងសង្គម

សម្រាប់ភ្នំបេតិកភណ្ឌគណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ

គ្រឿងប្រឡូកសញ្ញាបត្របឋមសិក្សាទុតិយភូមិ

រៀបរៀង និងចងក្រងដោយ:

ក្រុមនិស្សិតស្ម័គ្រចិត្តក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៩- ២០២០

អារម្ភកថា

សួស្តី លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ បួនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ជាទីមេត្រី!

សៀវភៅ **កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២** ដែលលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ បួនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តកំពុងអាននេះ យើងខ្ញុំបានចងក្រងឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារ សម្រាប់សិស្សានុសិស្សកម្រិតវិទ្យាល័យ ស្វែងសិក្សា យល់ពីគំរូវិញ្ញាសាចាស់ៗ និងដំណោះស្រាយ ដើម្បីជាមូលដ្ឋានក្នុងការសិក្សាអំពី កម្រិតស្តង់ដារកម្រិតវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាដែលធ្លាប់ចេញក្នុងការប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការកំណត់ផ្នែកសំខាន់ៗ ក្នុងមេរៀនដែលត្រូវរៀនដោយយកចិត្តទុកដាក់ និងស៊ីជម្រៅ ។ ម្យ៉ាងទៀត ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាព ក៏ដូចជាត្រៀមខ្លួនក្នុងការប្រឡង សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិនៅថ្ងៃខាងមុខនេះផងដែរ។ យើងខ្ញុំសូមអធ្យាស្រ័យ ចំពោះកំហុសអចេតនាដែលមាននៅក្នុងសៀវភៅកម្រងវិញ្ញាសានេះ យើងខ្ញុំនឹងរង់ចាំទទួលមតិស្ថាបនាកែលំអបន្ថែម ពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ សិស្ស និស្សិត និងអ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានទាំងអស់ដោយក្តីរីករាយ។

សូមជូនពរដល់អ្នកសិក្សាគ្រប់រូប មានសុខភាពល្អ និងទទួលបានជោគជ័យក្នុងដំណើរជីវិត ហើយខិតខំប្រឹងប្រែងរៀនសូត្រដើម្បីប្រទេសជាតិនៃមាតុភូមិរបស់យើង។

សូមអរគុណ!

និស្សិតស្ម័គ្រចិត្ត ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ការបង្កើត និងសម្របសម្រួលក្លឹបសិក្សាគណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ នៅតាមវិទ្យាល័យនានា ក្នុងព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

រៀបរៀង និងចងក្រងដោយនិស្សិតសម្របសម្រួលក្លឹបសិក្សាគណិតវិទ្យា:

១. អ៊ុន ពៅ

២. ឆៀន សុឆៀត

៣. ម៉ុល សិរីវិជ្ជា

៤. ឡេន ឡុក

៥. គឹម សេងហុន

៦. ឃី សុវត្ថុនៈ

៧. ស្រីកែវ ពុទ្ធា

៩. នួន មុណាង

៨. រ៉េន គង់

១១. សយ វិសាល

១០. ម៉ុន កក្កដា

១២. ឈឿន ឧត្តម

ហតិកា

ទំព័រ

កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែសម្រាប់ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ

I. កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ (២០១៤ ដល់ ២០១៩)

1.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៩.....	01
២.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៨.....	06
៣.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៧.....	11
៤.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៦	16
៥.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៥	20
៦.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៤ លើកទី០១	24
៧.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៤ លើកទី០២	29

II. កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្ររៀបចំបន្ថែម

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០១.....	34
វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០២	39
វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៣.....	44
វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៤.....	50
វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៥.....	56
វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៦.....	61

កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែសម្រាប់ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម

I. កម្រងវិញ្ញាសា និងគ្រាប់កំណែ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម (២០១៤ ដល់ ២០១៩)

1.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៩.....	66
២.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៨.....	70
៣.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៧.....	73
៤.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៦	77
៥.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៥	80
៦.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៤ លើកទី០១	83

៧.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៤ លើកទី០២.....	86
II. កម្រងវិញ្ញាសា និងគ្រឹះការណ៍ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គមគ្រឿងបន្លែង	
វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០១	89
វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០២	92
វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៣	95
វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៤	98
វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៥	100
វិញ្ញាសាគ្រឿងប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៦	103

វិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ

គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ

ប្រធានាធិការប្រធានសាកលវិទ្យាល័យ
វិទ្យាស្ថានៈ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេលៈ ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុបៈ ១២៥ ពិន្ទុ
ប្រធានវិទ្យាសាស្ត្រ

សម័យប្រឡងៈ ១៩ សីហា ២០១៩
មណ្ឌលប្រឡងៈ.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ឈ្មោះលេខាបេក្ខជន.....

- I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x+1)]$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \sin x}{1 - \cos^2 x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\sin^4 x - 1}$
- II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមូលដ្ឋាន ១៦ ដែលគេសរសេរពីលេខ ១ ដល់ ១៦ ។ គេចាប់យកមូលដ្ឋានចេញពីចំណោមមូលដ្ឋាន ១៦ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ : A: គេចាប់បានមូលដ្ឋានទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង ៤ ។
B: គេចាប់បានមូលដ្ឋានទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែមិនអាចចែកដាច់នឹង ៥ ។ C: គេចាប់បានមូលដ្ឋានតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង ៤ ។
- III. (១៥ពិន្ទុ) a. ដោះស្រាយនៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច C សមីការ: $z^2 - 8z + 64 = 0$ ។
b. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 4 + 4i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 4 - 4i\sqrt{3}$ ។ សរសេរ $(2z_1 + \bar{z}_2)$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និងគណនា $(2z_1 + \bar{z}_2)^3$ ។ (យើងតាងដោយ $\bar{z}_2$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_2 ។
- IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx$; $J = \int_0^{\ln 6} (e^x - 1) dx$; $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 x \cos x \right] dx$
- V. (២៥ពិន្ទុ) ក. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។ គេមានចំណុច $A(1; -1; 4)$, $B(7; -1; -2)$ និង $C(1; 5; -2)$
1. a. គណនាកូអរដោនេរបស់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ ។ b. ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុច A, B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ។
c. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (1; 1; 1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។ d. ទាញបង្ហាញសមីការរបស់ប្លង់ (ABC) ។
2. បង្ហាញថាត្រីកោណ (ABC) ជាត្រីកោណសម័ង្ស។
- ខ. គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការទូទៅ: $y^2 + 4y - 8x - 12 = 0$ ។ ចូរបម្លែងសមីការនេះ ជាទម្រង់សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល។ ចូររកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។
- VI. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' + 3y' + 3y = 2y' + 5y (E)$ ។ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះ។
បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = -e^{-2x} + 2e^x$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។
- VII. (៣៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} - \ln x$; គេតាង (C) ក្រាបរបស់អនុគមន៍ f នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ។
1. a. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $(0, +\infty)$ គេអាចសរសេរ $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$ និង $f(x) = \frac{1}{x} (x^2 - x \ln x - 2)$ ។
b. ប្រើលទ្ធផលនេះដើម្បីគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ ០ និង $+\infty$ ។
2. a. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ និងបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ $(0, +\infty)$, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(x^2 - x + 2)$ ។
b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា។
3. a. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A នៅលើ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 1 ។
b. រកកូអរដោនេចំណុច B នៃ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះទៅ (C) ត្រង់ B ស្របនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x$ ។
4. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A និងត្រង់ B ។ (គេឲ្យតម្លៃ $\ln 2 = 0.7$)

**អង្គការណែនាំសិក្សាស្រាវជ្រាវ
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាធុនតូច
សម័យប្រឡង១៩ សីហា ២០១៩**

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x+1)]$ រាង $+\infty - \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x+1)][\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x+1)]}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 - (x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x+1)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (x+1)] = 0$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \sin x}{1 - \cos^2 x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \sin x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2 \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = -2 \cdot 1 = -2$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \sin x}{1 - \cos^2 x} = -2$

គ. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\sin^4 x - 1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)(\sin^2 x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x - 1)(\sin^2 x + 1)} = \frac{1}{(-1-1)(1+1)} = \frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\sin^4 x - 1} = \frac{1}{4}$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(16, 3) = \frac{16!}{13!3!} = 560$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A: គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង៤

លេខដែលចែកដាច់នឹង 4 មាន $\{4, 8, 12, 16\}$

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(4, 3) = 4$ ករណី

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{560} = \frac{1}{140}$

ដូចនេះ $P(A) = \frac{1}{140}$ ។

B: គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែមិនអាចចែកដាច់នឹង៥

លេខដែលមិនអាចចែកដាច់នឹង 5 មាន

$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16\}$

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(13, 3) = \frac{13!}{10!3!} = 286$ ករណី

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{286}{560} = \frac{143}{280}$

ដូចនេះ $P(B) = \frac{143}{280}$

C: គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង៤

ចំនួនករណីស្រប $n(C) = C(4, 1) \times C(12, 2) = 264$ ករណី

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{264}{560} = \frac{33}{70}$

ដូចនេះ $P(C) = \frac{33}{70}$

III. a. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

$$\Delta' = (-4)^2 - 1 \cdot 64 = 16 - 64 = -48$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{-48} = 4i\sqrt{3}$$

$$z_1 = -(-4) + 4i\sqrt{3} = 4 + 4i\sqrt{3}$$

$$z_2 = -(-4) - 4i\sqrt{3} = 4 - 4i\sqrt{3}$$

b. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 4 + 4i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 4 - 4i\sqrt{3}$

• សរសេរ $(2z_1 + \bar{z}_2)$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $\bar{z}_2 = 4 + 4i\sqrt{3}$

$$(2z + \bar{z}) = 2(4 + 4i\sqrt{3}) + (4 + 4i\sqrt{3})$$

$$= 8 + 8i\sqrt{3} + 4 + 4i\sqrt{3} = 12 + 12i\sqrt{3} = 24 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 24 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

• គណនា $(2z_1 + \bar{z}_2)^3$

$$(2z_1 + \bar{z}_2)^3 = \left[24 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^3$$

$$= 24^3 (\cos \pi + i \sin \pi) = 24^3 (-1 + i \cdot 0) = -24^3$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I = \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - 0 = \frac{28}{15}$$

$$J = \int_0^{\ln 6} (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^{\ln 6} = (e^{\ln 6} - \ln 6) - (e^0 - 0) = 6 - \ln 6 - 1 = 5 - \ln 6$$

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 x \cos x \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{3} \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)' \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + (\sin x)' (\sin^4 x) \right] dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{5} \sin^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(-\frac{1}{3} \cos \pi + \frac{1}{5} \sin^5 \frac{\pi}{4} \right) - \left(-\frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} \sin^5 0 \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{40 + 23\sqrt{2}}{120} \end{aligned}$$

V. គេមានចំណុច $A(1; -1; 4)$, $B(7; -1; -2)$ និង $C(1; 5; -2)$

1. a. គណនាកូអរដោនេរបស់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$

- $\overrightarrow{AB} = (7-1, -1+1) = (6, 0, -6)$
- $\overrightarrow{AC} = (1-1, 5+1, -2+4) = (0, 6, -6)$
- $\overrightarrow{BC} = (1-7, 5+1, -2+2) = (-6, 6, 0)$

b. ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុច A, B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ ចំណុច A, B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ លុះត្រាតែ

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} \\ &= (0+36)\vec{i} - (-36+0)\vec{j} + (36-0)\vec{k} \\ &= 36\vec{i} + 36\vec{j} + 36\vec{k} \neq \vec{0} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចំណុច A, B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ។

c. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (1; 1; 1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (36, 36, 36) = 36(1, 1, 1) = 36 \cdot \vec{n}$$

នោះ វ៉ិចទ័រ $\vec{n}$ និង $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (1, 1, 1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។

d. ទាញបង្ហាញសមីការរបស់ប្លង់ (ABC)

ដោយ $\vec{n} = (1, 1, 1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (ABC)

គេបានសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1, -1, 4)$ គឺ

$$(ABC): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$1(x-1) + 1(y-1) + 1(z-4) = 0$$

$$x-1 + y-1 + z-4 = 0$$

$$x + y + z - 4 = 0$$

ដូចនេះ ប្លង់ $(ABC): x + y + z - 4 = 0$

2. បង្ហាញថាត្រីកោណ (ABC) ជាត្រីកោណសម័ង្ស

$$\bullet \overrightarrow{AB} = (6, 0, -6) \Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 0^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\bullet \overrightarrow{AC} = (0, 6, -6) \Rightarrow AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 6^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\bullet \overrightarrow{BC} = (-6, 6, 0) \Rightarrow BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2} = 6\sqrt{2}$$

ដោយ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 6\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ ត្រីកោណ (ABC) ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ខ. គេមានប៉ារ៉ាបូល $y^2 + 4y - 8x - 12 = 0$

➢ បម្លែងសមីការនេះ ជាទម្រង់ស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

$$\text{យើងមាន } y^2 + 4y - 8x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 4y = 8x + 12$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 8x + 12 + 2^2$$

$$\Leftrightarrow (y+2)^2 = 8(x+2)$$

មានរាង $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ជាសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

ដែលមានអ័ក្សឆ្លុះស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដារ $(y+2)^2 = 8(x+2)$

➢ រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

$$\text{យើងមាន } h = -2, k = -2, 4p = 8 \Rightarrow p = 2$$

$$\bullet \text{កូអរដោនេកំពូល } V(h, k) = V(-2, -2)$$

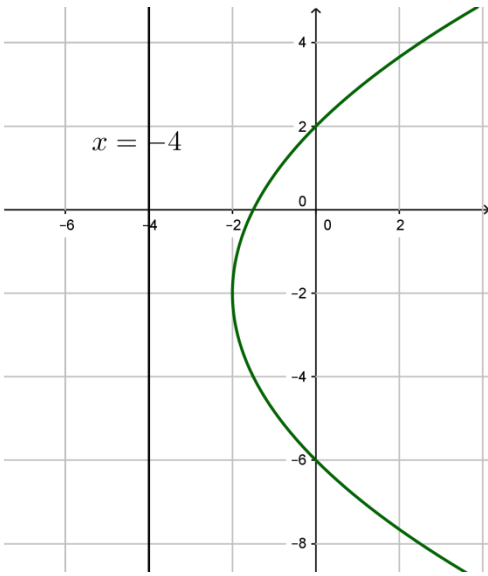
$$\bullet \text{កូអរដោនេកំណុំ } F(h+p, k) = F(-2+2, -2) = (0, -2)$$

$$\bullet \text{បន្ទាត់ប្រាប់ទិស: } x = h - p = -2 - 2 = -4$$

➢ សង់ប៉ារ៉ាបូល

$$\text{ចំពោះ } x = 0 \text{ គេបាន } (y+2)^2 = 16 \Leftrightarrow (y+2)^2 = \pm 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2 = -4 \\ y+2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$



VI. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

យើងមាន (E): $y'' + 3y' + 3y = 2y' + 5y$

ឬ $y'' + y' - 2y = 0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

មានឫស $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$

សមីការមានចម្លើយ $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $y = Ae^x + Be^{-2x}, (A, B) \in \mathbb{R}$

- បង្ហាញថា អនុគមន៍ $y = -e^{-2x} + 2e^x$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

យើងមាន $y = -e^{-2x} + 2e^x$

$\Rightarrow y' = 2e^{-2x} + 2e^x$ និង $y'' = -4e^{-2x} + 2e^x$

បើ $y = -e^{-2x} + 2e^x$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

$$(-4e^{-2x} + 2e^x) + (2e^{-2x} + 2e^x) - 2(-e^{-2x} + 2e^x) = 0$$

$$-4e^{-2x} + 2e^x + 2e^{-2x} + 2e^x + 2e^{-2x} - 4e^x = 0$$

$$0 = 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $y = -e^{-2x} + 2e^x$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

VII. (៣៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ

$$C: f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} - \ln x$$

- a. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $(0, +\infty)$ គេអាចសរសេរ

$$f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \text{ និង } f(x) = \frac{1}{x} (x^2 - x \ln x - 2)$$

$$\text{គ្រប់ } x > 0, f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} - \ln x = x - \frac{2}{x} - \ln x$$

$$= x \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

ដូចនេះគ្រប់ x នៅលើ $(0, +\infty)$, $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

$$\begin{aligned} \text{គ្រប់ } x > 0, f(x) &= \frac{x^2 - 2}{x} - \ln x = \frac{x^2 - 2 - x \ln x}{x} \\ &= \frac{1}{x} (x^2 - x \ln x - 2) \end{aligned}$$

ដូចនេះគ្រប់ x នៅលើ $(0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x} (x^2 - x \ln x - 2)$

- ប្រើលទ្ធផលនេះដើម្បីគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (x^2 - x \ln x - 2) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= (+\infty)(1 - 0 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

- a. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$

$$\text{យើងមាន } f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} - \ln x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{2x \cdot x - 1(x^2 - 2)}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x^2 + 2 - x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - x + 2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } f'(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2} \text{ ។}$$

- បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ $(0, +\infty)$, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(x^2 - x + 2)$

$$\text{យើងមាន } f'(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2}$$

គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$, $x^2 > 0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(x^2 - x + 2)$ ។

- សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$, $x^2 > 0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(x^2 - x + 2)$

$$\text{ឲ្យ } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0 \text{ សមីការគ្មានឫស}$$

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $(0, +\infty)$ ។

- សង្ខេបតារាងអថេរភាពរបស់វា

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. a. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A នៅលើ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 1

$$\text{សមីការបន្ទាត់ប៉ះ } d_A : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$$\text{ដោយ } x_0 = 1, y_0 = f(1) = \frac{1-2}{1} - \ln 1 = -1$$

$$f'(x) = f'(1) = \frac{1^2 - 1 + 2}{1^2} = 2$$

$$\text{គេបាន } d_A : y = 2(x - 1) - 1 = 2x - 2 - 1 = 2x - 3$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A , $d_A : y = 2x - 3$ ។

b. រកកូអរដោនេចំណុច B នៃ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះទៅ (C)

ត្រង់ B ស្របនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x$

តាង $B(x_0, y_0)$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុច B

បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ B ស្របនឹងបន្ទាត់ $y = x$

$$\text{គេបាន } f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - x_0 + 2}{x_0^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + 2 = x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

$$y_0 = f(2) = \frac{2^2 - 2}{2} - \ln 2 = 1 - \ln 2$$

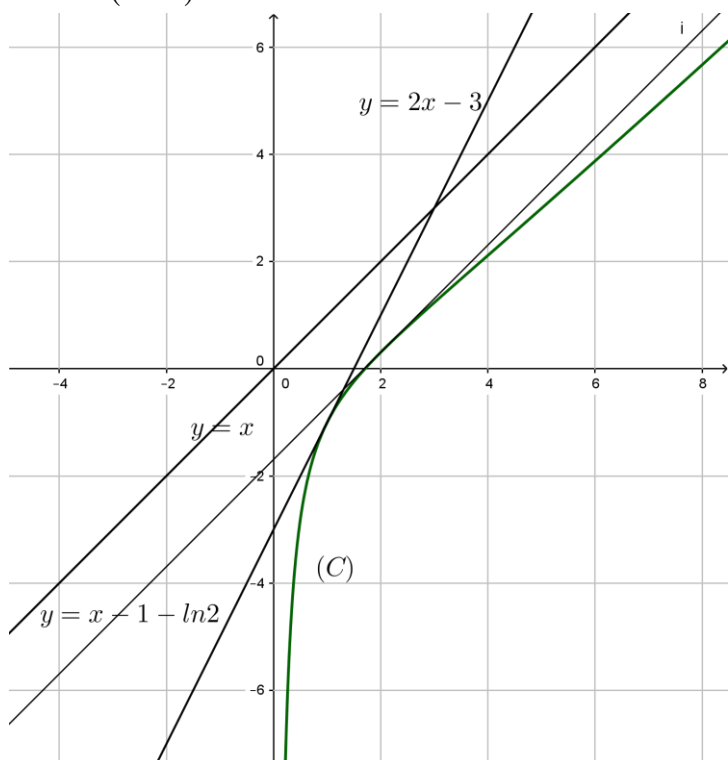
ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុច $B(2, 1 - \ln 2)$ ។

4. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A និងត្រង់ B

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $B(2, 1 - \ln 2)$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$$= 1(x - 2) + 1 - \ln 2 = x - 1 - \ln 2$$



ប្រធានសញ្ញាបត្របឋមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ
ប្រធានវិញ្ញាសា

សម័យប្រឡង៖ ២០ សីហា ២០១៨
មណ្ឌលប្រឡង៖.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ឋានៈលេខាបេក្ខជន.....

I. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមួយមានឃ្លីពណ៌សចំនួន២ ឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន៤ និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន៤។ គេចាប់យកឃ្លីពណ៌មួយដោយចៃដន្យ។
រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

A: ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ក្រហម។ B: យ៉ាងតិចមានឃ្លី២មានពណ៌ខៀវ។ C: ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ខុសៗគ្នា។

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-2)+x^2+x-1}{1-x}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sin 3x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{2(\pi - 3x)}$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3+3i\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3}+i$ ។

ក. គណនា $z_1 z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ។ ខ. សរសេរ $z_1 z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ គ. សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I = \int_1^2 (2-x+x^2)dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx$; $K = \int_2^3 \left(3x - 2 + \frac{1}{x-1} \right) dx$

V. (២៥ពិន្ទុ) ១. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1, 2, 3), B(3, 0, 1), C(-1, 0, 1)$ និង $D(2, 1, 2)$

- a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ ។ b. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ។
c. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (0, 1, -1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។

២. គេមានសមីការ $(2x+3y)^2 = 12(xy+3)$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងសង់អេលីបនេះ។

VI. (១០ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 4y' = 5y$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) បើគេដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច $(0, 3)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -3 ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(1, +\infty)$ ដោយ $f(x) = -x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ។ គេតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់

ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

១. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1 និង $+\infty$ ។

២. ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ $(1, +\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(1, +\infty)$ ។

៣. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = -x + 4$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $+\infty$ ។

b. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ x លើ $(1, +\infty)$, $\frac{x+1}{x-1} > 1$ និងទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង d_1 ។

៤. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនៅលើ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\frac{5}{3}$ និងសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ d_2 នេះ។

៥. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d_1 និងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។ ប្រើតម្លៃប្រហែល $\ln 3 = 1.1$ និងក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(4, 5, 0)$ ។

អង្គការសិក្សាសាស្ត្រកម្ពុជា
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាធុនតូច
សម័យប្រឡង ២០ សីហា ២០១៨

I. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(10, 3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A: ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ក្រហម

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(4, 3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{1}{30}$

B: យ៉ាងតិចមានឃ្លី២មានពណ៌ខៀវ

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(4, 2) \times C(6, 1) + C(4, 3) = 40$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$

ដូចនេះ: $P(B) = \frac{1}{3}$

C: ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ខុសៗគ្នា

ចំនួនករណីស្រប $n(C) = C(2, 1) \times C(4, 1) \times C(4, 1) = 32$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$

ដូចនេះ: $P(C) = \frac{4}{15}$

II. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-2) + x^2 + x - 1}{1-x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x^2 + x - 1}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{-(x-1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} [-(x^2+1)] = -2$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-2) + x^2 + x - 1}{1-x} = -2$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sin 3x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{3} \right) = -2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sin 3x} = -\frac{2}{3}$

គ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{2(\pi - 3x)}$ រាង $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)}{2(\pi - 3x)}$

$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos x}{-3 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{-3 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}$

តាង $t = x - \frac{\pi}{3}$ បើ $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ នោះ $t \rightarrow 0$

គេបាន $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{-3t} = -\frac{1}{3}$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{2(\pi - 3x)} = -\frac{1}{3}$

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 3 + 3i\sqrt{3}$ និង $z_2 = \sqrt{3} + i$

ក. គណនា $z_1 z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$

• $z_1 z_2 = (3 + 3i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 3\sqrt{3} + 3i + 9i - 3\sqrt{3} = 12i$

• $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{(3 + 3i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \frac{6\sqrt{3} + 6i}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i \frac{3}{2}$

ខ. សរសេរ $z_1 z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

• $z_1 z_2 = 12i = 12(0 + i) = 12 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i \frac{3}{2} = 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

• $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 = \left[3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^2 = 3^2 \left(\cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} \right) = 9 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

គ. សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^3$ ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 &= \left[3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^3 \\ &= 3^3\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 + 27i\end{aligned}$$

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល:

$$\begin{aligned}I &= \int_1^2 (2-x+x^2)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\ &= \left(4 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3}\right) - \left(2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{6} \\ J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}(2x)' \cos 2x - \frac{1}{8}(4x)' \cos 4x\right]dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\sin\pi\right) - 0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K &= \int_2^3 \left(3x - 2 + \frac{1}{x-1}\right)dx = \int_2^3 \left[3x - 2 + \frac{(x-1)'}{x-1}\right]dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 - 2x + \ln|x-1|\right]_2^3 \\ &= \left(\frac{3}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + \ln 2\right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + \ln 1\right) \\ &= \frac{11}{2} + \ln 2\end{aligned}$$

V. ១. គេមាន $A(1,2,3), B(3,0,1), C(-1,0,1), D(2,1,2)$

a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$

- $\overrightarrow{AB} = (3-1, 0-2, 1-3) = (2, -2, -2)$
- $\overrightarrow{AC} = (-1-1, 0-2, 1-3) = (-2, -2, -2)$
- $\overrightarrow{AD} = (2-1, 1-2, 2-3) = (1, -1, -1)$
- $\overrightarrow{BC} = (-1-3, 0-0, 1-1) = (-4, 0, 0)$

b. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ
ចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ លុះត្រាតែ

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (4-4)\vec{i} - (-4-4)\vec{j} + (-4-4)\vec{k}\end{aligned}$$

$$= 0\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k} \neq \vec{0}$$

ដូចនេះ ចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

c. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (0, 1, -1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅ

នឹងប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 8, -8)$

$$= 8(0, 1, -1) = 8 \cdot \vec{n}$$

នោះ វ៉ិចទ័រ $\vec{n}$ និង $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\vec{n} = (0, 1, -1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។

២. បង្ហាញសមីការ $(2x+3y)^2 = 12(xy+3)$ ជាសមីការអេលីប

$$(2x+3y)^2 = 12(xy+3)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 12xy + 36$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ សមីការមានរាង}$$

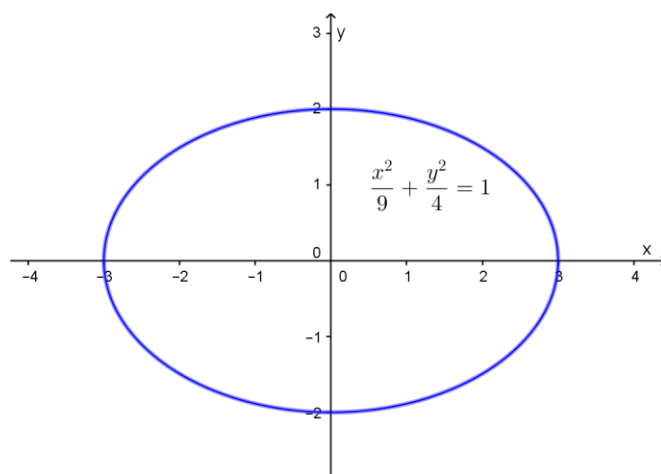
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ជាសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានអ័ក្ស}$$

ធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានផ្ចិត $(0, 0)$

➢ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ
យើងមាន $a = 3, b = 2$

- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2 \times 2 = 4$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 2 \times 3 = 6$ ឯកតាប្រវែង
- កូអរដោនេកំពូល $V(\pm a, 0) \Rightarrow V(\pm 3, 0)$

សង់អេលីបនេះ



VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 4y' = 5y$

$$\text{សមីការសម្គាល់ } r^2 + 4r - 5 = 0$$

$$\text{មានឫស } r_1 = 1, r_2 = -5$$

$$\text{សមីការមានចម្លើយ } y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅ

$$y = Ae^x + Be^{-5x}, (A, B \in \mathbb{R})$$

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

យើងមាន $y = Ae^x + Be^{-5x}$ នាំឲ្យ $y' = Ae^x - 5Be^{-5x}$

គេដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាម

ចំណុច $(0, 3)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់

ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -3

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 3 & (1) \\ A - 5B = -3 & (2) \end{cases}$$

យក $(1) - (2)$ យើងបាន $6B = 6 \Rightarrow B = 1$

តាម (1) យើងបាន $A + 1 = 3 \Rightarrow A = 2$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយពិសេស

$$y = 2e^x + e^{-5x} \quad \forall$$

VII. គេមាន $C: f(x) = -x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ កំណត់លើ $(1, +\infty)$

១. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1 និង $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right] = 3 + \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right] = -\infty \quad \text{ព្រោះ}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln 1 = 0$$

២. ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ $(1, +\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ

$$f'(x) = \frac{-(x^2 + 1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\text{យើងមាន } f(x) = \left[-x + 4 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \right]$$

$$= -x + 4 + \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } f'(x) &= -1 + \frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{(x-1)'}{x-1} \\ &= -1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{-(x+1)(x-1) + (x-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-x^2 + 1 + x - 1 - x - 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-(x^2 + 1)}{(x+1)(x-1)}$$

ដូចនេះ នៅលើ $(1, +\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ

$$f'(x) = \frac{-(x^2 + 1)}{(x+1)(x-1)}$$

➢ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$$\text{យើងមាន } f'(x) = \frac{-(x^2 + 1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\text{ចំពោះ } \forall x \in (1, +\infty), \frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)} > 0$$

$$\text{នាំឲ្យ } f'(x) < 0 \text{ គ្រប់ } x \in (1, +\infty)$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើ $(1, +\infty)$

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(1, +\infty)$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

៣. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $d_1: y = -x + 4$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $+\infty$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x + 4)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln 1 = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_1: y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។

b. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ x លើ $(1, +\infty)$, $\frac{x+1}{x-1} > 1$

$$\text{យើងមាន } \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1} > 0$$

$$\text{ដូចនេះ } \text{ចំពោះគ្រប់ } x \text{ លើ } (1, +\infty), \frac{x+1}{x-1} > 1$$

➢ ទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង d_1

$$\text{ចំពោះគ្រប់ } x \text{ លើ } (1, +\infty), \frac{x+1}{x-1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow f(x) - y_{d_1} > 0$$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ d_1 ជានិច្ចលើ $(1, +\infty)$

៤. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះនៅលើ (C)

យក (x_0, y_0) ជាចំណុចប៉ះ

បន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេ

$$\text{គុណប្រាប់ទិសស្មើ } -\frac{5}{3}$$

$$\text{គេបាន } f'(x_0) = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{-(x_0^2 + 1)}{(x_0 + 1)(x_0 - 1)} = -\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 + 3 = 5x_0^2 - 5$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^2 = 8 \Rightarrow x_0 = \pm 2$$

ចំពោះ $x_0 = -2$ (មិនយក) ព្រោះ $x \in (1, +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{ចំពោះ } x_0 = 2 \text{ នោះ } y_0 &= f(2) = -2 + 4 + \ln\left(\frac{2+1}{2-1}\right) \\ &= 2 + \ln 3 \end{aligned}$$

➤ សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ d_2

$$\text{សមីការបន្ទាត់ប៉ះ } d_2 : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$$\text{ដោយ } x_0 = 2, y_0 = 2 + \ln 3 \text{ ហើយ } f'(x_0) = -\frac{5}{3}$$

$$\text{គេបាន } d_2 : y = -\frac{5}{3}(x - 2) + 2 + \ln 3$$

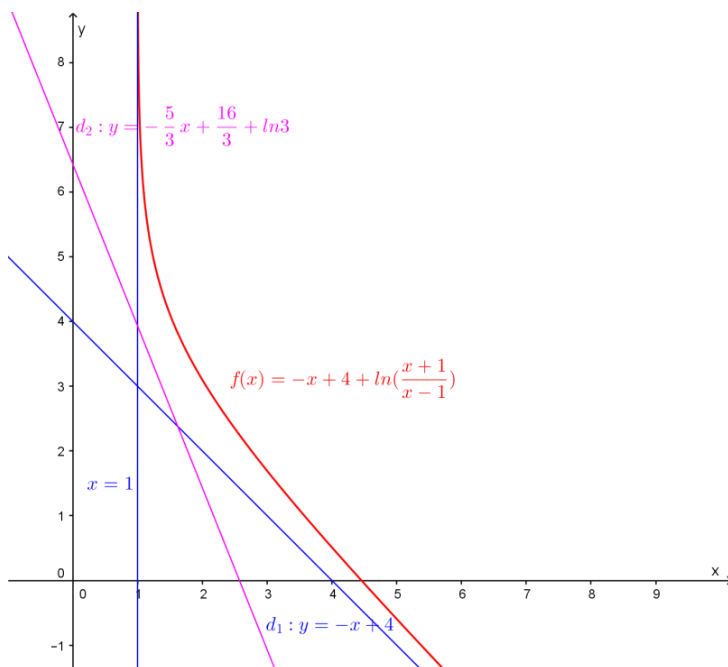
$$= -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3} + 2 + \ln 3 = -\frac{5}{3}x + \frac{16}{3} + \ln 3$$

$$\text{ដូចនេះ : សមីការបន្ទាត់ប៉ះ } d_2 : y = -\frac{5}{3}x + \frac{16}{3} + \ln 3$$

៥. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d_1 និងបន្ទាត់ប៉ះ d_2

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូត

ឈរនៃក្រាប C



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ២១ សីហា ២០១៧
មណ្ឌលប្រឡង៖.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ឋានៈលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាសា

- I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x}$ ។
- II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស៧០នាក់ ដែលក្នុងនោះមាន៤នាក់ជាសិស្សស្រីនិង៦នាក់ជាសិស្សប្រុស។ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុម ក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស៤នាក់ដោយចៃដន្យ យកទៅប្រកួតជាមួយក្រុមសិស្សនៃថ្នាក់ដទៃ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
A: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី ។ B: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស ។
C: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបាន៥០%ជាសិស្សប្រុស ។
- III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 6\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ ។
a. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ b. រកម៉ូឌុល និងអាក្យុយម៉ង់នៃ z_1^3 ។ c. សរសេរផលគុណ $z_1 z_2$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។
- IV. (២៥ពិន្ទុ) ១. នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(-2, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 2, 2)$ និង $D(0, 3, -4)$ ។
a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$ ។
b. គណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD និង CD ។ ទាញបង្ហាញថាត្រីកោណ ABD និង ACD កែងគ្នាត្រង់ A ។
២. គេមានសមីការ $9y^2 - 16x^2 = 144$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល។ រកសមីការអាស៊ីមតូតរបស់អ៊ីពែបូលនេះ និងសង់អ៊ីពែបូលនេះ។
- V. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I = \int_1^3 (x - 2 + 3x^2) dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \cos x) dx$
 $K = \int_0^1 \frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1} dx$ ។ ដើម្បីគណនា K យើងត្រូវបង្ហាញថា $\frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1} = x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$ ។
- VI. (១០ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 3y' + 2y = 0$ ។
ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0) = 1$ និង $y'(1) = 2e^2$ ។
- VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x + \frac{1 - 3e^x}{1 + e^x}$ ។ គេតាងដោយ C ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។
១. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1 + e^x}$ និងគណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។
២. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y = x - 3$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_2 ។
៣. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$ ។
សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1 និង d_2 របស់វា។

អត្រាកំណត់សម្គាល់សម្រាប់ការប្រឡង
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាធុនកម្រិត
សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x-1)}{x^2(x-1)+(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x-1}{x^2+1} = \frac{-1-1}{1^2+1} = -1$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1} = -1$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \right) = -1 \cdot 3 = -3$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-x} = -3$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{\sin x \cdot (\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)-(2-x)}{\sin x \cdot (\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x (\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} \right) = 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(10,4) = \frac{10!}{4!(10-4)!}$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 210 \text{ ករណី}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(A) = C(4,4) = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1$$

ករណី

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{210}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(A) = \frac{1}{210}$$

B. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(B) = C(6,4) = \frac{6!}{4!(6-4)!}$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} = 15 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(B) = \frac{1}{14}$$

C. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបាន ៥០% ជាសិស្សប្រុស

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(C) = C(6,2) \times C(4,2)$$

$$= \frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!} = 90 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(C) = \frac{3}{7}$$

III. គេមាន $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

a. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

b. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z_1^3

$$\text{យើងមាន } z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{នាំឲ្យ } z_1^3 = 2^3 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$$

ដូចនេះ: ម៉ូឌុលនៃ z_1^3 គឺ $r = 8$ និង

$$\text{អាគុយម៉ង់នៃ } z_1^3 \text{ គឺ } \varphi = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c. សរសេរផលគុណ $z_1 z_2$ ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$\text{យើងមាន } z_2 = 6 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} - i3\sqrt{2}$$

$$z_1 z_2 = (1 + i\sqrt{3})(3\sqrt{2} - i3\sqrt{2})$$

$$= 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} + 3i\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$$

$$= (3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) + (3\sqrt{6} - 3\sqrt{2})i$$

