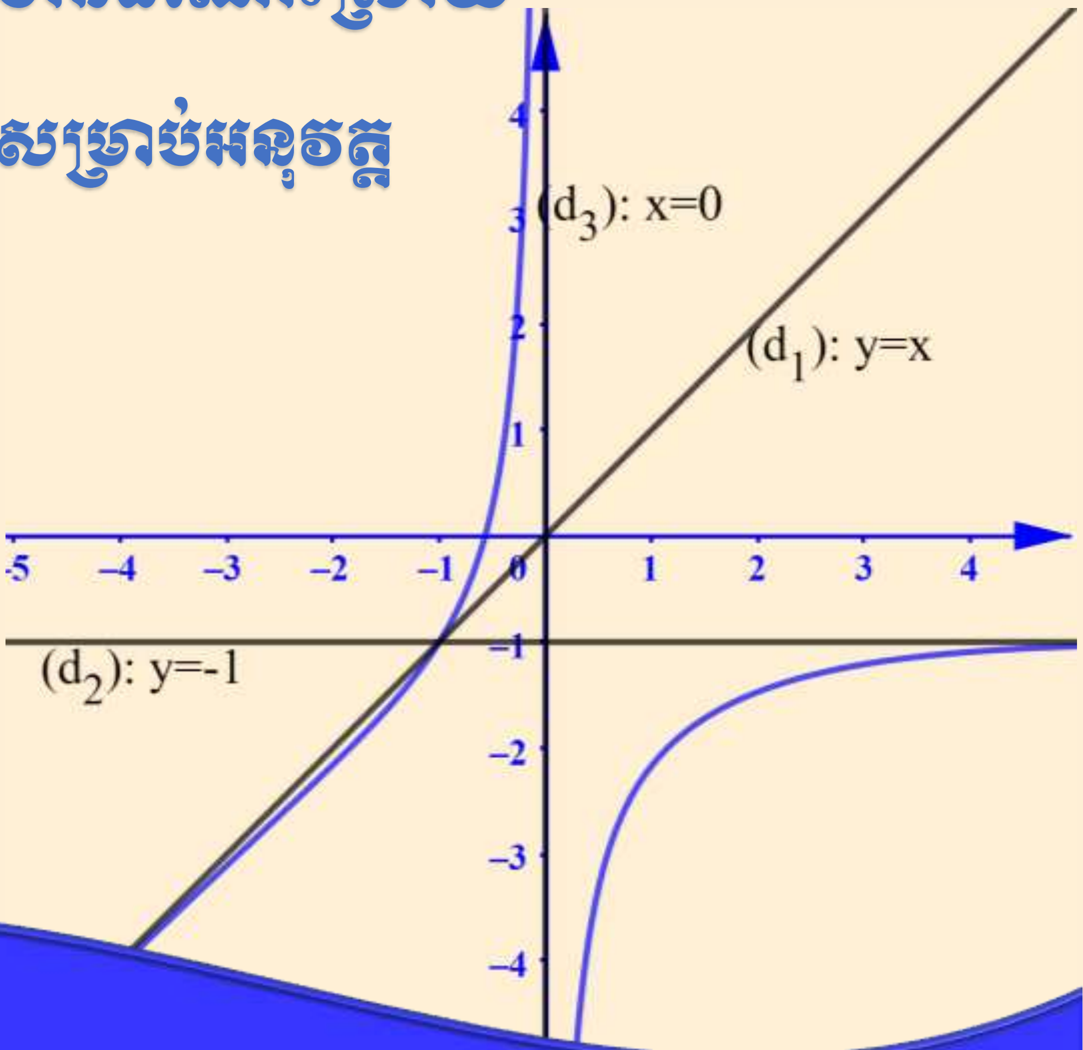
វិទ្យាល័យ ហ៊ុន សែន កំពង់ពោធិ៍

រៀបរៀងដោយ សោម សីលា

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា

រួមមាន៖

- វិញ្ញាសា មានដំណោះស្រាយ
- វិញ្ញាសា សម្រាប់អនុវត្ត



ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សារបស់ក្រសួងអប់រំយុវជន និង កីឡា

មណ្ឌលប្រឡង ---
លេខបន្ទប់: -------------------- **លេខ**------------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន: --

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. (១០ពិន្ទុ) បេក្ខជនម្នាក់បានទាញយកសំណួរផ្ទាល់មាត់ **3** សំណួរព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពី **12** សំណួរ ដែលរៀបចំដោយមេប្រយោគប្រឡង។ក្នុងនោះ មាន **7** សំណួរពីជគណិត, **3**សំណួរអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ, **2** សំណួរធរណីមាត្រ ។ ចូរគណនាប្រូបាប ដើម្បីឲ្យៈ

ក.សំណួរទាំង **3** ជាសំណួរពិជគណិត ។

ខ.មានសំណួរតែមួយគត់ **1** ជាសំណួរពិជគណិត ។

គ. សំណួរទាំង **3** ខុសៗគ្នា ។

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-x\right]$ ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$ គ. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\sqrt{3}+i$ និង $z_2=2\left(-\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ ។

១. សរសេរ z_1 , z_2 និង $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

២. សរសេរផលគុណ $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។ ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I}=\int_0^1\left(2-3x+x^2\right)dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}-1\right)dx$ និង $\mathrm{K}=\int_{-1}^{0}\left(2x-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)dx$ ។

V. (១០ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(\mathrm{E}):\ y''-4y'+3y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=4$ និង $y'(0)=6$ ។

VI. (២៥ពិន្ទុ) **A.**បង្ហាញថាសមីការអេលីប $9x^2+25y^2+90x-150y+225=0$ នេះប៉ះអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង អ័ក្សអរដោនេ។ រួចកំណត់កូអរដោនេនៃ កំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអេលីប រួចសង់រូប ។

B.ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $\mathrm{A}(2;3;4)$, $\mathrm{B}(3;5;6)$, $\mathrm{C}(4;6;7)$ និង $\mathrm{D}(3;4;5)$ ។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោ ABCD ។

គ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A , B និង D ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ)គេមានអនុមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{e^x-1}{x}$ ។គេតាង ដោយ (C) ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយ អតូណម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ។
2. ចូរស្រាយថាបន្ទាត់ $(d):\ y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) កាលណា $x\to-\infty$ ។
3. ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\dfrac{(x-1)\left(x+1-e^x\right)}{x^2}$ ។
4. គេដឹងថា $e^x\geq x+1$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។ ចូរបញ្ជាក់សញ្ញារបស់ $f'(x)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ f ។
5. គណនា $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$ និង $f(3)$ រួចទាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរ α និង β ដែល $-2<\alpha<-1$ និង $2<\beta<3$ ។
6. ចូរសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d) ។ គេយក $\dfrac{e^3-1}{3}=6.23$ និង $\dfrac{e^{-2}-1}{2}=-0.43$, $e^{-1}=0.37$, $\dfrac{e^2-1}{2}=3.15$ ។

អត្រាកំណែ

I. គណនាប្រូបាប ដើម្បីឲ្យៈ

ក. សំណួរទាំង 3 ជាសំណួរពិជគណិត

គេបាន ចំនួនករណីអាចគឺ $n(S)=C(12,3)$

$$n(S)=\frac{12!}{(12-3)!3!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{9!\times3\times2\times1}=220 \text{ ករណី}$$

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបានសំណួរទាំង៣ ជាសំណួរពិជគណិត

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ A គឺ $n(A)=C(7,3)$

$$n(A)=\frac{7!}{(7-3)!3!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{4!\times3\times2\times1}=35 \text{ ករណី}$$

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{35}{220}=\frac{7}{44}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{7}{44}}$

ខ. មានសំណួរតែមួយគត់ 1 ជាសំណួរពិជគណិត

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបានសំណួរតែមួយគត់1ជាសំណួរពិជគណិត

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ B គឺ $n(B)=C(7,1)\times C(5,2)$

$n(B)=7\times10=70$ ករណី

(ឬ $n(B)=C(7,1)\times C(3,2)+C(7,1)\times C(2,2)$
$+C(7,1)\times C(3,1)\times C(2,1)=70$ ករណី)

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{70}{220}=\frac{7}{22}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{7}{22}}$

គ. សំណួរទាំង 3 ខុសៗគ្នា

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលបានសំណួរទាំង 3 ខុសៗគ្នា

គេបានចំនួនករណីស្របនៃ C គឺ

$n(C)=C(7,1)\times C(3,1)\times C(2,1)=7\times3\times2=42$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{42}{220}=\frac{21}{110}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{21}{110}}$

II. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-x\right]$ រាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=\frac{4}{1+1}=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-x\right]=2}$

ខ. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{1-\cos x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2x}{x^2}\times\frac{x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot2\right)^2\right)=1^2\times(1\cdot2)^2=4$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{1-\cos x}=4}$

គ. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{1+\sin x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{1+\sin x}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2x}{1+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)=1-(-1)=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{1+\sin x}=2}$

III. យើងមាន $z_1=-\sqrt{3}+i$ និង $z_2=2\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

១. សរសេរ z_1 , z_2 និង $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេបាន $z_1=-\sqrt{3}+i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$$z_2=2\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_1\times z_2=2\times2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$=4\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right);\ z_2=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\ z_1\times z_2=4\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)\end{array}}$$

២. សរសេរផលគុណ $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។ ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

គេបាន

$$z_1\times z_2=\left(-\sqrt{3}+i\right)\times2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{6}i-\sqrt{2}i+\sqrt{2}i^2=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1\times z_2=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i}$

ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

យើងមាន $z_1\times z_2=4\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

$$=4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right]=4\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)$$

ផ្ទឹម $z_1\times z_2$ គេបាន

$$\begin{cases}4\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}-\sqrt{2}\\ -4\cos\frac{\pi}{12}=-\sqrt{6}-\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

ដូចនេះៈ $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ ;\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាលៈ

$$I=\int_0^1\left(2-3x+x^2\right)dx$$

$$=\left[2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\left(2-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right)-0=\frac{5}{6}$$

ដូចនេះៈ $\boxed{I=\frac{5}{6}}$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos x-1\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-0=1$$

ដូចនេះៈ $\boxed{J=1}$

$$K=\int_{-1}^0\left(2x-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx=\left[x^2+\frac{1}{x-1}\right]_{-1}^0$$

$$=\left(0^2+\frac{1}{0-1}\right)-\left(1+\frac{1}{-2}\right)=-1-1+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

ដូចនេះៈ $\boxed{K=-\frac{3}{2}}$

V. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ $(E): y''-4y'+3y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-4\lambda+3=0$ មានឫស $\lambda_1=1;\lambda_2=3$

នាំឱ្យចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}\ ;\ A,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{x}+Be^{3x}\ ;\ A,B\in\mathbb{R}$

ខ.រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=4$ និង $y'(0)=6$

យើងមាន $y=Ae^x+Be^{3x}$ នាំឱ្យ $y'=Ae^x+3Be^{3x}$

គេបាន $\begin{cases}y(0)=4\\ y'(0)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=4\\ A+3B=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\ B=1\end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) គឺ $\boxed{y=3e^x+e^{3x}}$

VI. A.បង្ហាញថាសមីការអេលីប $9x^2+25y^2+90x-150y+225=0$ នេះប៉ះអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង អ័ក្សអរដោនេ លុះត្រាតែ $|h|=a\ ;|k|=b$

$9x^2+25y^2+90x-150y+225=0$

$\Leftrightarrow\ 9\left(x^2+10x\right)+25\left(y^2-6y\right)+225=0$

$\Leftrightarrow\ 9\left(x^2+10x+5^2-5^2\right)+25\left(y^2-6y+3^2-3^2\right)+225=0$

$\Leftrightarrow\ 9\left(x^2+10x+25\right)+25\left(y^2-6y+9\right)-9\times25-25\times9+225=0$

$\Leftrightarrow\ 9(x+5)^2+25(y-3)^2=225$

$\Leftrightarrow\ \frac{(x+5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

$\Leftrightarrow\ \frac{(x+5)^2}{5^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1$

គេបាន $h=-5,k=3$, $a=5$, $b=3$

ដោយ $|h|=a=5$ និង $k=b=3$

ដូចនេះៈ អេលីប $9x^2+25y^2+90x-150y+225=0$ នេះប៉ះអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង អ័ក្សអរដោនេ។

- កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអេលីប រួចសង់រូប

យើងមាន $\frac{(x+5)^2}{5^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1$ មានអ័ក្សធំស្របអ័ក្ស $(x'ox)$

គេបានសមីការស្តង់ដាអេលីបគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

នាំឱ្យ $h=-5,k=3$, $a=5$, $b=3$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$

- កំពូល $V_1(h-a\ ,\ k)\Rightarrow V_1(-10\ ,3)$

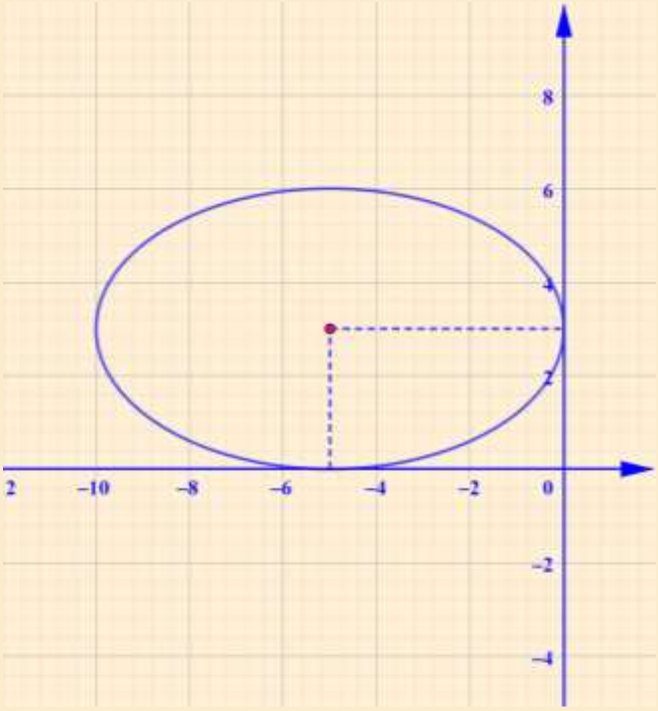
  $V_2(h+a\ ,\ k)\Rightarrow V_2(0\ ,3)$

- កំណុំ $F_1(h-c\ ,\ k)\Rightarrow F_1(-9,3)$

  $F_2(h+c\ ,\ k)\Rightarrow F_2(-1,3)$

ដូចនេះៈ $\boxed{V_1(-10,3)\ ;\ V_2(0,3)\ ;\ F_1(-9,3)\ ;\ F_2(-1,3)}$

- សង់រូប



B. យើងមានចំណុច $A(2;3;4)$, $B(3;5;6)$, $C(4;6;7)$ និង $D(3;4;5)$

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ និង $\overrightarrow{CD}$ គេបាន

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}$$
$$=(3-2)\vec{i}+(5-3)\vec{j}+(6-4)\vec{k}$$
$$=\boxed{\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{AC}=(4-2)\vec{i}+(6-3)\vec{j}+(7-4)\vec{k}=\boxed{2\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{AD}=(3-2)\vec{i}+(4-3)\vec{j}+(5-4)\vec{k}=\boxed{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{BC}=(4-3)\vec{i}+(6-5)\vec{j}+(7-6)\vec{k}=\boxed{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{BD}=(3-3)\vec{i}+(4-5)\vec{j}+(5-6)\vec{k}=\boxed{-\vec{j}-\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{CD}=(3-4)\vec{i}+(4-6)\vec{j}+(5-7)\vec{k}=\boxed{-\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}}$$

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោ ABCD

រូបមន្ត $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&2\\1&1&1\end{vmatrix}=(2-2)\vec{i}-(1-2)\vec{j}+(1-2)\vec{k}$$
$$=\vec{j}-\vec{k}$$

នាំឱ្យ $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $S=\sqrt{2}$ ឯកតាផ្ទៃ។

គ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A , B និង D

ដោយប្លង់ កាត់តាមចំណុច $A(2;3;4)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(0;1;-1)$ គឺ

$(P): a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$

$\Leftrightarrow (0)(x-2)+(1)(y-3)+(-1)(z-4)=0$

$\Leftrightarrow y-z+1=0$

ដូចនេះ $\boxed{(P):\ y-z+1=0}$

VII. មានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{e^x-1}{x}$

1. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=(+\infty)(1+0-\infty+0)=(+\infty)(-\infty)=\boxed{-\infty}$$

(ព្រោះ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$)

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2-\frac{e^x-1}{x}\right)=-\infty-\frac{0-1}{-\infty}=\boxed{-\infty}$$

(ព្រោះ: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$)

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(x+2-\frac{e^x-1}{x}\right)=2-1=\boxed{1}$$

(ព្រោះ: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$)

2. ស្រាយថាបន្ទាត់ $(d): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C ខាង $-\infty$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+2-\frac{e^x-1}{x}-(x+2)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{e^x-1}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{0-1}{-\infty}=0$$

$\Leftrightarrow 0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(d): y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C ខាង $-\infty$ ។

3. ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x+1-e^x)}{x^2}$$

យើងមាន $f(x)=x+2-\dfrac{e^x-1}{x}$

$$f'(x)=1-\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{x^2-xe^x+e^x-1}{x^2}$$
$$=\frac{x^2-1-e^x(x-1)}{x^2}$$
$$=\frac{(x-1)(x+1)-e^x(x-1)}{x^2}$$
$$=\frac{(x-1)(x+1-e^x)}{x^2}\ \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+1-e^x)}{x^2}$