IV. ១. គេមានចំណុច $A(-2,1,0), B(0,1,1), C(1,2,2)$ និង

$D(0,3,-4)$

a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$

$$\bullet \overrightarrow{AB} = (0+2, 1-1, 1-0) = (2, 0, 1)$$

$$\bullet \overrightarrow{AC} = (1+2, 2-1, 2-0) = (3, 1, 2)$$

- $\overrightarrow{AD} = (0+2, 3-1, -4-0) = (2, 2, -4)$
- $\overrightarrow{BC} = (1-0, 2-1, 2-1) = (1, 1, 1)$
- $\overrightarrow{BD} = (0-0, 3-1, -4-1) = (0, 2, -5)$
- $\overrightarrow{CD} = (0-1, 3-2, -4-2) = (-1, 1, -6)$

b. គណនាប្រវែង AB , AC , AD , BD និង CD

- $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1) \Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
- $\overrightarrow{AC} = (3, 1, 2)$
 $\Rightarrow AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{12} = \sqrt{14}$
- $\overrightarrow{AD} = (2, 2, -4)$
 $\Rightarrow AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
- $\overrightarrow{BD} = (0, 2, -5)$
 $\Rightarrow BD = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$
- $\overrightarrow{CD} = (-1, 1, -6)$
 $\Rightarrow CD = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{38}$

➢ ទាញបង្ហាញថាត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A

ដោយ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (2)(2) + (0)(2) + (1)(-4) = 0$

នោះ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

ដូចនេះ ABD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

ដោយ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (3)(2) + (1)(2) + (2)(-4) = 0$

នោះ $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AD}$

ដូចនេះ ACD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

២ បង្ហាញថាសមីការ $9y^2 - 16x^2 = 144$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល

យើងមាន $9y^2 - 16x^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{9y^2}{144} - \frac{16x^2}{144} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$ មានរាង $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ជាសមីការអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិត $(0,0)$ ហើយអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សឈរ។

➢ រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល

យើងមាន $a=4, b=3 \quad c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$\Rightarrow c = \sqrt{25} = 5$

• កូអរដោនេកំពូល $V_1(0, -a) \Rightarrow V_1(0, -4)$ និង

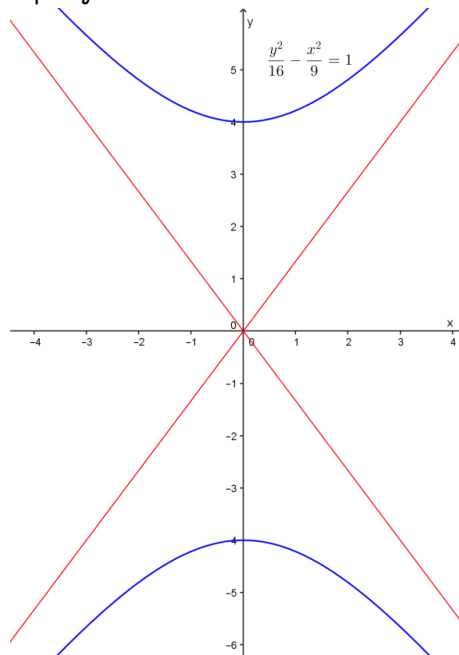
$V_2(0, a) \Rightarrow V_2(0, 4)$

• កូអរដោនេកំណុំ $F_1(0, -c) \Rightarrow F_1(0, -5)$ និង

$F_2(0, c) \Rightarrow F_2(0, 5)$

➢ សមីការអាស៊ីមតូតរបស់អ៊ីពែបូល $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{4}{3}x$

សង់អ៊ីពែបូល



V. គណនាអាំងតេក្រាល

$I = \int_1^3 (x - 2 + 3x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + x^3 \right]_1^3$

$= \left(\frac{3^2}{2} - 2 \cdot 3 + 3^3 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 + 1^3 \right) = 26$

$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} (2x)' \sin 2x - \cos x \right] dx$

$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} \right) - \left(-\frac{1}{2} \cos 0 - \sin 0 \right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$K = \int_0^1 \frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1} dx$

បង្ហាញថា $\frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1} = x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$

ដោយ $x + 1 + \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1) + 1(x^2 + 1) + x}{x^2 + 1}$

$= \frac{x^3 + x + x^2 + 1 + x}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + (x^2 + 2x + 1)}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + (x+1)^2}{x^2 + 1}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } K &= \int_0^1 \left(x+1 + \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[x+1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)} \right] dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1^2}{2} + 1 + \frac{1}{2} \ln|1^2+1| \right) - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{3+\ln 2}{2} \end{aligned}$$

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(E): y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$\text{សមីការសម្គាល់ } r^2 - 3r + 2 = 0 \text{ រាង } a+b+c=0$$

$$\text{មានឫស } r_1=1, r_2=2$$

$$\text{ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ } y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}, (A, B \in \mathbb{R})$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយទៅ } y = Ae^x + Be^{2x} \text{ ។}$$

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

$$\text{ដែល } y(0)=1 \text{ និង } y'(1)=2e^2$$

$$\text{គេមាន } y = Ae^x + Be^{2x}$$

$$\text{នោះ } y' = Ae^x + 2Be^{2x}$$

$$\text{តែ } \begin{cases} y(0)=1 \\ y'(1)=2e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ Ae+2Be^2=2e^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 & (1) \\ A+2Be=2e & (2) \end{cases}$$

$$\text{យក (1)-(2) យើងបាន } (1-2e)B=1-2e \Rightarrow B=1$$

$$\text{តាម (1) យើងបាន } A+1=1 \Rightarrow A=0$$

$$\text{ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) គឺ } y = e^{2x} \text{ ។}$$

VII. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $C: f(x) = x + \frac{1-3e^x}{1+e^x}$

១. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x}$

$$\text{យើងមាន } f(x) = x + \frac{1-3e^x}{1+e^x}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } f(x) &= x + 1 + \frac{1-3e^x}{1+e^x} - 1 \\ &= x + 1 + \frac{1-3e^x-1-e^x}{1+e^x} = x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x} \end{aligned}$$

➢ គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x} \right) = -\infty$$

$$\text{ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

➢ ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x+1$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4e^x}{1+e^x} \right) = 0$$

នោះ បន្ទាត់ $d_1: y = x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$

➢ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1

$$\text{យក } C-d_1: f(x)-y = -\frac{4e^x}{1+e^x} < 0 \text{ គ្រប់តម្លៃ } x$$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d_1 ជានិច្ច

២. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{4}{\frac{1}{e^x} + 1} \right) = +\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

➢ ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y = x-3$

អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_{d_2}]$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + \frac{1-3e^x}{1+e^x} \right) - (x-3) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3e^x+3+3e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1+e^x} = 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_2: y = x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

➢ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_2

$$\text{យក } C-d_2: f(x)-y = \frac{4}{1+e^x} > 0 \text{ គ្រប់តម្លៃ } x$$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d_2 ជានិច្ច

៣. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$\text{យើងមាន } f(x) = x + 1 - \frac{4e^x}{1+e^x}$$

$$\text{នាំឱ្យ } f'(x) = 1 - \frac{4e^x(1+e^x) - e^x(4e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= 1 - \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\text{ដូចនេះ } f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$$

➢ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right)^2$

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } f'(x) &= 1 - \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1+2e^x+e^{2x}-4e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2} = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: គ្រប់ចំនួនពិត } x, f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right)^2$$

➤ សិក្សាអថេរភាពនៃ f

$$\text{ឲ្យ } f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right)^2 \geq 0 \text{ គ្រប់តម្លៃ } x$$

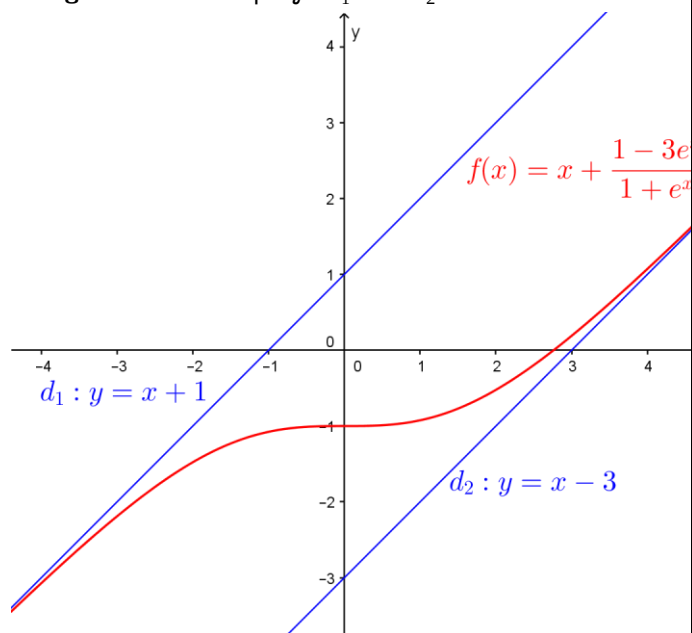
ដូចនេះ: f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច។

➤ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

$$\text{ចំពោះ } x=0 \text{ នោះ } f(0) = 0 + \frac{1-3e^0}{1+e^0} = -1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$

➤ សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1 និង d_2



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ
ប្រធានវិញ្ញាសា

សម័យប្រឡង៖ ២២ សីហា ២០១៦
មណ្ឌលប្រឡង៖.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
មាត្រលេខាបេក្ខជន.....

- I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^2+2-3x}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5\sin 5x}{x}$
- II. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{3}-i$, $z_2 = (1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$ និង $z_3 = -\frac{1}{2}$ ។ គណនា z_1+z_2 , $(z_1+z_2)z_3$ ។
សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $Z = (z_1+z_2)z_3$ ។ ទាញរកតម្លៃនៃ Z^3 ។
- III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I = \int_0^2 (6x^2-3x-1)dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2 x)dx$ ។ គេមាន f កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ
 $f(x) = -2\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$ ។ បង្ហាញថា $f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$ ។ គណនា $K = \int_1^e f(x)dx$ ។ ($\ln e = 1$) ។
- IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមូលដ្ឋាន ១៥ ដែលចែកជា មូលពណ៌បៃតងចំនួន៧និងគេសរសេរលើមូលទាំង៧នេះតាមលេខរៀងពី១ដល់៧
រួចមូលពណ៌ខៀវចំនួន៥និងគេសរសេរលើមូលទាំង៥នេះតាមលេខរៀងពី១ដល់៥ ចុងក្រោយមូលពណ៌ក្រហមចំនួន៣ និងគេសរសេរ
លើមូលទាំង៣នេះតាមលេខរៀងពី១ដល់៣។ គេចាប់យកមូលមួយចេញពីក្នុងចំណោមមូលដ្ឋានទាំង១៥។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
A: មូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង។ B: មូលដែលចាប់បានមានលេខសេស។
C: មូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតងនិងលេខសេស។
- V. (២៥ពិន្ទុ) ១. គេមានសមីការ $18x^2+10y^2=90$ ។ ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និង
កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។ ខ. សង់អេលីបនេះ។
២. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $M(2,3,4)$, $N(3,5,6)$,
 $P(4,6,7)$, $Q(3,4,5)$ ។ ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{QP}$ ។ ខ. ទាញបង្ហាញថាចតុកោណ $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម។
- VI. (១០ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+2y'-3y=0$ ។
ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=1, y'(1)=e$ ។ (e ជាចំនួនពិតដែល $\ln e = 1$) ។
- VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$ ។ គេតាង C ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយ
តម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។
១. a. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។
b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ។
២. a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ។
b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
៣. a. តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 3$ ។
b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។
៤. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ $y = \frac{1}{4}x+1$ ។
b. ដោយសន្មតថាចំណុច I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C និងក្នុងតម្លៃប្រហែលនៃ $\ln 3$ ចូរសង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1, d_2, d_3 ។
(នៅក្នុងតម្រុយនេះមួយឯកតាស្មើ $2cm$)

អង្គការណែនាំសិក្សាសម្រាប់វិទ្យាល័យ
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២២ សីហា ២០១៦

I. គណនាលីមីត

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^2+2-3x} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x-1}{x-2} = \frac{-1-1}{1-2} = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^2+2x-3} = 2$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x^3-3^3)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+6)-3^2}{(x-3)(x^2+x \cdot 3+3^2)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x^2+3x+9)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x^2+3x+9)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \frac{1}{(9+9+9)(3+3)} = \frac{1}{162}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27} = \frac{1}{162}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{x} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 \right) = 5 \cdot 1 \cdot 5 = 25$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{x} = 25$$

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = (1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$

និង $z_3 = -\frac{1}{2}$

➤ គណនា $z_1 + z_2$, $(z_1 + z_2)z_3$

$$\bullet z_1 + z_2 = (\sqrt{3} - i) + (1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i$$

$$= \sqrt{3} - i + 1 - \sqrt{3} + i - i\sqrt{3} = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\bullet (z_1 + z_2)z_3 = (1 - i\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

➤ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

$$Z = (z_1 + z_2)z_3$$

$$Z = (z_1 + z_2)z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

➤ ទាញរកតម្លៃនៃ Z^3

$$Z^3 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$$

$$= 1 + 0i$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\bullet I = \int_0^2 (6x^2 - 3x - 1) dx = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x \right]_0^2$$

$$= \left(2 \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \right) - 0 = 8$$

$$\bullet J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2 \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (2x)' \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{1}{2}$$

$$\bullet f(x) = -2 \left(\frac{x+1}{x^2} \right)$$

$$\text{បង្ហាញថា } f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$$

$$\text{យើងមាន } f(x) = -2 \left(\frac{x+1}{x^2} \right) = \frac{-2x-2}{x^2} = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$$

$$\text{គណនា } K = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(-\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$= \left[-2 \ln |x| + \frac{2}{x} \right]_1^e = \left(-2 \ln e + \frac{2}{e} \right) - \left(-2 \ln 1 + 2 \right)$$

$$= -4 + \frac{2}{e}$$

IV. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(15, 1) = 15$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A: ប៉ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង

$$n(A) = C(7, 1) = 7 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{15}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(A) = \frac{7}{15}$$

B: ប៉ូលដែលចាប់បានមានលេខសេស

$$n(B) = C(9, 1) = 9 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{3}{5}$$

C: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតងនិងលេខសេស

$$n(C) = C(4,1) = 4 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{15}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(C) = \frac{4}{15}$$

V. ១. ក. បង្ហាញថាសមីការ $18x^2 + 10y^2 = 90$ ជាសមីការអេលីប

$$\text{យើងមាន } 18x^2 + 10y^2 = 90 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{5}^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \text{ សមីការមានរាង } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ ជាសមី}$$

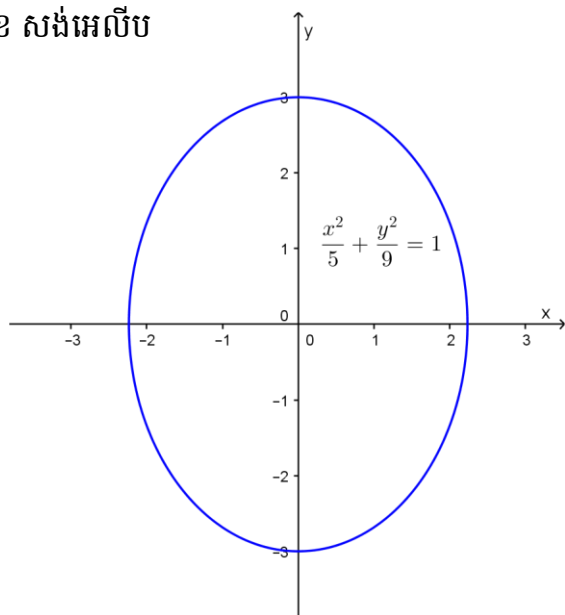
ការនៃអេលីបដែលមានអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ និងមានផ្ចិត (0,0)

➢ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

$$\text{យើងមាន } a = 3, b = \sqrt{5}$$

- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 2 \times 3 = 6$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ ឯកតាប្រវែង
- កូអរដោនេកំពូល $V(0, \pm a) \Rightarrow V(0, \pm 3)$

ខ សង់អេលីប



២. គេមានចំណុច $M(2,3,4), N(3,5,6)$

, $(4,6,7), (3,4,5)$

ក រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{QP}$

$$\bullet \overrightarrow{MN} = (3-2, 5-3, 6-4) = (1, 2, 2)$$

$$\bullet \overrightarrow{QP} = (4-3, 6-4, 7-5) = (1, 2, 2)$$

ខ ទាញបង្ហាញថាចតុកោណ MNPQ ជាប្រលេឡូក្រាម

យើងមាន $\overrightarrow{MN} = (1, 2, 2)$ និង $\overrightarrow{QP} = (1, 2, 2)$

ដោយ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ នោះ $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{QP}$ និង $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{QP}|$

ដូចនេះ ចតុកោណ MNPQ ជាប្រលេឡូក្រាម។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(E): y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$\text{សមីការសម្គាល់ } r^2 + 2r - 3 = 0$$

$$\text{មានឫស } r_1 = 1, r_2 = -3$$

$$\text{សមីការមានចម្លើយ } y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅ

$$y = Ae^x + Be^{-3x}, (A, B \in \mathbb{R})$$

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

$$\text{យើងមាន } y = Ae^x + Be^{-3x} \text{ នាំឲ្យ } y' = Ae^x - 3Be^{-3x}$$

$$\text{តែ } \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(1) = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ Ae - 3Be^{-3} = e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 & (1) \\ A - 3Be^{-4} = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{យក (1) - (2) យើងបាន } (1 + 3e^{-4})B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\text{តាម (1) យើងបាន } A + 0 = 1 \Rightarrow A = 1$$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយពិសេស $y = e^x$ ។

VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$$C: f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

១. a. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right) \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 - \frac{4}{1 + \frac{3}{e^x}} \right) = +\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$$

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = x + 2$

$$\begin{aligned} \text{យក } C-d_1: f(x)-y &= \left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}\right)-(x+2) \\ &= -\frac{4e^x}{e^x+3} < 0 \text{ គ្រប់តម្លៃ } x \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d_1 ជានិច្ច។

២. a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត

$$x, f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

$$\text{យើងមាន } f(x) = x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } f'(x) &= 1 - \frac{4e^x(e^x+3) - e^x(4e^x)}{(e^x+3)^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 6e^x + 9 - 4e^{2x} - 12e^x + 4e^{2x}}{(e^x+3)^2} = \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x+3)^2} \\ &= \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ } x, f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$

$$\text{ឲ្យ } f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2 \geq 0 \text{ គ្រប់តម្លៃ } x$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

➤ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

$$\text{ចំពោះ } x = \ln 3$$

$$\text{នោះ } f(\ln 3) = \ln 3 + 2 - \frac{4e^{\ln 3}}{e^{\ln 3} + 3} = \ln 3 + 2 - 2 = \ln 3$$

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$

៣. a. ធ្វើការសន្និដ្ឋាន ចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 3$

ដោយ $x = \ln 3$ នាំឲ្យ $f'(\ln 3) = 0$ នោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ត្រូវស្របនឹងអ័ក្ស $(x'Ox)$ ហើយមានសមីការ $d_2: y = \ln 3$

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2

តាមតារាងអថេរភាពនៃ f យើងបាន

- បើ $x \in (-\infty, \ln 3)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d_2
- បើ $x \in (\ln 3, +\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d_2
- បើ $x = \ln 3$ នោះក្រាប C កាត់បន្ទាត់ d_2 ត្រង់ចំណុច $I(\ln 3, \ln 3)$

៤. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច មាន

$$\text{អាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ } y = \frac{1}{4}x + 1$$

$$\text{សមីការបន្ទាត់ប៉ះ } d_3: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

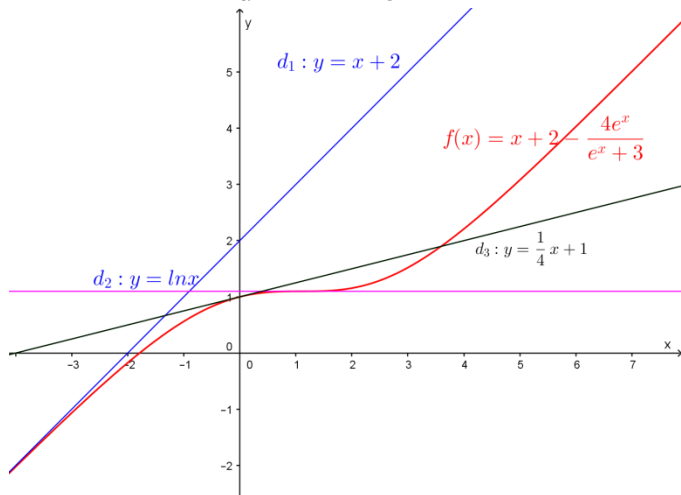
$$\text{ដោយ } x_0 = 0, y_0 = f(0) = 0 + 2 - \frac{4}{4} = 1 \text{ ហើយ}$$

$$f'(x_0) = \left(\frac{e^0-3}{e^0+3}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\text{គេបាន } d_3: y = \frac{1}{4}(x-0) + 1 = \frac{1}{4}x + 1$$

$$\text{ដូចនេះ } d_3: y = \frac{1}{4}x + 1$$

b. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1, d_2, d_3



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ២៤ សីហា ២០១៥
មណ្ឌលប្រឡង៖.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ឋានៈលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាសា

- I. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ ។
១. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ ។
២. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ ។
- II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ ក. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{x}$
- III. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងស្បែងមួយមានប៊ូលស្រទាប់ ប៊ូលខៀវ៣ និងប៊ូលក្រហម២។ គេចាប់យកប៊ូលម្តង៣ក្នុងពេលតែមួយ ចេញពីស្បែងដោយចៃដន្យ។ គេសន្និដ្ឋានថាប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលនីមួយៗជាសមប្រូបាប។
គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
A: យ៉ាងតិចមានប៊ូលពីរពណ៌ខៀវ ។ B: ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ខុសគ្នា។
- IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖ ក. $I = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 3 \right) dx$ ។
ខ. គេមាន f កំណត់ដោយ $f(x) = -\frac{2-x}{(x-1)^2}$ ។ បង្ហាញថា $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$ ។ គណនា $K = \int_{-1}^0 f(x) dx$ ។
- V. (២៥ពិន្ទុ) A. គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ។
រកវ៉ិចទ័រ៖ ក. $\vec{u} + \vec{v}$ ខ. $\vec{w} \times \vec{u}$ គ. $\vec{w} \times \vec{v}$ ។
B. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយជាចំណុចមានកូអរដោនេ $(-1, 0)$ និងចំណុចកំពូលពីរ $(-3, 0)$ និង $(3, 0)$ ។ សង់អេលីបនេះ។
- VI. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1 + 2e^x}$ ។
១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$ ជាចម្លើយមួយនៃ (E) ។
២. បង្ហាញថាអនុគមន៍ ϕ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(\phi - f)$ ជាចម្លើយនៃ (E') : $y' + 2y = 0$ ។
- VII. (៣៥ពិន្ទុ) A. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $g(x) = x^2 + \ln x$ ។
១. a. បង្ហាញថា g អនុគមន៍កើនជាប់ខាតលើ $(0, +\infty)$ ។ b. គណនា $g(1)$ ។
២. a. ទាញយកពីលទ្ធផលនៃសំណួរទី១ បញ្ជាក់លទ្ធផលខាងក្រោម
បើ $x \geq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \geq 1$ និងបើ $0 < x \leq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \leq 1$ ។
b. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2 + \ln x - 1$ កាលណា x នៅលើ $(0, +\infty)$ ។
B. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ និងតាង C ក្រាបរបស់វានៅក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។
១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។ (ដោយដឹងថា $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)
២. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$ ។
៣. ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $(0, +\infty)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0, +\infty)$ ។
៤. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។
b. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ I រវាង C និង Δ ។ សង់ Δ និង C ។

ប្រកាសណែនាំសិក្សាសម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២០ សីហា ២០១៨

I. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

1. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$

- $z_1 + z_2 = (-1 + i\sqrt{3}) + (1 - i\sqrt{3}) = 0$
- $z_1 - z_2 = (-1 + i\sqrt{3}) - (1 - i\sqrt{3})$
 $= -1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} = -2 + 2i\sqrt{3}$
- $z_1 z_2 = (-1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) = -1 + i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + 3$
 $= 2 + 2i\sqrt{3}$

2. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

$z_1 - z_2$, $z_1 z_2$

- $z_1 - z_2 = -2 + 2i\sqrt{3} = 4 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
 $= 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$
- $z_1 z_2 = 2 + 2i\sqrt{3} = 4 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
 $= 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

II. គណនាលីមីត

$$\begin{aligned} & \text{ក } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2} \text{ រវាង } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2^2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x+2) - 2^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2) \right] \\ &= (2^2 + 2 \cdot 2 + 4)(\sqrt{2+2} + 2) = 48 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2} = 48$$

$$\begin{aligned} & \text{ខ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} \text{ រវាង } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\cos x + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & \text{គ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{x} \text{ រវាង } \frac{0}{0} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \right) = 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{x} = 9$$

$$\text{III. ចំនួនករណីអាច } n(S) = C(8, 3) = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A: យ៉ាងតិចមានប៊ូលពីរពណ៌ខៀវ

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(A) = C(3, 1) \times C(5, 1) + C(3, 3) = 16$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{56} = \frac{2}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(A) = \frac{2}{7}$$

B: ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ខុសគ្នា

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(B) = C(3, 1) \times C(3, 1) \times C(2, 1) = 18$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{9}{28}$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} & \text{ក } I = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 3 \right) dx = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + 3x \right]_1^2 \\ &= \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + 3x \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{2^3}{9} - \frac{2^2}{4} + 3 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{9} - \frac{1^2}{4} + 3 \cdot 1 \right) \\ &= \left(\frac{8}{9} - 1 + 6 \right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4} + 3 \right) = \frac{109}{36} \end{aligned}$$

$$\text{ខ បង្ហាញថា } f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)}$$

$$\begin{aligned} & \text{យើងមាន } f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{-1 + (x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-2 + x}{(x-1)^2} = -\frac{2-x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{គណនា } K = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 \left[-\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \right] dx$$

$$= \int_{-1}^0 \left[-\frac{(x-1)'}{(x-1)^2} + \frac{(x-1)'}{x-1} \right] dx = \left[\frac{1}{x-1} + \ln|x-1| \right]_{-1}^0$$

$$= (-1 + \ln 1) - \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 \right) = -\frac{1}{2} - \ln 2$$

V. A. គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$
 $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

រកវ៉ិចទ័រ

ក $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) + (-\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) = 0\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$

ខ $\vec{w} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= (2-2)\vec{i} - (2+2)\vec{j} + (-1-1)\vec{k} = 0\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$

គ $\vec{w} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= (2+4)\vec{i} - (2-2)\vec{j} + (2+1)\vec{k} = 6\vec{i} - 0\vec{j} + 3\vec{k}$

B. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

ដោយកំពូលទាំងពីរមានអដ្ឋកោស ០ ដូចគ្នា នោះអេលីប

មានផ្ចិត $I(0,0)$

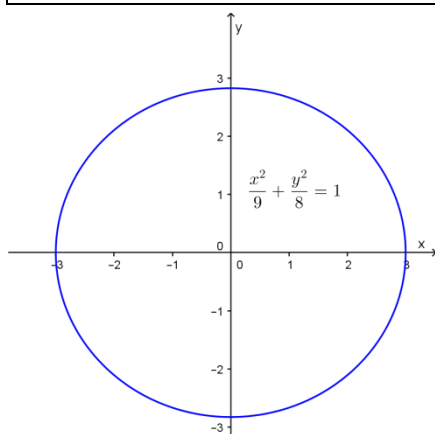
ហើយអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

សមីការមានរាង $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- កំពូល $V(\pm a, 0) = (\pm 3, 0)$ នោះ $a = 3$
- កំណុំ $F(-c, 0) = (-1, 0)$ នោះ $c = 1$
- $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - 1^2 = 8$

ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

ស្តង់ដារអេលីប



VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$ ជាចម្លើយមួយនៃ (E)

យើងមាន $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$

នាំឲ្យ $f'(x) = -2e^{-2x} \ln(1+2e^x) + \frac{2e^x \cdot e^{-2x}}{1+2e^x}$

$= -2e^{-2x} \ln(1+2e^x) + 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

បើ $f'(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ:

$f'(x) + 2f(x) = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ គេបាន

$\left[-2e^{-2x} \ln(1+2e^x) + 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x} \right] + 2e^{-2x} \ln(1+2e^x) = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

$2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x} = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ ពិត

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ដែល $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$ ជាចម្លើយមួយនៃ (E) ។

២. បង្ហាញថាអនុគមន៍ φ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ

$(\varphi - f)$ ជាចម្លើយនៃ $(E'): y' + 2y = 0$

• បើ φ ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $\varphi' + 2\varphi = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ (1)

ហើយ f ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $f' + 2f = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

(2)

យក (1) - (2) យើងបាន $(\varphi' - f') + 2(\varphi - f) = 0$ ឬ

$(\varphi - f)' + 2(\varphi - f) = 0$

ជាចម្លើយនៃ $(E'): y' + 2y = 0$

• បើ $(\varphi - f)$ ជាចម្លើយនៃ (E') នោះ:

$(\varphi - f)' + 2(\varphi - f) = 0$ ឬ $\varphi' - f' + 2\varphi + 2f = 0$

$\Leftrightarrow (\varphi' - 2\varphi) + (f' + 2f) = 0$

$\Leftrightarrow \varphi' + 2\varphi = f' + 2f$

តែ f ជាចម្លើយនៃ (E) : $f' + 2f = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

គេបាន $\varphi' + 2\varphi = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ នោះ φ ជាចម្លើយនៃសមី

ការ (E)

ដូចនេះ អនុគមន៍ φ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(\varphi - f)$

ជាចម្លើយនៃ $(E'): y' + 2y = 0$

VII. A. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ

$g(x) = x^2 + \ln x$

១. a. បង្ហាញថា g អនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0, +\infty)$

យើងមាន $g(x) = x^2 + \ln x$ នាំឲ្យ $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$

គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍កើនជាប់ខាតលើ $(0, +\infty)$

b. គណនា $g(1)$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $g(1)=1^2+\ln 1=1$

២. a. ទាញយកពីលទ្ធផលនៃសំណួរទី១ បញ្ជាក់ថា

បើ $x \geq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \geq 1$ និងបើ $0 < x \leq 1$ នោះ

$$x^2 + \ln x \leq 1$$

ដោយ g ជាអនុគមន៍កើនជាប់ខាតលើ $(0, +\infty)$ ហើយ

$$g(1)=1$$

• បើ $x \geq 1$ គេបាន $g(x) \geq g(1)$ នោះ $x^2 + \ln x \geq 1$

• បើ $0 < x \leq 1$ គេបាន $g(x) \leq g(1)$ នោះ $x^2 + \ln x \leq 1$

b. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2 + \ln x - 1$ កាលណា x នៅលើ $(0, +\infty)$

• បើ $x \geq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + \ln x - 1 \geq 0$

• បើ $0 < x \leq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + \ln x - 1 \leq 0$

B. គេឲ្យ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $C: f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$

១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

២. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$

$$\text{យើងមាន } f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } f'(x) &= 1 - \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - (1 - \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \frac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$

៣. ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $(0, +\infty)$

ដោយ $x^2 > 0$ គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញា

$$\text{ដូច } x^2 + \ln x - 1$$

តាមសំណួរ A យើងបាន

• បើ $x=1$ នោះ $x^2 + \ln x - 1 = 0$ គេបាន $f'(x) = 0$

• បើ $x > 1$ នោះ $x^2 + \ln x - 1 > 0$ គេបាន $f'(x) > 0$

• បើ $0 < x < 1$ នោះ $x^2 + \ln x - 1 < 0$ គេបាន $f'(x) < 0$

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0, +\infty)$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $f(1) = 1 + 1 - \frac{\ln 1}{1} = 2$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

៤.a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta: y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹង

ក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + 1 - \frac{\ln x}{x} \right) - (x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\Delta: y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

b. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ

$$\text{យក } C - \Delta: f(x) - y = -\frac{\ln x}{x}$$

គ្រប់ $x \in (0, +\infty)$ នោះ $f(x) - y$ យកសញ្ញាតាម

$$-\ln x$$

• បើ $-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

• បើ $-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Rightarrow x < 1$

• បើ $-\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

តាមតារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $f(x) - y$ យើងបាន

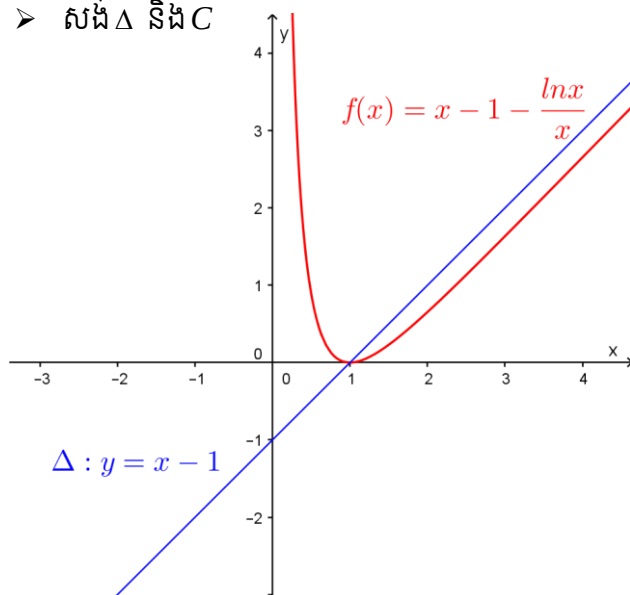
• ចំពោះ $x \in (0, 1)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ Δ

• ចំពោះ $x \in (1, +\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ Δ

• ចំពោះ $x=1$ នោះក្រាប C កាត់បន្ទាត់ Δ ត្រង់ $(1, 2)$

ដែល $I(1, 2)$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង C និង Δ

➢ សង់ Δ និង C



[illegible]

I. (២០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{1 + \sin x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x} + e^x) \sin^2 x}{2x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} \right)$

ខ. កំណត់ម៉ូឌុល និងអាក្យម៉ង់ $z_1 + z_2, z_1 + z_3, \left(\frac{z_1 + z_3}{z_1 + z_2} \right)^2$ ។

គ. « មានសិស្សម្នាក់ក្នុងមួយទ្វីប »។

៤. ទាញយកអថេរភាពនៃ f លើ I និងសង់ក្រាប C នៃ f នៅលើប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ខ បង្ហាញថាបើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) នោះ $g(x) = f(x) - f_1(x)$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ $y'' + 4y = 0$

គ. រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2,2,1), B(4,-2,0), D(1,5,2)$ ។

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ១៣ តុលា ២០១៤ (លើកទី២)

I. គណនាលីមីត

$$\text{ក } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) + (x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1) = 1+1 = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{ខ } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{1 + \sin x} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 1)(\sin x - 1)}{\sin x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x - 1)$$

$$= -1 - 1 = -2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{1 + \sin x} = -2$$

$$\text{គ } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \text{ រាង } +\infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x) - x^2}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{ឃ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x} + e^x) \sin^2 x}{2x^2} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-x} + e^x}{2} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right] = \frac{1+1}{2} \cdot 1^2 = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + e^x \sin^2 x}{2x^2} = 1$$

$$\text{ង } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} \right) \text{ រាង } +\infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x+2}{x} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} \right) = \ln 1 - 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\text{II. ១ គេមានចំនួនកុំផ្លិច } z_1 = \sqrt{2}, z_2 = -i\sqrt{2}, z_3 = i\sqrt{2}$$

$$\text{ក } z_1 + z_2, z_1 + z_3, (z_1 + z_2)(z_1 + z_3)$$

$$\bullet z_1 + z_2 = \sqrt{2} + (-i\sqrt{2}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$\bullet z_1 + z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$\bullet (z_1 + z_2)(z_1 + z_3) = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$$

$$= \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 4$$

$$\text{ខ. កំណត់ម៉ូឌុល និងអាកុយនៃ } z_1 + z_2, z_1 + z_3, \left(\frac{z_1 + z_3}{z_1 + z_2} \right)^2$$

$$\bullet z_1 + z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\text{ដូចនេះ: ម៉ូឌុល } |z_1 + z_2| = 2 \text{ និងអាកុយម៉ង់}$$

$$\text{Arg}(z_1 + z_2) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ។}$$

$$\bullet z_1 + z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{ដូចនេះ: ម៉ូឌុល } |z_1 + z_3| = 2 \text{ និងអាកុយម៉ង់}$$

$$\text{Arg}(z_1 + z_3) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ។}$$

$$\bullet \left(\frac{z_1 + z_3}{z_1 + z_2} \right)^2 = \left[\frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]} \right]^2$$

$$= \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2$$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^2 = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$\text{ដូចនេះ: ម៉ូឌុល } \left| \left(\frac{z_1 + z_3}{z_1 + z_2} \right)^2 \right| = 1 \text{ និងអាកុយម៉ង់}$$

$$\text{Arg} \left[\left(\frac{z_1 + z_3}{z_1 + z_2} \right)^2 \right] = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{២ គណនា } i^n \text{ ចំពោះតម្លៃនៃចំនួនគត់វិជ្ជាទីប } n \geq 1$$

$$\bullet \text{ ចំពោះ } n=1 \text{ នោះ: } i^1 = i$$

$$\bullet \text{ ចំពោះ } n=2 \text{ នោះ: } i^2 = -1$$

$$\bullet \text{ ចំពោះ } n=3 \text{ នោះ: } i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