4. បញ្ជាក់សញ្ញារបស់ $f'(x)$

យើងមាន $e^x\ge x+1$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះ $x+1-e^x\le0$

ដោយ $x^2>0\,;\,x\in\mathbb{R}-\{0\}$ នាំឱ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x-1$ និង $x+1-e^x$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x+1-e^x$		$-$	|	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

- ចំពោះគ្រប់ $x\in(-\infty\,,1)$ នាំឱ្យ $f'(x)>0$
- ចំពោះគ្រប់ $x\in(1\,,+\infty)$ នាំឱ្យ $f'(x)<0$
- ចំពោះ $x=1$ នាំឱ្យ $f'(x)=0$ ។

ចំណុចបរមា $f(1)=1+2-\dfrac{e-1}{1}=3-1.72=\boxed{1.28}$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1.28	$\searrow$	$-\infty$

5. គណនា $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$ និង $f(3)$ រួចទាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរ α និង β ដែល $-2<\alpha<-1$ និង $2<\beta<3$

$$f(-2)=-2+2-\frac{e^{-2}-1}{-2}=\boxed{-0.43}$$

$$f(-1)=-1+2-\frac{e^{-1}-1}{-1}=1+0.37-1=\boxed{0.37}$$

$$f(2)=2+2-\frac{e^{2}-1}{2}=4-3.15=\boxed{0.85}$$

$$f(3)=3+2-\frac{e^{3}-1}{3}=5-6.23=\boxed{-1.23}$$

- ទាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរ α និង β ដែល $-2<\alpha<-1$ និង $2<\beta<3$

ដោយ $f(-2)\times f(-1)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $-2<\alpha<-1$ ។

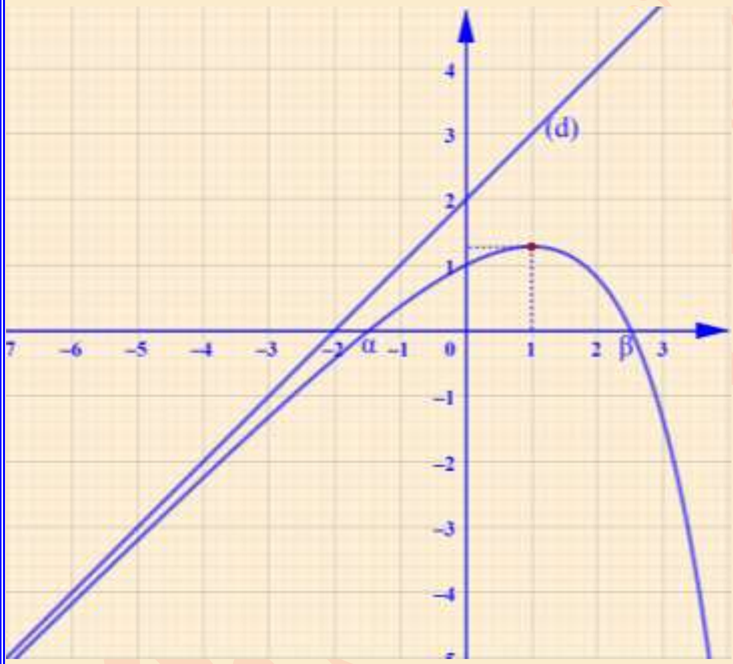
ដោយ $f(2)\times f(3)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល $f(x)=0$ មានឫស β តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $2<\beta<3$ ។

ដូចនេះ សមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរ α និង β ដែល $-2<\alpha<-1$ និង $2<\beta<3$ ។

6. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ (d)

$(d): y=x+2$,

x	0	-2
y	2	0



មណ្ឌលប្រឡង ---

លេខបន្ទប់: -------------------- លេខ----------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:---

ហត្ថលេខាបេក្ខជន: --

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{x+1}-2}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{-3x}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$ ។

II. (១០ពិន្ទុ) គេចាប់យកសំបុត្រ ២ សន្លឹកព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីប្រអប់មួយដែលមានសំបុត្រចំនួន ១៥សន្លឹកចុះលេខពី១ ដល់១៥។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. សំបុត្រទាំង ២ មានលេខជាចំនួនបឋម។

B. សំបុត្រទាំង ២ មានផលបូកលេខជាចំនួនគូ ។

C. សំបុត្រទាំង ២ មានផលគុណលេខជាចំនួនគូ។

III. (១៥ពិន្ទុ) **ក.**ដោះស្រាយសមីការនៅក្នុង $\mathbb{C}$ នៃសមីការ $z^2-2z+4=0$ យើងតាងដោយ z_1 ជាឫសរបស់សមីការផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន និង តាងដោយ z_2 ឫសមួយទៀត។

ខ. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ។

គ. ចូរបង្ហាញថា $z_1^{2019}+z_2^{2019}=-2^{2020}$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2 (x-1)(2x+1)dx$; $J=\int_1^e\left(\dfrac{\ln x}{x}+1\right)dx$ និង $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)-2\sin^2 x+1\right]dx$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ) **១.** ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(1;1;-2)$; $B(1;2;-2)$; $C(0;1;1)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=3\vec{i}+\vec{k}$ ។

1. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។

2. គណនា $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ និង $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។

3. ចូរបង្ហាញថាប្លង់ (ABC) មានសមីការ $3x+z-1=0$ ។

២. គេឱ្យសមីការ $(E): 9x^2+16y^2=144$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ រួចសង់ (E) ។

ខ. គេឱ្យ A និង B ជាពីរចំណុចនៅលើអេលីប (E) ដែល $AF_1+BF_2=8$ ។ គណនា AF_2+BF_1 ។

VI. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''+2y'+y=0$ ។ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y=(2x+1)e^{-x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ)គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ ហើយ C ជាខ្សែកោងតំណាងអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x)=(1-x)(1+x)e^{-x}$

3. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

5. សិក្សាអត្ថិភាពនិង សញ្ញាឫសរបស់សមីការ $me^x=(x+1)^2$ ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

6. កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដែលអនុគមន៍ F កំណត់ដោយ $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ ជាព្រីមីទីវនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។

7. តាង α ជាចំនួនពិតខុសពី0 ដែល $S(\alpha)$ ជាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ (C) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស , អ័ក្សអរដោនេ និង សមីការបន្ទាត់ឈរ $x=\alpha$ ។

a. គណនា $S(\alpha)$ ជាអនុគមន៍នៃ α ។

b. ស្រាយបំភ្លឺថា $F(0)+\lim\limits_{\alpha\to+\infty} S(\alpha)=0$ ។ គេឱ្យ $\dfrac{4}{e}=1.47$

អត្រាកំណែ

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{\sqrt{x+1}-2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+3x+3^2)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-2^2}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}(x^2+3x+9)(\sqrt{x+1}+2)$$

$$=(9+9+9)(2+2)=27\times4=\boxed{108}$$

ខ. $\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{-3x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{-3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}\times\left(\frac{5}{-3}\right)=1\times\left(\frac{5}{-3}\right)=\boxed{-\frac{5}{3}}$$

គ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos2x}{\cos x-\sin x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos2x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x)$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}=\boxed{\sqrt2}$$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A. សំបុត្រទាំង ២ មានលេខជាចំនួនបឋម

គេបាន ចំនួនករណីអាចគឺ $n(S)=C(15,2)=\frac{15!}{(15-2)!2!}$

$$=\frac{15\times14\times13!}{13!\times2\times1}=105 \text{ ករណី}$$

ដោយសំបុត្រមានចំនួន ១៥សន្លឹកចុះលេខពី១ ដល់១៥ នោះសំបុត្រមានលេខជាចំនួនបឋមគឺ 2,3,5,7,11,13

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ A គឺ $n(A)=C(6,2)=\frac{6!}{4!2!}=15$

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{15}{105}=\frac{1}{7}$ ។

ដូចនេះ: $\boxed{P(A)=\frac{1}{7}}$

B. សំបុត្រទាំង ២ មានផលបូកលេខជាចំនួនគូ

ដើម្បីឱ្យបានសំបុត្រទាំង២ មានផលបូកលេខជាចំនួនគូ គេត្រូវយកលេខសេសពីរក្នុងចំណោមលេខសេស 1,3,5,7,9,11,13,15 ឬ លេខគូពីរក្នុងចំណោមលេខគូ 2,4,6,8,10,12,14 ។

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ B គឺ

$n(B)=C(8,2)+C(7,2)=28+21=49$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{49}{105}=\frac{7}{15}$ ។

ដូចនេះ: $\boxed{P(B)=\frac{7}{15}}$ ។

C. សំបុត្រទាំង ២ មានផលគុណលេខជាចំនួនគូ

ដើម្បីឱ្យបានសំបុត្រទាំង២ មានផលគុណលេខជាចំនួនគូ គេត្រូវយកលេខសេសមួយក្នុងចំណោមលេខសេស 1,3,5,7,9,11,13,15 និង លេខគូមួយក្នុងចំណោមលេខគូ 2,4,6,8,10,12,14 ឬ យកលេខគូពីរក្នុងចំណោមលេខគូ 2,4,6,8,10,12,14 ។