- ចំពោះ $n=4$ នោះ

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

- ចំពោះ $n=5$ នោះ $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

ស្ថិតស្វ័យគុណនៃ i មានខួបស្មើ 4 យើងបាន ចំពោះ

តម្លៃនៃចំនួនគត់វិជ្ជាទីប $n \geq 1$

បើ $n=4k$ នោះ $i^n = 1$, បើ $n=4k+1$ នោះ $i^n = i$

បើ $n=4k+2$ នោះ $i^n = -1$, បើ $n=4k+3$ នោះ

$$i^n = -i$$

➢ ទាញយកតម្លៃ $i^{2015} - i^{2014}$

$$i^{2015} - i^{2014} = i^{2014} (i - 1) \text{ ដោយ } 2014 = 4 \times 503 + 1$$

$$i^{2015} - i^{2014} = i^{4 \times 503 + 1} (i - 1) = (-1)(i - 1) = 1 - i$$

$$\text{ដូចនេះ } i^{2015} - i^{2014} = 1 - i$$

$$\text{III. ចំនួនករណីអាច } n(S) = C(9,3) = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

ក. « យ៉ាងតិចមានសិស្ស២នាក់ជាសិស្សអាស៊ី »

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ «យ៉ាងតិចមានសិស្ស២នាក់ជាសិស្សអាស៊ី»

$$\text{នោះ } n(A) = C(4,2) \times C(5,1) + C(4,3)$$

$$= \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} \times 5 + \frac{4!}{(4-3)! \times 3!}$$

$$= \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 5 + 4 = 2 \times 3 \times 5 + 4 = 34 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{34}{84} = \frac{17}{42}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(A) = \frac{17}{42}$$

ខ. « យ៉ាងតិចមានសិស្ស២នាក់ជាសិស្សអឺរ៉ុប »

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ «យ៉ាងតិចមានសិស្ស២នាក់ជាសិស្សអឺរ៉ុប»

$$\text{នោះ } n(B) = C(3,2) \times C(6,1) + C(3,3)$$

$$= \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} \times 6 + 1 = 3 \times 6 + 1 = 19 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(s)} = \frac{19}{84}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{19}{84}$$

គ. « មានសិស្សម្នាក់ក្នុងមួយថ្ងៃ »

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ «មានសិស្សម្នាក់ក្នុងមួយថ្ងៃ»

$$n(C) = C(4,1) \times C(2,1) \times C(3,1) = 4 \times 2 \times 3 = 24$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(s)} = \frac{4 \times 2 \times 3}{3 \times 4 \times 7} = \frac{2}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(C) = \frac{2}{7}$$

IV. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $I =]0, +\infty[$ ដោយ

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$$

A. h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I ដោយ

$$h(x) = -x + 1 - 2 \ln x$$

➢ គណនា $h(1)$

$$\text{ចំពោះ } x=1 \text{ នោះ } h(1) = -1 + 1 - 2 \ln 1 = 0$$

➢ សិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)$

$$\text{យើងមាន } h(x) = -x + 1 - 2 \ln x$$

$$\text{នាំឲ្យ } h'(x) = -1 - \frac{2}{x} = -\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$\text{លើ } I =]0, +\infty[, 1 + \frac{2}{x} > 0$$

$$\text{គេបាន } h'(x) = -\left(1 + \frac{2}{x}\right) < 0$$

នោះ h ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ I

គេបានតារាងអថេរភាព

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		-	
$h(x)$			

B. ១. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x^2} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) = 0$$

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f

$$\text{យើងមាន } f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } f'(x) &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x + \ln x)}{x^4} \\ &= \frac{x^2 + x - 2x^2 - 2x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{-x^2 + x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{-x + 1 - 2 \ln x}{x^3} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } f'(x) = \frac{-x + 1 - 2 \ln x}{x^3}$$

៣. បង្ហាញថានៅលើ I , $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$

$$\text{យើងមាន } f'(x) = \frac{-x^2 + x - 2 \ln x}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3}$$

លើ I , $x^3 > 0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$

៤. ទាញយកអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ I

ដោយគ្រប់ $x \in I$, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$

តាមតារាងអថេរភាពនៃ $h(x)$ ទាញបាន

- បើ $x=1$ នោះ $h(x)=0$ គេបាន $f'(x)=0$
- បើ $x \in (0,1)$ នោះ $h(x) > 0$ គេបាន $f'(x) > 0$
- បើ $x \in (1, +\infty)$ នោះ $h(x) < 0$ គេបាន $f'(x) < 0$

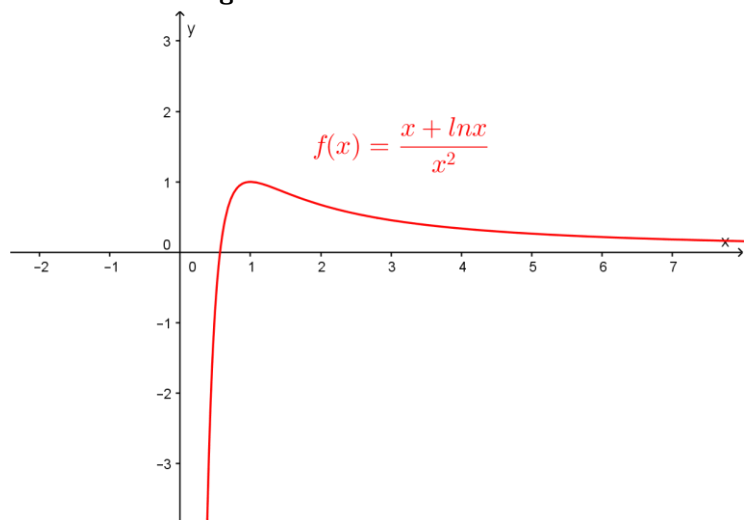
គេបានតារាងអថេរភាពនៃ f

$$\text{ចំពោះ } x=1 \text{ នោះ } f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1^2} = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=1$

➤ សង់ក្រាប C



V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 4y = x^2 + 2x - 1$

ក. រកអនុគមន៍ f_1 ដែល $f_1(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E)

$$\text{យើងមាន } f_1(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{នាំឲ្យ } f_1'(x) = 2ax + b \text{ និង } f_1''(x) = 2a$$

បើ f_1 ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ

$$f_1''(x) + 4f_1(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2a + 4(ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow 4ax^2 + 4bx + (2a + 4c) = x^2 + 2x - 1$$

$$\text{ទាញបាន } \begin{cases} 4a = 1 \\ 4b = 2 \\ 2a + 4c = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{3}{8}$$

$$\text{ដូចនេះ } f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}$$

ខ បង្ហាញថាបើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) នោះ

$$g(x) = f(x) - f_1(x)$$

$$\text{ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ } y'' + 4y = 0$$

• បើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ

$$f''(x) + 4f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad (1)$$

• ហើយ $f_1(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ

$$f_1''(x) + 4f_1(x) = x^2 + 2x - 1 \quad (2)$$

យក (1) - (2) យើងបាន

$$f''(x) - f_1''(x) + 4[f(x) - f_1(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - f_1(x)]'' + 4[f(x) - f_1(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow [g(x)]'' + 4g(x) = 0 \text{ ជាចម្លើយនៃសមីការ}$$

$$y'' + 4y = 0$$

ដូចនេះ បើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) នោះ

$$g(x) = f(x) - f_1(x)$$

$$\text{ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ } y'' + 4y = 0$$

VI. ក គេមាន $A(2, 2, 1)$, $B(4, -2, 0)$, $C(3, 1, 1)$, $D(1, 5, 2)$

➤ បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{AB} = (4-2, -2-2, 0-1) = (2, -4, -1)$$

$$, \overrightarrow{DC} = (3-1, 1-5, 1-2) = (2, -4, -1)$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ នោះ } \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \text{ និង } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$$

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

➤ រកផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម

$$\text{តាមរូបមន្ត } S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$$

$$\text{យើងមាន } \overrightarrow{AB} = (2, -4, -1) \text{ និង}$$

$$\overrightarrow{AD} = (1-2, 5-2, 2-1) = (-1, 3, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-4+3)\vec{i} - (2-1)\vec{j} + (6-4)\vec{k} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{គេបាន } S_{ABCD} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$

$$\text{ដូចនេះ: } S_{ABCD} = \sqrt{6} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច

$$A(2, 2, 1) \text{ និង } B(4, -2, 0)$$

បន្ទាត់ (AB) ជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2, 2, 1)$ និង

$B(4, -2, 0)$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់

(AB) ដែល $\overrightarrow{AB} = (2, -4, -1)$

$$\text{គេបាន } (AB): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{(AB): x = 2 + 2t, y = 2 - 4t, z = 1 - t, t \in \mathbb{R}}$$

គ. រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច

$$A(2, 2, 1), B(4, -2, 0), D(1, 5, 2)$$

យក $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-1, -1, 2)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់
ដែលកាត់តាមចំណុច A, B, D

គេបានសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2, 2, 1)$ គឺ

$$(ABD): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$-1(x - 2) - 1(y - 2) + 2(z - 1) = 0$$

$$-x + 2 - y + 2 + 2z - 2 = 0$$

$$-x - y + 2z + 2 = 0$$

$$x + y - 2z - 2 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{ប្លង់}(ABD): x + y - 2z - 2 = 0}$$

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ០៤ សីហា ២០១៤
មណ្ឌលប្រឡង៖.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ឋានៈលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\left(\frac{\pi}{4} - x \right)}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x}{\sqrt{5} - \sqrt{x+5}}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{-2x^2}$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{|x|}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ ។

- ក. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ ។
- ខ. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- គ. បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ $z^3 - 8 = 0$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) នៅក្នុងក្រុមមួយមានប្រាំមួយនាក់ដែលគេសរសេរលេខពី១ដល់១២។ គេចាប់យកប្រាំមួយចេញពីក្រុមដោយចៃដន្យ។

- ក. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានប្រាំមួយទាំងបីមាន លេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង៣ » ។
- ខ. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានមានប្រាំមួយតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង៣ » ។
- គ. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានមានលេខតាមលំដាប់កើនជាស្មើគ្នាដែលមានផលសងរួម $d = 3$ » ។

IV. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $]0, +\infty[$ ដោយ $f(x) = x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x}$ និង C ជាក្រាបរបស់វា។

- ១. ក. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ខ. រក $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
គ. ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ Δ ដែលមានសមីការ $y = x - 5$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C នៅជិត $+\infty$ ។
ឃ. កំណត់អាបស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង Δ និងក្រាប C ។
- ២. ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $]0, +\infty[$ គេបាន $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ។
ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ដោយដឹងថាសមីការ $g(x) = 0$ មានចម្លើយ $x' = 1$ និង $x'' = \alpha$, ($1 < \alpha$) ។

V. (៤៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$ ។ គេតាងដោយ C ជាក្រាបរបស់វា។

- ១. ក. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
ខ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ D ដែលមានសមីការ $y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C ។
គ. តើខ្សែកោង C នៅលើឬនៅក្រោមបន្ទាត់ D ចូរបញ្ជាក់។
ឃ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា គ្រប់ចំនួនពិត x , $f(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$ ។
ង. រក $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; (ប្រើលទ្ធផល $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$) ។
- ២. ក. គណនា $f'(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ f ។
ខ. A ជាចំណុចនៅលើក្រាប C ដែលមានអាបស៊ីស 0 ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប C ត្រង់ A ។
គ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលគេតាងដោយ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$ ។

អង្គការណែនាំសិក្សាសម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ០៤ សីហា ២០១៤ (លើកទី១)

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\left(\frac{\pi}{4} - x \right)}$ រក $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{- \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}$$

តាង $t = x - \frac{\pi}{4}$ បើ $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ នោះ $t \rightarrow 0$

គេបាន $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{-t} = -2 \cdot 1 = -2$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = -2$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x}{\sqrt{5} - \sqrt{x+5}}$ រក $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{x+5})}{(\sqrt{5} - \sqrt{x+5})(\sqrt{5} + \sqrt{x+5})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-2 \sin 5x}{5 - (x+5)} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{x+5}) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{x+5}) \right]$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 5 (\sqrt{5} + \sqrt{5}) = 20\sqrt{5}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x}{\sqrt{5} - \sqrt{x+5}} = 20\sqrt{5}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{-2x^2}$ រក $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{-2x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \cdot 3^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 9 = -\frac{9}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{-2x^2} = -\frac{9}{2}$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{|x|}$ រក $\frac{0}{0}$

• បើ $x \rightarrow 0^-$ នោះ $|x| = -x$ គេបាន

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [-(x-1)] = 1$$

• បើ $x \rightarrow 0^+$ នោះ $|x| = x$ គេបាន

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = -1$$

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

ក គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$

• $z_1 + z_2 = (-1 + i\sqrt{3}) + (-1 - i\sqrt{3}) = -2$

• $z_1 - z_2 = (-1 + i\sqrt{3}) - (-1 - i\sqrt{3})$
 $= -1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$

• $z_1 z_2 = (-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3}) = (-1)^2 + \sqrt{3}^2 = 4$

ខ សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

• $z_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
 $= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

• $z_2 = -1 - i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
 $= 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

គ បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាឫសនៃសមីការ $z^3 - 8 = 0$

• $z_1 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

គេបាន $z_1^3 - 8 = 2^3 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) - 8$
 $= 8(1 + 0i) - 8 = 0$ ពិត

• $z_2 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

គេបាន $z_2^3 - 8 = 2^3 (\cos 4\pi + i \sin 4\pi) - 8$
 $= 8(1 + 0i) - 8 = 0$ ពិត

ដូចនេះ: z_1 និង z_2 ជាឫសនៃសមីការ $z^3 - 8 = 0$

III. $n(S) = C(12, 3) = \frac{12!}{3!(12-3)!} = 220$ ករណី

ក. តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែល គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមាន
 លេខ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង ៣

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(4,3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$ ករណី

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(A) = \frac{1}{55}$$

ខ. តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែល គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់ មានលេខចែកដាច់នឹង៣

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(4,1) \times C(8,2)$

$$= 4 \times \frac{8!}{2!(8-2)!} = 4 \times 28 = 112 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{112}{220} = \frac{28}{55}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{28}{55}$$

គ. តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ គេចាប់បានមានលេខតាមលំដាប់ កើនជាស្មើតួនពូជដែលមានផលសង្ខេប $d = 3$

$$C = \{(1,4,7), (2,5,8), (3,6,9), (4,7,10), (5,8,11), (6,9,12)\}$$

នាំឱ្យ $n(C) = 6$ ករណី

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{220} = \frac{3}{110}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(C) = \frac{3}{110}$$

IV. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $]0, +\infty[$ ដោយ

$$C: f(x) = x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x}$$

១. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x} \right) = +\infty$$

ខ. រក $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x} \right) = -\infty$$

គ. ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ Δ ដែលមានសមីការ $y = x - 5$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C នៅជិត $+\infty$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x} \right) = 0$$

ដូចនេះបន្ទាត់ $\Delta: y = x - 5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ឃ. កំណត់អាប៉ូស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង Δ និងក្រាប C

យើងមានបន្ទាត់ $\Delta: y = x - 5$ និងក្រាប

$$C: f(x) = x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x}$$

គេបាន សមីការអាប៉ូស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង Δ និងក្រាប C

$$x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x} = x - 5 \Leftrightarrow \frac{8 \ln x + 9}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 \ln x + 9 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{9}{8} \Rightarrow x = e^{-\frac{9}{8}} = \frac{1}{e^{\frac{9}{8}}}$$

$$\text{ដូចនេះ } x = \frac{1}{e^{\frac{9}{8}}}$$

២. ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $]0, +\infty[$ គេបាន

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\text{យើងមាន } f(x) = x - 5 + \frac{8 \ln x}{x} + \frac{9}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } f'(x) &= 1 + 8 \left(\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \right) - \frac{9}{x^2} \\ &= 1 + \frac{8 - 8 \ln x - 9}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 8 \ln x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \text{ ដែល} \end{aligned}$$

$$g(x) = x^2 - 8 \ln x - 1$$

$$\text{ដូចនេះ គ្រប់ } x \text{ លើ }]0, +\infty[\text{ គេបាន } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\text{ដែល } g(x) = x^2 - 8 \ln x - 1$$

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

ដោយ $x^2 > 0$ គ្រប់ $x \in]0, +\infty[$ នោះ $f'(x)$ មាន

$$\text{សញ្ញាដូច } g(x) = x^2 - 8 \ln x - 1$$

$$g'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x}$$

$$\text{ឱ្យ } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \ (x > 0)$$

$$\text{ចំពោះ } x = 2 \text{ នោះ } g(2) = 2^2 - 8 \ln 2 - 1 = 3 - 8 \ln 2$$

$$= -2.5 < 0$$

សមីការ $g(x) = 0$ មានចម្លើយ $x' = 1$ និង $x'' = \alpha$, ($1 < \alpha$)

$$\text{សង្កេត } g(e) = e^2 - 9 < 0 \text{ ហើយ}$$

$$g(4) = 4^2 - 8\ln 4 - 1 = 15 - 16\ln 2 > 0$$

ដោយ $g(e) \cdot g(4) < 0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលគេបាន α នៅចន្លោះ $[e, 4]$

គេបានតារាងអថេរភាពនៃ g

x	0	1	2	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	-	0	+
$g(x)$					

តាមតារាងអថេរភាពនៃ g គេបាន

- បើ $x \in (1, \alpha)$ នោះ $g(x) < 0$ គេបាន $f'(x) < 0$
- បើ $x \in (0, 1) \cup (\alpha, +\infty)$ នោះ $g(x) > 0$ គេបាន $f'(x) > 0$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $f(1) = 1 - 5 + \frac{8\ln 1}{1} + \frac{9}{1} = 5$

គេបានតារាងអថេរភាពនៃ f

x	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

- អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $(1, 5)$
- អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $(\alpha, f(\alpha))$ ។

V. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$$C: f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$$

១. ក. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - x - 2e^{-x}) = -\infty$$

ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

ខ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $D: y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប

ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(4 - x - 2e^{-x}) - (-x + 4)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2e^{-x}) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $D: y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

គ. បញ្ជាក់ទីតាំងនៃក្រាប C និងបន្ទាត់ D

យក $C-D: f(x) - y = -2e^{-x} < 0$ គ្រប់ចំនួនពិត x
ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ D គ្រប់ចំនួនពិត x

យ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា គ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } f(x) &= 4 - x - 2e^{-x} = 4 - x - \frac{2}{e^x} \\ &= \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ គ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x) = \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$

ង. រក $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; (ប្រើលទ្ធផល $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x} = -\infty$$

២. ក. គណនា $f'(x)$

យើងមាន $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$

នាំឲ្យ $f'(x) = -1 + 2e^{-x}$

ដូចនេះ $f'(x) = -1 + 2e^{-x}$

➤ សិក្សាអថេរភាពនៃ f

• បើ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow -x = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln 2$$

• បើ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow -x > \ln \frac{1}{2} \Rightarrow x < \ln 2$$

• បើ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 + 2e^{-x} < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow -x < \ln \frac{1}{2} \Rightarrow x > \ln 2$$

ចំពោះ $x = \ln 2$ នោះ $f(\ln 2) = 4 - \ln 2 - 2e^{-\ln 2}$

$$= 4 - \ln 2 - 2 \cdot 2^{-1} = 3 - \ln 2$$

គេបានតារាងអថេរភាពនៃ f

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$3 - \ln 2$	0

➤ កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមានៃ f

តម្លៃអតិបរមានៃ f គឺ $f(\ln 2) = 3 - \ln 2$

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប C ត្រង់ A

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

ត្រង់ A មាន $x_0 = 0$ នោះ:

$$y_0 = f(0) = 4 - 0 - 2e^0 = 2$$

$$\text{ហើយ } f'(x_0) = f'(0) = -1 + 2e^0 = 1$$

$$\text{គេបាន } y = 1(x - 0) + 2 = x + 2$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = x + 2$

គ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់

β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$

$$\text{យើងមាន } f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$$

$$\text{នោះ } f(-1) = 4 + 1 - 2e^1 = 5 - 2e < 0$$

$$f(0) = 4 - 0 - 2e^0 = 2 > 0$$

$$\text{គេបាន } f(-1) \times f(0) = 2(5 - 2e) < 0$$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល មានបួស β មួយយ៉ាងតិច

នៅចន្លោះ $[-1, 0]$ ដែល $f(\beta) = 0$

តែអនុគមន៍ f កើនលើចន្លោះ $[-1, 0]$

ដូចនេះ សមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ β

នៅក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$ ។

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងប្រជុំសញ្ញាបត្រប្រឡងប្រជុំសញ្ញាបត្រប្រឡងប្រជុំ
វិញ្ញាបនបត្រ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេលៈ ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុបៈ ១២៥ ពិន្ទុ
ប្រធានវិញ្ញាបនបត្រ

សម័យប្រឡងៈ
មណ្ឌលប្រឡងៈ.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

- I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតៈ ក. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{\sin 2x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2x - \frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$
- II. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = -\sqrt{3} + i$ និង $z_2 = 2 \sin \frac{\pi}{3} + 2i \cos \frac{\pi}{3}$ ។
a. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ និង $z_1 z_2$ ។ b. សរសេរ z_1 , z_2 និង $z_1 z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
- III. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមន្ត្រី 12 គ្រាប់ដែលឃ្លីពណ៌សមាន 5 គ្រាប់ចុះលេខពី 1 ដល់ 5 និងឃ្លីពណ៌ក្រហម 7 ចុះពីលេខ 6 ដល់ 12 ។ គេចាប់យកឃ្លីមួយគ្រាប់ចេញពីក្នុងចំណោមនោះដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍
A: ចាប់បានឃ្លីពណ៌ស B: ចាប់បានឃ្លីមានលេខជាពហុគុណនៃ 3 ។
C: ចាប់បានឃ្លីមានលេខជាពហុគុណនៃ 3 ហើយមានពណ៌ក្រហម។
- IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\ln 2} (1 - e^x)^2 dx$; $J = \int_1^4 \left(2x + \frac{3}{(x-2)^2} \right) dx$ និង $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)^2 dx$
- V. (២៥ពិន្ទុ) ១. គេមានសមីការ $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបនេះ។ សង់អេលីបនេះ។
២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1, 2, 1), B(4, 2, 4), C(5, 3, 0)$ ។
a. គណនាកូអរដោនេ $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ និង $\overline{BC}$ ។ បង្ហាញថា (ABC) ជាត្រីកោណសម័ង្ស។
b. បង្ហាញថាបីចំណុច A, B, C បង្កើតបានប្លង់មួយ។ ទាញរកសមីការប្លង់ (ABC) ។
c. ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ (ABC) ។
- VI. (១០ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 2y' + y = 0$ ។
ខ. រកចម្លើយ f មួយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(0) = 4$ និង $f(1) = 3e$, $(\ln e = 1)$
- VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ដោយ $f(x) = x^2 + 2x - 1 - 4 \ln x$ ។ តាង (C) ជាក្រាបតំណាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។
1. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និងទាញរកអត្ថគុណនៃក្រាប។
2. a. បង្ហាញថាគ្រប់ x នៅលើ $(0, +\infty)$ គេអាចសរសេរ $f(x) = x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{4 \ln x}{x^2} \right)$ ។
b. ដោះស្រាយមធ្យមសមីការលើគណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។
3. a. ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ x លើ $(0, +\infty)$; $f'(x) = \frac{2(x^2 + x - 2)}{x}$ ។
b. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $(0, +\infty)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
4. a. កំណត់សមីការបន្ទាត់ d ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 2 ។
b. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។ យក $\ln 2 = 0.7, \ln 3 = 1.1$

គ្រឹះស្ថានសិក្សា និងសិក្សាសាស្ត្រ

គ្រឹះស្ថានសិក្សា និងសិក្សាសាស្ត្រ

I. គណនាលីមីត

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \text{ រវាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{\sin 2x} \text{ រវាង } \frac{0}{0}$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{3}{2} \right)$$

$$= 3 \times 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{\sin 2x} = \frac{9}{2}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2x - \frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \text{ រវាង } \frac{0}{0}$$

$$\text{តាង } t = \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - t$$

$$\text{បើ } x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2x - \frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{\pi}{4} - t\right) - \frac{\pi}{2}}{\sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - 2t - \frac{\pi}{2}}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t}{\sin t} = -2 \times 1 = -2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2x - \frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = -2$$

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -\sqrt{3} + i$ និង

$$z_2 = 2 \sin \frac{\pi}{3} + 2i \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}i = \sqrt{3} + i$$

a. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ និង $z_1 \cdot z_2$

$$\cdot z_1 + z_2 = -\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i = 2i$$

$$\cdot z_1 - z_2 = -\sqrt{3} + i - (\sqrt{3} + i)$$

$$= -\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i = -2\sqrt{3}$$

$$\cdot z_1 \cdot z_2 = (-\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + i)$$

$$= -(\sqrt{3})^2 - i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + i^2 = -3 - 1 = -4 + 0i$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 + z_2 = 2i$$

$$z_1 - z_2 = -2\sqrt{3} + 0i$$

$$z_1 \cdot z_2 = -4 + 0i$$

b. សរសេរ z_1, z_2 និង $z_1 \cdot z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\cdot z_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$\cdot z_2 = 2 \sin \frac{\pi}{3} + 2i \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\cdot z_1 \cdot z_2 = -4 + 0i$$

$$= 4(-1 + 0i)$$

$$= 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\text{ដូចនេះ: } z_1 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

III. គេមាន ឃ្លី ស 5 គ្រាប់ចុះលេខពី 1 ដល់ 5

ឃ្លីក្រហម 7 គ្រាប់ចុះលេខពី 6 ដល់ 12

ឃ្លីសរុប 12 គ្រាប់ចាប់យក 1 គ្រាប់ដោយចៃដន្យ

គេបានចំនួនករណីអាច $n(S) = C(12, 1) = 12$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A: ចាប់បានឃ្លីពណ៌ស

$$n(A) = C(5, 1) = \frac{5!}{4! \times 1!} = 5$$

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{12}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(A) = \frac{5}{12}$$

B: ចាប់បានឃ្លីមានចុះលេខជាពហុគុណនៃ 3

$$n(B) = C(4, 1) = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

$$\text{តាមរូបមន្ត } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{1}{3}$$

C : ចាប់បានលេខជាតហុគុណនៃ 3 ហើយមានពណ៌ក្រហម

$$n(C) = C(3,1) = 3$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(C) = \frac{1}{4}$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\ln 2} (1 - e^x)^2 dx \\ &= \int_0^{\ln 2} (1 - 2e^x + e^{2x}) dx \\ &= \left[x - 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^{\ln 2} \\ &= \left(\ln 2 - 2e^{\ln 2} + \frac{1}{2}e^{2\ln 2} \right) - \left(0 - 2e^0 + \frac{1}{2}e^0 \right) \\ &= (\ln 2 - 4 + 2) \left(-2 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \ln 2 - 2 + 2 + \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } I = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_1^4 \left(2x + \frac{3}{(x-2)^2} \right) dx = \int_1^4 \left[2x + 3 \frac{(x-2)'}{(x-2)^2} \right] dx \\ &= \left[x^2 - \frac{3}{x-2} \right]_1^4 = \left(16 - \frac{3}{2} \right) - (1 + 3) \\ &= \frac{32 - 3 - 8}{2} = \frac{21}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } J = \frac{21}{2}$$

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 2 \cos x \sin x + \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2x) dx = \left[x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \cos 0 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } J = \frac{\pi}{2} - 1$$

V. 1. បង្ហាញថាសមីការ $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ ជាអេលីប

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225} \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{សមីការមានរាង } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

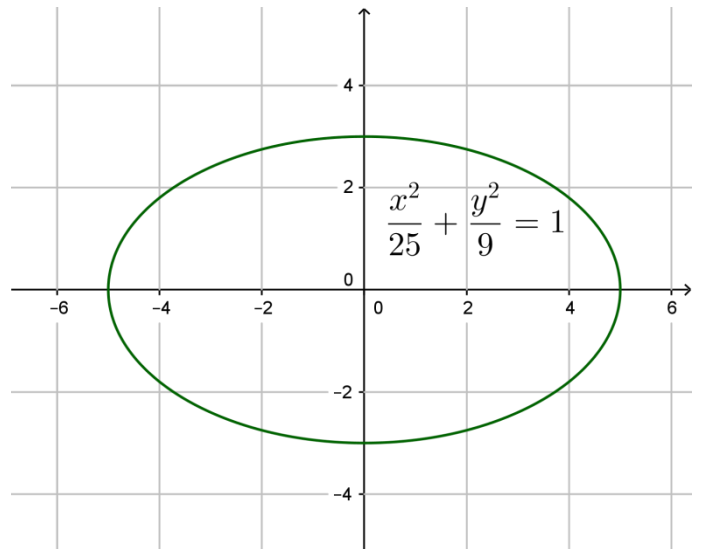
ជាសមីការនៃអេលីប ដែលមានអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ និងមានផ្ចិត $(0,0)$ ។

➢ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

យើងមាន $a=5$, $b=3$

- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 2 \times 5 = 10$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2 \times 3 = 6$ ឯកតាប្រវែង
- កូអរដោនេកំពូល $V(\pm a, 0) \Rightarrow V(\pm 5, 0)$

ខ សង់អេលីប



2. គេឱ្យ $A(1,2,1)$, $B(4,2,4)$ និង $C(5,3,2)$

a. គណនា $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AC}$

$$\cdot \overrightarrow{AB} = (4-1, 2-2, 4-1) = (3, 0, 3)$$

$$\cdot \overrightarrow{AC} = (5-1, 3-2, 0-1) = (4, 1, -1)$$

$$\cdot \overrightarrow{BC} = (5-4, 3-2, 0-4) = (1, 1, -4)$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} = (3, 0, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (4, 1, -1)$

និង $\overrightarrow{BC} = (1, 1, -4)$

+ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

គេមាន ៖

$$|\overline{AB}| = AB = \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$|\overline{AC}| = AC = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$|\overline{BC}| = BC = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{ដោយ } |\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = 3\sqrt{2}$$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

b. បង្ហាញថាបីចំណុច A, B, C បង្កើតបានជាប្លង់មួយ

$$\begin{aligned} \overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0-3)\vec{i} - (-3-12)\vec{j} + (3-0)\vec{k} \\ &= -3\vec{i} + 15\vec{j} + 3\vec{k} \end{aligned}$$

ដោយ $\overline{AB} \times \overline{AC} \neq \vec{0}$ នោះបីចំណុច A, B, C បង្កើតបានជាប្លង់មួយពិត

ដូចនេះ បីចំណុច A, B, C បង្កើតបានជាប្លង់មួយ

+ ទាញរកសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC): $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
យក $A(1,2,1)$ ជាចំណុចកាត់តាមនោះ: $x_0=1, y_0=2$ និង $z_0=1$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overline{AB} \times \overline{AC} = (-3, 15, 3)$

នោះ: $a=-3, b=15, c=3$

$$\text{គេបាន } (ABC): -3(x-1)+15(y-2)+3(z-1)=0$$

$$(ABC): -3x+3+15y-30+3z-3=0$$

$$(ABC): -3x+15y+3z-30=0$$

$$\text{ដូចនេះ } (ABC): x-5y-z+10=0$$

c. ទាញរកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

$$\text{តាមរូបមន្ត } S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

$$\begin{aligned} \text{ដោយ } |\overline{AB} \times \overline{AC}| &= \sqrt{(-3)^2 + 15^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{3^2(1+5^2+1)} = \sqrt{3^2 \times 3^3} = 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}$$

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(E): y'' - 2y' + y = 0$$

$$\text{មានសមីការសម្គាល់ } \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

ដោយសមីការសម្គាល់មានឫសឌុបគេបានចម្លើយនៃ (E)

$$\text{គឺ } y_c = (Ax+B)e^x, A, B \text{ ជាចំនួនថេរ}$$

ដូចនេះ: $y_c = (Ax+B)e^x, A, B$ ជាចំនួនថេរជាចម្លើយនៃ (E)

ខ. កំណត់ចម្លើយ f មួយនៃ (E)

$$\text{បើ } f(0)=4 \text{ និង } f(1)=3e$$

$$\text{ដោយ } y = (Ax+B)e^x$$

$$. y(0) = (A \times 0 + B)e^0 = 4$$

$$\Rightarrow B = 4$$

$$. y(1) = (A \times 1 + B)e = 3e$$

$$\Rightarrow A + B = 3 \Rightarrow A = 3 - B$$

$$A = 3 - 4 = -1$$

ដូចនេះ: ចម្លើយ f នៃ (E) គឺ $f(x) = (-x+4)e^x$ ។

VII. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = x^2 + 2x - 1 - 4\ln x$

1. សិក្សាលីមីតនិងទាញរកអាស៊ីមតូតនៃ f ត្រង់ 0^+

$$. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x - 1 - 4\ln x) = +\infty$$

$$\text{ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ខាង $+\infty$

2. a. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x \in (0, +\infty)$ គេបាន

$$f(x) = x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{4\ln x}{x^2} \right)$$

$$\text{គេមាន } f(x) = x^2 + 2x - 1 - 4\ln x$$

$$= x^2 \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{4\ln x}{x^2} \right)$$

$$= x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{4\ln x}{x^2} \right) \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ: $f(x) = x^2 + 2x - 1 - 4\ln x$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (0, +\infty)$

b. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$

$$. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{4\ln x}{x^2} \right) \right] = +\infty$$

$$\text{ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$3. a. \text{ ស្រាយថា } f'(x) = \frac{2(x^2+x-2)}{x}, \forall x \in (0, +\infty)$$

$$\text{គេមាន } f(x) = x^2 + 2x - 1 - 4\ln x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x + 2 - \frac{4}{x}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - 4}{x}$$

$$= \frac{2(x^2 + x - 2)}{x} \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \frac{2(x^2 + x - 2)}{x}, \forall x \in (0, +\infty)$

b. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $(0, +\infty)$

គេមាន $f'(x) = \frac{2(x^2 + x - 2)}{x}$

ដោយ $x > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $x^2 + x - 2$

បើ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(-2) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2 \cdot 1} = 1, \quad x_2 = \frac{-1-3}{2 \cdot 1} = -2 < 0 \quad \text{មិនយក}$$

+ តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	0^+	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+

. ចំពោះ $x \in (0, 1) \Rightarrow f'(x) < 0$

. ចំពោះ $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$

. ចំពោះ $x = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$

គេបាន f មានអប្បបរមាត្រង់ $x = 1$ និង $y = f(1) = 2$

+ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0^+	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

4. a. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d

តាមរូបមន្ត $d: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

ដោយ បន្ទាត់ d ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ $x_0 = 2$ នាំឱ្យ

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = 4 + 4 - 1 - 4\ln 2 = 7 - 4\ln 2$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 4 + 2 - \frac{4}{2} = 4$$

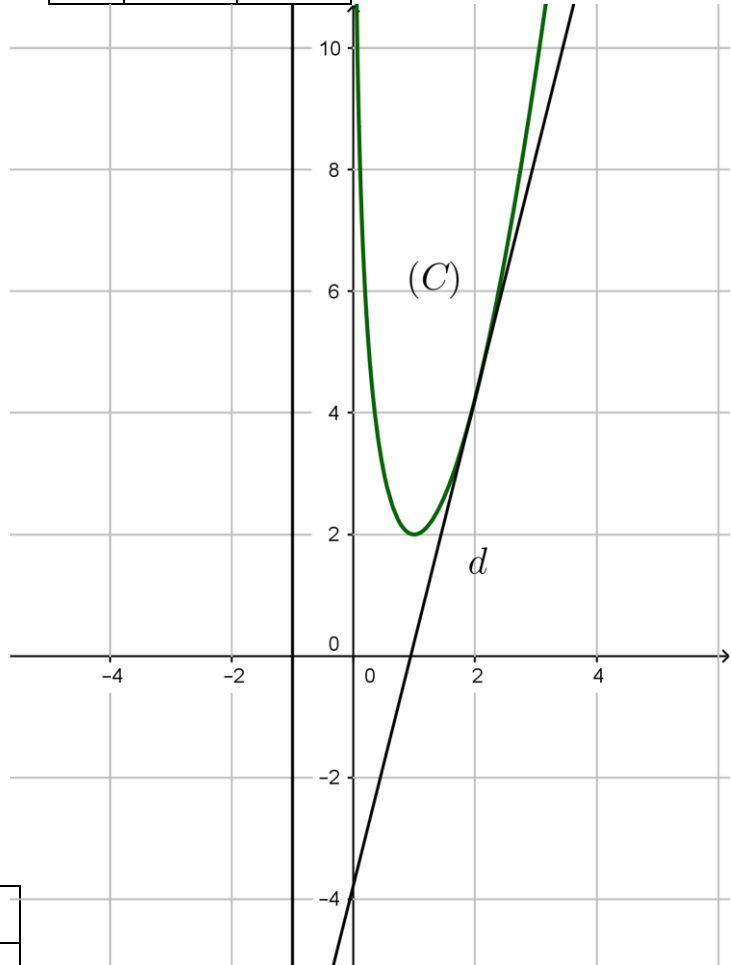
$$\begin{aligned} \text{គេបាន } d: y &= 4(x - 2) + 7 - 4\ln 2 \\ &= 4x - 8 + 7 - 4\ln 2 \\ &= 4x - 1 - 4\ln 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $d: y = 4x - 1 - 4\ln 2$

b. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d

បន្ទាត់ $d: y = 4x - 1 - 4\ln 2$

x	0	1
y	-3.8	0.2



វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងបណ្ឌិតប្រភេទសិក្សាទូទៅ

សម័យប្រឡង:

វិញ្ញាបនបត្រ: គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រ)

មណ្ឌលប្រឡង:

រយៈពេល: ១៥០ នាទី

លេខបន្ត: លេខតុ:

ពិន្ទុសរុប: ១២៥ ពិន្ទុ

ឈ្មោះបេក្ខជន:

ប្រធានវិញ្ញាបនបត្រ

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:

- I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត: ក. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{3x^2 - 4x - 4}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6+x}}{x+3}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{-5x^2}$
- II. (១០ពិន្ទុ) នៅក្នុងចំណោមមួយស្របក្រហម៣ និងឃ្លីខៀវ៥។ គេចាប់យកឃ្លីចំនួន៣ ដោយចៃដន្យក្នុងពេលតែមួយ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍:
- A. “ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងបី”។ B. “ចាប់បានឃ្លីសមួយ និងខៀវពីរ”។ C. “ចាប់បានឃ្លីបីមានពណ៌ខុសគ្នា”។
- III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ និង $z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ ។
- a. សរសេរ z_1, z_2 និងផលគុណ $z_1 z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ b. សរសេរផលគុណ $z_1 z_2$ ជាទម្រង់ពិជគណិត ។
- c. ទាញរកម៉ូឌុល និងអាក្យុយម៉ង់នៃ z_1^4 ។
- IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល: $I = \int_0^1 (5x^4 - 4x + e^x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$, $K = \int_{-1}^0 \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 2} dx$ ។
- ដើម្បីគណនា K ត្រូវបង្ហាញថា $\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 2} = x - \frac{x}{x^2 - 2}$ ។
- V. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): -y'' - 5y' + 6y = 6x + 1$ ។
- ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E): -y'' - 5y' + 6y = 0$ ។ កំណត់ចម្លើយ f នៃ (E) ដែល $f(0) = -1$ និង $f'(1) = 6e^{-6}$ ។
- ខ. បង្ហាញថាបើ g ជាចម្លើយមួយនៃ (F) នោះ $g - f$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (F) ។
- VI. (២៥ពិន្ទុ) 1. គេមានសមីការ $25x^2 + 9y^2 = 225$ ។ ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប៊ីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូល និងកំណុំទាំងពីរ។ ខ. សង់អេលីបនេះ។
2. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ នៃលំហ គេមានបីចំណុច $A(2, -1, 4), B(1, 2, 3)$ និង $C(3, 1, -2)$ ។
- ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (3, 2, 1)$ ។
- ខ. បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B ។ គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{BA} \times \vec{BC}$ ។
- គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ កំណត់សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច A, B, C ។
- VII. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $f(x) = -x - \frac{4 \ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានឯកតា $2cm$ ។
1. a. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។
- b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។
2. a. គណនា $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ដោយដឹងថា $x^2 + 4 - 4 \ln x > 0$ ចំពោះ $x > 0$ ។
- b. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
3. a. បន្ទាត់ d_2 ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ d_1 ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច A ។
- b. រកសមីការបន្ទាត់ d_2 ។
4. សង់បន្ទាត់ d_1, d_2 និងក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។ (យក $e = 2.7, \frac{4}{e} = 1.5$)

អត្រាកំណត់សម្គាល់សំណួរ ២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
រៀបរៀងឱ្យសិស្សប្រើប្រាស់សម្រាប់សិក្សាស្រាវជ្រាវ

I. គណនាលីមីត៖

$$\begin{aligned} \text{ក. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{3x^2 - 4x - 4} & \text{ រង } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x-2) - 4(x-2)}{(x-2)(3x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2-4)}{(x-2)(3x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{3x-2} = \frac{2^2-4}{3 \cdot 2-2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{3x^2 - 4x - 4} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ខ. } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6-x}}{x+3} & \text{ រង } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{6-x})(\sqrt{3} + \sqrt{6-x})}{(x+3)(\sqrt{3} + \sqrt{6-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3 - (6+x)}{(x+3)(\sqrt{3} + \sqrt{6-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-(x+3)}{(x+3)(\sqrt{3} + \sqrt{6-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{(\sqrt{3} + \sqrt{6-x})} = \frac{-1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6-x}}{x+3} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ ។}$$

$$\begin{aligned} \text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{-5x^2} & \text{ រង } \frac{0}{0} \\ &= -\frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} \\ &= -\frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \\ &= -\frac{2}{5} \cdot 1 = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{-5x^2} = -\frac{2}{5} \text{ ។}$$

II. រកប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

$$\begin{aligned} \text{ចំនួនករណីអាចករណី } n(s) &= C(9,3) \\ &= \frac{9!}{(9-3)!3!} = 84 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

A: ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងបី

$$\begin{aligned} \text{ចំនួនករណីស្របករណី } n(A) &= C(5,3) \\ &= \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(A) = \frac{5}{42}$$

B: ចាប់បានឃ្លីសមួយ និងខៀវពីរ

$$\begin{aligned} \text{ចំនួនករណីស្របករណី } n(B) &= C(1,1) \times C(5,2) \\ &= 1 \times \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

$$\text{ដូចនេះ } P(B) = \frac{5}{42}$$

C: ចាប់បានឃ្លីទាំងបីមានពណ៌ខុសគ្នា

$$\begin{aligned} \text{ចំនួនករណីស្របករណី} \\ n(C) &= C(1,1) \times C(3,1) \times C(5,1) \\ &= 1 \times 3 \times 5 = 15 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15}{84} = \frac{5}{28}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{-5x^2} = -\frac{2}{5} \text{ ។}$$

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$$\text{និង } Z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

a. សរសេរ Z_1, Z_2 និងផលគុណ $Z_1 Z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= 2 \times 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

b. សរសេរផលគុណ $Z_1 Z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } Z_2 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } Z_1 Z_2 &= (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{3} - i) \\ &= \sqrt{6} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} - i^2 \sqrt{2} \\ &= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

c. ទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់ Z_1^4

$$\begin{aligned} Z_1^4 &= \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^4 \\ &= 2^4 \left(\cos 4 \frac{\pi}{4} + i \sin 4 \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 16 (\cos \pi + i \sin \pi) \end{aligned}$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុលនៃ Z_1^4 គឺ $Z_1^4 = 16$ និងអាកុយម៉ង់
នៃ Z_1^4 គឺ $\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (5x^2 - 4x + e^x) dx \\ &= \left[5 \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + e^x \right]_0^1 = \left[x^3 - 2x^2 + e^x \right]_0^1 \\ &= (1^3 - 2 \cdot 1^2 + e) - (0^3 - 2 \cdot 0^2 + e) = e - 2 \\ \text{ដូចនេះ } I &= e - 2 \text{ ។} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (2x)' \cos 2x dx = \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2} \\ \text{ដូចនេះ } J &= \frac{1}{2} \text{ ។} \end{aligned}$$

$$K = \int_{-1}^0 \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 2} dx$$

$$\begin{aligned} \text{បង្ហាញថា } \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 2} &= x - \frac{x}{x^2 - 2} \\ \text{យើងមាន } \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 2} &= \frac{x^3 - 2x - x}{x^2 - 2} \\ &= \frac{x(x^2 - 2) - x}{x^2 - 2} \\ &= x - \frac{x}{x^2 - 2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 2} = x - \frac{x}{x^2 - 2}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } K &= \int_{-1}^0 \left(x - \frac{x}{x^2 - 2} \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[x - \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 2)'}{x^2 - 2} \right] dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2| \right]_{-1}^0 \\ &= \left(0 - \frac{1}{2} \ln |-2| \right) - \left[\frac{(-1)^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |(-1)^2 - 2| \right] \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 1 = -\frac{1}{2} (1 + \ln 2) \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } k = -\frac{1}{2} (1 + \ln 2)$$

$$V. \text{ គេមាន } (F) : -y'' - 5y' + 6y = 6x + 1$$

ក. ដោះស្រាយសមីការ

$$\text{សមីការសម្គាល់ } -\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\text{មានឫស } \lambda_1 = 1 ; \lambda_2 = -6$$

$$\text{សមីការមានចម្លើយ } y = Ae^{\lambda_1} + Be^{\lambda_2}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយទូទៅ } y = Ae^x + Be^{-6x},$$

$$A, B \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

$$ខ. \text{ កំណត់ចម្លើយ } f \text{ នៃ } (E) \text{ ដែល } f(0) = -1, f'(1) = 6e^{-6}$$

$$\text{យើងមាន } y = f(x) = Ae^x + Be^{-6x}$$

$$\text{នាំឲ្យ } f'(x) = Ae^x - 6Be^{-6x}$$

$$\text{តែ } \begin{cases} f(0) = -1 \\ f'(1) = 6e^{-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ Ae - 6Be^{-6} = 6e^{-6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ A - 6Be^{-x} = 6e^{-7} \end{cases}$$

$$\text{យក } (1) - (2) : (1 + 6e^{-x})B = -(1 + 6e^{-7}) \Rightarrow B = -1$$

$$\text{តាម } (1) \quad A = -1 - B = -1 - (-1) = 0$$

$$\text{ដូចនេះ ចម្លើយ } f \text{ នៃ } (E) \text{ គឺ } f(x) = -e^{-6x} \text{ ។}$$

គ. បង្ហាញថាបើ g ជាចម្លើយមួយនៃ (F) នោះ $g - f$

ជាចម្លើយមួយនៃ (F)

▪ បើ g ជាចម្លើយមួយនៃ (F)

$$\text{នោះ } -g'' - 5g' + 6g = 6x + 1, \quad (1)$$

▪ បើ f ជាចម្លើយមួយនៃ (E)

$$\text{នោះ } -f'' - 5f' + 6f = 0, \quad (2)$$

យក $(1) - (2)$ យើងបាន

$$-(g'' - f'') - 5(g' - f') + 6(g - f) = 6x + 1$$

$$\Leftrightarrow -(g'' - f'') - 5(g' - f') + 6(g - f) = 6x + 1$$

នោះ $g - f$ ជាចម្លើយមួយនៃ (F)

ដូចនេះ បើ g ជាចម្លើយមួយនៃ (F) នោះ $g - f$ ជាចម្លើយ
មួយនៃ (F) ។

$$VI.1. \text{ ក. បង្ហាញថាសមីការ } 25x^2 + 9y^2 = 225 \text{ ជាសមីការ}$$

អេលីប

$$\text{យើងមាន } 25x^2 + 9y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{25x^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = 1$$

$$\text{ឬ } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\text{សមីការរាង } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ ជាសមីការអេលីបដែលមាន}$$

អ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេនិងមានផ្ចិត $(0,0)$

- រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូល និង កំណែទាំងពីរ

យើងមាន $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

នោះ $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

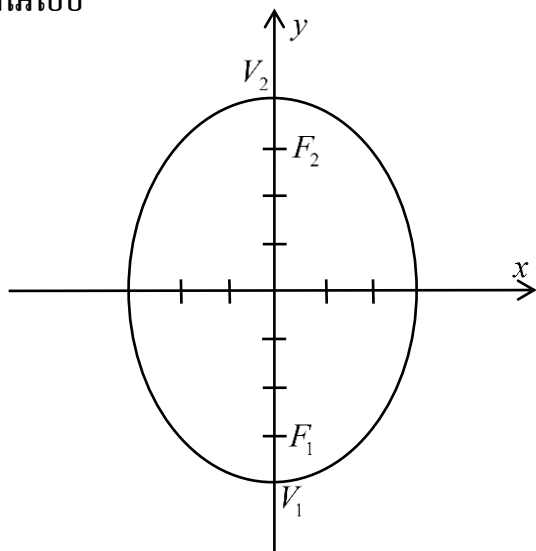
ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 2 \times 5 = 10$ ឯកតាប្រវែង

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2 \times 3 = 6$ ឯកតាប្រវែង

កូអរដោនេនៃកំពូល $\begin{cases} V_1(0, -a) = V_1(0, -5) \\ V_2(0, a) = V_2(0, 5) \end{cases}$

កូអរដោនេកំណុំ $\begin{cases} F_1(0, -c) = F_1(0, -4) \\ F_2(0, c) = F_2(0, 4) \end{cases}$

ខ. សង់អេលីប



2. គេមាន $A(2, -1, 4)$, $B(1, 2, 3)$ និង $C(3, 1, -2)$

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L)

បន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច $A(2, -1, 4)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រ ប្រាប់ទិស $\vec{u} = (3, 2, 1)$

គេបាន $(L) : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $(L) : x = 2 + 3t$, $y = -1 + 2t$, $z = 4 + t$, $t \in \mathbb{R}$ ។

ខ. បង្ហាញថាជាត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ B

យើងមាន $\overrightarrow{BA} = (2 - 1, -1 - 2, 4 - 3) = (1, -3, 1)$

$\overrightarrow{BC} = (3 - 1, 1 - 2, -2 - 3) = (2, -1, -5)$

គេបាន $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (1)(2) + (-3)(-1) + (1)(-5)$

$= 2 + 3 - 5 = 0$

ដោយ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ នោះ $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B ។

- គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$

យើងបាន $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$
 $= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$
 $= 16\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = 16\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$ ។

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{16^2 + 7^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{256 + 49 + 25}$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{330}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{330}$ ឯកតាផ្ទៃ។

- កំណត់សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច A, B, C យក $\vec{n} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = 16\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច A, B, C គេបានសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $B(1, 2, 3)$ គឺ

$(ABC) : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$16(x - 1) + 7(y - 2) + 5(z - 3) = 0$

$16x - 16 + 7y - 14 + 5z - 15 = 0$

$16x + 7y + 5z - 45 = 0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (ABC) គឺ $16x + 7y + 5z - 45 = 0$ ។

VII. $C : f(x) = -x - \frac{4 \ln x}{x}$ កំណត់លើ $x > 0$

1. a. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x - \frac{4 \ln x}{x} \right) = +\infty$

ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \ln x}{x} = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x - \frac{4 \ln x}{x} \right) = -\infty$

ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} = 0$

- បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1 : y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(-x - \frac{4 \ln x}{x} \right) - (-x) \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4 \ln x}{x} \right) = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_1 : y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1

យក $C-d_1: f(x)-y=-\frac{4\ln x}{x}$

ដោយ $x>0$ នោះ $f(x)-y$ យកសញ្ញាតាម $-4\ln x$

- បើ $-4\ln x=0 \Rightarrow x=1$
- បើ $-4\ln x>0 \Rightarrow x>1$
- បើ $-4\ln x<0 \Rightarrow x<1$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$		+	-

- ចំពោះ $x \in (0,1)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ d_1
- ចំពោះ $x \in (1,+\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ d_1
- ចំពោះ $x=1$ នោះក្រាប C កាត់បន្ទាត់ d_1 ត្រង់ $(1,-1)$

2. a. គណនា $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=-x-\frac{4\ln x}{x}$

នាំឱ្យ $f'(x)=-1-4\frac{(\ln x)'x-(x)'\ln x}{x^2}$

$$=-1-4\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2}$$

$$=-1-4\frac{x^2+4-4\ln x}{x^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=-\frac{x^2+4-4\ln x}{x^2}$ ។

- សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

ចំពោះ $x>0, x^2>0, x^2+4-4\ln x>0$

យើងបាន $f'(x)=-\frac{x^2+4-4\ln x}{x^2}<0, \forall x>0$

ដូចនេះ $f'(x)<0, \forall x>0$ ។

b. សង់តារាងអថេរភាព

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3. a. រកកូអរដោនេចំណុច A

តាង $A(x_0, y_0)$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុច A

បន្ទាត់ d_2 ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ហើយស្របនឹង

បន្ទាត់ $d_1: y=-x$ នោះ

$$f'(x_0)=-1 \Leftrightarrow -\frac{x_0^2+4-4\ln x_0}{x_0}=-1$$

$$\Leftrightarrow x_0^2+4-4\ln x_0=x_0^2 \Leftrightarrow 4\ln x_0=4 \Rightarrow x_0=e$$

នាំឱ្យ $y_0=f(e)=-e-\frac{4\ln e}{e}=-e-\frac{4}{e}$

ដូចនេះ $A\left(e, -e-\frac{4}{e}\right)$ ។

b. កំណត់សមីការបន្ទាត់ d_2

$$\text{សមីការបន្ទាត់ } d_2: y=f(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$=-1-(x-e)-e-\frac{4}{e}$$

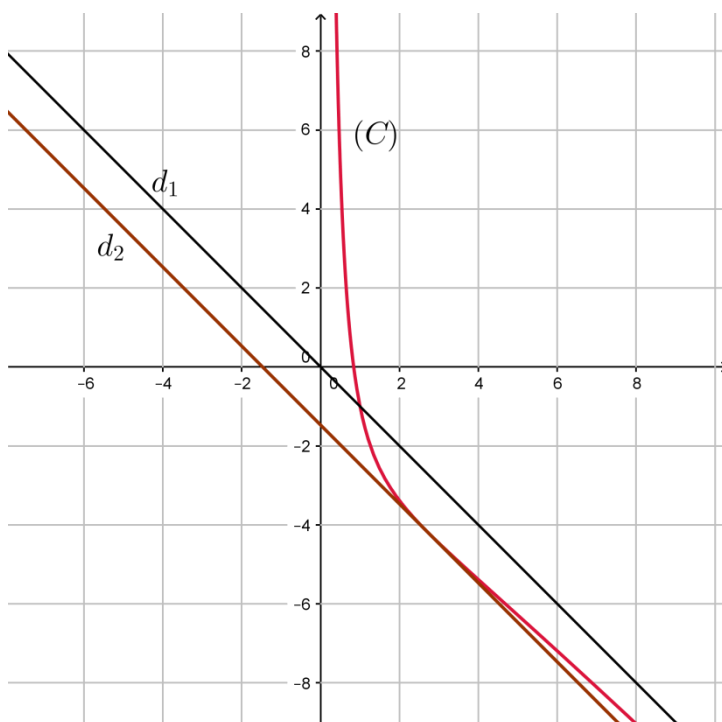
$$=-x-\frac{4}{e}$$

ដូចនេះ $d_2: y=-x-\frac{4}{e}$ ។

4. សង់បន្ទាត់ d_1, d_2 និងក្រាប C នៅក្នុងប្លង់តែមួយ
តារាងតម្លៃលេខ

x	0	1
$d_1: y=-x$	0	-1

x	0	$-\frac{4}{e}$
$d_2: y=-x-\frac{4}{e}$	$-\frac{4}{e}$	0



နိဒါန်း ၁

မဏ္ဍလပြည့်စုံ.....

លេខបន្តប្រ. លេខតុ.

ឈ្មោះបេក្ខជន.....

ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាសា

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$$

A. "ចាប់បានបិទខ្សែវិទ្យុទាំងបីដើម"។ B. "ចាប់បានបិទក្រហមមួយដើម និងបិទខ្សែវិទ្យុពីរដើម"។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1-i$ និង $z_2=\sqrt{3}+i$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល: $I = \int_{-1}^1 (3-4x-3x^2)dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x - 1)dx$ ។ មានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

V. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (F): $y'' - 3y' + 2y = 2x$ ។

ក.ដោះស្រាយសមីការ (E): $y''-3y'+2y=0$ ។ កំណត់ចម្លើយនៃ (E) ដែល $y(0)=0$ និង $y'(0)=-e$ ។

ខ.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b$ ជាចម្លើយនៃ (F) ។

VI. (២៥ពិន្ទុ) ១. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ នៃលំហ គេមានប្លង់ចំណុច $A(0, 2, 2), B(1, 1, 2)$

$$C(3,0,0) \text{ និង } D(2,1,0) \text{ ។}$$

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច D ហើយស្របនឹងរ៉ឺឌ័រ $\overline{AB}$ ។

២. គេមានសមីការ $9x^2 - 16y^2 = 144$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែរបូល។ រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែរបូល។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីររបស់អ៊ីពែរបូល និងសង់អ៊ីពែរបូលនេះ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = e^x - x - 1$ មានក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

1. a. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = -x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $-\infty$ ។

c. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។

2. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3. a. កេតុអរដោយនៃចំណុចប៉ះ P រវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ d_3 ដោយបន្ទាត់ d_3 ស្របនឹងបន្ទាត់ $d_2: y = x$ ។

b. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ។

4. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1, d_2, d_3 នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។ (យក $e=2.7, \ln 2=0.7$)

ប្រភេទពិធីសារសាទី៣ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
រៀបចំប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាធុនកម្ពុជា

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត:

$$\begin{aligned} \text{ក. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{2x^2 + 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 2)}{(x+1)(2x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 2}{2x + 1} \\ &= \frac{1 + 1 + 2}{-2 + 1} \\ &= -4 \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{2x^2 + 3x + 1} = -4$ ។

$$\begin{aligned} \text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{1+x}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{3} + \sqrt{1+x})}{(\sqrt{3} - \sqrt{1+x})(\sqrt{3} + \sqrt{1+x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{3} + \sqrt{1+x})}{3 - (1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{3} + \sqrt{1+x})}{-(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[-(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{3} + \sqrt{1+x}) \right] \\ &= -12 \times 2\sqrt{3} = -24\sqrt{3} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{1+x}} = -24\sqrt{3}$ ។

$$\begin{aligned} \text{គ. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}$

II. រកចំនួនករណីអាច

តាង S ជាព្រឹត្តិការណ៍អាច

ដោយ ក្នុងប្រអប់មានបីចំនួន ១០ ដើម ហើយគេចាប់យកបីចំនួន ៣ ដើមចេញពីប្រអប់ក្នុងពេលតែមួយ

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } n(S) &= C(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!3!} \\ &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A. “ចាប់បានបីចំនួនទាំងបីដើម”

ដោយ បីចំនួនទាំងអស់មានចំនួន ៦ ដើម

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } n(A) &= C(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6!}{3!3!} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} = 2 \times 5 \times 2 = 20 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{នាំឲ្យ } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{1}{6}$ ។

B. “ចាប់បានបីចំនួនក្រហមមួយដើម និងបីចំនួនពណ៌ដើម”

ដោយ បីចំនួនទាំងអស់មានចំនួន ៦ ដើមនិង បីចំនួនក្រហមមានចំនួន ៤ ដើម

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } n(B) &= C(4, 1) \times C(6, 2) \\ &= \frac{4!}{(4-1)!1!} \times \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{4 \times 3!}{3!} \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{4 \times 2 \times 1} \\ &= 4 \times 3 \times 5 = 60 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{នាំឲ្យ } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{1}{2}$ ។

C. “ចាប់បានបីចំនួនតែមួយដើមគត់”

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } n(C) &= C(6, 1) \times C(4, 2) \\ &= \frac{6!}{(6-1)!1!} \times \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{6 \times 5!}{5!} \times \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 2 \times 1} \\ &= 6 \times 2 \times 3 = 36 \text{ ករណី} \end{aligned}$$

$$\text{នាំឲ្យ } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

ដូចនេះ: $P(C) = \frac{3}{10}$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 - i$ និង $z_2 = \sqrt{3} + i$

a. គណនា $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត

• គណនា $z_1 + z_2$

$$\text{យើងបាន } z_1 + z_2 = 1 - i + (\sqrt{3} + i) = 1 + \sqrt{3}$$

• គណនា $z_1 - z_2$

យើងបាន $z_1 - z_2 = 1 - i - (\sqrt{3} + i) = (1 - \sqrt{3}) - 2i$

- គណនា $\frac{z_1}{z_2}$

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1-i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} \\ &= \frac{\sqrt{3}-i-i\sqrt{3}+1}{3+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)-i(\sqrt{3}+1)}{4} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)}{4} - \frac{(\sqrt{3}+1)}{4}i\end{aligned}$$

ដូចនេះ $z_1 + z_2 = 1 + \sqrt{3}$, $z_1 - z_2 = (1 - \sqrt{3}) - 2i$ និង

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{4} - \frac{(\sqrt{3}+1)}{4}i$$

b. សរសេរ z_1, z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

- $z_1 = 1 - i$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$
- $z_2 = \sqrt{3} + i$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{12} \right) \right)$$

ដូចនេះ $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{12} \right) \right)$$

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនារង្វង់ក្រាល

$$I = \int_{-1}^1 (3 - 4x - 3x^2) dx$$

$$\begin{aligned}&= \left[3x - 4 \times \frac{x^2}{2} - 3 \times \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left[3x - 2x^2 - x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= (3 - 2 - 1) - (-3 - 2 + 1) = 4\end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = \int_{-1}^1 (3 - 4x - 3x^2) dx = 4$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \cos^2 x - 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}$$

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{1+2x}{x^2-5x+4}$

$$\text{បង្ហាញថា } f(x) = \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{យើងមាន } f(x) = \frac{1+2x}{x^2-5x+4} = \frac{3(x-1)-(x-4)}{(x-4)(x-1)}$$

$$= \frac{3(x-1)}{(x-4)(x-1)} - \frac{x-4}{(x-4)(x-1)} = \frac{3}{(x-4)} - \frac{1}{(x-1)} \quad \text{ពិត}$$

$$\begin{aligned}\text{ម្យ៉ាងទៀត } f(x) &= \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x-1} = \frac{3(x-1)-(x-4)}{(x-4)(x-1)} \\ &= \frac{3x-3-x+4}{x^2-x-4x+4} = \frac{1+2x}{x^2-5x+4} \quad \text{ពិត}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f(x) = \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x-1}$ ត្រូវបានបង្ហាញ។

$$\text{គណនា } K = \int_2^3 f(x) dx$$

$$\text{ដោយ } f(x) = \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{យើងបាន } K = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \left(\frac{3}{x-4} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{3(x-4)}{x-4} - \frac{(x-1)}{x-1} \right) dx$$

$$= [3 \ln |x-4| - \ln |x-1|]_2^3 = (3 \ln 1 - \ln 2) - (3 \ln 2 - \ln 1) = -4 \ln 2$$

ដូចនេះ $K = \int_2^3 f(x) dx = -4 \ln 2$

V. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(F): y'' - 3y' + 2y = 2x$$

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E): $y'' - 3y' + 2y = 0$

$$\text{សរសេរសមីការសម្គាល់ } \lambda'' - 3\lambda' + 2 = 0$$

$$\text{មានឫស } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = Ae^x + Be^{2x}$

$$A, B \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

• កំណត់ចម្លើយនៃ (E) ដែល $y(0) = 0$ និង $y'(0) = -e$

$$\text{ដោយ } y = Ae^x + Be^{2x} \text{ នាំឲ្យ } y' = Ae^x + 2Be^{2x}$$

$$\text{យើងបាន } A + B = 0, \quad (1)$$

$$A + 2B = -e, \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} A + B = 0, & (1) \\ A + 2B = -e, & (2) \end{cases}$$

$$\text{យក (2) ដក (1)}$$

$$\text{នោះ: } B = -e \text{ នាំឲ្យ } A = e$$

$$\text{ដោយ } y = Ae^x + Be^{2x}$$

$$\text{ដូចនេះ ចម្លើយនៃ (E) គឺ } y = e^{x+1} - e^{2x+1} \text{ ។}$$

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b$ ជាចម្លើយនៃ (F)

បើ $f(x) = ax + b$ ជាចម្លើយនៃ (F) លុះត្រាតែ

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 2x$$

$$\text{យើងមាន } f(x) = ax + b$$

$$\text{នោះ: } f'(x) = a$$

$$f''(x) = 0$$

$$\text{យើងបាន } 0 - 3a + 2(ax + b) = 2x$$

$$2ax + (2b - 3a) = 2x$$

$$\text{សមភាពពីរស្មើគ្នាកាលណា } \begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } a = 1, \quad b = \frac{3}{2}$$

VI. (២៥ពិន្ទុ) ១. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ នៃលំហ គេមានបួនចំណុច $A(0, 2, 2)$,

$B(1, 1, 2)$ $C(3, 0, 0)$ និង $D(2, 1, 0)$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

ដោយ $A(0, 2, 2)$, $B(1, 1, 2)$ $C(3, 0, 0)$ និង $D(2, 1, 0)$

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 0, 1 - 2, 2 - 2) = (1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{DC} = (3 - 2, 0 - 1, 0 - 0) = (1, -1, 0)$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ នោះ: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| \end{cases}$$

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC} = (3 - 0, 0 - 2, 0 - 2) = (3, -2, -2)$$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } S_{ABCD} &= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3 \text{ ឯកតាផ្ទៃ។} \end{aligned}$$

គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាម

ចំណុច D ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$

$$\text{តាម } \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

ដោយបន្ទាត់តាម D នោះ: $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 0$ ហើយ

ស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ នោះ: $a = 1, b = -1, c = 0$

$$\text{ដូចនេះ: } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

២. គេមានសមីការ $9x^2 - 16y^2 = 144$

បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល

$$\text{យើងមាន } 9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$\text{ឬ } \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \text{ ជាសមីការដែលមានអ័ក្សទទឹងដេក និងមាន}$$

ផ្ចិតនៅគល់អ័ក្ស

ដូចនេះ សមីការ $9x^2 - 16y^2 = 144$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល។

រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល

យើងមានសមីការស្តង់ដារ $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

យើងបាន $h=0, k=0, a=4, b=3 \Rightarrow c=5$

- កំពូល $\begin{cases} V_1(h-a, k) = V_1(-4, 0) \\ V_2(h+a, k) = V_2(4, 0) \end{cases}$

- កំណុំ $\begin{cases} F_1(h-c, k) = F_1(-5, 0) \\ F_2(h+c, k) = F_2(5, 0) \end{cases}$

រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីររបស់អ៊ីពែបូល

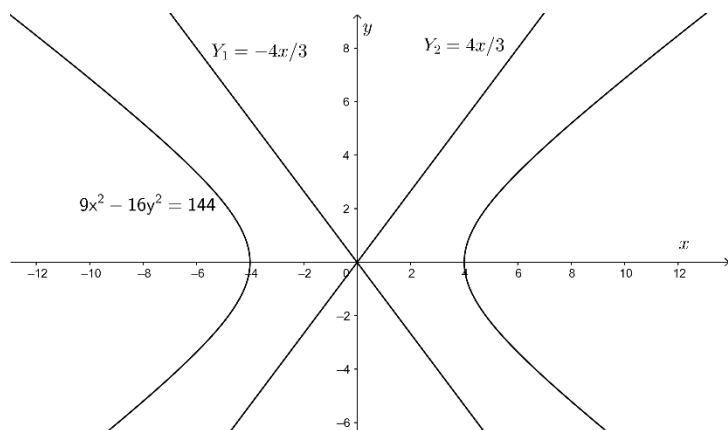
$$Y_1 = k - \frac{a}{b}(x-h) = 0 - \frac{4}{3}(x-0) = -\frac{4}{3}x$$

$$Y_2 = k + \frac{a}{b}(x-h) = 0 + \frac{4}{3}(x-0) = \frac{4}{3}x$$

ដូចនេះ $Y_1 = k - \frac{a}{b}(x-h) = 0 - \frac{4}{3}(x-0) = -\frac{4}{3}x$

$$Y_2 = k + \frac{a}{b}(x-h) = 0 + \frac{4}{3}(x-0) = \frac{4}{3}x$$

សង់អ៊ីពែបូល



VII. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$$f(x) = e^x - x - 1 \text{ មានក្រាប } C \text{ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

1. a. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

យើងបាន $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$$

b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y = -x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $-\infty$

យើងមាន $f(x) = e^x - x - 1$

នាំឲ្យ $f(x) - (-x - 1) = e^x$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

ដូចនេះ $y = -x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $-\infty$

c. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1

យើងមាន $C: f(x) = e^x - x - 1$

$$d_1: y = -x - 1$$

យើងបាន $C - d_1 = e^x - x - 1 - (-x - 1) = e^x > 0$ ជានិច្ច

គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

នាំឲ្យ $C > d_1$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅលើអាស៊ីមតូតទ្រេត d_1 ។

2. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x) = e^x - x - 1$ នាំឲ្យ $f'(x) = e^x - 1$

បើ $f'(x) > 0$ នោះ $e^x - 1 > 0$ នាំឲ្យ $x > 0$

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $e^x - 1 = 0$ នាំឲ្យ $x = 0$

បើ $f'(x) < 0$ នោះ $e^x - 1 < 0$ នាំឲ្យ $x < 0$

• សង់តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

ដោយ $f'(x) = 0$ មានឫសត្រង់ $x = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពីដកទៅ

បូក នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $f(0) = 0$

បើ $x \in (-\infty, 0)$ នោះ $f'(x) < 0$ នាំឲ្យ f កើន

បើ $x \in (0, +\infty)$ នោះ $f'(x) > 0$ នាំឲ្យ f ចុះ

• សង់តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3 a. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ P រវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ d_3

ដោយបន្ទាត់ d_3 ស្របនឹងបន្ទាត់ $d_2: y = x$

តាង x_0 និង y_0 ជាកូអរដោនេនៃចំណុច P

$$y = e^x - x - 1 \text{ នាំឲ្យ } y' = e^x - 1$$

ដោយ ក្រាប C ប៉ះនឹងបន្ទាត់ d_3 ត្រង់ចំណុច P

នោះ $y'_0 = e^{x_0} - 1$ តែបន្ទាត់ d_3 ស្របនឹងបន្ទាត់ d_2

នោះ $y'_0 = 1$ នាំឲ្យ $e^{x_0} - 1 = 1$ នាំឲ្យ $x_0 = \ln 2$

យើងបាន $y_0 = e^{\ln 2} - \ln 2 - 1 = 1 - \ln 2$

ដូចនេះ $P(\ln 2, 1 - \ln 2)$

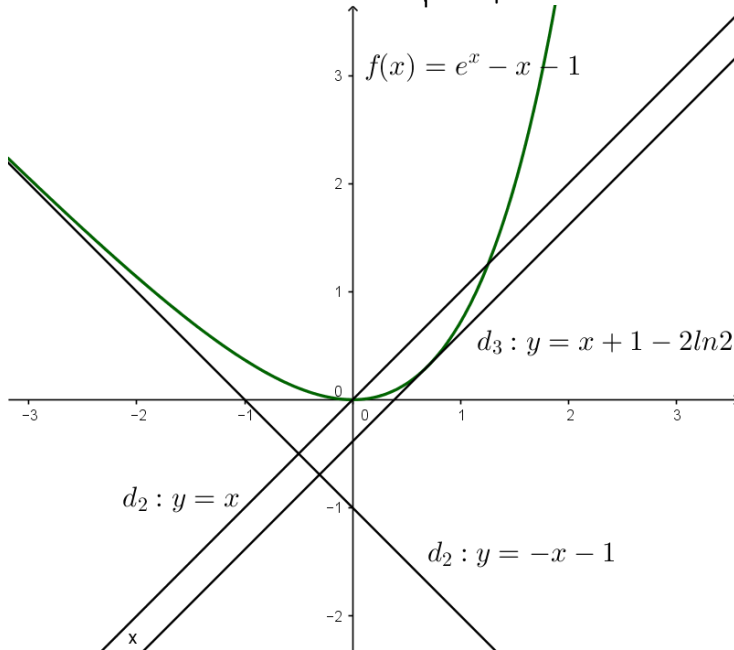
c. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_3

តាមសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_3 : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

យើងបាន $d_3 : y = x - \ln 2 + 1 - \ln 2 = x + 1 - 2\ln 2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_3 : y = x + 1 - 2\ln 2$ ។

4. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ



နိဒါန်း.....

မဏ္ဍာလပြည့်စုံစာပေအသင်း.....

លេខបន្តបន្ទាប់.....លេខតុ.....