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ C គឺ

$n(C)=C(8,1)\times C(7,1)+C(7,2)=8\times7+21=77$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{77}{105}=\frac{11}{15}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(C)=\frac{11}{15}}$ ។

III. ក.ដោះស្រាយសមីការនៅក្នុង $\mathbb{C}$ នៃសមីការ $z^2-2z+4=0$

គេបាន $\Delta'=(-1)^2-(1)(4)=-3$

នាំឱ្យ $\sqrt{\Delta'}=\sqrt{-3}=i\sqrt3$

$$z_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=1+i\sqrt3$$

$$z_2=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=1-i\sqrt3$$

ដូចនេះ: $\boxed{z_1=1+i\sqrt3\ ,\ z_2=1-i\sqrt3}$

ខ. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2

យើងមាន $z_1=1+i\sqrt3$

គេបាន $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+\sqrt3^2}=\sqrt4=2$

$$\left\{\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{a}{r}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta&=\frac{b}{r}=\frac{\sqrt3}{2}\end{aligned}\right.\Rightarrow \arg(z_1)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

នាំឱ្យ ម៉ូឌុល $r=2$ និង អាគុណម៉ង់ $\arg(z_1)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

យើងមាន $z_2=1-i\sqrt3$

គេបាន $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(-\sqrt3)^2}=\sqrt4=2$

$$\left\{\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{a}{r}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta&=\frac{b}{r}=-\frac{\sqrt3}{2}\end{aligned}\right.\Rightarrow \arg(z_2)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

នាំឱ្យម៉ូឌុល $r=2$ និង អាគុណម៉ង់ $\arg(z_2)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 គឺ $r=2$

និង $\arg(z_1)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

និង ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_2 គឺ $r=2$

និង $\arg(z_2)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ ។

គ. ចូរបង្ហាញថា $z_1^{2019}+z_2^{2019}=-2^{2020}$ ។

គេបាន

$z_1^{2019}+z_2^{2019}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{2019}+\left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{2019}$

$=2^{2019}\left[\cos\frac{2019\pi}{3}+i\sin\frac{2019\pi}{3}+\cos\left(-\frac{2019\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2019\pi}{3}\right)\right]$

$=2^{2019}\left(\cos 673\pi+i\sin 673\pi+\cos 673\pi-i\sin 673\pi\right)$

$=2^{2019}(-1-1)$

$=2^{2019}(-2)$

$=-2^{2020}$

ដូចនេះ: $\boxed{z_1^{2019}+z_2^{2019}=-2^{2020}}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាលៈ

$\mathrm{I}=\int_1^2 (x-1)(2x+1)dx$

$\mathrm{I}=\int_1^2\left(2x^2-x-1\right)dx=\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2$

$=\left(\frac{2\cdot 8}{3}-\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-1\right)$

$=\frac{16-4\times 3}{3}-\frac{4-3-6}{6}$

$=\frac{4}{3}+\frac{5}{6}=\frac{8+5}{6}=\frac{13}{6}$

ដូចនេះ: $\boxed{\mathrm{I}=\frac{13}{6}}$

$\mathrm{J}=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)dx=\int_1^e \ln x\, d(\ln x)+\int_1^e dx$

$=\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e+[x]_1^e=\frac{1^2}{2}-0+e-1=\boxed{e-\frac{1}{2}}$

ដូចនេះ: $\boxed{\mathrm{J}=e-\frac{1}{2}}$

$\mathrm{K}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin^2 x+1\right]dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-1+\cos 2x+1\right]dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos 2x\right]dx$

$=\left[-\frac{\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}{3}+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\left(-\frac{\cos\pi}{3}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3}+0\right)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{2+3+\sqrt{2}}{6}$

$=\boxed{\frac{5+\sqrt{2}}{6}}$

ដូចនេះ: $\boxed{K=\frac{5+\sqrt{2}}{6}}$

V. ១. យើងមាន $A(1;1;-2)$; $B(1;2;-2)$; $C(0;1;1)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=3\vec{i}+\vec{k}$ ។

1. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}=(1-1;2-1;-2+2)=(0;1;0)$

$\overrightarrow{AC}=(0-1;1-1;1+2)=(-1;0;3)$

$\overrightarrow{BC}=(0-1;1-2;1+2)=(-1;-1;3)$

ដូចនេះ: $\boxed{\overrightarrow{AB}=(0;1;0)\ ,\ \overrightarrow{AC}=(-1;0;3)\ ,\ \overrightarrow{BC}=(-1;-1;3)}$

2. គណនា $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ និង $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។

គេបាន $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(3)(0)+(0)(1)+(1)(0)=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(3)(-1)+(0)(0)+(1)(3)=0$

ដូចនេះ: $\boxed{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\ ;\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0}$

3. ចូរបង្ហាញថាប្លង់ (ABC) មានសមីការ $3x+z-1=0$

យើងមាន $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\vec{n}\perp(\mathrm{ABC})$

គេបាន $\vec{n}=3\vec{i}+\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) ។

ដោយ ប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច $\mathrm{A}(1;1;-2)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(3;0;1)$ គឺ

$(\mathrm{ABC}): a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$

$\Leftrightarrow\ (3)(x-1)+(0)(y-1)+(1)(z+2)=0$

$\Leftrightarrow\ 3x+z-1=0$

ដូចនេះ: សមីការប្លង់ (ABC) មានសមីការ $3x+z-1=0$ ។

២.ក. បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ រួចសង់ (E)

យើងមាន $(\mathrm{E}): 9x^2+16y^2=144$

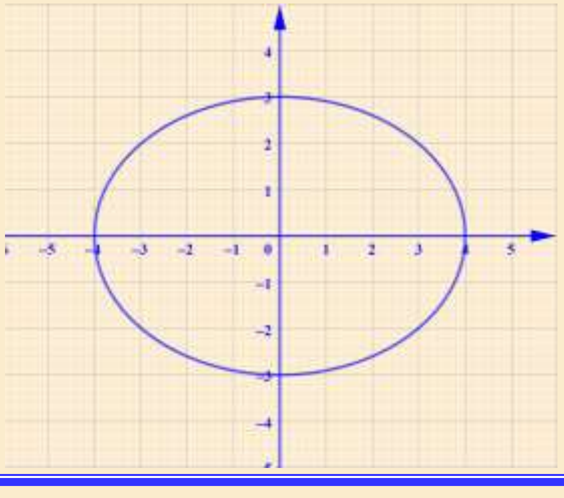
$\Leftrightarrow\quad \frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=1\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

$\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ មានរាង $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

នាំឱ្យ (E) ជាសមីការអេលីប ដែលមានអ័ក្សធំ ជាអ័ក្ស $(x'ox)$ និង មានផ្ចិត $\mathrm{O}(0,0)$ ។

$a=4\ ;\ b=3$

- ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ $2a=8$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ $2b=6$ ឯកតាប្រវែង
- កំពូល $V_1(-a,0)\Rightarrow V_1(-4,0)\ ;\ V_2(a,0)\Rightarrow V_2(4,0)$
- សង់អេលីប



ខ. គណនា $AF_2 + BF_1$

ដោយ A និង B ជាពីរចំណុចនៅលើអេលីប (E) តាមនិយមន័យគេបាន

$$+\begin{cases} AF_1 + AF_2 = 2a = 8 \\ BF_1 + BF_2 = 2a = 8 \end{cases}$$

$$AF_1 + BF_2 + AF_2 + BF_1 = 16$$

$$8 + AF_2 + BF_1 = 16$$

$$AF_2 + BF_1 = 8$$

ដូចនេះ $\boxed{AF_2 + BF_1 = 8}$

VI. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

យើងមាន (E): $y'' + 2y' + y = 0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

មានឫសឌុប៖ $\lambda_o = -1$

នាំឱ្យ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = (Ax + B)e^{\lambda_o x}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y = (Ax + B)e^{-x}$; $A, B \in \mathbb{R}$ ។

- បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = (2x+1)e^{-x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

យើងមាន $y = (2x+1)e^{-x}$

$$y' = (2x+1)' e^{-x} + (e^{-x})' (2x+1) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x+1)$$

$$= e^{-x}(2 - 2x - 1)$$

$$= e^{-x}(1 - 2x)$$

$$y'' = (e^{-x})' (1-2x) + (1-2x)' (e^{-x}) = -e^{-x}(1-2x) - 2e^{-x}$$

$$= e^{-x}(-1 + 2x - 2)$$

$$= e^{-x}(2x - 3)$$

ដោយ $y = (2x+1)e^{-x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E): $y'' + 2y' + y = 0$