ឈ្មោះបេក្ខជន

ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

II. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1+i$ និង $z_2 = -1+i$ ។ a. គណនាកន្សោម $A = \frac{z_1 - 1}{z_2}$ ។

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^3 [(2x+1)(x+3)]dx$ និង $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\cos^2 x)dx$ ។ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$

IV. (១០ពិន្ទុ) នៅក្នុងថង់មួយមានឃ្លី ខៀវ ៤ ឃ្លីក្រហម៣ និងឃ្លីស ២។ គេចាប់យកឃ្លីចំនួន ៣ ចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍:

V. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'' - 6y' + 8y = 8x + 10$ ។

ខ.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = ax + b$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

២. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ នៃលំហ គេមានចំណុច $A(1, 2, 1), B(2, 0, 3), C(-1, 2, 2)$ ។

ខ. គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ កំណត់សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច A, B, C ។

1. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ g ។ គណនា $g(1)$ ។ 2. សង់តារាងអថេរភាពនៃ g រួចកំណត់សញ្ញានៃ g ។

1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

b. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1 ។

4. a. សរសេរសមីការបន្ទាត់ d , ដែលប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស 1 ។

រៀបរៀងដោយក្រុមការងារនិព្វិតស្ម័គ្រចិត្តក្រសួងរ៉ាប់រង យុវជន និងកីឡា

អត្រាកំណត់ត្រាសម្រាប់ឆ្នាំ ២០១៩ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
ស្រៀបប្រឡងសញ្ញាបត្របឋមសិក្សាទុតិយភូមិ

I. គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - x + 4}{1 - x^2}$ រក ០

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x-4)}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x-4}{1-x} = \frac{3(-1)-4}{1-(-1)} = -\frac{7}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - x + 4}{1 - x^2} = -\frac{7}{2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin x}{\sqrt{5} - \sqrt{5+x}}$ រក ០

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin x (\sqrt{5} + \sqrt{5+x})}{(\sqrt{5} + \sqrt{5+x})(\sqrt{5} - \sqrt{5+x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin x (\sqrt{5} + \sqrt{5+x})}{5 - 5 - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin x (\sqrt{5} + \sqrt{5+x})}{-x}$$

$$= -5(\sqrt{5} + \sqrt{5+0}) = -10\sqrt{5}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin x}{\sqrt{5} - \sqrt{5+x}} = -10\sqrt{5}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{-x^2}$ រក ០

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-x^2}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = -1$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{-x^2} = -1$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x + 1}$ រក ០

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} (1 - \cos x) = 2$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x + 1} = 2$

II. a. គណនាកន្សោម $A = \frac{z_1 - 1}{z_2}$

គេមាន $z_1 = 1 + i$ និង $z_2 = -1 + i$

គេបាន $A = \frac{1 + i - 1}{-1 + i}$

$$= \frac{i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$$

$$= \frac{-i - i^2}{(-1)^2 - i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

ដូចនេះ $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

b. សរសេរ $z_1, z_2, z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជា

ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

• $z_1 = 1 + i$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

• $z_2 = -1 + i$

$$= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

• $z_1 + z_2 = 1 + i - 1 + i$

$$= 0 + 2i$$

$$= 2(0 + i)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

• $z_1 - z_2 = 1 + i - (-1 + i)$

$$= 2 + 0i$$

$$= 2(1 + 0i) = 2(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$$

• $z_1 z_2 = \sqrt{2} \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) \right]$

$$= 2(\cos \pi + i \sin \pi)$$

• $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right]$

$$= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

c. ទាញរកតម្លៃនៃ $z = \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^{2018}$

$$\left(\frac{z_2}{z_1} \right)^{2018} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{2018}$$

$$= \cos \frac{2018\pi}{2} + i \sin \frac{2018\pi}{2}$$

$$= \cos 1009\pi + i \sin 1009\pi$$

$$= -1 + 0i$$

ដូចនេះ $z = -1 + 0i$

III. គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 (2x+1)(x+3)dx \\ &= \int_0^3 (2x^2 + 6x + x + 3)dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 3x \right]_0^3 \\ &= \frac{2}{3}(3)^3 + \frac{7}{2}(3)^2 + 3(3) - 0 \\ &= 18 + \frac{63}{2} + 9 = \frac{36 + 63 + 18}{2} = \frac{117}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = \frac{117}{2}$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\cos^2 x)dx \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx \\ &= -\left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $J = -\frac{1}{2}$

+ បង្ហាញថា $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{5}{x}$

គេមាន $f = \frac{-3x^2 - 5}{x(1+x^2)}$

$$\begin{aligned} \frac{-3x^2 - 5}{x(1+x^2)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \\ &= \frac{A + Ax^2 + Bx^2 + Cx}{x(1+x^2)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(1+x^2)} \end{aligned}$$

ផ្តើមមេគុណ

$$\begin{cases} A+B=-3 \\ C=0 \\ A=-5 \end{cases} \Rightarrow B=2$$

គេបាន $f(x) = -\frac{5}{x} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{5}{x}$ ពិត

ដូចនេះ $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{5}{x}$

គណនា $K = \int_1^e f(x)dx$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } K &= \int_0^e \left(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{5}{x} \right) dx \\ &= \int_1^e \left[\frac{(1+x^2)'}{1+x^2} - 5\frac{1}{x} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\ln|1+x^2| - 5\ln|x| \right]_1^e \\ &= \ln(1+e^2) - 5\ln e - (\ln 2 - 5\ln 1) \\ &= \ln(1+e^2) - 5 - \ln 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $K = \ln(1+e^2) - 5 - \ln 2$

IV. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A. « ចាប់បានឃ្លី ខៀវពីរ និង ឃ្លីក្រហមមួយ »

$$\begin{aligned} n(A) &= C(4,2) \times C(3,1) \\ &= \frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{2!1!} = 18 \end{aligned}$$

+ រកចំនួនករណីអាច

$$n(S) = C(9,3) = \frac{9!}{6!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$

ដូចនេះ $P(A) = \frac{3}{14}$

B. « ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងបី »

$$n(B) = C(4,3) = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$

ដូចនេះ $P(B) = \frac{1}{21}$

C. « ចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌ »

$$\begin{aligned} n(C) &= C(4,2) \times C(3,1) \times C(2,1) \\ &= 4 \times 3 \times 2 = 24 \end{aligned}$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

ដូចនេះ $P(C) = \frac{2}{7}$

V. ក. ដោះស្រាយសមីការ

$$(E_1): y'' - 6y' + 8y = 0$$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$$\Delta' = (-3)^2 - (1)(8) = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{3+1}{1} = 4, \lambda_2 = \frac{3-1}{1} = 2$$

គេបានចម្លើយទូទៅនៃ (E_1) គឺ $y = Ae^{2x} + Be^{4x}$, A, B ថេរ
+ កំណត់ចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E_1)

ដោយ $y(0) = -1$ និង $y'(0) = 4$

$$y = Ae^{2x} + Be^{4x}$$

$$y' = 2Ae^{2x} + 4Be^{4x}$$

$$y(0) = -1 \Leftrightarrow A + B = -1 \quad (1)$$

$$y'(0) = 4 \Leftrightarrow 2A + 4B = 4 \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$\begin{cases} A + B = -1 & (1) \\ 2A + 4B = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -1 & (1) \\ A + 2B = 2 & (2) \end{cases} -$$

$$\underline{-B = -3 \Rightarrow B = 3}$$

$$\text{ជំនួសក្នុង (1)} \Rightarrow A = -1 - 3 = -4$$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $(E_1): y = -4e^{2x} + 3e^{4x}$

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x) = ax + b$ ជា

ចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

$$g(x) = ax + b$$

$$g'(x) = a$$

$$g''(x) = 0$$

បើ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះគេបាន

$$g''(x) - 6g'(x) + 8g(x) = 8x + 10$$

$$0 - 6a + 8(ax + b) = 8x + 10$$

$$-6a + 8ax + 8b = 8x + 10$$

$$8ax - 6b + 8b = 8x + 10$$

ផ្តើមមេគុណ

$$\begin{cases} 8a = 8 \Rightarrow a = 1 \\ -6a + 8b = 10 \Rightarrow b = \frac{10 + 6}{8} = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ: $a = 1, b = 2, g(x) = x + 2$

VI. 1. បង្ហាញថានេះជាសមីការអេលីប

$$\left(\frac{2y-3x}{18}\right)\left(\frac{2y+3x}{2}\right) = 1$$

$$\frac{(2y)^2 - (3x)^2}{36} = 1$$

$$\frac{4y^2}{36} - \frac{9x^2}{36} = 1$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

នេះជាសមីការស្តង់ដារនៃអ៊ីពែបូលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សហើយ

$$\text{អ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សឈរតាមទម្រង់} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\text{គេបាន} \begin{cases} h = 0, k = 0 \\ a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \end{cases}$$

+ រកកូអរដោនេ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ

$$\bullet \text{ ផ្ចិត } I(h, k) \Rightarrow I(0, 0)$$

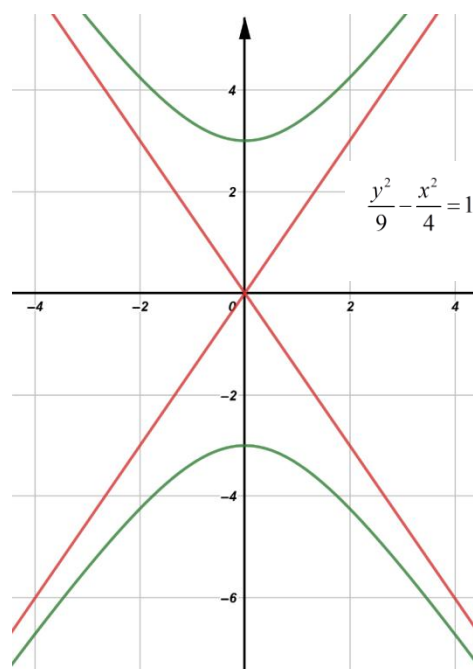
$$\bullet \text{ កំពូល } V(0, \pm a) \Rightarrow V(0, \pm 3)$$

$$\bullet \text{ កំណុំ } F(0, \pm c) \Rightarrow F(0, \pm \sqrt{13})$$

+ សមីការអាស៊ីមតូត

$$y = \pm \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2}x$$

+ សង់អ៊ីពែបូល



2. ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L)

$$\text{បន្ទាត់ } (L): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

ដោយបន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីចំណុច A និង B

យក $A(1, 2, 1)$ ជាចំណុចកាត់នោះ: $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 1$

និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB} = (2-1, 0-2, 3-1) = (1, -2, 2)$

នោះ: $a = 1, b = -2, c = 2$

គេបាន $(L): \begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(L): \begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

ខ. គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC

$\Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$\overrightarrow{BC} = (-3, 2, 1)$

$\Rightarrow BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 1)$

$\Rightarrow AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

ដូចនេះ $AB=3$ ឯកតាប្រវែង

$BC = \sqrt{14}$ ឯកតាប្រវែង

$AC = \sqrt{5}$ ឯកតាប្រវែង

+ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

គេមាន $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1)(-2) + (-2)(0) + (2)(1) = 0$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

គ. គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2+0)\vec{i} - (1+4)\vec{j} + (0-4)\vec{k} \\ = -2\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

ដោយ $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{45}$

ដូចនេះ $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ

+ កំណត់សមីការប្លង់កាត់តាមបី A, B, C

ប្លង់ $(ABC): a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

យក $A(1, 2, 1)$ ជាចំណុចកាត់នោះ $x_0=1, y_0=2, z_0=1$

ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$

នោះ $a=-2, b=-5, c=-4$

គេបាន $(ABC): -2(x-1) - 5(y-2) - 4(z-1) = 0$

$-2x + 2 - 5y + 10 - 4z + 4 = 0$

$-2x - 5y - 4z + 16 = 0$

ដូចនេះ ប្លង់ $(ABC): 2x + 5y + 4z - 16 = 0$

VII. A. 1. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ g

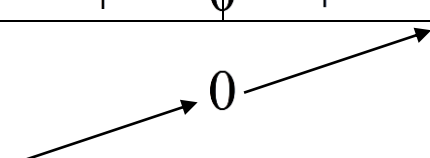
$g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$ កំណត់ចំពោះ $\forall x \in (0, +\infty)$

$g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} = \frac{3x^3 + 2}{x} > \forall x \in (0, +\infty)$

ដោយ $g'(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ នោះ g ជាអនុគមន៍កើន

គណនា $g(1) = 1^3 - 1 + 2\ln 1 = 0$

2. តារាងអថេរភាពនៃ g

x	0^+	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$			

+ ទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$

តាមតារាងអថេរភាពនៃ g គេបានសញ្ញានៃ g

• ចំពោះ $x \in (0, 1)$ នោះ $g(x) < 0$

• ចំពោះ $x \in (1, +\infty)$ នោះ $g(x) > 0$

• ចំពោះ $x = 1$ នោះ $g(x) = 0$

B. 1. សិក្សាលីមីតនៃ f ក្នុង 0^+ និង $+\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{\ln x}{x^2} \right) = +\infty$

ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{\ln x}{x^2} \right) = +\infty$

ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

+ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

ដូចនេះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ខាង $+\infty$

2. a. ស្រាយថាបន្ទាត់ $d_1: y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $+\infty$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_1: y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

b. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1

$$C: f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$d_1: y = x$$

$$C - d_1: f(x) - y_{d_1} = -\frac{\ln x}{x^2} \text{ ដោយ } x^2 > 0, \forall x \in (0, +\infty)$$

នោះ $f(x) - y_{d_1}$ យកសញ្ញាតាម $-\ln x$

$$\bullet \text{ បើ } -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\bullet \text{ បើ } -\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet \text{ បើ } -\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

តារាងសញ្ញា $f(x) - y_{d_1}$

x	0^+	1	$+\infty$
$f(x) - y_{d_1}$		0	
	+		-

តាមតារាងសញ្ញា $f(x) - y_{d_1}$ គេបាន ៖

• ចំពោះ $x \in (0, 1)$ នោះ C នៅលើ d_1

• ចំពោះ $x \in (1, +\infty)$ នោះ C នៅក្រោម d_1

• ចំពោះ $x = 1$ នោះ C កាត់ d_1 ត្រង់ $(1, 1)$

3. a. គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{(\ln x)' x^2 - (x^2)' \ln x}{x^4}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{x}(x^2) - 2x \ln x}{x^4}$$

$$= 1 - \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{x^3 - 1 + \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

$$\text{ដូចនេះ } f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

b. សិក្សាសញ្ញានៃ f

$$\text{ដោយ } x^3 > 0, \forall x \in (0, +\infty)$$

នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $g(x)$

• ចំពោះ $x \in (0, 1)$ នោះ $f'(x) < 0$

• ចំពោះ $x \in (1, +\infty)$ នោះ $f'(x) > 0$

• ចំពោះ $x = 1$ នោះ $f'(x) = 0$

គេបាន f មានអប្បបរមាត្រង់ $x = 1, y = f(1) = 1$

+ តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0^+	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

4. a. សរសេសមីការបន្ទាត់ d_2 ប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 1

$$d_2: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$$\text{ដោយ } x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(1) = 1$$

$$f'(x_0) = f'(1) = 0$$

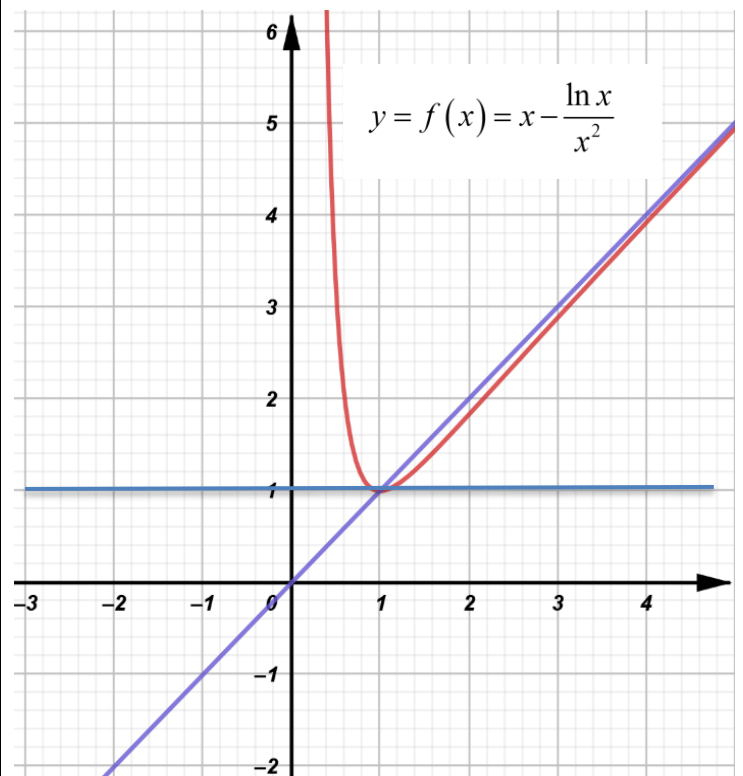
$$\text{គេបាន } d_2: y = 0(x - 1) + 1$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_2: y = 1$

b. សង់ក្រាប C បន្ទាត់ d_1 និង d_2

$$d_1: y = x \quad \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 2 \end{array}$$

$$d_2: y = 1$$



វិញ្ញាសាទី៥ ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្របឋមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖
មណ្ឌលប្រឡង៖
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ឋានៈលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sin 5x}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$; $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ និង $z_3 = 3(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})$ ។ ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រី

កោណមាត្រ ។ ខ. គណនា $z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$ ។ គ. គណនា $z_1 z_3$ ។ រួចទាញរក អាក្សយម៉ង់ និងម៉ូឌុល $z_1 z_3$ ។

III. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមានឃ្លីខៀវគ្រាប់ចុះលេខពី ១ ដល់ ៦ ឃ្លីក្រហម៥គ្រាប់ ចុះលេខពី ១ ដល់ ៥ និងឃ្លីសៀង៤គ្រាប់ ចុះលេខពី ១ ដល់ ៤។ គេចាប់ឃ្លីម្តង៣គ្រាប់ចេញពីក្នុងចង្កោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A: ចាប់បានឃ្លីជាលេខគូ ។ B: ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខុសៗគ្នា ។ C: ចាប់បានឃ្លីជាលេខសេសសន៍តែមួយគ្រាប់គត់ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^2 (3x-1)^2 dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin^2 x - 1) dx$ ។ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)}$ ចំពោះគ្រប់ x , ដែល $x \neq 0, x \neq -1$ ។ គណនា $K = \int_1^2 f(x) dx$ ។ ដើម្បីគណនាបានគេត្រូវសរសេរ

$\frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$ ដែល a, b, c ជាចំនួនពិតដែលត្រូវកំណត់។

V. (២៥ពិន្ទុ) ១. នៅក្នុងតម្រុយអត្តណាម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមានគេមានបីចំណុច $M(2,4,1), N(3,0,2), P(3,3,5)$ ។

ក. គណនាប្រវែង MN, MP និង NP ហើយបង្ហាញថា MNP ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ. សរសេរសមីការ ប្លង់ (P) កាត់តាម M ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP}$ ។

២. គេមានសមីការ $(5x+9y)^2 = 5(18xy+45)$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប៊ីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ កំណុំទាំងពីរនិងសង់អេលីប៊ីបនេះ។

VI. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការ $(E): y'' - 3y' + 2y = 0$ ។ ដោះស្រាយសមីការ (E) រួចរកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E)

បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើ១ត្រង់ $x=1$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) A : គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ៖ $g(x) = 1 - x + e^x$ ។

ចូរគូសតារាងអថេរភាពនៃ g ។ រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ ។ (មិនបាច់គណនាលីមីត)

B : គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអត្តណាមេ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

- គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ D ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូត D ។
- ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$ ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}$ ។ ទាញរកតារាងអថេរភាព f លើ $\mathbb{R}$ ។
- បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់ α លើចន្លោះ $-1 < \alpha < 0$ ។
- រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស ០ ។
- សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ D, T ក្នុងតម្រុយអត្តណាមេ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

គ្រឹះស្ថានសិក្សា និងសិក្សាសាស្ត្រ
គ្រឹះស្ថានសិក្សា និងសិក្សាសាស្ត្រ

I. គណនាលីមីត

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \text{ រក } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} \text{ រក } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1^2 = 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = 1}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sin 5x} \text{ រក } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9} - 3)(\sqrt{x+9} + 3)}{(\sin 5x)(\sqrt{x+9} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+9) - 9}{(\sin 5x)(\sqrt{x+9} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} \right) = 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sin 5x} = \frac{1}{30}}$$

II. ក. សរសេរ $z_1; z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$= 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ខ. គណនា } z_1 z_2; \frac{z_1}{z_2}$$

$$z_1 z_2 = (1 - i\sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \right) + i \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{(1 - i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{\sqrt{2}(1 - i - i\sqrt{3} - \sqrt{3})}{1^2 + 1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} [(1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3})]$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{គ. គណនា } z_1 z_3$$

$$\text{យើងមាន } z_3 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_1 z_3 = (1 - i\sqrt{3}) \left[3 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$= 3 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \right) = 3(-1 - i\sqrt{3})$$

$$= -3 - 3i\sqrt{3}$$

$$\text{ទាញរកអត្ថប្រយោជន៍ និងម៉ូឌុលនៃ } z_1 z_3$$

$$z_1 z_3 = -3 - 3i\sqrt{3} = 6 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 6 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\text{ដូចនេះ: ម៉ូឌុល } |z_1 z_3| = 6 \text{ និងអត្ថប្រយោជន៍}$$

$$\text{Arg}(z_1 z_3) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

III. ឃើញចុះលេខពី១ដល់៦ : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\text{ឃើញក្រហមចុះលេខពី១ដល់៥: } \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{ឃើញស្ករចុះលេខពី១ដល់៤: } \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(S) = C(15, 3) = \frac{15!}{12!3!} = 5 \times 7 \times 3 = 455$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. «ចាប់បានឃ្លីជាលេខគូ»

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(A) = C(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!3!} = 35 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{35}{455} = \frac{1}{13}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{1}{13}}$$

B. «ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅៗទាំង៣»

ចំនួនករណីស្រប

$$n(B) = C(6, 1) \times C(5, 1) \times C(4, 1) = 120$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{24}{91}}$$

C. « ចាប់បានឃ្លីលេខសេសតែមួយគត់ »

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(C) = C(8,1) \times C(7,2) = 7 \times 3 \times 8$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{7 \times 3 \times 8}{5 \times 7 \times 13} = \frac{24}{65}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(C) = \frac{24}{65}}$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} \bullet \quad I &= \int_0^2 (3x-1)^2 dx = \int_0^2 (9x^2 - 6x + 1) dx \\ &= \left[3x^3 - 3x^2 + x \right]_0^2 = 3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin^2 - 1) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) - 0 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad K = \int_1^2 f(x) dx$$

$$\text{ដោយ } f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$$

$$= \frac{ax(x+1) + b(x+1) + cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$= \frac{(a+c)x^2 + (a+b)x + b}{x^2(x+1)}$$

$$\text{ទាញបាន } \begin{cases} a+c=0 \\ a+b=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } K = \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2(x+1)} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \left[\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x+1| \right]_1^2$$

$$= \left(\ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 3 \right) - (\ln 1 - 1 - \ln 2) = \frac{1}{2} + 2\ln 2 - \ln 3$$

V. ២. ចំណុច $M(2,4,1)$, $N(3,0,2)$, $P(3,3,5)$

ក. គណនាប្រវែង MN , MP , NP

$$\overrightarrow{MN} = (3-2, 0-4, 2-1) = (1, -4, 1)$$

$$\Rightarrow MP = |\overrightarrow{MP}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{MP} = (3-2, 3-4, 5-1) = (1, -1, 4)$$

$$\Rightarrow MP = |\overrightarrow{MP}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{NP} = (3-3, 3-0, 5-2) = (0, 3, 3)$$

$$\Rightarrow NP = |\overrightarrow{NP}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{ដោយ } MN = MP = NP = 3\sqrt{2}$$

ដូចនេះ: MNP ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម M មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$$\vec{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP}$$

$$\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-16+1)\vec{i} - (4-1)\vec{j} + (-1+4)\vec{k} = -15\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

គេបានសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច M កំណត់ដោយ

$$(P): a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -15(x-2) - 3(y-4) + 3(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -15x + 30 - 3y + 12 + 3z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -15x - 3y + 3z + 39 = 0$$

២. គេមានសមីការ $(5x+9y)^2 = 5(18xy+45)$

បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប

$$(5x+9y)^2 = 5(18xy+45)$$

$$\Leftrightarrow (5x)^2 + 2(5x)(9y) + (9y)^2 = 90xy + 225$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 + 81y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{25x^2}{225} + \frac{81y^2}{225} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = 1$$

សមីការមានរាង $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ជាសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែល

មានអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានផ្ចិត $(0,0)$

➢ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំទាំងពីរ

$$\text{យើងមាន } a=3, b=\frac{5}{3}$$

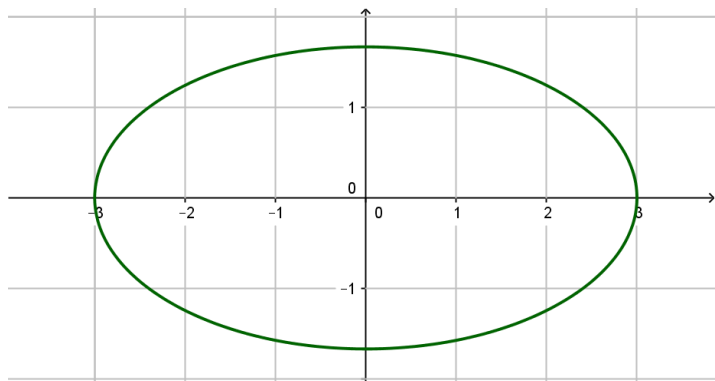
$$\text{និង } c^2 = a^2 - b^2 = 9 - \frac{25}{9} = \frac{56}{9} \Rightarrow c = \frac{2}{3}\sqrt{14}$$

• ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ ឯកតាប្រវែង

• ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 2 \times 3 = 6$ ឯកតាប្រវែង

- កូអរដោនេកំពូល $V(\pm a, 0) \Rightarrow V(\pm 3, 0)$
- កូអរដោនេកំណុំ $F(\pm c, 0) \Rightarrow F\left(\pm \frac{2}{3}\sqrt{14}, 0\right)$

សង់អេលីប



VI. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (E)$$

សមីការសម្គាល់ $r^2 - 3r + 2 = 0$ រាង $a + b + c = 0$

មានឫស $r_1 = 1, r_2 = 2$

សមីការមានចម្លើយ $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅ $y = Ae^x + Be^{2x}$

$(A, B \in \mathbb{R})$ ។

- រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E)

គេមាន $y = Ae^x + Be^{2x}$ នាំឱ្យ $y' = Ae^x + 2Be^{2x}$

ដោយដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើ 1 ត្រង់ $x = 1$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae + Be^2 = 1 & (1) \\ Ae + 2Be^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

យក (2) - (1) យើងបាន $B = -\frac{1}{e^2}$

តាម (2) យើងបាន $A = -2Be = -2e\left(-\frac{1}{e^2}\right) = \frac{2}{e}$

$$y'' = Ae^x + 4e^{2x}$$

$$y''(1) = \frac{2}{e} \cdot e + 4e^2 \left(-\frac{1}{e^2}\right) = 2 - 4 = -2 < 0 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ ចម្លើយ $y = 2e^{x-1} - e^{2(x-1)}$ ។

VII. A. គេមាន $g(x) = 1 - x + e^x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$

- គូសតារាងអថេរភាពនៃ g

គេមាន $g(x) = 1 - x + e^x$

នាំឱ្យ $g'(x) = -1 + e^x$

• បើ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

• បើ $g'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 + e^x < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Rightarrow x < 0$

• បើ $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 + e^x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$

ចំពោះ $x = 0$ នោះ $g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘ 2 ↗		

- ទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$

ចំពោះ $x \in \mathbb{R}$ អនុគមន៍ g មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 2 ត្រង់ $x = 0$

នោះ $g(x) > 0$

ដូចនេះ $g(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត។

B. អនុគមន៍ f ដែល $C: f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$

1. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 + \frac{x}{e^x} \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \frac{x}{e^x} \right) = +\infty \text{ ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

- បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D: y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

នោះបន្ទាត់ $D: y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

- សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និងអាស៊ីមតូតទ្រេត D

យក $C - D: f(x) - y_D = \frac{x}{e^x}$ មានសញ្ញាតាម x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y_D$	-	0	+

តាមតារាងសិក្សាសញ្ញា

• ចំពោះ $x \in (-\infty, 0)$ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ D

• ចំពោះ $x = 0$ ក្រាប C កាត់បន្ទាត់ D ត្រង់ $(0, 1)$

• ចំពោះ $x \in (0, +\infty)$ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ D

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

យើងមាន $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$

$$\text{នាំឲ្យ } f'(x) = 1 + \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{1-x}{e^x} = e^{-x}(1-x+e^x) \\ = e^{-x}g(x)$$

ដូចនេះ $f'(x) = e^{-x}g(x)$ គ្រប់ចំនួនពិត x

– ទាញរកតារាងអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$

យើងមាន $f'(x) = e^{-x}g(x)$

ដោយ $e^{-x} > 0, g(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

នាំឲ្យ $f'(x) = e^{-x}g(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$

3. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់ α លើចន្លោះ $-1 < \alpha < 0$

$$\text{យើងមាន } f(-1) = -1 + 1 + \frac{-1}{e^{-1}} = -e < 0$$

$$\text{និង } f(0) = 0 + 1 + \frac{0}{e^0} = 1 > 0$$

$$\text{នោះ } f(-1) \times f(0) = -e < 0$$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល មានចំនួនពិត α មួយយ៉ាងតិចក្នុង

ចន្លោះ $(-1, 0)$ ដែល $f(\alpha) = 0$

តែ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ នាំឲ្យ f កើនលើចន្លោះ $(-1, 0)$

ដូចនេះ សមីការ $f(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់ α លើចន្លោះ

$$-1 < \alpha < 0$$

4. រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់អាប៉ូស៊ីសស្ទើរ 0

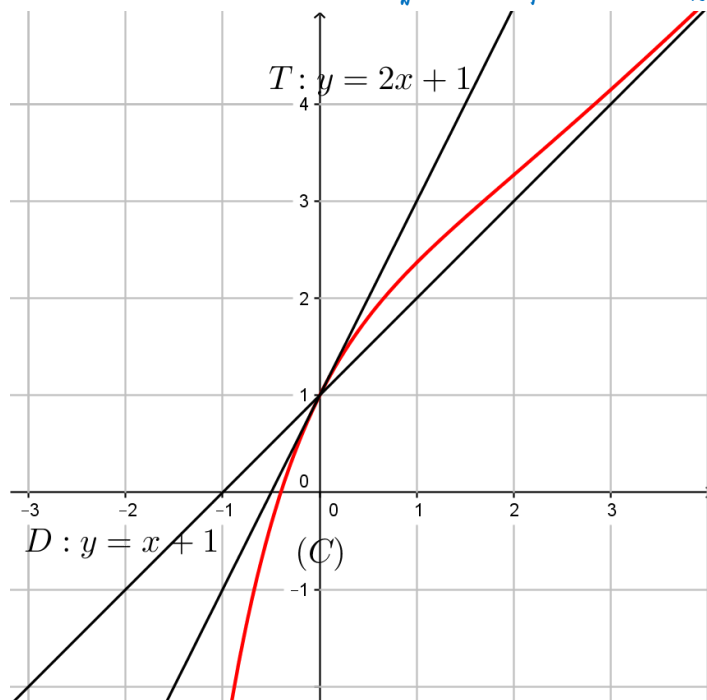
$$\text{សមីការបន្ទាត់ប៉ះ } T: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$$\text{ដោយ } x_0 = 0 \text{ នោះ } y_0 = 1 \text{ ហើយ } f'(x_0) = f'(0) = 2$$

$$\text{គេបាន } (T): y = 2(x - 0) + 1 = 2x + 1$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ } (T): y = 2x + 1$$

5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ T, D



វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងប្រជុំប្រឡងប្រកួតប្រជែងសិក្សាធុនស្រុក
វិញ្ញាបនបត្រ: គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល: ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុប: ១២៥ ពិន្ទុ
ប្រធានវិញ្ញាបនបត្រ

សម័យប្រឡង:
មណ្ឌលប្រឡង:
លេខបន្ទប់: លេខតុ:
ឈ្មោះបេក្ខជន:
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:

- I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត ៖ ក. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{1 - x^2}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{1+x}}$ គ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos x - \sqrt{3} \sin x}$
- II. (១៥ពិន្ទុ) គេមានសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$: $z^2 - 4z + 16 = 0$ ។
ក. បង្ហាញថា $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ ជាឫសរបស់សមីការ រួចទាញរកឫស z_2 នៃសមីការនេះ។
ខ. គណនា $z_1 z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
- III. (១៥ពិន្ទុ) ១. គណនាអាំងតេក្រាល ៖ $I = \int_0^1 (1 - 4x + 3x^2) dx$, $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x + \cot x)^2 dx$
២. គណនា $K = \int_0^2 \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$ ដើម្បីគណនា K គេត្រូវបង្ហាញថា $\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = x + 1 - \frac{x}{x^2 - 1}$ ។
- IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងស្បែងមួយមានបាល់ស ៣ គ្រាប់ ក្រហម ៥ គ្រាប់ និង ខៀវ ៤ គ្រាប់។ គេចាប់យកបាល់ម្តង ៣ គ្រាប់ ដោយចៃដន្យ។ ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម ៖
A: ចាប់បានបាល់ទាំង ៣ ជាពណ៌ក្រហម។ B: ចាប់បានបាល់ទាំង ៣ មានពណ៌ខុសៗគ្នា។
C: ចាប់បានបាល់ពណ៌សមួយយ៉ាងតិច។
- V. (១០ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): -2y'' + 3y = y'$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0) = e$, $y'(0) = 1$ ។
- VI. (២៥ពិន្ទុ) 1. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន គេមានចំណុច $A(4, -2, 0)$, $B(1, 2, 2)$, $C(2, -1, 0)$ និង $D(2, -2, -1)$ ។
ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}$ ។
ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច B ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (CD) ។
គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P) ។
2. អ៊ីពែបូលមួយមានកំពូល $V_1(3, 0)$ និង $V_2(-3, 0)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $P(5, 2)$ ។ រកសមីការស្តង់ដារ កូអរដោនេកំណុំ និងអាស៊ីមតូត។ សង់អ៊ីពែបូលនោះ។
- VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ D_f ដោយ $y = f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ មានក្រាប C ។
១. រកដែនកំណត់ D និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ រកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។
២. គណនានិងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ដោយដឹងថា $x(x-1) > 0$, $\forall x \in D$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
៣. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1: y = -\frac{1}{2}x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។ បង្ហាញថា $\forall x \in (-\infty, 0)$, $\frac{x-1}{x} > 1$ និង $\forall x \in (1, +\infty)$, $\frac{x-1}{x} < 1$ រួចសិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។
៤. សរសេរសមីការបន្ទាត់ d_2 ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 2 ។
៥. សង់ក្រាប C បន្ទាត់ d_1 , d_2 និងអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។ គេឲ្យ $\ln 2 = 0.7$

អត្រាកំណត់សម្គាល់ស្តង់ដារ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
រៀបចំប្រឡងបញ្ជាក់ប្រកួតប្រជែងប្រឡងប្រកួតប្រជែង

I. គណនាលីមីត

$$\begin{aligned} \text{ក. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{1 - x^2} & \text{ រាង } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x^2 - x + 1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - x + 1}{1-x} \\ &= \frac{-3+1+1}{1+1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{1 - x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{1+x}} & \text{ រាង } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x (\sqrt{2x+1} + \sqrt{1+x})}{(2x+1) - (1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-2 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3(\sqrt{2x+1} + \sqrt{1+x}) \right] \\ &= -2 \cdot 1 \cdot 3(2) = -24 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{1+x}} = -24$$

$$\begin{aligned} \text{គ. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \left(3x - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos x - \sqrt{3} \sin x} & \text{ រាង } \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{6 \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{2 \left(\sin \frac{\pi}{6} \cos x - \cos \frac{\pi}{6} \sin x \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-3 \left(\frac{\pi}{6} - x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right)} \end{aligned}$$

$$\text{តាង } t = \frac{\pi}{6} - x \text{ បើ } x \rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ នោះ } t \rightarrow 0$$

$$\text{គេបាន } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-3t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-3 \cdot \frac{t}{\sin t} \right) = -3$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \left(3x - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos x - \sqrt{3} \sin x} = -3$$

II. គេមាន $z^2 - 4z + 16 = 0$

ក បង្ហាញថា $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ ជាឫសរបស់សមីការ

យក $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ ជំនួសចូលក្នុងសមីការគេបាន

$$(2 + 2i\sqrt{3})^2 - 4(2 + 2i\sqrt{3}) + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 8i\sqrt{3} - 12 - 8 - 8i\sqrt{3} + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 2 + 2i\sqrt{3} \text{ ជាឫសរបស់សមីការ}$$

ទាញរកឫស z_2 នៃសមីការ

ដោយសមីការ $z^2 - 4z + 16 = 0$ មានឫស $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ ជា

ចំនួនកុំផ្លិច នោះឫសមួយទៀត z_2 នៃសមីការជាចំនួនកុំផ្លិច

ឆ្លាស់នៃ z_1 គឺ $z_2 = \bar{z}_1 = 2 - 2i\sqrt{3}$

ដូចនេះ: $z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$

ខ គណនា $z_1 z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$z_1 \cdot z_2 = 16 = 16 + 0i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(1+i\sqrt{3})}{2(1-i\sqrt{3})} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+(i\sqrt{3})^2}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

សរសេរ $z_1 z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$z_1 z_2 = 16(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} \bullet \quad I &= \int_0^1 (1 - 4x + 3x^2) dx = [x - 2x^2 + x^3]_0^1 \\ &= (1 - 2 + 1) - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad J &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x + \cot x)^2 dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan^2 x + 2 \tan x \cot x + \cot^2 x) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} [(1 + \tan^2 x) + (1 + \cot^2 x)] dx \\ &= \left[\tan x - \cot x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \right) \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } J = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{បង្ហាញថា } \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} &= \frac{x^3 - x + x^2 - 1 + x}{x^2 - 1} \\ &= \frac{x(x^2 - 1) + (x^2 - 1) + x}{x^2 - 1} \\ &= x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } K &= \int_0^2 \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} dx \\ &= \int_0^2 \left(x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(x + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| \right]_0^2 = \left(2 + 2 + \frac{1}{2} \ln 3 \right) - 0 \\ &= 4 + \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

$$IV. \text{ ចំនួនករណីស្រប } n(S) = C(12, 3) = \frac{12!}{(12-3)!3!}$$

$$= 220$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. « ចាប់បានបាល់ទាំង ៣ ជាពណ៌ក្រហម »

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(A) = C(5, 3) = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(A) = \frac{1}{22}$$

B. « ចាប់បានបាល់ទាំង ៣ មានពណ៌ខុសៗគ្នា »

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(B) = C(3, 1) \times C(5, 1) \times C(4, 1)$$

$$= 3 \times 5 \times 4 = 60 = 60 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(B) = \frac{3}{11}$$

C. « ចាប់បានបាល់ពណ៌សមួយយ៉ាងតិច »

តាង D ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែល « ចាប់បានបាល់ពណ៌ក្រហម និងពណ៌ខៀវ »

$$n(D) = C(9, 3) = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

$$\text{នាំឲ្យ } P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{84}{220} = \frac{21}{55}$$

ដោយ C ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងព្រឹត្តិការណ៍ D

$$\text{គេបាន } P(C) = 1 - P(D) = 1 - \frac{21}{55} = \frac{34}{55}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(C) = \frac{34}{55}$$

V. ១. ចំណុច $A(4, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 2)$ និង $D(4, 2, 2)$

ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ d

ដោយបន្ទាត់ (d) កាត់តាមចំណុច $A(4, -2, 0)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រ

$$\text{ប្រាប់ទិស } \overrightarrow{CD} = (2 - 2, -2 + 1, -1 - 0) = (0, -1, -1)$$

គេបានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 - t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ខ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ដោយប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $B(1, 2, 2)$ និងមានវ៉ិចទ័រ

រណ្តម៉ាល់ $\overrightarrow{CD} = (0, -1, -1)$ គេបានសមីការប្លង់ (P) គឺ

$$(P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0(x - 1) - 1(y - 2) - 1(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -y + 2 - z + 2 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: ប្លង់ } (P): y + z - 4 = 0$$

គ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P)

$$\text{បន្ទាត់ } (d): \begin{cases} x = 4 + 0t \\ y = -2 + t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{និងប្លង់ } (P): y + z - 4 = 0$$

យកបន្ទាត់ (d) ជំនួសក្នុងប្លង់ (P) គេបាន

$$-2 - t - t - 4 = 0 \Leftrightarrow -2t = 6 \Rightarrow t = -3$$

$$\text{ដូចនេះ: កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ } (4, 1, 3)$$

២ រកសមីការស្តង់ដារនៃអ៊ីបេបូល

ដោយអ៊ីបេបូលមានកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ ០ ដូចគ្នា នោះអ័ក្ស

ទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាបស៊ីស

$$\text{គេបានសមីការមានរាង } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{កូអរដោនេកំពូល } V(\pm a, 0) = V(\pm 3, 0) \Rightarrow a = 3$$

ដោយអ៊ីបេបូលកាត់តាមចំណុច $P(5, 2)$ គេបាន

$$\frac{5^2}{3^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{b^2} = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow b^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

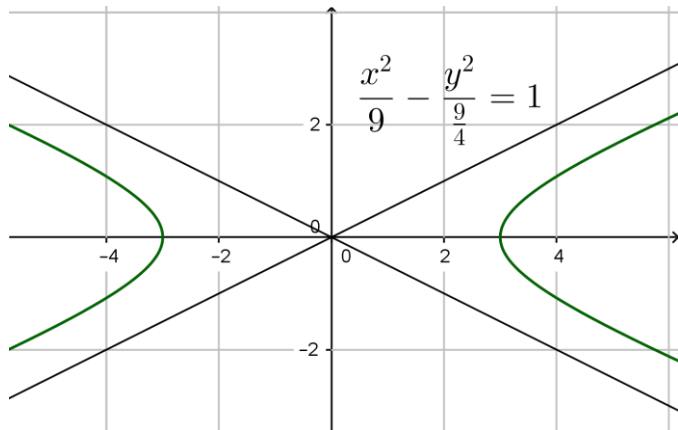
$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{សមីការស្តង់ដារ} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

$$\text{កូអរដោនេកំណុំ} F(\pm c, 0) = F\left(\pm \frac{3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

$$\text{សមីការអាស៊ីមតូត} y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}x$$

សងអ៊ីពែបូល



VI.ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(E): -2y'' + 3y = y'$$

$$\text{សមីការសម្គាល់} -2r^2 - r + 3 = 0 \text{ រាង } a + b + c = 0$$

$$\text{មានឫស } r_1 = 1, r_2 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{សមីការមានចម្លើយ } y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

$$\text{ដូចនេះ: សមីការ}(E) \text{ មានចម្លើយទូទៅ } y = Ae^x + Be^{-\frac{3}{2}x}$$

$$(A, B \in \mathbb{R}) \text{ ។}$$

ខ. រកចម្លើយមួយនៃ (E)

$$\text{គេមាន } y = Ae^x + Be^{-\frac{3}{2}x} \text{ នាំឲ្យ } y' = Ae^x - \frac{3}{2}Be^{-\frac{3}{2}x}$$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} y(0) = e \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = e \\ A - \frac{3}{2}B = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A + 2B = 2e \quad (1) \\ 2A - 3B = 2 \quad (2) \end{cases}$$

យកសមីការ(1)-(2) យើងបាន

$$5B = 2e - 2 \Rightarrow B = \frac{2e - 2}{5}$$

$$\text{តាម(1) យើងបាន } A = e - B = e - \frac{2e - 2}{5} = \frac{3e + 2}{5}$$

ដូចនេះ: សមីការ(E) មានចម្លើយ

$$y = \left(\frac{3e + 2}{5}\right)e^x + \left(\frac{2e - 2}{5}\right)e^{-\frac{3}{2}x} \text{ ។}$$

$$VII. C: f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

1. រកដែនកំណត់

$$\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានន័យកាលណា } \frac{x-1}{x} > 0$$

$$\text{ឲ្យ } x-1=0 \Rightarrow x=1, x=0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	+	+	
$x-1$	-	-	+	
$\frac{x-1}{x} > 0$	+	-	+	

$$\text{ដូចនេះ: } D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

គណនាលីមីតចុងដែន

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-\frac{x}{2} + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right] = \pm\infty$$

$$\text{ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[-\frac{x}{2} + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right] = +\infty$$

$$\text{ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \right] = -\infty$$

$$\text{ព្រោះ: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$$

រកអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ខ គណនានិងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

$$\text{យើងមាន } f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \ln(x-1) - \ln x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{-x(x-1) + 2x - 2(x-1)}{2x(x-1)}$$

$$= \frac{-x^2 + x + 2x - 2x + 2}{2x(x-1)} = \frac{-x^2 + x + 2}{2x(x-1)}$$

$\forall x \in D, 2x(x-1) > 0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម

$$-x^2 + x + 2$$

$$\text{ឲ្យ } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$$

មានឫស $x_1 = -1, x_2 = 2$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

ចំពោះ $x = -1, f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមា $f(-1) = 1.2$

ចំពោះ $x = 2, f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមា $f(2) = -1.7$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$		$\nearrow$	1.2	$\searrow$	$+\infty$

3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1: y = -\frac{1}{2}x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 0$$

នោះបន្ទាត់ $d_1: y = -\frac{1}{2}x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

បង្ហាញថា $\forall x \in (-\infty, 0); \frac{x-1}{x} > 1$ និង

$\forall x \in (1, +\infty); \frac{x-1}{x} < 1$

យើងមាន $\forall x \in (-\infty, 0); \frac{x-1}{x} - 1 = \frac{x-1-x}{x} = -\frac{1}{x} > 0$

$\forall x \in (1, +\infty); \frac{x-1}{x} - 1 = \frac{x-1-x}{x} = -\frac{1}{x} < 0$

ដូចនេះ $\forall x \in (-\infty, 0); \frac{x-1}{x} > 1$ និង $\forall x \in (1, +\infty); \frac{x-1}{x} < 1$

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1

$$\text{គេមាន } f(x) - y_{d_1} = \ln \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

$$\forall x \in (-\infty, 0); \frac{x-1}{x} > 1 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) > \ln 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) - y_{d_1} > 0 \text{ នោះក្រាប } C \text{ ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ } d_1$$

$$\forall x \in (1, +\infty); \frac{x-1}{x} < 1 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) < \ln 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) - y_{d_1} < 0 \text{ នោះក្រាប } C \text{ ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ } d_1$$

4. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_2

$$\text{សមីការបន្ទាត់ប៉ះ } d_2: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

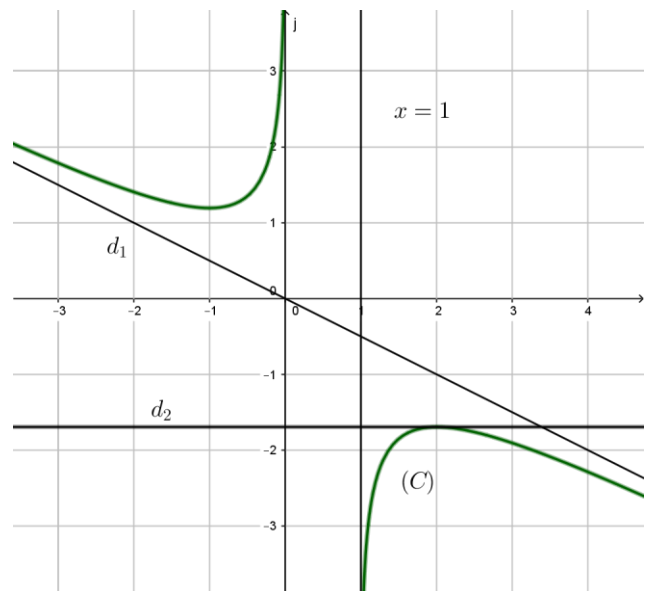
ដោយបន្ទាត់ d_2 ប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 2

$$\text{នោះ } x_0 = 2; y_0 = f(2) = -1 + \ln \frac{1}{2} = -1 - \ln 2$$

$$\text{និង } f'(x_0) = f'(2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{គេបាន } d_2: y = -1 - \ln 2$$

5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1, d_2



វិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ

គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ១៩ សីហា ២០១៩
មណ្ឌលប្រឡង៖.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x^2-1)}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x}$ ឃ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$

II. (១០ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$I = \int_0^1 (2-3x+x^2)dx$; $J = \int_0^2 \left[2x - \frac{1}{x+e} \right] dx$; $K = \int_{-1}^0 \left(2 - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$

III. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមមូលដ្ឋាន ១០ ដែលក្នុងនោះមូលដ្ឋាន ៥ មានពណ៌លឿង ហើយគេសរសេរលេខពី ១ ដល់ ៥ មូលដ្ឋាន ៣ មានពណ៌ក្រហមហើយសរសេរលេខពី ១ ដល់ ៣ និងមូលដ្ឋាន ២ មានពណ៌សគេសរសេរលេខពី ១ ដល់ ២ ។ គេចាប់យកមូលដ្ឋានមួយពីក្នុងចំណោមចែងនេះ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A. « មូលដ្ឋានដែលចាប់បានមានពណ៌លឿង »។
- B. « មូលដ្ឋានដែលចាប់បានមានលេខ ២ »។
- C. « មូលដ្ឋានដែលចាប់បានមានលេខ ១ និងពណ៌ក្រហម »។

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ ។

- ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបនេះ។
- ខ. សង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1}$ ។ យើងតាង (C) ក្រាបរបស់អនុគមន៍នេះក្នុងប្លង់ប្រដាប់តម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

- a. បង្ហាញថា $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x+1}$ ។
- b. ចូររកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។
- c. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f ។

**អត្រាកំណត់ត្រាសាមញ្ញកំណត់សម្គាល់សម្រាប់
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៩**

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x^2-1)}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{4}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x^2-1)} = \frac{1}{4}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$ រាង $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1} = \frac{1}{2}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x}$

$$= \frac{e^0 - e^0}{2e^0} = \frac{1-1}{2} = 0$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} = 0$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(1+\sqrt{x})} = -\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} = -\frac{1}{2}$

II. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I = \int_0^1 (2-3x+x^2) dx = \left[2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= \left(2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{6}$$

ដូចនេះ: $I = \int_0^1 (2-3x+x^2) dx = \frac{5}{6}$

$$J = \int_0^2 \left[2x - \frac{1}{x+e} \right] dx = \int_0^2 \left[2x - \frac{(x+e)'}{x+e} \right] dx$$

$$= \left[x^2 - \ln|x+e| \right]_0^2$$

$$= (2^2 - \ln|2+e|) - (0 - \ln|0+e|)$$

$$= 4 - \ln(2+e) + \ln e$$

$$= 4 - \ln(2+e) + 1$$

$$= 5 - \ln(2+e)$$

ដូចនេះ: $J = \int_0^2 \left[2x - \frac{1}{x+e} \right] dx = 5 - \ln(2+e)$

$$K = \int_{-1}^0 \left(2 - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^0 \left(2 - \frac{(x-1)'}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$= \left[2x + \frac{1}{x-1} \right]_{-1}^0$$

$$= \left(0 + \frac{1}{0-1} \right) - \left(-2 - \frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

ដូចនេះ: $K = \int_{-1}^0 \left(2 - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \frac{3}{2}$

III. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(10,1) = \frac{10!}{1!(10-1)!} = 10$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. « ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌លឿង »

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = 5$ ករណី

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{10}$$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{5}{10}$

B. « ប៊ូលដែលចាប់បានមានលេខ 2 »

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = 3$ ករណី

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{10}$$

ដូចនេះ: $P(B) = \frac{3}{10}$

C. « ប៊ូលដែលចាប់បានមានលេខ 1 និងពណ៌ក្រហម »

ចំនួនករណីស្រប $n(C) = 1$ ករណី

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{10}$$

ដូចនេះ: $P(C) = \frac{1}{10}$

IV. គេមានសមីការ $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$

ក. បង្ហាញថាសមីការ $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ ជាសមីការអេលីប

$$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0 \Leftrightarrow 25x^2 + 9y^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

សមីការ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ជាសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមាន

ផ្ចិតនៅត្រង់គល់តម្រុយ O មានអ័ក្សធំជាអ័ក្សអរដោនេ

ដូចនេះ សមីការ $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ ជាសមីការអេលីប

-រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបនេះ

សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបមានរាង $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, (a > b > 0)$

យើងទាញបាន $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

តាមទំនាក់ទំនង $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

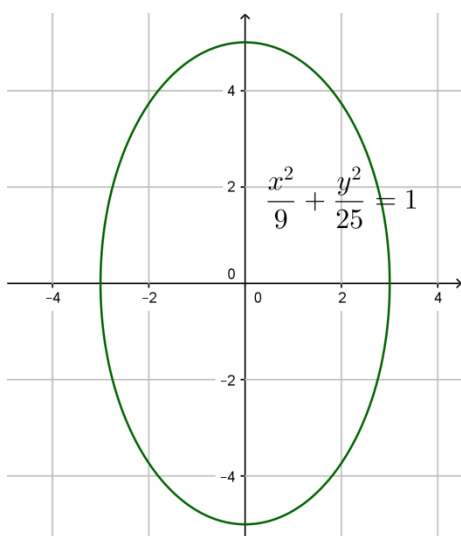
ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 10$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 6$

កំពូល $V_1(0, a) \Rightarrow V_1(0, 5)$ និង $V_2(0, -a) \Rightarrow V_2(0, -5)$

កំណុំ $F_1(0, c) \Rightarrow F_1(0, 4)$ និង $F_2(0, -c) \Rightarrow F_2(0, -4)$

ខ. សង់អេលីប



V. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ កំណត់ដោយ

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1}$$

a. បង្ហាញថា $f(x) = x+1 - \frac{3}{x+1}$

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } f(x) &= \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1} \\ &= \frac{x^2 + x + x + 1 - 3}{x+1} \\ &= \frac{x(x+1)}{x+1} + \frac{x+1}{x+1} - \frac{3}{x+1} \end{aligned}$$

$$= x+1 - \frac{3}{x+1}$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = x+1 - \frac{3}{x+1}$$

b. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប (C)

$$\text{យើងមាន } f(x) = x+1 - \frac{3}{x+1}$$

$$\text{យើងបាន } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x+1 - \frac{3}{x+1} \right) = \pm\infty$$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x = -1$

ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

$$\text{ម្យ៉ាងទៀត } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{3}{x+1} \right) = 0$$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ

$y = x+1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រូតនៃក្រាប (C)

c. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f ។

$$\text{យើងមាន } f(x) = x+1 - \frac{3}{x+1}$$

➢ ដេរីវេ $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x+1 - \frac{3}{x+1} \right)' \\ &= 1 + \frac{3(x+1)'}{(x+1)^2} = 1 + \frac{3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

➢ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $(x+1)^2 > 0$ នាំឱ្យ $1 + \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ ចំពោះគ្រប់

$x \in D$ នោះ $f(x) = 1 + \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$

ដូចនេះអនុគមន៍ f កើនជានិច្ចលើ D

➢ គណនាលីមីត

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x+1 - \frac{3}{x+1} \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x+1 - \frac{3}{x+1} \right) = +\infty$$

➢ សង់តារាងអថេរនៃ f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

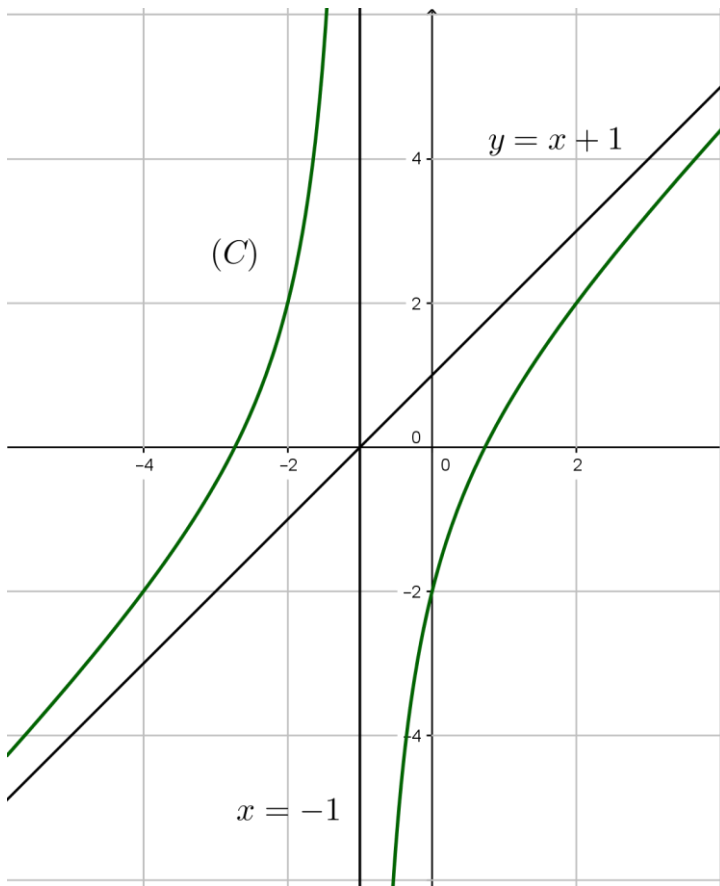
➤ តារាងតម្លៃលេខនៃ $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1}$

x	0	$-2 \pm \sqrt{3}$
y	-2	0

➤ តារាងតម្លៃលេខនៃ $y = x + 1$

x	0	-1
y	1	0

➤ សង់ក្រាប C



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ២០ សីហា ២០១៨
មណ្ឌលប្រឡង៖.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 6x + 1}{x^2 + 1}$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2}$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - \ln x)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស១៥នាក់ ក្នុងនោះមានសិស្សប្រុស៩នាក់ និងសិស្សស្រី៦នាក់។ គេជ្រើសរើសសិស្ស៣នាក់ ដោយចៃដន្យជាតំណាងយកទៅសម្ភាសន៍។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A. «ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ សុទ្ធតែជាសិស្សស្រី»។
- B. «ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ សុទ្ធតែជាសិស្សប្រុស»។
- C. «ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ មាន២នាក់ជាសិស្សស្រី»។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$I = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 3)dx$; $J = \int_0^1 (e^{2x} - e + 1)dx$; $K = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលជាចំណុច $O(0,0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

- a. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលនេះ បើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A\left(\frac{3}{2}, -3\right)$ ។
- b. រកកូអរដោនេរបស់កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$ ។ យើងតាង C ក្រាបតំណាងរបស់វាក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

- ១. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។
- ២. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញយកសមីការអាស៊ីមតូត d ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។
- ៣. a. ស្រាយបំភ្លឺថា គ្រប់ចំនួនពិត $x \in D$; ដេរីវេ $f'(x) = \frac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)^2}$ ។
b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
c. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

**អង្គការណែនាំសិក្សាសាស្ត្រសម្រាប់
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាធុនតូច
សម័យប្រឡង ២០ សីហា ២០១៨**

I. គណនាលីមីត

$$a = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 6x + 1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{3^4 + 6 \times 3 + 1}{3^2 + 1} = \frac{100}{10} = 10$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 + 6x + 1}{x^2 + 1} = 10$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} \text{ រវាង } \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0^+$ (ព្រោះ: $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0$)

$$c = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - \ln x) \text{ រវាង } (+\infty - \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

(ព្រោះ: $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{2}{x^2} \rightarrow 0$; $\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0$)

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - \ln x) = +\infty$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(15, 3) = \frac{15!}{3!(15-3)}$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{3 \times 2 \times 1 \times 12!} = 5 \times 7 \times 13$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A: ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ សុទ្ធតែស្រី

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(6, 3) = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 4 \times 5$

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4 \times 5}{5 \times 7 \times 13} = \frac{4}{91}$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{4}{91}$

B: ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ សុទ្ធតែបុរស

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(9, 3) = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 3 \times 4 \times 7$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3 \times 4 \times 7}{5 \times 7 \times 13} = \frac{12}{65}$

ដូចនេះ: $P(B) = \frac{12}{65}$

C: ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ មាន២នាក់ជាសិស្សស្រី

ចំនួនករណីស្រប $n(C) = C(6, 2) \times C(9, 1)$

$$= \frac{6!}{2!(6-2)!} \times 9 = \frac{6 \times 5}{2} \times 9 = 15 \times 9$$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15 \times 9}{5 \times 7 \times 13} = \frac{27}{91}$

ដូចនេះ: $P(C) = \frac{27}{91}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល:

$$I = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 3) dx$$

$$= [x^3 - x^2 + 3x]_1^2$$

$$= (2^3 - 2^2 + 3 \times 2) - (1^3 - 1^2 + 3 \times 1) = 7$$

ដូចនេះ: $I = 7$

$$J = \int_0^1 (e^{2x} - e^x + 1) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - e^x + x \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - e + 1 \right) - \left(\frac{e^0}{2} - e^0 + 0 \right) = \frac{e^2 - 2e + 3}{2}$$

ដូចនេះ: $I = \frac{e^2 - 2e + 3}{2}$

$$K = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x+3| - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2$$

$$= \left(\ln 5 - \frac{1}{2} \right) - \left(\ln 4 - 1 \right) = \frac{1}{2} + \ln 5 - \ln 4$$

$$= \frac{1}{2} + \ln \frac{5}{4}$$

ដូចនេះ: $K = \frac{1}{2} + \ln \frac{5}{4}$

IV. a. ទម្រង់ស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូល

ប៉ារ៉ាបូល (P) មានកំពូល (0;0) កំណុំ F ស្ថិតលើ (x'x)

សមីការស្តង់ដារគឺ $y^2 = 4px$

ដោយ $A\left(\frac{3}{2}; -3\right) \in (P)$

$$\Rightarrow (-3)^2 = 4p \times \frac{3}{2} \Rightarrow p = \frac{3}{2}$$

ដូចនេះ: (P): $y^2 = 6x$

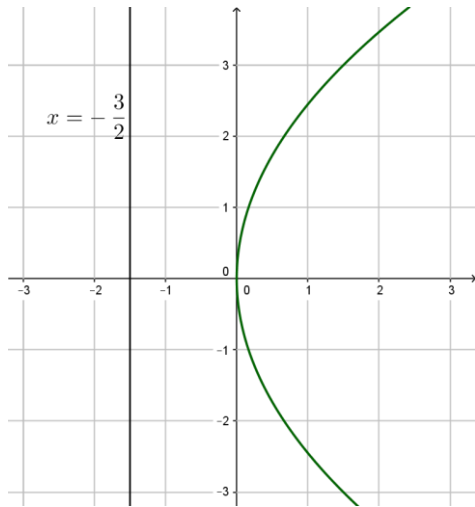
b. រកកូអរដោនេនៃកំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

ដោយកំណុំ $F(P;0)$ គឺ $F\left(\frac{3}{2};0\right)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសគឺ

$$x = -P \text{ គឺ } x = -\frac{3}{2}$$

+សង់ប៉ារ៉ាបូល



V. អនុគមន៍ $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$

1. រកដែនកំណត់ D នៃ f

$$x^2 - 5x + 7 \text{ មាន } \Delta = 25 - 4 \times 7 < 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 7 > 0 \quad (\text{ព្រោះ } a=1 > 0)$$

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

2. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

ទាញរកអាស៊ីមតូត (d) ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ នោះបន្ទាត់ $d: y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

3. ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ចំនួនពិត x ; $f'(x) = \frac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)^2}$

យើងមាន $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{(4x-7)(x^2-5x+7) - (2x-5)(2x^2-7x+5)}{(x^2-5x+7)^2} \\ &= \frac{(4x^3 - 27x^2 + 63x - 49) - (4x^3 - 24x^2 + 45x + 25)}{(x^2-5x+7)^2} \\ &= \frac{-3x^2 + 18x - 24}{(x^2-5x+7)^2} = \frac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2-5x+7)^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \frac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)^2}$ ។

b) សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 5x + 7)^2} = \frac{3(-x^2 + 6x - 8)}{(x^2 - 5x + 7)^2} \text{ គ្រប់ } x \in D_f$$

ដោយ $(x^2 - 5x + 7)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in D$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(-x^2 + 6x - 8)$

បើ $f'(x) = 0$ នោះ $-x^2 + 6x - 8 = -(x-2)(x-4) = 0$

គេបាន៖ $x_1 = 2, x_2 = 4$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\begin{array}{c} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ 0 \end{array}$	-

+បើ $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ

+បើ $x \in (2, 4)$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន

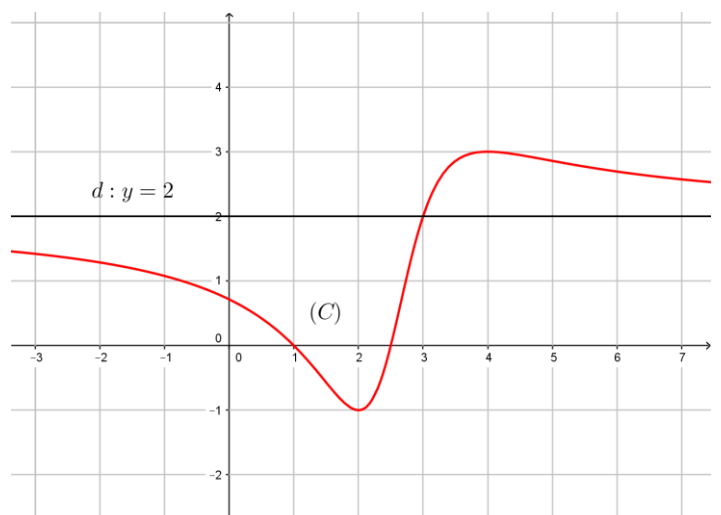
+សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$$f(2) = \frac{2 \times 2^2 - 7 \times 2 + 5}{2^2 - 5 \times 2 + 7} = \frac{8 - 14 + 5}{4 - 10 + 7} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$f(4) = \frac{2 \times 4^2 - 7 \times 4 + 5}{4^2 - 5 \times 4 + 7} = \frac{32 - 28 + 5}{16 - 20 + 7} = \frac{9}{3} = 3$$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\begin{array}{c} \\ 0 \\ \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ 0 \\ \end{array}$	$-$
$f(x)$	2	$\begin{array}{c} \nearrow \\ -1 \end{array}$	$\begin{array}{c} \nwarrow 3 \\ \searrow 2 \end{array}$	2

c) សង់ក្រាប (C)



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ២១ សីហា ២០១៧
មណ្ឌលប្រឡង៖.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x+6} - 3}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងចំណោមប្រលោមលោក៣ និងប្រលោមលោក៦ គេចាប់យកប្រលោម៣ក្នុងពេលតែមួយចេញពី
ចុងដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A. « ប្រលោមទាំងបីមានពណ៌ស » ។
- B. « ប្រលោមទាំងបីមានពណ៌ក្រហម » ។
- C. « មានប្រលោមមួយពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ស » ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 1) dx$

ខ. $J = \int_0^1 (2e^x - 1) dx$

គ. $K = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2} \right) dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $9x^2 + 25y^2 = 225$ ។

- ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។
- ខ. សង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R} - \{2\}$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ ។ យើងតាង C ក្រាបរបស់វាលើតម្រុយអរតូ
ណរម៉ាស់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

- ១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ ២ និងត្រង់ $+\infty$ ។
- ២. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
- ៣ . a. រកចំនួនពិត a, b, c ដែលគ្រប់ $x \neq 2$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$ ។
b. គេតាង d បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x + 1$ ។ បង្ហាញថា d អាស៊ីមតូតទៅ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។
សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។
c. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

**អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាធុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧**

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$ រកដំណោះស្រាយ

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = +\infty$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x+6} - 3}$ រកដំណោះស្រាយ

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^3 - 3^3)(\sqrt{x+6} + 3)}{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)(\sqrt{x+6} + 3)}{x + 6 - 9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9)(\sqrt{x+6} + 3) = (9 + 9 + 9)(3 + 3)$$

$$= 162$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{x+6} - 3} = 162$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(9,3) = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 84$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. « ប៉ូលទាំងបីមានពណ៌ស »

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(3,3) = 1$ ករណី

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{84}$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{1}{84}$ ។

B. « ប៉ូលទាំងបីមានពណ៌ក្រហម »

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(6,3) = \frac{6!}{(9-3)!3!} = 20$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$

ដូចនេះ: $P(B) = \frac{5}{21}$ ។

C. « មានប៉ូលមួយពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ស »

ចំនួនករណីស្រប $n(C) = C(6,1) \times C(3,2) = 6 \times 3 = 18$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{18}{84} = \frac{3}{14}$

ដូចនេះ: $P(C) = \frac{3}{14}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 1)dx = \left[3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right]_1^3$

$$= [x^3 + x^2 + x]_1^3 = (3^3 + 3^2 + 3) - (1^3 + 1^2 + 1)$$

$$= (27 + 9 + 3) - (1 + 1 + 1) = 36$$

ដូចនេះ: $I = \int_1^3 (3x^2 + 2x + 1)dx = 36$

ខ. $J = \int_0^1 (2e^x - 1)dx = [2e^x - x]_0^1$

$$= (2e - 1) - (2e^0 - 0) = 2e - 3$$

ដូចនេះ: $J = \int_0^1 (2e^x - 1)dx = 2e - 3$

គ. $K = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right]_1^2$

$$= \left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

ដូចនេះ: $K = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)dx = 2$

IV. ក. បង្ហាញថាសមីការ $9x^2 + 25y^2 = 225$ ជាសមីការអេលីប

យើងមាន $9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ សមីការមានរាង $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ជាសមីការនៃអេលីប ដែលមានអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្ស

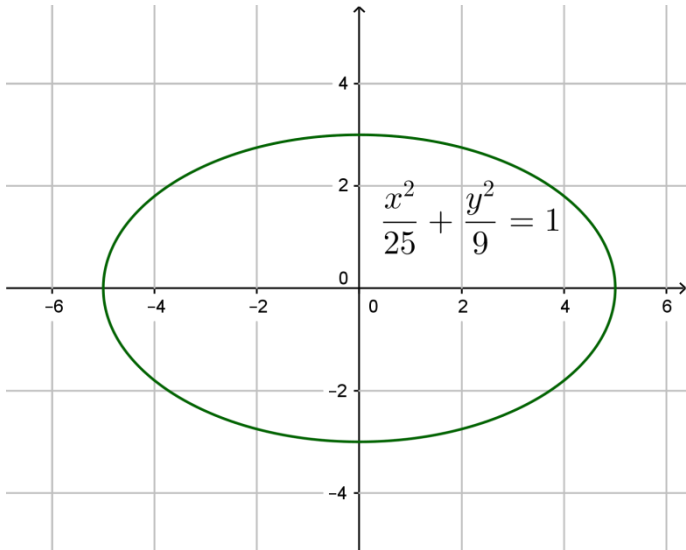
អាប៊ស៊ីស និងមានផ្ចិត $(0,0)$ ។

➢ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

យើងមាន $a=5$, $b=3$

- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=2\times 5=10$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=2\times 3=6$ ឯកតាប្រវែង
- កូអរដោនេកំពូល $V(\pm a,0) \Rightarrow V(\pm 5,0)$

ខ សង់អេលីប



V. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R} - \{2\}$ ដោយ

$$C: f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$

1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \right) = \frac{1}{0} = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x - 1}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

2. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

$$\begin{aligned} \text{នាំឲ្យ } f'(x) &= \frac{(2x-1)(x-2) - 1(x^2 - x - 1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - x + 2 - x^2 + x + 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

ដោយគ្រប់ $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

អនុគមន៍ f មានសញ្ញាតាម $x^2 - 4x + 3$

មានឫស $x_1=1, x_2=3$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

- ត្រង់ $x=1$ $f'(x)=0$ ហើយប្លូសញ្ញាពី (+) ទៅ (-)
នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាដែល $f(1)=1$
- ត្រង់ $x=3$ $f'(x)=0$ ហើយប្លូសញ្ញាពី (-) ទៅ (+)
នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាដែល $f(3)=5$

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1		5	$+\infty$	

3. a. រកចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$

យើងមាន $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

ហើយ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{ax(x-2) + b(x-2) + c}{x-2} \\ &= \frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x-2} \\ &= \frac{ax^2 + (-2a+b)x + (-2b+c)}{x-2} \end{aligned}$$

ទាញបាន $\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=-1 \\ -2b+c=-2 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $a=1, b=1, c=1$ ។

b. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x+1$ ជា

អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x+1)]$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\left(x+1 + \frac{1}{x-2} \right) - (x+1) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x-2} \right) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y = x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

➢ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

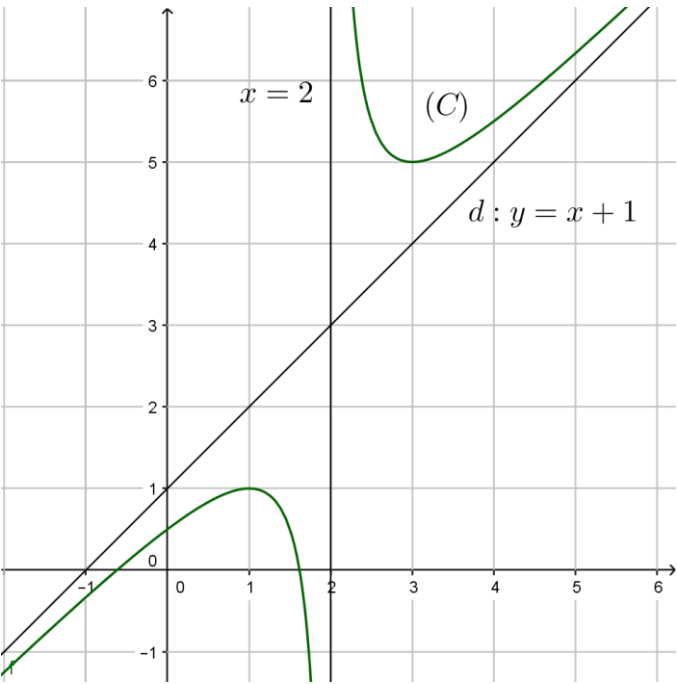
យក $C-d: f(x) - y = \frac{1}{x-2}$ មានសញ្ញាដូច $x-2$

ឲ្យ $x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-y_d$	$-$		$+$

- បើ $x \in (-\infty, 2)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d
- បើ $x \in (2, +\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d

5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d
 ដោយ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូត
 ឈរនៃក្រាប C



မိမိ၏အမည်အားဖြည့်သွင်း **၂၂ ဇူလိုင် ၂၀၁၆**

အမည်အားဖြည့်သွင်း.....

လိပ်စာအမှတ်..... **လိပ်စာ**.....

လျှောက်ထားသူ၏အမည်.....