គេបាន $e^{-x}(2x-3) + 2e^{-x}(1-2x) + (2x+1)e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{-x}(2x - 3 + 2 - 4x + 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{-x}(0) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ អនុគមន៍ $y = (2x+1)e^{-x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។

VII. យើងមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

1. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+1)^2 e^{-x} = (+\infty)(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)^2 = +\infty; \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) = \boxed{0}$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$)

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x) = (1-x)(1+x)e^{-x}$

យើងមាន $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

$$f'(x) = \left[(x+1)^2\right]' e^{-x} + (e^{-x})(x+1)^2$$

$$= 2(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2$$

$$= (x+1)e^{-x}(2 - x - 1)$$

$= (1-x)(x+1)e^{-x}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = (1-x)(x+1)e^{-x}}$

3. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f'(x) = (1-x)(x+1)e^{-x}$

ដោយ $e^{-x} > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ នាំឱ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(1-x)(x+1)$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- ចំពោះគ្រប់ $x \in (-\infty\,, -1) \cup (1, +\infty)$ នោះ $f'(x) < 0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះ។
- ចំពោះគ្រប់ $x \in (-1\,, 1)$ នោះ $f'(x) > 0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើន។
- ចំពោះ $x = -1$; $x = 1$ នោះ $f'(x) = 0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ថេរ។

<u>ចំណុចបរមា</u>

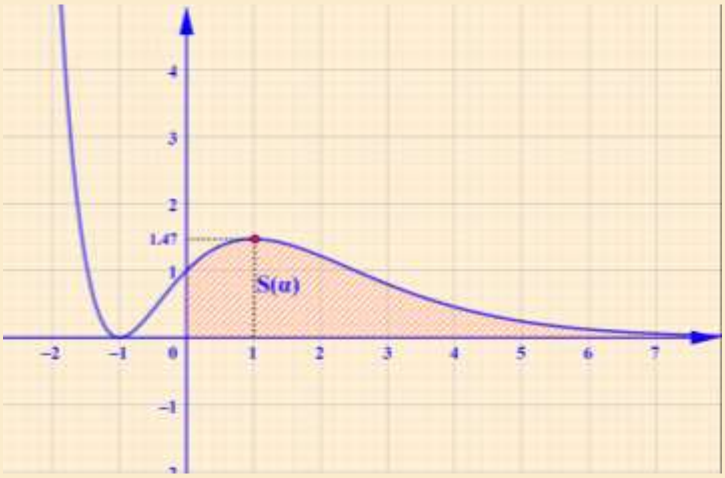
$$f(1) = (1+1)^2 e^{-1} = \frac{4}{e} = \boxed{1.47}$$

$$f(-1) = (-1+1)^2 e^{1} = \boxed{0}$$

សង់តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1.47	↘	0

4. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$



5. សិក្សាអត្ថិភាពនិង សញ្ញាឬសរបស់សមីការ $me^x=(x+1)^2$ ទៅតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

យើងមាន $me^x=(x+1)^2$

នាំឱ្យ $(x+1)^2e^{-x}=m$ (E) ជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងក្រាប (C) និង បន្ទាត់ $y=m$ តាមក្រាបគេទាញបាន៖

- ចំពោះ $m\in(-\infty,0)$ នាំឱ្យសមីការ (E) គ្មានឬស។
- ចំពោះ $m=0$ នាំឱ្យសមីការ (E) មានឬសឌុបគឺ $x=-1$ ។
- ចំពោះ $m\in(0,1)$ នាំឱ្យសមីការ (E) មានឬសបីផ្សេងគ្នាគឺ $x_1<x_2<0<x_3$ ។
- ចំពោះ $m=1$ នាំឱ្យសមីការ (E) មានឬសបីផ្សេងគ្នាគឺ $x_1<x_2=0<x_3$ ។
- ចំពោះ $m\in(1,1.47)$ នាំឱ្យសមីការ (E) មានឬសបីផ្សេងគ្នាគឺ $x_1<0<x_2<x_3$ ។
- ចំពោះ $m=1.47$ នាំឱ្យសមីការ (E) មានឬសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $x_1<0<x_2=1$ ។
- ចំពោះ $m\in(1.47,+\infty)$ នាំឱ្យសមីការ (E) មានឬសតែមួយគត់គឺ $x_1<0$ ។

6. កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដែលអនុគមន៍ F កំណត់ដោយ $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ ជាព្រីមីទីវនៃ f លើ $\mathbb{R}$

គេបាន $F'(x)=(ax^2+bx+c)'e^{-x}+(e^{-x})'(ax^2+bx+c)$

$$=(2ax+b)e^{-x}-e^{-x}(ax^2+bx+c)$$

$$=e^{-x}(2ax+b-ax^2-bx-c)$$

$$=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$$

ដោយ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លុះត្រាតែ $F'(x)=f(x)$

គេបាន $\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}=(x^2+2x+1)e^{-x}$

$$\begin{cases}-a=1\\2a-b=2\\b-c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-4\\c=-5\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{a=-1,\ b=-4,\ c=-5}$

7. a. គណនា $S(\alpha)$ ជាអនុគមន៍នៃ α

គេបាន $S(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^{\alpha}$

$$=\left[(-x^2-4x-5)e^{-x}\right]_0^{\alpha}$$

$$=(-\alpha^2-4\alpha-5)e^{-\alpha}-(-5)$$

$$=(-\alpha^2-4\alpha-5)e^{-\alpha}+5$$

ដូចនេះ $\boxed{S(\alpha)=(-\alpha^2-4\alpha-5)e^{-\alpha}+5}$

b. ស្រាយបំភ្លឺថា $F(0)+\lim\limits_{\alpha\to+\infty}S(\alpha)=0$

គេបាន $F(0)+\lim\limits_{\alpha\to+\infty}S(\alpha)=0$

$$\Leftrightarrow (0-0-5)e^0+\lim_{\alpha\to+\infty}\left[(-\alpha^2-4\alpha-5)e^{-\alpha}+5\right]=0$$

$$\Leftrightarrow -5+\lim_{\alpha\to+\infty}\left(-\frac{\alpha^2}{e^{\alpha}}-4\frac{\alpha}{e^{\alpha}}-\frac{5}{e^{\alpha}}\right)+5=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\alpha\to+\infty}\left(-\frac{\alpha^2}{e^{\alpha}}-4\frac{\alpha}{e^{\alpha}}-\frac{5}{e^{\alpha}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow\quad 0=0$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{F(0)+\lim\limits_{\alpha\to+\infty}S(\alpha)=0}$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: -------------------លេខ --------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:--

៣

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ **ក**. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}-(2x+1)\right]$ **ខ**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$ **គ**. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$ ។

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងស្បោងមួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហម 4 ឃ្លីពណ៌ខ្មៅ 3 និងឃ្លីពណ៌ស 1 ។ គេចាប់យកម្តងឃ្លីចំនួន 3 ចេញពីស្បោងដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

១) A.«ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា» ។ ២) B. «ឃ្លី 2 មានពណ៌ដូចគ្នា» ។

៣) C.«យ៉ាងតិចមានឃ្លី 2 មានពណ៌ក្រហម»។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=1+i$ និង $y=1-i\sqrt{3}$; $U=\dfrac{z^3}{\bar{y}^2}$ ។

ក. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z និង y ។ រួចស្រាយថា $U=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។

ខ. បង្ហាញថា U^{24} ជាផ្នែកពិត និង U^6 ជាផ្នែកនិមិត្ត។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $U=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ ។ រួចដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិតនៃសមីការ $\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x=\sqrt{2}$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I}=\int_0^2\left(3x^2+4x-1\right)dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^3 x+\tan x\right)dx$

$\mathrm{K}=\int_1^2\dfrac{x^2+x+1}{x^2(1+x)}dx$ ។ ដើម្បីគណនា K យើងត្រូវបង្ហាញថា $\dfrac{x^2+x+1}{x^2(1+x)}=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{x^2}$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ)១. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យចំណុច $A(0;1;0)$; $B(1;0;-2)$; $C(0;0;-1)$ និង $D(1;-1;0)$ ។

1. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ និងគណនា $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$ ។
2. ចូរបង្ហាញថា ចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។ រួចបង្ហាញថា ចំណុច A,B,C និង D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។
3. គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC និង មាឌនៃតេត្រាអ៊ែត ABCD ។ រួចគណនាចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (P) ។

២. គេឱ្យសមីការ $(H):16x^2-9y^2=144$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការ (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល។ រកសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល រួចសង់ (H) ។

ខ. បើ $N\in(H)$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ $S=ON^2-NF_1\times NF_2$ ។

VI. (១០ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការ (E): $y''+2y'+y=0$ ។

ខ.រកអនុគមន៍ h ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាប (C) នៃចម្លើយនេះមានចំណុចរបត់ $I(0,2)$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ)ផ្នែកA. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ $(-1,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$ ។