အမည်အားဖြည့်သွင်း.....

អត្រាកំណត់សម្គាល់សម្រាប់ការសិក្សាស្រាវជ្រាវ
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២២ សីហា ២០១៦

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 4x) = 3(-1)^3 - 4(-1) = -3 + 4 = 1$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 4x) = 1$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2}$ រាង $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 2^3)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)}{x + 2 - 4}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)$

$= (4 + 4 + 4)(2 + 2) = 48$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - 2} = 48$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2)$ រាង $+\infty - \infty$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{\ln x}{x^2} - 1 \right) = (+\infty)(0 - 1) = -\infty$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2) = -\infty$

II. គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I = \int_1^2 (1 - 3x^2) dx = \left[x - 3 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = [x - x^3]_1^2$
 $= (2 - 2^3) - (1 - 1^3) = -6$

ដូចនេះ: $I = \int_1^2 (1 - 3x^2) dx = -6$

ខ. $J = \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_2^3 = \left(-\frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}$

ដូចនេះ: $J = \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{6}$

គ. $K = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+e} - 1 \right) dx = [-x + \ln|x+e|]_0^1$
 $= (-1 + \ln|1+e|) - (-0 + \ln e) = -2 + \ln(1+e)$

ដូចនេះ: $K = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+e} - 1 \right) dx = -2 + \ln(1+e)$

III. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(8, 2) = \frac{8!}{6!2!} = 28$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. « ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ក្រហម »

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(3, 2) = 3$ ករណី

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{28}$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{3}{28}$ ។

B. « ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ខៀវ »

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(5, 2) = \frac{5!}{2!3!} = 10$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$

ដូចនេះ: $P(B) = \frac{5}{14}$ ។

C. « ឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌ »

ចំនួនករណីស្រប $n(C) = C(5, 1) \times C(3, 1) = 5 \times 3 = 15$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15}{28} = \frac{15}{28}$

ដូចនេះ: $P(C) = \frac{15}{28}$ ។

IV. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

ដោយកំពូលទាំងពីរមានអរដោនេ ០ ដូចគ្នា នោះអេលីប

មានផ្ចិត $I(0, 0)$

ហើយអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

សមីការមានរាង $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

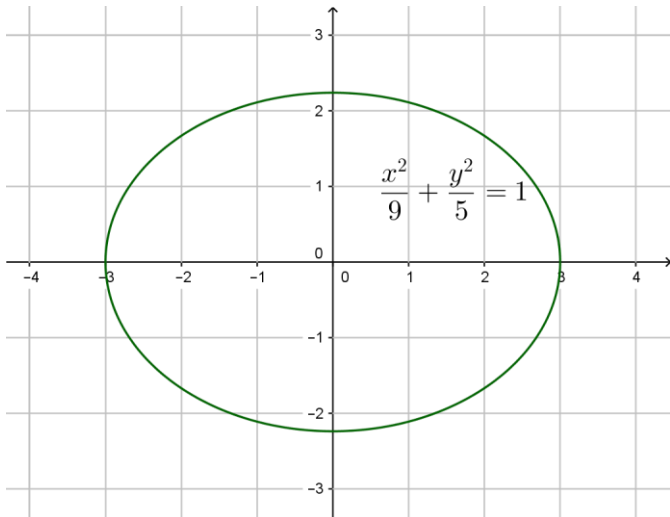
• កំពូល $V(\pm a, 0) = (\pm 3, 0)$ នោះ $a = 3$

• កំណុំ $F(-c, 0) = (-2, 0)$ នោះ $c = 2$

• $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - 2^2 = 5$
 $\Rightarrow b = \sqrt{5}$

ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

សង់អេលីប



V. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

ដោយ $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$

១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ -2 ; ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2}{(x-2)(x+2)} = \pm\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2}{(x-2)(x+2)} = \pm\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

➢ បញ្ជាក់អំពីអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈររបស់ក្រាប

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ នោះបន្ទាត់ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm 2} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x = \pm 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

តូតឈរ

២. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x^2)'(x^2 - 4) - (x^2 - 4)'(2x^2)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$= \frac{4x(x^2 - 4) - 2x(2x^2)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2 - 4)^2}$$

$$= \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$$

ដោយ $(x^2 - 4)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ នោះ

$f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-16x$

$$\text{ឲ្យ } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -16x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-

• ចំពោះ $x \in (-\infty, -2) \cup (2, 0)$ អនុគមន៍ f កើន

• ចំពោះ $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$ អនុគមន៍ f ចុះ

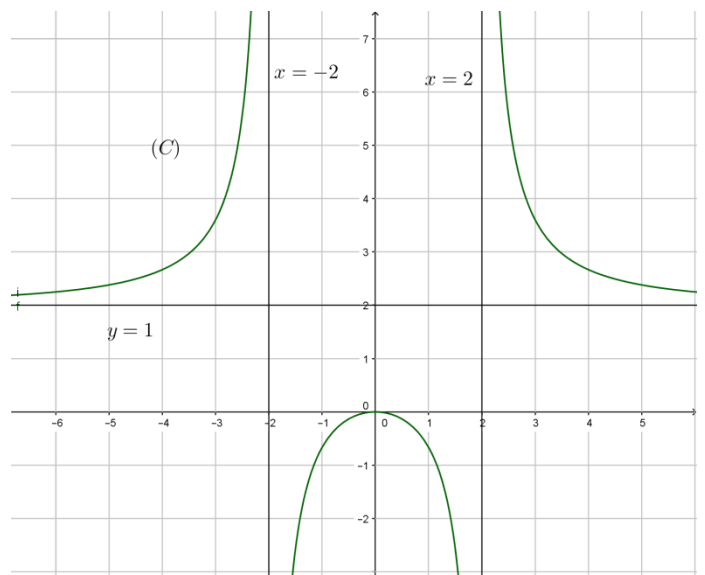
ត្រង់ $x = 0$ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាដែល $f(0) = 0$

➢ តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$	$0 \searrow +\infty$	$+\infty \searrow 2$	2

៣. សង់នៅលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ក្រាបតាង

អនុគមន៍ f



**អង្គការណែនាំសិក្សាសាស្ត្រសម្រាប់សិស្សសម្ភារៈ
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២៤ សីហា ២០១៥**

I. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

ក. តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ « គេចាប់បានឃ្លើពណ៌ខៀវទាំងពីរ »

$$\text{ចំនួនករណីអាច } n(S) = C(8, 2) = \frac{8!}{6!2!} = 28 \text{ ករណី}$$

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(A) = C(5, 2) = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{5}{14}} \quad \text{។}$$

ខ. តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ « គេចាប់បានឃ្លើមួយក្នុងមួយពណ៌ »

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(B) = C(3, 1) \times C(5, 1) = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{28}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{15}{28}} \quad \text{។}$$

II. គណនាលីមីត

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = -2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = -2}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 1+1 = 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

$$\text{ក. } I = \int_2^3 (3x^2 + 3x - 1) dx = \left[x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x \right]_2^3$$

$$= \left(3^3 + \frac{3}{2} \cdot 3^2 - 3 \right) - \left(2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \right)$$

$$= \left(27 + \frac{27}{2} - 3 \right) - (8 + 6 - 2) = \frac{51}{2}$$

$$\text{ខ. } f(x) = \frac{1+2x}{(x^2-4x)+(4-x)}$$

$$\text{បង្ហាញថា } f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1(4-x)-3(1-x)}{(1-x)(4-x)} = \frac{4-x-3+3x}{(4-x)-x(4-x)} \\ &= \frac{1+2x}{(x^2-4x)+(4-x)} \text{ ពិត} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x}}$$

$$\text{គណនា } J = \int_2^3 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} J &= \int_2^3 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{4-x} \right) dx = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4} \right) dx \\ &= \left[-\ln|x-1| + 3\ln|x-4| \right]_2^3 \\ &= (-\ln 2 + 3\ln 1) - (-\ln 1 + 3\ln 2) = -4\ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{J = -4\ln 2}$$

IV. ក. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលនៅត្រង់ $O(0,0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ នោះប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ

$$\text{សមីការមានរាង } x^2 = 4py$$

ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A(2,6)$ នោះគេបាន

$$2^2 = 4p \cdot 6 \Leftrightarrow 1 = 6p \Rightarrow p = \frac{1}{6}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\text{សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល គឺ } x^2 = \frac{2}{3}y}$$

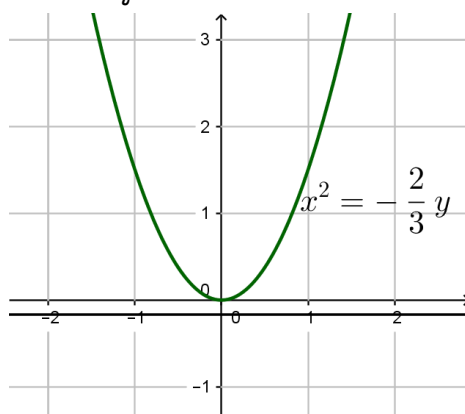
ខ. រកតម្លៃនៃ x_1

ចំណុច $B\left(x_1, \frac{3}{2}\right)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល $x^2 = \frac{2}{3}y$ គេបាន

$$x_1^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{x_1 = \pm 1}$$

➢ សង់ប៉ារ៉ាបូល



V. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $C: f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x + 1}$

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x + 1 \neq 0$ ឬ $x \neq -1$

ដូចនេះ: ដែនកំណត់នៃ f គឺ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

ខ. បង្ហាញថា $f(x) = x - 2 - \frac{1}{x + 1}$

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } f(x) &= x - 2 - \frac{1}{x + 1} = \frac{x(x + 1) - 2(x + 1) - 1}{x + 1} \\ &= \frac{x^2 + x - 2x - 2 - 1}{x + 1} = \frac{x^2 - x - 3}{x + 1} \end{aligned}$$

ដូចនេះ: $f(x) = x - 2 - \frac{1}{x + 1}$

គ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x + 1} \right) = 0$$

ដូចនេះ: បន្ទាត់ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ឃ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

$$\text{យើងមាន } f(x) = x - 2 - \frac{1}{x + 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{(x + 1)^2} > 0 \text{ គ្រប់ } x \in D$$

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ D គ្មានបរមា។

លីមីតនៃអនុគមន៍

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - 2 - \frac{1}{x + 1} \right) = \pm\infty$$

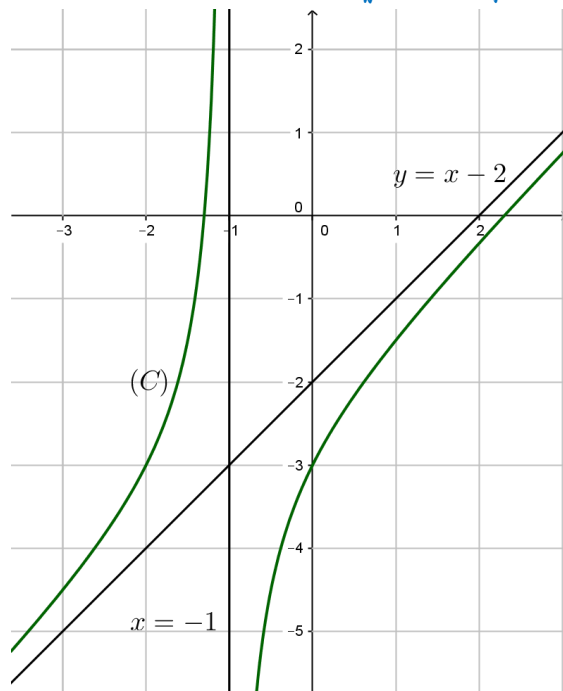
$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x - 2 - \frac{1}{x + 1} \right) = \pm\infty$$

នោះបន្ទាត់ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

➤ សង់ក្រាបនៃ f



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ១៣ តុលា ២០១៤
មណ្ឌលប្រឡង៖.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$ ឃ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងអាងចិញ្ចឹមត្រីមួយមានត្រីពណ៌ក្រហមចំនួន៤ និងត្រីពណ៌សចំនួន៣។ គេចាប់ត្រី២យកមកដាក់ក្នុងអាងថ្មី ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- ក. « ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ » ។
- ខ. « ត្រីពណ៌សទាំងពីរ » ។
- គ. « ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌ » ។

III. (២៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

- ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។
- ខ. បង្ហាញថា $f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1}$ ។
- ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C នៃ f ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

- ក. $I = \int_1^3 (2x^2 - 3x + 1) dx$
- ខ. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+4}$ ។ បង្ហាញថា $f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$ រួចគណនា $J = \int_2^3 f(x) dx$ ។
- គ. គេមាន $f(x) = x \ln x$ ។

គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f នៅលើចន្លោះ $[1, e]$ ។ ទាញរកអាំងតេក្រាល $K = \int_1^e \ln x dx$ ។

IV. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំពូលទាំងពីរជាចំណុច $(4,0)$ និង $(-4,0)$ និងមានកំណាមួយនៅត្រង់ចំណុច $(3,0)$ រួចសង់អេលីបនេះ។

**អត្រាកំណត់ទិន្នន័យសម្រាប់ស្រុកសង្កាត់
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ១៣ តុលា ២០១៤**

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3}$ រាង $\frac{0}{0}$
 $= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)}{(x+1)} = \frac{0}{-2} = 0$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 3} = 0$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x}$ រាង $\frac{0}{0}$
 $= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \sin x = -\frac{1}{3} \times 1 \times 0 = 0$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{-3x} = 0$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$ រាង $\frac{0}{0}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2) - (x-2)}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2-2-x}{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2) = +\infty + 2(+\infty) - 2 = +\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 2x - 2) = +\infty$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(7, 2) = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 7 \times 3 = 21$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

ក. « ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ »

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(4, 2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$ ករណី

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

ដូចនេះ $P(A) = \frac{2}{7}$

ខ. « ត្រីពណ៌សទាំងពីរ »

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(3, 2) = \frac{3!}{2!(3-2)} = 3$ ករណី

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{21}$

ដូចនេះ $P(B) = \frac{3}{21}$

គ. « ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌ »

ចំនួនករណីស្រប $n(C) = C(4, 1) \times (3, 1) = 4 \times 3 = 12$ ករណី

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{21}$

ដូចនេះ $P(C) = \frac{12}{21}$

III. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ មានន័យលុះត្រាតែ $x \neq 1$

ដូចនេះដែនកំណត់ $D \in \mathbb{R} - \{1\}$

ខ. បង្ហាញថា $f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1}$

យើងមាន $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$
 $= \frac{x^2 - 4}{1-x} = \frac{x^2 - 1 - 3}{1-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} + \frac{3}{x-1}$
 $= -x - 1 + \frac{3}{x-1}$

ដូចនេះ $f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1}$

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C នៃ f

យើងមាន $f(x) = -x - 1 + \frac{3}{x-1}$

$\Rightarrow f'(x) = -1 - \frac{3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$

➢ លីមីតនិងអាស៊ីមតូត

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - 1 + \frac{3}{x-1} \right) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x - 1 + \frac{3}{x-1} \right) = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-x - 1 + \frac{3}{x-1} \right) = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-x - 1 + \frac{3}{x-1} \right) = +\infty$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ

$x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

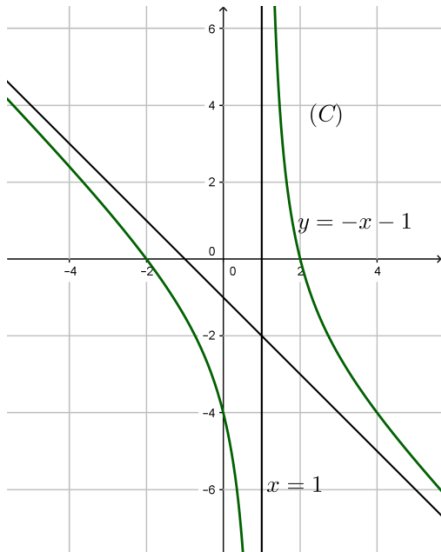
ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (-x-1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3}{x-1} \right) = 0$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (-x-1)] = 0$ នោះបន្ទាត់ដែលមាន
សមីការ $y = -x-1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

➢ សង់តារាងអថេរនៃ f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	—
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	

➢ សង់ក្រាប C



IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} \text{ក. } I &= \int_1^3 (2x^2 - 3x + 1) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \right]_1^3 = \left(\frac{15}{2} - \frac{1}{6} + 3 \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{15}{2} - \frac{1}{6} = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } I = \int_1^3 (2x^2 - 3x + 1) dx = \frac{22}{3}$$

$$\text{ខ. បង្ហាញថា } f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4}$$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } f(x) &= \frac{2x+1}{x^2-5x+4} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-4)} \\ &= \frac{-(x-4)+3(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \frac{-(x-4)}{(x-1)(x-4)} + \frac{3(x-1)}{(x-1)(x-4)} \\ &= \frac{-1}{(x-1)} + \frac{3}{(x-4)} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = -\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4} \text{ ពិត}$$

$$\text{គណនា } J = \int_2^3 f(x) dx$$

$$\text{គេបាន } J = \int_2^3 \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-4} \right) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[-\ln|x-1| + 3\ln|x-4| \right]_2^3 \\ &= (-\ln 2 + 3\ln|-1|) - (-\ln 1 + 3\ln|-2|) \\ &= -\ln 2 - 3\ln 2 = -4\ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } J = \int_2^3 f(x) dx = -4\ln 2$$

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$\text{គេមាន } f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + 1$$

$$\text{ទាញអាំងតេក្រាល } K = \int_1^e \ln x dx$$

$$\text{យើងមាន } f'(x) = \ln x + 1$$

$$\Rightarrow \int_1^e f'(x) dx = \int_1^e (\ln x + 1) dx$$

$$\Rightarrow \int_1^e \ln x = \int_1^e f'(x) dx - \int_1^e dx$$

$$\Rightarrow \int_1^e \ln x = [f(x)]_1^e - \int_1^e dx$$

$$= [x \ln x - x]_1^e$$

$$= (e \ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1$$

$$\text{ដូចនេះ } K = 1$$

V. រកសមីការស្តង់ដារអេលីប

ដោយកំពូលទាំងពីរមានអរដោនេ 0 ដូចគ្នា នោះអេលីប

មានផ្ចិត $I(0,0)$

ហើយអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

$$\text{សមីការមានរាង } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

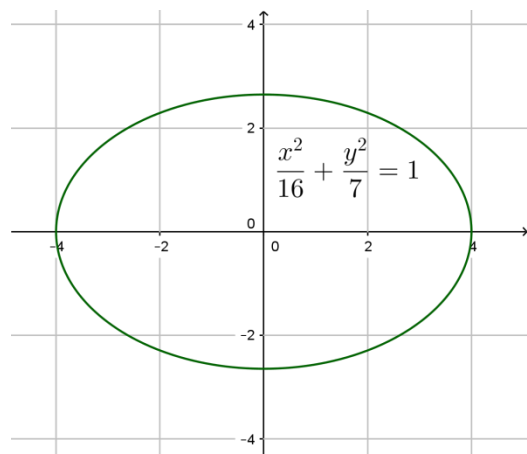
$$\bullet \text{ កំពូល } V(\pm a, 0) = (\pm 4, 0) \text{ នោះ } a = 4$$

$$\bullet \text{ កំណុំ } F(c, 0) = (3, 0) \text{ នោះ } c = 3$$

$$\bullet c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

$$\text{ដូចនេះសមីការស្តង់ដារគឺ } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

• សង់អេលីប



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ០៤ សីហា ២០១៤
មណ្ឌលប្រឡង៖.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ឋានៈលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1}$

II. (១៥ពិន្ទុ) នៅក្នុងចុងមួយគេមានប៊ូលក្រហម៤ ប៊ូលស្ករ៣ និងប៊ូលខៀវ១ ។ គេចាប់យកប៊ូល៣ក្នុងពេលតែមួយចេញពីចុងដោយចៃដន្យ។

- ក. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម » ។
- ខ. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានមានប៊ូលក្រហមទាំងបី » ។
- គ. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ » ។

III. (៣០ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x$ និង C តាងក្រាបរបស់ f ។

១. អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$ ។

- ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$
- ខ. ទាញយកតាមតម្លៃនៃ x សញ្ញានៃ $g(x)$ ។

២. ក. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ។

- ខ. អនុគមន៍ f មានដេរីវេ f' ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា។
- គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) ក. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I = \int_1^5 (x^2 + 2x - 3)dx$

ខ. បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 1$ គេបាន $\frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 2x - 1 + \frac{1}{x - 1}$

រួចទាញរក $J = \int_2^3 \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} dx$ ។

អង្គការណែនាំសិក្សាស្រាវជ្រាវស្រាវជ្រាវស្រាវជ្រាវ
ប្រឡងសិក្សាប្រចាំឆ្នាំសិក្សាស្រាវជ្រាវស្រាវជ្រាវស្រាវជ្រាវ
សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៤

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)}$ រាង $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x^2}\right) x \left(\frac{1}{x} - 1\right)}{x \left(\frac{5}{x^2} + 2\right) x^2 \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x} - 1\right)}{\left(\frac{5}{x} + 2\right) \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)} = \frac{(2 - 0)(0 - 1)}{(5 + 0)(0 - 1)}$$

$$= \frac{-2}{-2} = 1$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 3)(1 - x)}{(5 + 2x)(2 - x^2)} = 1$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - \sqrt{x+3})(2 + \sqrt{x+3})}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - (x+3)}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} = -\frac{1}{8}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = -\frac{1}{8}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1}$ រាង $\frac{\infty}{\infty}$

$$= \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$= \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \right] = \ln \left(\frac{1+0}{1-0} \right) = \ln 1 = 0$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = 0$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(8,3) = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

ក. « គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម »

ចំនួនករណីស្រប

$$n(A) = C(4,2) \times C(4,1) = \frac{4!}{1!(4-2)!} \times 4 = 24 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(A) = \frac{3}{5}$$

ខ. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានមានប៊ូលក្រហមទាំងបី »

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(B) = C(4,3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(B) = \frac{1}{14}$$

គ. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ »

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(C) = n(A) + n(B) = 24 + 4 = 28 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{28}{56} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(C) = \frac{1}{2}$$

III. គេមានអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x \text{ និង } C \text{ តាងក្រាបរបស់ } f$$

១. ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$

$$\text{យើងមាន } g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$$

$$= 2e^{2x} - e^x - 4e^x + 2$$

$$= e^x(2e^x - 1) - 2(2e^x - 1)$$

$$g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$$

$$\text{ដូចនេះ: } g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$$

ខ. ទាញយកតាមតម្លៃនៃ x សញ្ញានៃ $g(x)$ យើងមាន

$$\text{យើងមាន } g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$$

$$\text{តាង } t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t, (t > 0)$$

$$g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2) \quad \text{មានសញ្ញាដូចសញ្ញានៃ}$$

$$(2t-1)(t-2)$$

$$(2t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \quad t = 2$$

តារាងសញ្ញា

t	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$g(x)$	+	0	-	0	+

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ

$$g(x) < 0 \text{ កាលណា } \frac{1}{2} < e^x < 2 \Rightarrow -\ln 2 < x < \ln 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } g(x) < 0 \text{ កាលណា } x \in (-\ln 2, \ln 2)$$

$$g(x) > 0 \text{ កាលណា } t < \frac{1}{2} \vee t > 2 \Rightarrow e^x < \frac{1}{2} \vee e^x > 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } g(x) > 0$$

$$\text{កាលណា } x \in (-\infty, -\ln 2) \cup (\ln 2, +\infty) \text{ ហើយ}$$

$$g(x) = 0 \text{ កាលណា } x = -\ln 2, x = \ln 2$$

២. ក. រក $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{2x}{9} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{2x}{9} \right) = -\infty$$

ខ. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

$$\text{យើងមាន } f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x$$

$$\text{នោះ: } f'(x) = -\frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} + \left(\frac{2}{9} \right)'$$

$$= -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{2}{9} = \frac{-9e^x + 2(1+2e^x + e^{2x})}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(1+e^x)^2} = \frac{g(x)}{(1+e^x)^2}$$

$$\text{ដោយ } (1+e^x)^2 > 0 \text{ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត } x$$

$$\text{នោះ: } f'(x) \text{ មានសញ្ញាដូច } g(x) \text{ ។}$$

ដូច្នេះ: ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$

តាមសម្រាយខាងលើ យើងមាន

$$g(x) < 0 \text{ កាលណា } x \in (-\ln 2, \ln 2)$$

$$g(x) = 0 \text{ កាលណា } x = -\ln 2, x = \ln 2$$

$$g(x) > 0 \text{ កាលណា } x \in (-\infty, -\ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$$

$$\text{យើងទាញបាន } f'(x) < 0 \text{ កាលណា } x \in (-\ln 2, \ln 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ កាលណា } x = -\ln 2, x = \ln 2$$

$$f'(x) > 0 \text{ កាលណា } x \in (-\infty, -\ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$$

យើងបាន

$$f \text{ មានអប្បបរមា } f(\ln 2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \ln 2$$

$$f \text{ មានអតិរមា } f(-\ln 2) = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} \ln 2$$

• តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	∞
$f'(x)$	$+$	$\begin{array}{c} \\ 0 \\ \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ 0 \\ \end{array}$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow f(-\ln 2)$	$\searrow f(\ln 2)$	$\nearrow +\infty$

VI . ក. គណនាអាំងតេក្រាល:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^5 (x^2 + 2x - 3) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right]_1^5 = \left(\frac{5^3}{3} + 5^2 - 3 \times 5 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1 - 3 \right) \\ &= \frac{155}{3} + \frac{5}{3} = \frac{160}{3} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \int_1^5 (x^2 + 2x - 3) dx = \frac{160}{3}$$

ខ. បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 1$ គេបាន

$$\frac{2x^2 - 3x + 2}{x-1} = 2x - 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$\text{យើងមាន } \frac{2x^2 - 3x + 2}{x-1} = \frac{(2x^2 - 2x) - (x-1) + 1}{x-1}$$

$$= \frac{2x(x-1)}{x-1} - \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 2x - 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$\text{ចំពោះ: } x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$\bullet \text{ រួចទាញរក } J = \int_2^3 \frac{2x^2 - 3x + 2}{x-1} dx$$

$$\text{ដោយ } \frac{2x^2 - 3x + 2}{x-1} = 2x - 1 + \frac{1}{x-1}$$

ចំពោះ: គ្រប់ $x \neq 1$ យើងបាន

$$\begin{aligned} J &= \int_2^3 \left[2x - 1 + \frac{(x-1)'}{x-1} \right] dx \\ &= \left[x^2 - x + \ln|x-1| \right]_2^3 \\ &= (3^2 - 3 + \ln|3-1|) - (2^2 - 2 + \ln|2-1|) \\ &= 4 + \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{J = 4 + \ln 2}$$

វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងប្រឡងប្រចាំឆ្នាំសិក្សា ២០២០
វិញ្ញាបនបត្រ: គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល: ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប: ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង:
មណ្ឌលប្រឡង:
លេខបន្ទប់: លេខតុ:
ឈ្មោះបេក្ខជន:
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:

ប្រធានវិញ្ញាបនបត្រ

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x - 3} - \sqrt{2}}$ គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3 \ln x + 1)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានបិទពណ៌ខៀវចំនួន៤ដើម និងបិទពណ៌ក្រហមចំនួន៣ដើម។ គេចាប់យកបិទពណ៌ដើមក្នុងពេលតែមួយចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

- A. « គេចាប់បានបិទពណ៌ដើមសុទ្ធតែពណ៌ខៀវ » ។
- B. « គេចាប់បានបិទពណ៌ដើមសុទ្ធតែពណ៌ក្រហម » ។
- C. « គេចាប់បានមានបិទពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ខៀវ » ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I = \int_1^2 (6x^2 + 4x - 1) dx$ ខ. $J = \int_0^1 (1 - 2e^x) dx$ គ. $K = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយជាចំណុចមានកូអរដោនេ (2,0) និងចំណុចកំពូលពីរនៅត្រង់ចំណុច (-3,0) និង (3,0) ។ សង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R} - \{1\}$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$ មានក្រាបតំណាង C ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ កតា $2cm$ ។

- 1. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty, +\infty$ និង 1 ។ រកអាស៊ីមតូតដេក និងឈរនៃក្រាប C ។
- 2. a. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយបង្ហាញថា វាមានសញ្ញាដូច $-2x^2 + 2x$ ។
b. សិក្សាអថេរភាព និងតារាងអថេរភាពនៃ f ។
- 3. សង់ក្រាប C នៃ f ។

**អត្រាកំណែវិញ្ញាណស្រៀមទី១ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ**

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$ រាង $\frac{0}{0}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x+2} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{3}{4}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-3}-\sqrt{2}}$ រាង $\frac{0}{0}$
 $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-3}-\sqrt{2})(\sqrt{x-3}+\sqrt{2})}$

$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x-3}+\sqrt{2})}{x-3-2} = \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x-3}+\sqrt{2})$

$= \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x-3}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3 \ln x + 1)$ រាង $+\infty - \infty$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{3 \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) = (+\infty)(1 - 0 + 0) = +\infty$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3 \ln x + 1) = +\infty$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(7,3) = \frac{7!}{4!3!} = 45$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. « គេចាប់បានបីចំណីសុទ្ធតែពណ៌ខៀវ »

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(4,3) = 4$ ករណី

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{45}$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{4}{45}$ ។

B. « គេចាប់បានបីចំណីសុទ្ធតែពណ៌ក្រហម »

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(3,3) = 1$

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{45}$

ដូចនេះ: $P(B) = \frac{1}{45}$ ។

C. « គេចាប់បានមានបីចំណីពណ៌ក្រហមនិងពីរទៀតពណ៌ខៀវ »

ចំនួនករណីស្រប $n(C) = C(3,1) \times C(4,2) = 3 \times 6 = 18$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$

ដូចនេះ: $P(C) = \frac{2}{5}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I = \int_1^2 (6x^2 + 4x - 1) dx = \left[6 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - x \right]_1^2$
 $= [2x^3 + 2x^2 - x]_1^2$
 $= (2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2) - (2 + 2 - 1) = 22 - 3 = 19$

ដូចនេះ: $I = \int_1^2 (3x^2 + 2x - 3) dx = 19$

ខ. $J = \int_0^1 (1 - 2e^x) dx = [x - 2e^x]_0^1$
 $= (1 - 2e) - (0 - 2e^0) = 3 - 2e$

ដូចនេះ: $J = \int_0^1 (2e^x + x - 1) dx = 3 - 2e$

គ. $K = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\ln|x| + \frac{1}{x} \right]_1^2$
 $= \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) - (\ln 1 + 1) = -\frac{1}{2} + \ln 2$

ដូចនេះ: $K = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = -\frac{1}{2} + \ln 2$

IV. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

ដោយកំពូលទាំងពីរមានអរដោនេ ០ ដូចគ្នា នោះអេលីប

មានផ្ចិត $I(0,0)$

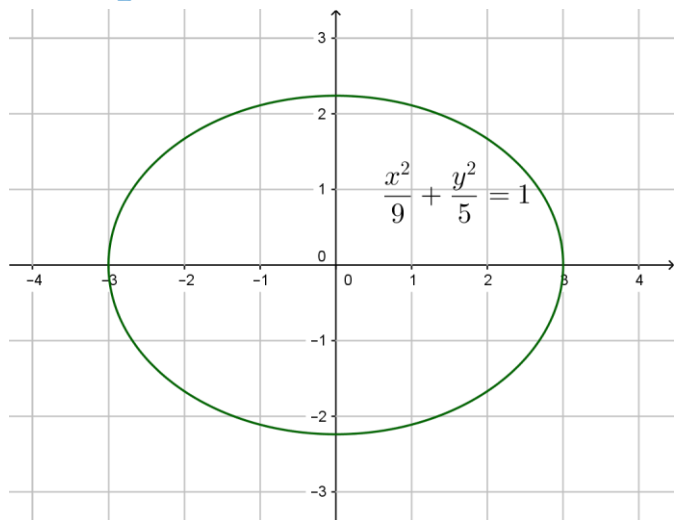
ហើយអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

សមីការមានរាង $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- កំពូល $V(\pm a, 0) = (\pm 3, 0)$ នោះ $a = 3$
- កំណុំ $F(c, 0) = (2, 0)$ នោះ $c = 2$
- $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - 2^2 = 5$

ដូចនេះ: $\text{សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

សង់អេលីប



V. f កំណត់លើ $\mathbb{R} - \{1\}$ ដោយ $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$ ក្រាប C

1. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$, $+\infty$ និង 1

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty$$

រកអាស៊ីមតូតដេក និងឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

2. a. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$\text{យើងមាន } f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{2x(x^2 - 2x + 1) - (2x - 2)(x^2)}{(x^2 - 2x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 2x^3 + 2x^2}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x}{(x^2 - 2x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x}{(x^2 - 2x + 1)^2}$$

បង្ហាញថា $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-2x^2 + 2x$

ដោយ $(x^2 - 2x + 1)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

ដូចនេះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-2x^2 + 2x$

b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

$$\text{ឲ្យ } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow -2x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-

ចំពោះ $x \in (0, 1)$ អនុគមន៍ f កើន

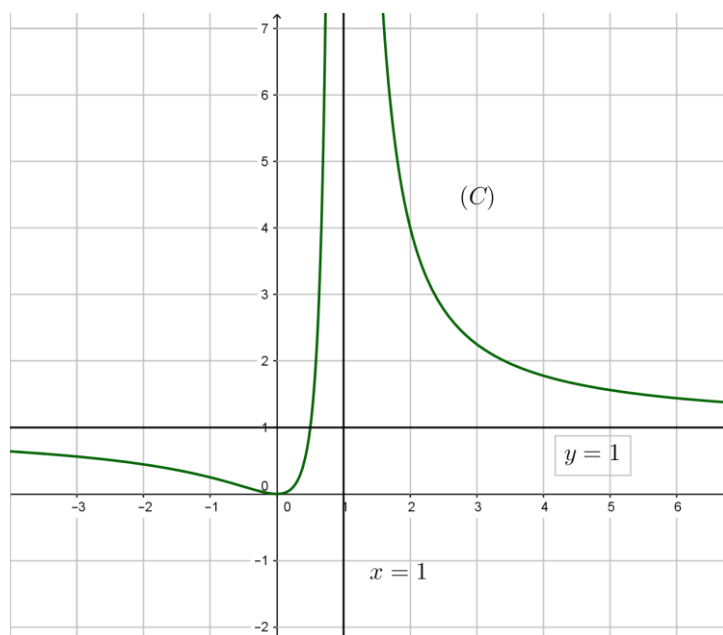
ចំពោះ $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ អនុគមន៍ f ថុះ

ត្រង់ $x = 0$ អនុគមន៍ f មានអតិបរមា $f(0) = 0$

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	1	0	$+\infty$	1

3. សង់ក្រាប C នៃ f



វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងប្រឡងប្រកួតប្រជែងសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាបនបត្រ: គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល: ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប: ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង:.....
មណ្ឌលប្រឡង:.....
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាបនបត្រ

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{4 - x}}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + 1}{2}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងស្បែងមួយមានប៊ូលស្រទាប់ ៣ និងប៊ូលខៀវ ២។ គេចាប់យកប៊ូលមួយក្នុងពេលតែមួយ ចេញពីស្បែងដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

- A. “ចាប់បានប៊ូលខៀវទាំងពីរ”។
- B. “ចាប់បានប៊ូលស្រទាំងពីរ”។
- C. “ចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌”។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I = \int_1^2 (3x^2 - 2x - 2) dx$

ខ. $J = \int_0^1 (2x - e^x) dx$

គ. $K = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} \right) dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) ប៉ារ៉ាបូល (P) មានកំពូលនៅត្រង់គល់ O នៃអ័ក្សអរដោនេ និងមានអ័ក្សអាប៉ស៊ីស $\overline{x'x}$ ជាអ័ក្សធ្នូ។

- ក. ចូររកសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) និងសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល (P) ដោយដឹងថាក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូលនេះកាត់តាមចំណុច $A(2, -2\sqrt{2})$ ។
- ខ. សង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ ។ គេតាង C ក្រាបរបស់វាលើតម្រុយអរតូណរម៉ាស់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

- 1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ បង្ហាញថា $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$ ។
- 2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។
- 3. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
- 4. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។
b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។
- 5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

អត្រាកំណែទិញសម្រួលទី២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាធុតិយភូមិ

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{4-x}}$ រាង $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{2} + \sqrt{4-x})}{(\sqrt{2} - \sqrt{4-x})(\sqrt{2} + \sqrt{4-x})}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{2} + \sqrt{4-x})}{2 - (4-x)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{2} + \sqrt{4-x}) = (2+2)(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{4-x}} = 8\sqrt{2}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + 1}{2} = \frac{e^{-0} + 1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + 1}{2} = 1$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(5, 2) = \frac{5!}{3!2!} = 10$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. “ចាប់បានប៊ូលខៀវទាំងពីរ”

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(2, 2) = 1$ ករណី

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{10}$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{1}{10}$ ។

B. “ចាប់បានប៊ូលសទាំងពីរ”

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(3, 2) = 3$ ករណី

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{10}$

ដូចនេះ: $P(B) = \frac{3}{10}$ ។

C. “ចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌”

ចំនួនករណីស្រប $n(C) = C(3, 1) \times C(2, 1) = 3 \times 2 = 6$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

ដូចនេះ: $P(C) = \frac{3}{5}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I = \int_1^2 (3x^2 - 2x - 2) dx = \left[3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2$

$= [x^3 - x^2 - 2x]_1^2 = (2^3 - 2^2 - 4) - (1^3 - 1^2 - 2)$

$= (8 - 4 - 4) - (1 - 1 - 2) = 2$

ដូចនេះ: $I = \int_1^2 (3x^2 - 2x - 2) dx = 2$

ខ. $J = \int_0^1 (2x - e^x) dx = [x^2 - e^x]_0^1$

$= (1 - e) - (0 - e^0) = 2 - e$

ដូចនេះ: $J = \int_0^1 (2x - e^x) dx = 2 - e$

គ. $K = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} \right) dx = [\ln|x-2|]_0^1 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

ដូចនេះ: $K = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} \right) dx = -\ln 2$

IV. ក រកសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ)

ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0, 0)$ និងមានអ័ក្ស
អាបស៊ីស ជាអ័ក្សឆ្លុះ(ដេក) នោះសមីការមានរាង $y^2 = 4px$

ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A(2, -2\sqrt{2})$ នោះគេបាន

$(-2\sqrt{2})^2 = 4p \cdot 2 \Leftrightarrow 8 = 8p \Rightarrow p = 1$

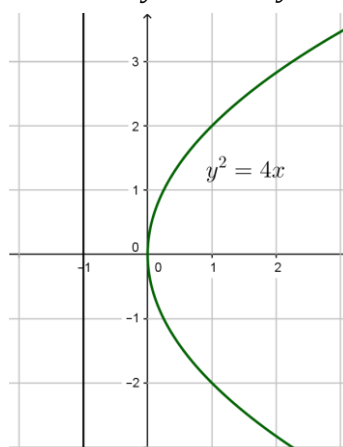
សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) : $x = -p = -1$

រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

ដូចនេះ: $\text{សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល គឺ } y^2 = 4x$

ខ. សង់ប៉ារ៉ាបូល

បើ $x = 1$ នោះ $y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$



V. f កំណត់ដោយ $C: f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

ដូចនេះ: $D = \mathbb{R} - \{2\}$

បង្ហាញថា $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$

យើងមាន $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$

$$= \frac{x(x - 2) - 3(x - 2) + 1}{x - 2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 3x + 6 + 1}{x - 2} = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$$

ដូចនេះ: $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 2 និង ត្រង់ $+\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 3 + \frac{1}{x - 2} \right) = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(x - 3 + \frac{1}{x - 2} \right) = \pm\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 + \frac{1}{x - 2} \right) = +\infty$

➢ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប

3. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 4 - 1}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

ដោយ $(x - 2)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in D$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម $x^2 - 4x + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

• ត្រង់ $x = 1$, $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី (+) ទៅ (-)
 នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមានៅ $f(1) = -3$

• ត្រង់ $x = 3$, $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី (-) ទៅ (+)

នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមានៅ $f(3) = 1$

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$						

4. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x - 3$ ជា

អាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 3)]$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\left(x - 3 + \frac{1}{x - 2} \right) - (x - 3) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x - 2} \right) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y = x - 3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

យក $C - d: f(x) - y = \frac{1}{x - 2}$ មានសញ្ញាដូច $x - 2$

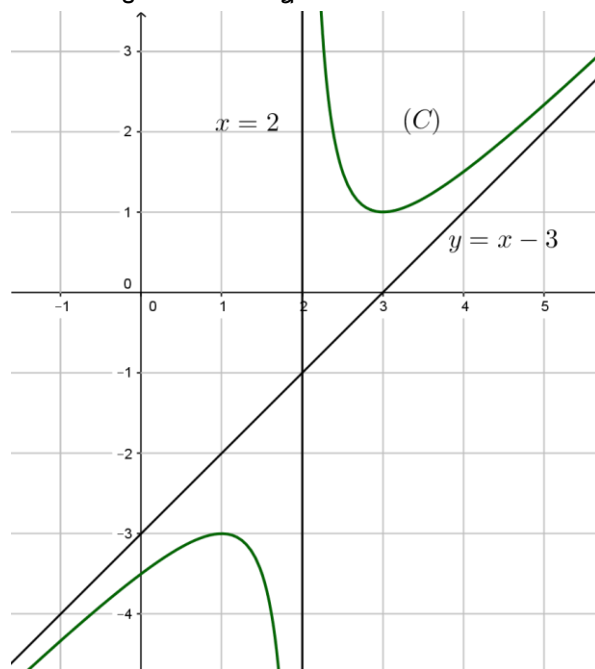
ឲ្យ $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - y_d$	-		+

• បើ $x \in (-\infty, 2)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d

• បើ $x \in (2, +\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d

5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d



សម័យប្រជុំ៖

မဏ္ဍလပြည့်စုံ.....

លេខបន្តប្រាំ.....លេខតុ.....

ឈ្មោះបេក្ខជន.....

ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាណ

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

$$\tilde{n}. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x + 2}{x^2 - 1} \qquad \mathfrak{Z}. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}} \qquad \tilde{n}. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x + 1)$$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងអាងចិញ្ចឹមត្រីមួយមានត្រីពណ៌ក្រហមចំនួន៤ និងត្រីពណ៌សចំនួន៣។ គេចាប់ត្រី២យកមកដាក់ក្នុងអាងថ្មី ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក. « ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ » ។

ខ. « ត្រីពណ៌សទាំងពីរ »។

គ. « ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌ »។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

$$\tilde{\text{ñ.}} \quad I = \int_0^2 (-3x^2 + x - 2) dx \qquad \mathfrak{Z.} \quad J = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx \qquad \tilde{\text{ñ.}} \quad K = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - x - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $4x^2 + 25y^2 = 100$ ។ ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូល និងកំណុំទាំងពីរ។

ខ. សង្ខេបលើបន្តៈ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ ហើយមានក្រាបតំណាង C ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ បង្ហាញថា $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$ ។

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ -1 និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

3. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។

4. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

អត្រាកំណត់ទិន្នន័យសម្រាប់០៣ឆ្នាំកំណត់ទិន្នន័យសម្រាប់សង្គម

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x-2)}{(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x + 2}{x^2 - 1} = -\frac{3}{2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x})}{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x})}{(x+3) - (3-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x})}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x})}{2} = \sqrt{3}$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}} = \sqrt{3}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x + 1)$ រាង $+\infty - \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(1 + \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}} \right)$$

$$= +\infty$$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x + 1) = +\infty$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(7,2) = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

ក. តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ « ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ »

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(4,2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ ករណី

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{21}$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{6}{21}$

ខ. តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ « ត្រីពណ៌សទាំងពីរ »

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(3,2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ ករណី

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

ដូចនេះ: $P(B) = \frac{1}{7}$

គ. តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ « ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌ »

ចំនួនករណីស្រប

$$n(C) = C(4,1) \times C(3,1) = \frac{4!}{1!(4-1)!} \times \frac{3!}{1!(3-1)!} = 4 \times 3 = 12$$

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

ដូចនេះ: $P(C) = \frac{4}{7}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I = \int_0^2 (-3x^2 + x - 2) dx = \left[-x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^2$

$$= (-8 + 2 - 4) - 0 = -10$$

ដូចនេះ: $I = \int_0^2 (-3x^2 + x - 2) dx = -10$

ខ. $J = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx = [2 \ln|x| + \ln|x+1|]_1^2$

$$= (2 \ln 2 + \ln|2+1|) - (2 \ln 1 + \ln|1|)$$

$$= 2 \ln 2 + \ln 3 + \ln 2 = 3 \ln 2 + \ln 3 = 3 \ln 2 + \ln 3$$

ដូចនេះ: $J = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} \right) dx = 3 \ln 2 + \ln 3$

គ. $K = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right]_1^2$

$$= \left(1 - 2 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \right) = -\frac{5}{4}$$

ដូចនេះ: $K = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - x - \frac{1}{x^2} \right) dx = -\frac{5}{4}$

IV. បង្ហាញថាសមីការ $4x^2 + 25y^2 = 100$ ជាសមីការអេលីប

គេបាន $\frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

សមីការ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ ជាសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមាន

ផ្ចិតនៅត្រង់គល់តម្រុយ O មានអ័ក្សធំជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ដូចនេះ: សមីការ $4x^2 + 25y^2 = 100$ ជាសមីការអេលីប

- រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបនេះ:

សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបមានរាង $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$

យើងទាញបាន $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$; $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

ដូចនេះអេលីប $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ មាន

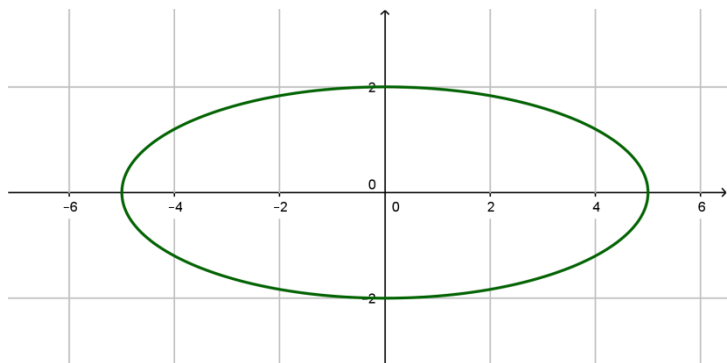
ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 2 \times 5 = 10$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2 \times 2 = 4$

កំពូល $V(\pm a, 0) = V(\pm 5, 0)$

កំណុំ $F(\pm c, 0) = F(\pm \sqrt{21}, 0)$

- សង់អេលីប



V. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x+1}$

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

មានន័យលុះត្រាតែ $x \neq -1$

ដូចនេះដែនកំណត់ $D \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ។

• បង្ហាញថា $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$

យើងមាន $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x+1} = \frac{x(x+1) + 4}{x+1} = x + \frac{4}{x+1}$

ដូចនេះ $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ -1 និងត្រង់ $+\infty$

➢ លីមីតនិងអាស៊ីមតូត

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{4}{x+1} \right) = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x+1} \right) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(x + \frac{4}{x+1} \right) = \pm\infty$

➢ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

3. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

យើងបាន $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4}{x+1} \right) = 0$ នោះ បន្ទាត់

ដែលមានសមីការ $y = x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

យក $C - d : [f(x) - x] = \frac{4}{x+1}$ មានសញ្ញាតាម $x+1$

➢ បើ $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ នោះក្រាប C កាត់បន្ទាត់ d

➢ បើ $x+1>0 \Rightarrow x>-1$ នោះក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ d នៅពេលដែល $x>-1$

➢ បើ $x+1<0 \Rightarrow x<-1$ នោះក្រាប C នៅក្រោមបន្ទាត់ d នៅពេលដែល $x<-1$

4. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x) = x + \frac{4}{x+1}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$

ដោយ $(x+1)^2 > 0$ គ្រប់ $x \in D$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម $x^2 + 2x - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -3$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

• ត្រង់ $x = -3$, $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី (+) ទៅ (-)

នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមានៅ $f(-3) = -5$

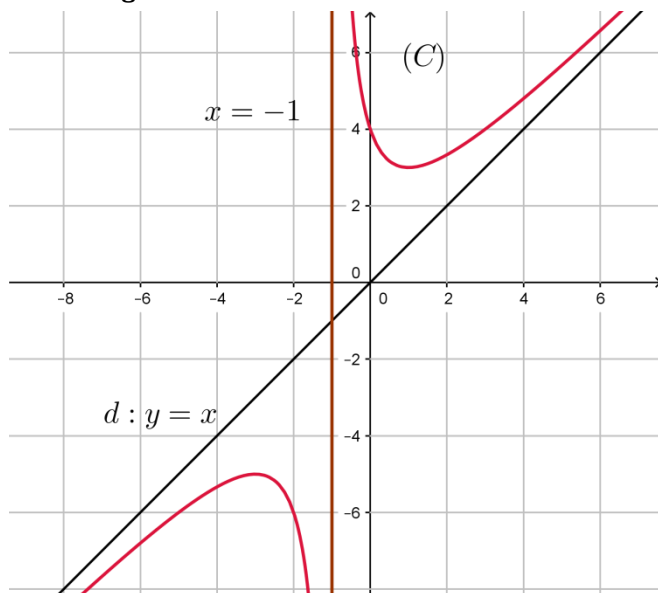
• ត្រង់ $x = 1$, $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី (-) ទៅ (+)

នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមានៅ $f(1) = 3$

សង់តារាងអថេរនៃ f

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\begin{array}{c} \\ 0 \\ \end{array}$	-	$\begin{array}{c} \\ 0 \\ \end{array}$	+
$f(x)$	$-\infty$	$\begin{array}{c} \nearrow -5 \\ \searrow \end{array}$	$-\infty$	$\begin{array}{c} +\infty \searrow \\ \nearrow 3 \end{array}$	$+\infty$

➢ សង់ក្រាប C



វិញ្ញាបនបត្រជ្រាបជ្រាលជ្រៅប្រឡងប្រចាំឆ្នាំ ២០២០
វិញ្ញាបនបត្រ គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖
មណ្ឌលប្រឡង៖
លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....
ឈ្មោះបេក្ខជន.....
ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាបនបត្រ

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$ ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x}$ គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 \ln x)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានបិទពណ៌ខៀវចំនួន៤ដើម និងបិទពណ៌ក្រហមចំនួន៥ដើម។ គេចាប់យកបិទ៤ដើមក្នុងពេលតែមួយចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A. « គេចាប់បានបិទទាំង៤សុទ្ធតែពណ៌ខៀវ » ។
- B. « គេចាប់បានបិទទាំង៤សុទ្ធតែពណ៌ក្រហម »។
- C. « គេចាប់បានមានបិទពីរពណ៌ក្រហម និងពីរខៀវ »។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int_0^3 (9x^2 + 6x - 5) dx$ ខ. $J = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ គ. $K = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) រកទម្រង់ស្តង់ដារសមីការអ៊ីពែបូលដែលមានកំណុំពីរ $(-5, 0)$ និង $(5, 0)$ និងមានកំពូលមួយ $(3, 0)$ ។ រួចសង់អ៊ីពែបូលនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$ មានក្រាប C ។

- 1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។
- 2. a. រកលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់។
b. ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតជេក និងឈរនៃក្រាប C ។
- 3. សិក្សាអថេរភាព និងសងតារាងអថេរភាពនៃ f ។
- 4. គណនា $f(-2), f(0), f(2)$ រួចសង់ក្រាប C ក្នុងតម្រុយ (o, i, j) ។

អត្រាកំណត់ចំណុចសរុប៖ ០៤ ចំណុចសរុបស្របច្បាប់

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

I. គណនាលីមីត

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{5}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x})}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3) - (3-x)}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x})} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 \ln x) \text{ រាង } +\infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2 \ln x}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\text{ដូចនេះ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 \ln x) = +\infty$$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(9, 4) = \frac{9!}{4!(9-4)!} = 126$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. « គេចាប់បានបីចំណុចទាំង៤សុទ្ធតែពណ៌ខៀវ »

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(A) = C(4, 4) = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{126}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(A) = \frac{1}{126}$$

B. « គេចាប់បានបីចំណុចទាំង៤សុទ្ធតែពណ៌ក្រហម »

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(B) = C(5, 4) = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{126}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(B) = \frac{5}{126}$$

C. « គេចាប់បានមានបីចំណុចពណ៌ក្រហមនិងពីរពណ៌ខៀវ »

ចំនួនករណីស្រប

$$n(C) = C(5, 2) \times C(4, 2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} \times \frac{4!}{2!(4-2)!} = 60 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$$

$$\text{ដូចនេះ: } P(C) = \frac{10}{21}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល:

$$\text{ក. } I = \int_0^3 (9x^2 + 6x - 5) dx$$

$$= \left[3x^3 + 3x^2 - 5x \right]_0^3 = (3 \times 27 + 27 - 15) - 0 = 93$$

$$\text{ដូចនេះ: } I = \int_0^3 (9x^2 + 6x - 5) dx = 93$$

$$\text{ខ. } J = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \left[\ln|x+1| \right]_0^1$$

$$= \ln|1+1| - \ln|0+1| = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } J = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2$$

$$\text{គ. } K = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \ln|x| + \frac{1}{x} \right]_1^2$$

$$= \left(1 - \ln 2 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \ln 1 + 1 \right) = \frac{1}{4} - \ln 2$$

$$\text{ដូចនេះ: } K = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{4} - \ln 2$$

VI. រកទម្រង់ស្តង់ដារសមីការអ៊ីពែបូល

ដោយអ៊ីពែបូលមានអ័ក្សដេនកំណុំ 0 ដូចគ្នា នោះអ័ក្សទទឹងជា

$$\text{អ័ក្សរាបស៊ីស សមីការមានរាង } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{កូអរដោនេកំណុំ } F(\pm c, 0) = (\pm c, 0) \Rightarrow c = 5$$

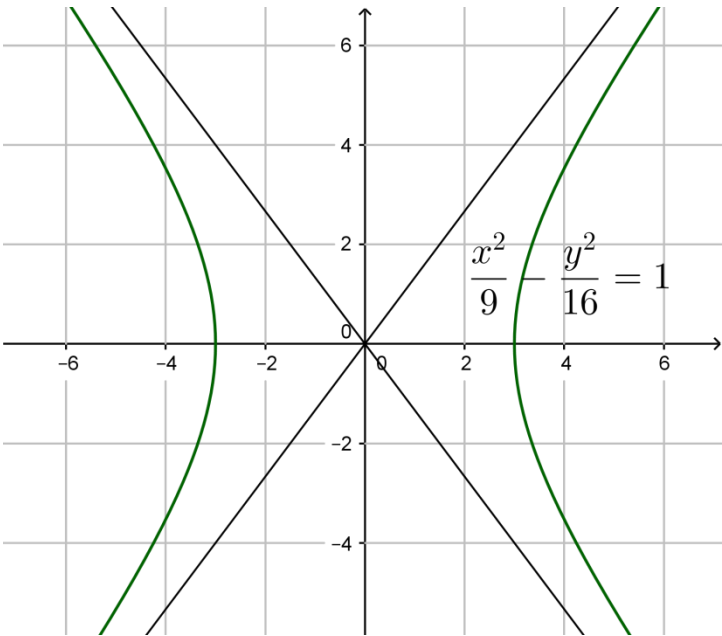
$$\text{កូអរដោនេកំពូល } V_1(a, 0) = (3, 0) \Rightarrow a = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារ } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

សងអ៊ីពែបូល

$$\text{សមីការអាស៊ីមតូត } y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{4}{3} x$$



V. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$

- រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f
 f មានន័យលុះត្រាតែ $x \neq \pm 1$
ដូចនេះដែនកំណត់ $D \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ។
- a. រកលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់។

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0} = \pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = \frac{3}{0} = \pm\infty$

b. ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និងឈរនៃក្រាប C
ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $y = 1$ ជា
អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)
ដោយ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x = -1$
ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)
និង $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x = 1$ ជា
អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

3. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

គេមាន $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 + 2x)'(x^2 - 1) - (x^2 - 1)'(x^2 + 2x)}{(x^2 - 1)^2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2x+2)(x^2-1) - (2x)(x^2+2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x + 2x^2 - 2 - 2x^3 - 4x^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 2x - 2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2(x^2 + x + 1)}{(x^2-1)^2} < 0 \quad \forall x \in D \end{aligned}$$

ព្រោះ $x^2 + x + 1 > 0, (x^2 - 1) > 0 \quad \forall x \in D$

➢ សង់តារាងអថេរនៃ f

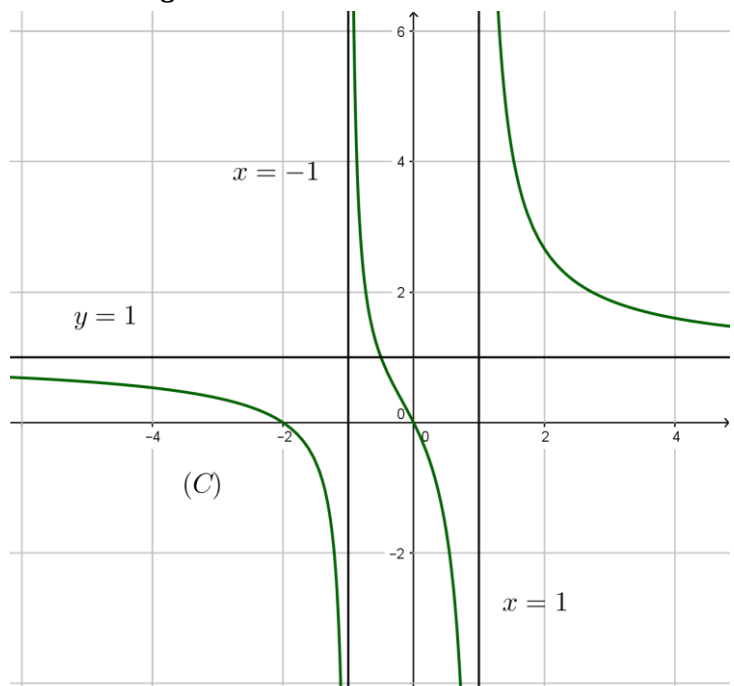
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-	-
$f(x)$	$1 \searrow$	$+\infty \searrow$	$+\infty \searrow$	1

4. គណនា $f(-2), f(0), f(2)$ រួចសង់ក្រាប C ក្នុងតម្រុយ $(0, i, j)$

គេមាន $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$

- $f(-2) = \frac{(-2)^2 - 2(-2)}{(-2)^2 - 1} = \frac{4+4}{4-1} = \frac{8}{3}$
- $f(0) = \frac{(0)^2 - 2(0)}{(0)^2 - 1} = \frac{0}{0^2 - 1} = 0$
- $f(2) = \frac{(2)^2 - 2(2)}{(2)^2 - 1} = \frac{4-4}{4-1} = \frac{0}{3} = 0$

➢ សង់ក្រាប C



វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងបណ្ឌិតប្រកបដោយសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាបនបត្រ គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល៖ ៩០ នាទី

ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖

មណ្ឌលប្រឡង៖

លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....

ឈ្មោះបេក្ខជន.....

ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាបនបត្រ

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 1}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2 - e^{2x})$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស៧០នាក់ ដែលក្នុងនោះមាន៤នាក់ជាសិស្សស្រីនិង៦នាក់ជាសិស្សប្រុស។ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុម ក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស៤នាក់ដោយចៃដន្យ យកទៅប្រកួតជាមួយក្រុមសិស្សនៃថ្នាក់ដទៃ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

- A: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី ។
- B: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស ។
- C: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបាន៥០%ជាសិស្សប្រុស ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $I = \int_0^2 (-2x^2 + 3x + 4) dx$ ខ. $J = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+e} \right) dx$ គ. $K = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $4x^2 - 9y^2 = -36$ ។

បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរនិងកំណុំទាំងពីរ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអ៊ីពែបូល រួចសង់អ៊ីពែបូល។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$ ហើយមានក្រាប C ។

- រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ បង្ហាញថា $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x-2}$ ។
- សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ ២ និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។
- a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។
b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។
- សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
- សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

**អត្រាកំណែវិញ្ញាសាជ្រៀមទី០៥ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ**

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 1}$ រាង $\frac{0}{0}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x-6)}{-(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x-6}{-(x+1)} = \frac{7}{2}$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 1} = \frac{7}{2}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}$ រាង $\frac{0}{0}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x})(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})}{(x+2) - (6-x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x})}{2(x-2)}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x}) = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}} = 8$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2 - e^{2x})$ រាង $+\infty - \infty$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(\frac{1}{e^{2x}} + \frac{x^2}{e^{2x}} - 1 \right) = -\infty$

ដូចនេះ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2 - e^{2x}) = -\infty$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(10, 4) = \frac{10!}{34(10-4)!} = 210$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី

ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(4, 4) = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1$ ករណី

គេបាន $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{210}$

ដូចនេះ: $P(A) = \frac{1}{210}$

B: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស

ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(6, 4) = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$ ករណី

គេបាន $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{15}{210}$

ដូចនេះ: $P(B) = \frac{15}{210}$

C: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបាន៥០%ជាសិស្សប្រុស

ចំនួនករណីស្រប

$n(C) = C(6, 2) \times C(4, 2) = \frac{6!}{2!(6-2)!} \times \frac{4!}{2!(4-2)!} = 90$ ករណី

គេបាន $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{90}{210}$

ដូចនេះ: $P(C) = \frac{90}{210}$

III. គណនារាំងតេក្រាល:

ក. $I = \int_0^2 (-2x^2 + 3x + 4) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_0^2$
 $= \left(-\frac{16}{3} + \frac{12}{2} + 8 \right) - 0 = -\frac{16}{3} + 6 + 8 = \frac{26}{3}$

ដូចនេះ: $I = \int_0^2 (-2x^2 + 3x + 4) dx = \frac{26}{3}$

ខ. $J = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+e} \right) dx = [\ln|x+1| - \ln|x+e|]_0^1$
 $= (\ln 2 - \ln|1+e|) - (\ln 1 - \ln|0+e|)$
 $= \ln 2 - \ln|1+e| - \ln 1 + \ln e = \ln 2 - \ln(1+e) + 1$

ដូចនេះ: $J = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+e} \right) dx = \ln 2 - \ln(1+e) + 1$

គ. $K = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{2}{x} \right]_1^2$
 $= \left(\frac{2^2}{2} - \ln 2 + 1 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - \ln 1 + \frac{2}{1} \right) = 3 - \ln 2 - \frac{1}{2} - 2$
 $= \frac{1}{2} - \ln 2$

ដូចនេះ: $K = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} - \ln 2$

VI. គេមានសមីការ $4x^2 - 9y^2 = -36$

➢ បង្ហាញថាសមីការ $4x^2 - 9y^2 = -36$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល និងរកតួអក្សរដោនៃកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរ

គេបាន $\frac{4x^2}{-36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{-36}{-36} \Leftrightarrow \frac{x^2}{-9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ សមីការមានរាង $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ជាសមី

ការស្តង់ដារនៃអ៊ីពែបូលដែល មានផ្ចិត (0,0) និងអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សឈរ។

➢ រក តួអក្សរដោនៃកំពូល កំណុំទាំងពីរ យើងមាន $a = 2, b = 3$

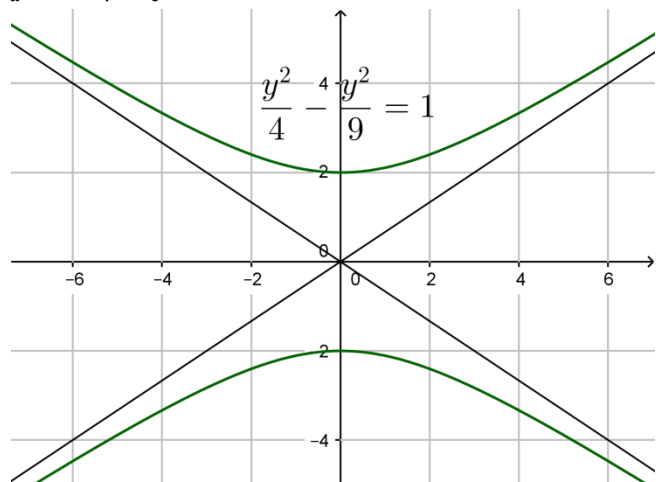
និង $c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

- កូអរដោនេកំពូល $V(0, \pm a) \Rightarrow V(0, \pm 2)$
- កូអរដោនេកំណុំ $F(0, \pm c) \Rightarrow F(0, \pm \sqrt{13})$

➢ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអ៊ីបេបូល

$$y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{2}{3}x$$

រូបសង់អ៊ីបេបូល



V. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

f មានន័យលុះត្រាតែ $x \neq 2$

ដូចនេះដែនកំណត់ $D \in \mathbb{R} - \{2\}$ ។

- បង្ហាញថា $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x - 2}$

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } f(x) &= \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - x + 2 - 1}{x - 2} = \frac{x(x - 2) - (x - 2) - 1}{x - 2} \\ &= \frac{x(x - 2)}{x - 2} - \frac{x - 2}{x - 2} - \frac{1}{x - 2} = x - 1 - \frac{1}{x - 2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } f(x) = x - 1 - \frac{1}{x - 2}$$

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$

➢ លីមីតនិងអាស៊ីមតូត

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 1 - \frac{1}{x - 2} \right) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 - \frac{1}{x - 2} \right) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(x - 1 - \frac{1}{x - 2} \right) = \pm\infty$

➢ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x = 2$ ជា

អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

3. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

$$\text{យើងមាន } f(x) = x - 1 - \frac{1}{x - 2}$$

$$\text{យើងបាន } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x - 2} \right) = 0$$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ

$y = x - 2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

$$\text{យក } C - d : [f(x) - (x - 1)] = -\frac{1}{x - 2}$$

មានសញ្ញាសាតាម $x - 2$

- បើ $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ នោះក្រាប C កាត់បន្ទាត់ d
- បើ $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ នោះក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ d
- បើ $x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$ នោះក្រាប C នៅក្រោមបន្ទាត់ d

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C នៃ f

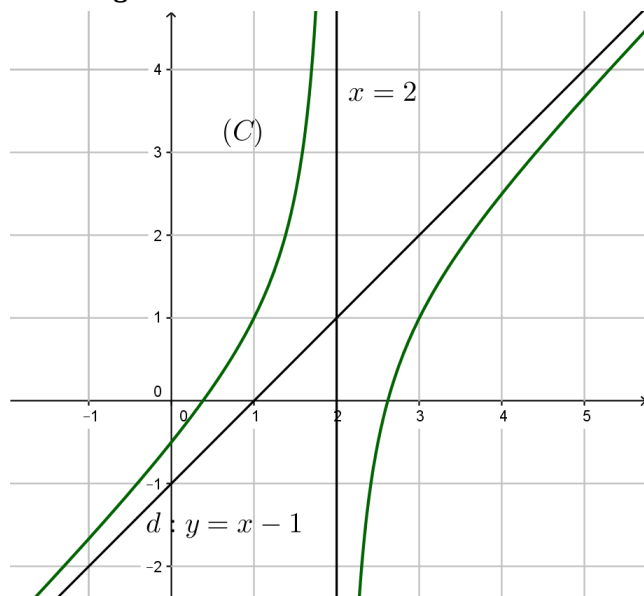
$$\text{យើងមាន } f(x) = x - 1 - \frac{1}{x - 2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{(x - 2)^2} > 0, \forall x \in D$$

សង់តារាងអថេរនៃ f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

➢ សង់ក្រាប C



វិញ្ញាបនបត្រប្រឡងបណ្ឌិតប្រឡងបណ្ឌិតសិក្សាគណិតវិទ្យា

វិញ្ញាបនបត្រ គណិតវិទ្យា (ផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)

រយៈពេល៖ ៩០ នាទី

ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖

មណ្ឌលប្រឡង៖

លេខបន្ទប់.....លេខតុ.....

ឈ្មោះបេក្ខជន.....

ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....

ប្រធានវិញ្ញាបនបត្រ

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}}{x^2 - 1}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2 - e^{2x})$$

II. (១០ពិន្ទុ) នៅក្នុងថង់មួយមានឃ្លីស១ ក្រហម៣ និងឃ្លីខៀវ៥។ គេចាប់យកឃ្លីចំនួន៣ ដោយចៃដន្យក្នុងពេលតែមួយ។

រកប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

A. “ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងបី”។

B. “ចាប់បានឃ្លីសមួយ និងខៀវពីរ”។

C. “ចាប់បានឃ្លីបីមានពណ៌ខុសគ្នា”។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } I = \int_1^2 (2x^3 + 3x^2 - x) dx$$

$$\text{ខ. } J = \int_0^1 (1 + x - e^x) dx$$

$$\text{គ. } K = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

IV. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបដែលមានកំពូលទាំងពីរជាចំណុច (0,5) និង (0,-5) និងមានកំណុំមួយនៅត្រង់ចំណុច (0,2) រួចសង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ ហើយមានក្រាប C ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។
2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 0 និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។
3. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។
b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។
4. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

ប្រធានកម្មវិធីសិក្សាស្រាវជ្រាវ និងស្រាវជ្រាវ

ប្រធានកម្មវិធីសិក្សាស្រាវជ្រាវ និងស្រាវជ្រាវ

I. គណនាលីមីត

$$ក. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+5}{x+1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5} = \frac{5}{3}}$$

$$ខ. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}}{x^2 - 1} \text{ រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1})}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3-x) - (x+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+1)(\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{-2}{(1+1)(\sqrt{2} + \sqrt{2})} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}}{x^2 - 1} = -\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

$$គ. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2 - e^{2x}) = 1 - 0^2 - e^{2 \cdot 0} = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2 - e^{2x}) = 0}$$

$$II. \text{ ចំនួនករណីអាច } n(S) = C(9, 3) = \frac{9!}{6!3!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84 \text{ ករណី}$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. “ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងបី”

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(A) = C(5, 3) = \frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(A) = \frac{5}{42}}$$

B. “ចាប់បានឃ្លីសមួយ និងខៀវពីរ”

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(B) = C(1, 1) \times C(5, 2) = 10 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(B) = \frac{5}{42}}$$

C. “ចាប់បានឃ្លីបីមានពណ៌ខុសគ្នា”

$$\text{ចំនួនករណីស្រប } n(C) = C(1, 1) \times C(3, 1) \times C(5, 1) = 1 \times 3 \times 5 = 15 \text{ ករណី}$$

$$\text{គេបាន } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15}{84} = \frac{5}{28}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{P(C) = \frac{5}{28}}$$

III. គណនាអាំងតេក្រាល:

$$ក. I = \int_1^2 (2x^3 + 3x^2 - x) dx = \left[2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} + x^3 - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{2^4}{2} + 2^3 - \frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1^4}{2} + 1^3 - \frac{1^2}{2} \right)$$

$$= (8 + 8 - 2) - 1 = 13$$

$$ខ. J = \int_0^1 (1 + x - e^x) dx = \left[x + \frac{x^2}{2} - e^x \right]_0^1$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} - e^1 \right) - \left(0 + \frac{0}{2} - e^0 \right) = \frac{5}{2} - e$$

$$គ. K = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\ln|x+2| + \frac{1}{x} \right]_1^2$$

$$= \left(\ln|4| + \frac{1}{2} \right) - \left(\ln|3| + 1 \right) = -\frac{1}{2} + \ln \frac{4}{3}$$

IV. ក. រកសមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

ដោយកំពូលទាំងពីរមានអាប់ស៊ីស 0 ដូចគ្នា នោះអេលីប

មានផ្ចិត $I(0, 0)$ ហើយអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ

$$\text{សមីការមានរាង } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\bullet \text{ កំពូល } V(0, \pm a) = (0, \pm 5) \text{ នោះ } a = 5$$

$$\bullet \text{ កំណុំ } F(0, c) = (0, 2) \text{ នោះ } c = 2$$

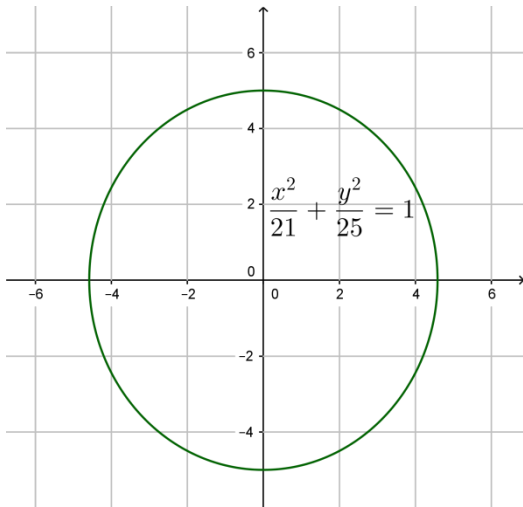
$$\bullet c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 2^2 = 21$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{21}$$

ដូចនេះ

$$\text{សមីការស្តង់ដារនៃអេលីប៊ីប៊ីគឺ } \frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1$$

ខ សង់អេលីប៊ីប



V. គេមានអនុគមន៍ f ដោយ $C: f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x \neq 0$

ដូចនេះ: $D = \mathbb{R} - \{0\}$

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; 2 និង $+\infty$

យើងមាន $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$

➢ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប

3. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\left(x + \frac{1}{x}\right) - x\right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y=x$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

យក $C-d: f(x) - y = \frac{1}{x}$ មានសញ្ញាដូច x

ឲ្យ $x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y_d$	$-$	$ $	$+$

• បើ $x \in (-\infty, 0)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d

• បើ $x \in (0, +\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d

4. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x) = x + \frac{1}{x}$

នាំឲ្យ $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

ដោយគ្រប់ $x \in D, x^2 > 0$

អនុគមន៍ f មានសញ្ញាតាម $x^2 - 1$

ឲ្យ $x^2 - 1 = 0$

មានឫស $x_1 = 1, x_2 = -1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

• ត្រង់ $x=1$ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាដែល $f(-1) = -2$

• ត្រង់ $x=3$ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាដែល $f(1) = 2$

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$ $	2	$+\infty$	

5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d