1. គណនា $f'(x)$ ។ ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។
2. គណនា $f(0)$ ។ បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់គឺ α នៅក្នុងចន្លោះ $[-0.72\,;-0.71]$ ។
3. ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ ចំពោះ $x\in(-1,+\infty)$ ។ គេឱ្យ $\ln(2)=0.7;-2\ln(0.28)=2.54\,;-2\ln(0.29)=2.47$ ។

ផ្នែក B. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$ ។

1. **a.**គណនាលីមីតនៃ g កាលណា x ខិតជិត 0 ខាងឆ្វេង និង x ខិតជិត 0 ខាងស្តាំ។ **b.** គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ។
2. **a.** គណនា $g'(x)$ ។ **b.** បង្ហាញថា $g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ រួចកំណត់តម្លៃប្រហែលនៃ $g(\alpha)$ ដោយយក $\alpha\approx-0.715$ ។
3. **a.**សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។ **b.** ចូរសង់ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ g ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់(2cm លើ (ox) ; 1cm លើ (oy))។
4. គេឱ្យ h ជាអនុគមមន៍កំណត់លើ D ដែល $h(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}$ ។

 a. ចូរកំណត់អនុគមន៍ u និង v ដោយស្គាល់ $h(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ ។ រួចទាញរកព្រីមីទីវនៃ h ។

 b. ចូរកំណត់ព្រីមីទីវនៃ $\dfrac{1}{x(x+1)}$ ។ **c.** ទាញចេញពីសំណួរខាងលើ ចូរកំណត់ព្រីមីទីវនៃ g ។

អត្រាកំណែ

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}-(2x+1)\right]$ រាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}-(2x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}^2-(2x+1)^2}{\sqrt{4x^2+x}+(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-4x^2-4x-1}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}+x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2+\frac{1}{x}}=\frac{-3-0}{\sqrt{4+0}+2+0}=\boxed{-\frac{3}{4}}$$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x+4-2^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{x+4}+2\right)=(1)(2+2)=\boxed{4}$$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos3x}{x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\left(4\cos^3x-3\cos x\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-4\cos^3x+3\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4\cos x-4\cos^3x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\cos x\left(1-\cos^2x\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2(4\cos x)$$

$$=1^2\times4\times\cos0=\boxed{4}$$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

១) A.«ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា»

គេបាន ចំនួនករណីអាចគឺ $n(S)=C(8,3)=\dfrac{8!}{(8-3)!3!}$

$$=\frac{8\times7\times6\times5!}{5!\times3\times2\times1}=56 \text{ ករណី}$$

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ A គឺ

$n(A)=C(4,1)\times C(3,1)\times C(1,1)=4\times3\times1=12$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{12}{56}=\dfrac{3}{14}$ ។

ដូចនេះ: $\boxed{P(A)=\dfrac{3}{14}}$

២) B. «ឃ្លី 2 មានពណ៌ដូចគ្នា» ។

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ B គឺ

$n(B)=C(4,2)\times C(4,1)+C(3,2)\times C(5,1)$

$=6\times4+3\times5=39$

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{39}{56}$ ។

ដូចនេះ: $\boxed{P(B)=\dfrac{39}{56}}$ ។

៣) C.«យ៉ាងតិចមានឃ្លី 2 មានពណ៌ក្រហម»

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ C គឺ

$n(C)=C(4,2)\times C(4,1)+C(4,3)=6\times4+4=28$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{28}{56}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(C)=\dfrac{1}{2}}$ ។

III. យើងមាន $z=1+i$ និង $y=1-i\sqrt{3}$; $U=\dfrac{z^3}{y^2}$

ក. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ z និង y ។ រួចស្រាយថា

$U=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។

គេបាន

$$z=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

ដូចនេះ:

$$\boxed{z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);\ y=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$

$$U=\frac{z^3}{y^2}=\frac{\sqrt{2}^3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^3}{2^2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}^3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^3}{2^2\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi-8\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi-8\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ: $\boxed{U=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)}$

ខ. បង្ហាញថា U^{24} ជាផ្នែកពិត និង U^6 ជាផ្នែកនិមិត្ត

យើងមាន $U=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

គេបាន $U^{24}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]^{24}$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{24}\left(\cos\frac{24\pi}{12}+i\sin\frac{24\pi}{12}\right)$

$=\frac{2^{12}}{2^{24}}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\frac{1}{2^{12}}(1+0\cdot i)=\frac{1}{2^{12}}$

នាំឱ្យ U^{24} ជាផ្នែកពិត។

ហើយ $U^{6}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]^{6}$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{6}\left(\cos\frac{6\pi}{12}+i\sin\frac{6\pi}{12}\right)=\frac{2^3}{2^6}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{1}{2^3}(0+i)=\frac{1}{8}i$ ពិត

នាំឱ្យ U^6 ជាផ្នែកនិមិត្ត

ដូចនេះ៖ U^{24} ជាផ្នែកពិត និង U^6 ជាផ្នែកនិមិត្ត ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $U=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

គេបាន $U=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$U=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}+i\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

$=\frac{2}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}\right)\right]$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{U=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}}$

ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិតនៃសមីការ

$(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=\sqrt{2}$

យើងមាន $U=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ និង $U=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

គេបាន $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos\frac{\pi}{12}=\frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}\\ 2\sin\frac{\pi}{12}=\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}\end{cases}$

$\Leftrightarrow(\sqrt{3}+1)\cos x+(\sqrt{3}-1)\sin x=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}\sin x=1$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{12}\cos x+2\sin\frac{\pi}{12}\sin x=1$

$\Leftrightarrow\cos x\cos\frac{\pi}{12}+\sin x\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{12}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Rightarrow x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi\ ;\ x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

ដូចនេះ៖ $\boxed{x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi\ ;\ x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖

$\mathrm{I}=\int_0^2(3x^2+4x-1)dx=\left[\frac{3x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-x\right]_0^2$

$=\left[x^3+2x^2-x\right]_0^2=(2^3+2\cdot 2^2-2)-0=14$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathrm{I}=14}$

$\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^3 x+\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\tan x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x d(\tan x)=\left[\frac{\tan^2 x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1^2}{2}-0=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathrm{J}=\frac{1}{2}}$

បង្ហាញថា $\frac{x^2+x+1}{x^2(1+x)}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x^2}$

គេបាន $\frac{x^2+x+1}{x^2(1+x)}=\frac{x^2}{x^2(1+x)}+\frac{x+1}{x^2(1+x)}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x^2}$ ពិត

គណនា K

$\mathrm{K}=\int_1^2\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln|1+x|-\frac{1}{x}\right]_1^2$

$=\left(\ln 3-\frac{1}{2}\right)-(\ln 2-1)$

$=\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}+1$

$=\ln\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathrm{K}=\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}}$

V. ១.យើងមាន $A(0;1;0)$; $B(1;0;-2)$; $C(0;0;-1)$ និង $D(1;-1;0)$ ។

1. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ និងគណនា $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}$

គេបាន

$\overrightarrow{AB}=(1-0;0-1;-2-0)=(1;-1;-2)$

$\overrightarrow{AC}=(0-0;0-1;-1-0)=(0;-1;-1)$

$\overrightarrow{AD}=(1-0;-1-1;0-0)=(1;-2;0)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(1-2)\vec{i}-(-1-0)\vec{j}+(-1-0)\vec{k}$$

$$=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

ហើយ $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=(-1)(1)+(1)(-2)+(0)(-1)=-3$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\ ;\ (\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=-3}$

2. - **បង្ហាញថា ចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ**

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq 0$ មានន័យ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែគ្នា នាំឱ្យចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។

ដូចនេះ ចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។

- **បង្ហាញថា ចំណុច A,B,C និង D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ**

ដោយ $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\neq 0$ នាំឱ្យចំណុច A,B,C និង D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

ដូចនេះ ចំណុច A,B,C និង D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

3. - គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

រូបមន្ត $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

យើងមាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

នាំឱ្យ $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ។

- មាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$

រូបមន្ត $V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|$

យើងមាន $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=-3$

នាំឱ្យ $V=\frac{1}{6}|-3|=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ឯកតាមាឌ

ដូចនេះ $V=\frac{1}{2}$ ឯកតាមាឌ។

- គណនាចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (P)

រូបមន្ត $d(D,(P))=\frac{|ax_o+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ ប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A(0;1;0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ គេបាន

$(P): a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$

$\Leftrightarrow (-1)(x-0)+(1)(y-1)+(-1)(z-0)=0$

$\Rightarrow (P): -x+y-z-1=0$

នាំឱ្យ $d(D,(P))=\frac{|(-1)(1)+(1)(-1)+(-1)(0)-1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}}$

$$=\frac{|-4|}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ $d(D,(P))=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ឯកតាប្រវែង។

២.ក. បង្ហាញថាសមីការ (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល។ រកសមីការអាសុីមតូតនៃអ៊ីពែបូល រួចសង់ (H) ។

យើងមាន $(H): 16x^2-9y^2=144$

$\Leftrightarrow \frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=1 \quad \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$ មានរាង $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

នាំឱ្យ (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល ដែលមានអ័ក្សទទឹង ជាអ័ក្ស $(x'ox)$ និងមានផ្ចិត $O(0,0)$ ។

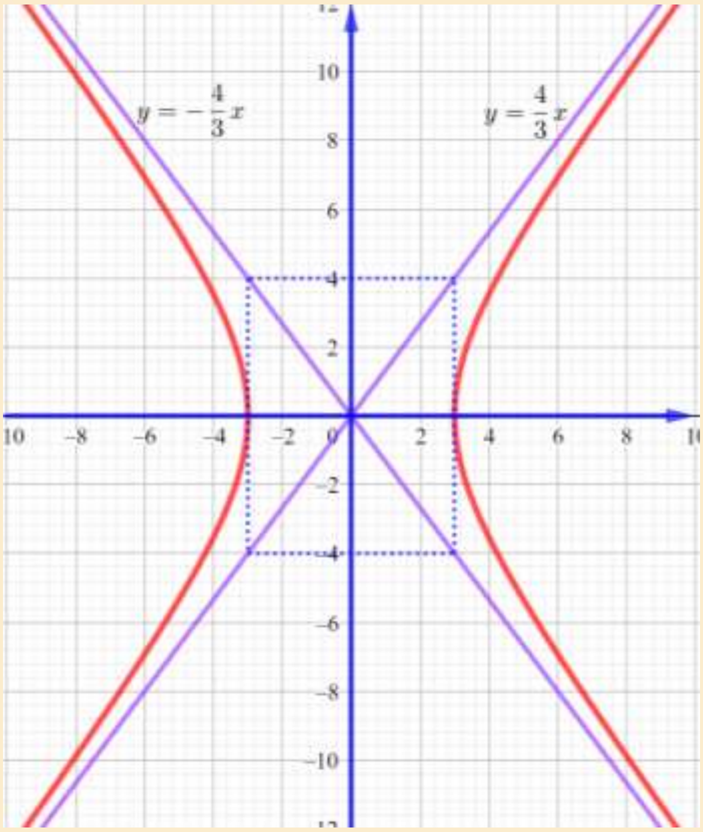
គេបាន $a=3\,;b=4$

នាំឱ្យ $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

- កំពូល $V_1(-a,0)\Rightarrow V_1(-3,0)\,;V_2(a,0)\Rightarrow V_2(3,0)$
- កំណុំ $F_1(-c,0)\Rightarrow F_1(-5,0)\,;F_2(c,0)\Rightarrow F_2(5,0)$
- សមីការអាសុីមតូត $y=\pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y=\pm\frac{4}{3}x$

ដូចនេះ កំពូល $V(\pm3,0)$; $F(\pm5,0)$ និង អាសុីមតូត $y=\pm\frac{4}{3}x$ ។

- សង់អេលីប



ខ. បើ $N\in(H)$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ $S=ON^2-NF_1\times NF_2$

តាង $N(x_o,y_0)$ ជាចំណុចមួយនៅលើ (H)

គេបាន $NF_1=\sqrt{(x_{F_1}-x_N)^2+(y_{F_1}-y_N)^2}=\sqrt{(-5-x_o)^2+y_o^2}$

$$=\sqrt{25+10x_o+x_o^2+y_o^2}$$

$NF_2=\sqrt{(x_{F_2}-x_N)^2+(y_{F_2}-y_N)^2}=\sqrt{(5-x_o)^2+y_o^2}$

$$=\sqrt{25-10x_o+x_o^2+y_o^2}$$

នាំឱ្យ $NF_1\times NF_2=\sqrt{25+10x_o+x_o^2+y_o^2}\times\sqrt{25-10x_o+x_o^2+y_o^2}$

$=\sqrt{(25+x_o^2+y_o^2+10x_o)(25+x_o^2+y_o^2-10x_o)}$

$=\sqrt{(25+x_o^2+y_o^2)^2-100x_o^2}$ (*)

ដោយ $N(x_o,y_o)\in(\mathrm{H})\Leftrightarrow 16x_o^2-9y_o^2=144$

នោះ $y_o^2=\dfrac{16x_o^2-144}{9}$

យក $y_o^2=\dfrac{16x_o^2-144}{9}$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន

$$NF_1\times NF_2=\sqrt{\left(25+x_o^2+\frac{16x_o^2-144}{9}\right)^2-100x_o^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{225+9x_o^2+16x_o^2-144}{9}\right)^2-100x_o^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{25x_o^2+81}{9}\right)^2-100x_o^2}$$

$$=\sqrt{\frac{625x_o^4+4050x_o^2+6561-8100x_o^2}{81}}$$

$$=\sqrt{\frac{625x_o^4-4050x_o^2+6561}{81}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{25x_o^2-81}{9}\right)^2}$$

$$=\frac{25x_o^2-81}{9}$$

ហើយ $ON^2=x_o^2+y_o^2=x_o^2+\dfrac{16x_o^2-144}{9}=\dfrac{25x_o^2-144}{9}$

គេបាន $S=ON^2-NF_1\times NF_2=\dfrac{25x_o^2-144}{9}-\dfrac{25x_o^2-81}{9}$

$$=\frac{25x_o^2-144-25x_o^2+81}{9}$$

$$=\frac{-63}{9}$$

$$=-7$$

ដូចនេះ $\boxed{S=-7}$

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការ (E): $y''+2y'+y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+2\lambda+1=0$

មានឫសឌុប៖ $\lambda_o=-1$

នាំឱ្យ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=(Ax+B)e^{\lambda_o x}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$y=(Ax+B)e^{-x}$; $A,B\in\mathbb{R}$ ។

ខ.រកអនុគមន៍ h ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាប (C) នៃចម្លើយនេះមានចំណុចរបត់ $\mathrm{I}(0,2)$

យើងមាន $y=(Ax+B)e^{-x}$

$\Rightarrow\ y'=(Ax+B)'e^{-x}+(e^{-x})'(Ax+B)$

$\Leftrightarrow\ \ =Ae^{-x}-e^{-x}(Ax+B)$

$\Leftrightarrow\ \ =e^{-x}(A-B-Ax)$

$\Rightarrow\ y''=(e^{-x})'(A-B-Ax)+(A-B-Ax)'e^{-x}$

$\Leftrightarrow\ \ =-e^{-x}(A-B-Ax)-Ae^{-x}$

$\Leftrightarrow\ \ =e^{-x}(-A+B+Ax-A)$

$\Leftrightarrow\ y''=e^{-x}(Ax-2A+B)$

ដោយអនុគមន៍ h ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (E) មានក្រាប (C) នៃចម្លើយនេះមានចំណុចរបត់ $\mathrm{I}(0,2)$ គេបាន

$\begin{cases}y(0)=2\\ y''(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(0+B)e^0=2\\ e^0(0-2A+B)=0\end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases}B=2\\ A=1\end{cases}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $h(x)=(x+2)e^{-x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។

VII. **ផ្នែកA.** យើងមានអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ $(-1,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$

1. - គណនា $f'(x)$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{1-2(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{-2x-1}{(x+1)^2}$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{-2x-1}{(x+1)^2}}$

- ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{-2x-1}{(x+1)^2}$

ដោយ $(x+1)^2>0$; $\forall x\in(-1,+\infty)$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-2x-1$

ឱ្យ $-2x-1=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

- ចំពោះ $x\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ នាំឱ្យ $f'(x)>0$ ។

- ចំពោះ $x\in\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ នាំឱ្យ $f'(x)<0$ ។

- ចំពោះ $x=-\dfrac{1}{2}$ នាំឱ្យ $f'(x)=0$ ។

- ចំណុចបរមា

គេបាន $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1}-2\ln\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)$

$=-1-2\ln\dfrac{1}{2}=-1+2\ln 2=-1+1.4=\boxed{0.4}$

- លីមីត

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)\right]$

តាង $t=\ln(x+1)\Leftrightarrow e^t=x+1\Rightarrow x=e^t-1$

បើ $x\to -1^{+}$; $t\to -\infty$

គេបាន $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\dfrac{e^{t}-1}{e^{t}}-2t\right)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\dfrac{e^{t}-1-2te^{t}}{e^{t}}\right)$

$=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\dfrac{e^{t}-1-\dfrac{2t}{e^{-t}}}{e^{t}}\right)=\dfrac{0-1-0}{0^{+}}=\dfrac{-1}{0^{+}}=\boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}-2\ln(x+1)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}-2\ln(x+1)\right]$

$=1-\infty=\boxed{-\infty}$

- សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	-1	$-\dfrac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0.4	↘ $-\infty$

2. - គណនា $f(0)$

គេបាន $f(0)=\dfrac{0}{0+1}-2\ln(0+1)=\boxed{0}$

- បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់គឺ α នៅក្នុងចន្លោះ $[-0.72\,;-0.71]$

គេបាន

$f(-0.72)=\dfrac{-0.72}{-0.72+1}-2\ln(-0.72+1)=\dfrac{-0.72}{0.28}-2\ln(0.28)$

$=-2.57+2.54=\boxed{-0.03}$

$f(-0.71)=\dfrac{-0.71}{-0.71+1}-2\ln(-0.71+1)=\dfrac{-0.71}{0.29}-2\ln(0.29)$

$=-2.45+2.47=\boxed{0.02}$

ដោយ $f(-0.72)\times f(-0.71)=(-0.03)(0.02)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទ តម្លៃកណ្តាល $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់នៅក្នុងចន្លោះ $[-0.72\,;-0.71]$ ដែល $f(\alpha)=0$ ។

ដូចនេះ សមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់នៅក្នុងចន្លោះ $[-0.72\,;-0.71]$ ដែល $f(\alpha)=0$ ។

3. ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ ចំពោះ $x\in(-1\,,+\infty)$ ។

តាមតារាងអថេរភាពនៃ f គេបាន

- ចំពោះ $x\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ នោះ f ជាអនគមន៍កើន ហើយមាន $\lim\limits_{x\to-1^{+}}f(x)=-\infty$ និង $f(\alpha)=0$ នាំឱ្យ ក្រាបនៃអនុគមន៍ f នៅក្រោមអ័ក្ស $(x'ox)$ នោះ $f(x)<0$ គ្រប់ $x\in(-1,\alpha)$ ។

- ចំពោះ $x\in(\alpha,0)$ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមា $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0.4>0$ ហើយមាន $f(\alpha)=0$ និង $f(0)=0$ នាំឱ្យ ក្រាបនៃអនុគមន៍ f នៅលើអ័ក្ស $(x'ox)$ នោះ $f(x)>0$ គ្រប់ $x\in(\alpha,0)$ ។

- ចំពោះ $x\in(0,+\infty)$ នោះ f ជាអនគមន៍ចុះ ហើយមាន $f(0)=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ នាំឱ្យ ក្រាបនៃអនុគមន៍ f នៅក្រោមអ័ក្ស $(x'ox)$ នោះ $f(x)<0$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។

ដូចនេះ

- ចំពោះ $x\in(-1,\alpha)\cup(0,+\infty)$ នោះ $f(x)<0$ ។
- ចំពោះ $x\in(\alpha,0)$ នោះ $f(x)>0$ ។

ផ្នែកB. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $D=(-1\,,0)\cup(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^{2}}$ ។

1. a. គណនាលីមីតនៃ g កាលណា x ខិតជិត 0 ខាងឆ្វេង និង x ខិតជិត 0 ខាងស្តាំ។

$\lim\limits_{x\to0^{+}}g(x)=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{\ln(x+1)}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\times\dfrac{1}{x}=1\times\dfrac{1}{0^{+}}=\boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to0^{-}}g(x)=\lim\limits_{x\to0^{-}}\dfrac{\ln(x+1)}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to0^{-}}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\times\dfrac{1}{x}=1\times\dfrac{1}{0^{-}}=\boxed{-\infty}$

b. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-1^{+}}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ។

$\lim\limits_{x\to-1^{+}}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^{+}}\dfrac{\ln(x+1)}{x^{2}}=\dfrac{-\infty}{1}=\boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x^{2}}=\boxed{0}$

2. a. គណនា $g'(x)$

យើងមាន $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^{2}}$

$g'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{x+1}\right)x^{2}-2x\ln(x+1)}{\left(x^{2}\right)^{2}}=\dfrac{x\left[\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)\right]}{x^{4}}$

$=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)}{x^{3}}$

ដូចនេះ $\boxed{g'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)}{x^{3}}}$

b. បង្ហាញថា $g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

យើងមាន $f(\alpha)=0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{\alpha}{\alpha+1}-2\ln(\alpha+1)=0$

$\Rightarrow\ \ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}$

គេបាន $g(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^{2}}=\dfrac{\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}}{\alpha^{2}}=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}}$

- កំណត់តម្លៃប្រហែលនៃ $g(\alpha)$ ដោយយក $\alpha \approx -0.715$ ។

យើងមាន $g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

គេបាន $g(-0.715)=\dfrac{1}{2(-0.715)(-0.715+1)}$

$=\dfrac{1}{-0.41}=\boxed{-2.44}$

ដូចនេះ $\boxed{g(-0.715)=-2.44}$

3. a. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។

យើងមាន $g'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)}{x^3}=\dfrac{f(x)}{x^3}$

គេបាន $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច $f(x)$ និង x^3 គ្រប់ $x\in D$

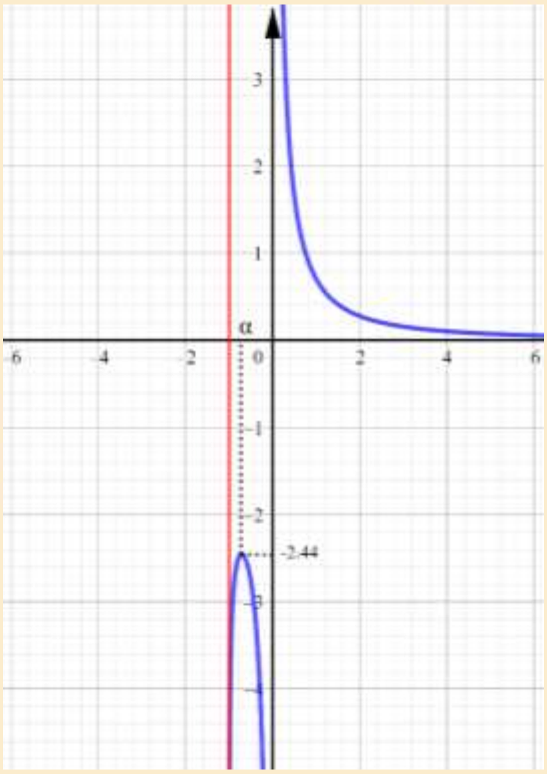
តារាងសញ្ញានៃ $g'(x)$

x	-1		$\alpha=-0.715$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
x^3		$-$		$-$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g

x	-1		$\alpha=-0.715$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2.44	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

b. សង់ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ g ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់($2cm$ លើ (ox) ; $1cm$ លើ (oy))។



4. គេឱ្យ h ជាអនុគមមន៍កំណត់លើ D ដែល

$h(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}$

a. ចូរកំណត់អនុគមន៍ u និង v ដោយស្គាល់ $h(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ ។ រួចទាញរកព្រីមីទីវនៃ h ។

គេបាន $\int h(x)dx=u(x)v(x)$

$\Leftrightarrow \int\left[\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}\right]dx=u(x)v(x)$

$\Leftrightarrow \int\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}dx-\int\dfrac{1}{x(x+1)}dx=u(x)v(x)$

តាង $u=\ln(x+1)$ នោះ $du=\dfrac{1}{x+1}dx$

$dv=\dfrac{1}{x^2}dx \Leftrightarrow v=\int\dfrac{1}{x^2}dx=-\dfrac{1}{x}$

គេបាន $\int\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}dx=-\dfrac{\ln(x+1)}{x}+\int\dfrac{1}{x(x+1)}dx$

នាំឱ្យ $-\dfrac{\ln(x+1)}{x}+\int\dfrac{1}{x(x+1)}dx-\int\dfrac{1}{x(x+1)}dx=u(x)v(x)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\ln(x+1)}{x}=u(x)v(x)$

ដូចនេះ $u(x)=\ln(x+1)$, $v(x)=-\dfrac{1}{x}$ ឬ

$u(x)=-\dfrac{1}{x}$, $v(x)=\ln(x+1)$ ។

ទាញរកព្រីមីទីវនៃ h

យើងមាន $H(x)=\int h(x)dx=u(x)v(x)$

គេបាន $H(x)=-\dfrac{\ln(x+1)}{x}+C$

ដូចនេះព្រីមីទីវនៃ h គឺ $H(x)=-\dfrac{\ln(x+1)}{x}+C$ ។

b. ចូរកំណត់ព្រីមីទីវនៃ $\dfrac{1}{x(x+1)}$ ។

ព្រីមីទីវនៃ $\dfrac{1}{x(x+1)}$ គឺ $\int\dfrac{1}{x(x+1)}dx=\int\left(\dfrac{x+1-x}{x(x+1)}\right)dx$

$=\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\ln|x|-\ln|x+1|+c$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវនៃ $\dfrac{1}{x(x+1)}$ គឺ $\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+c$ ។

c. កំណត់ព្រីមីទីវនៃ g

យើងមាន $\int h(x)dx=u(x)v(x)$

$\Leftrightarrow \int\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}dx-\int\dfrac{1}{x(x+1)}dx=u(x)v(x)$

$\Leftrightarrow \int\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}dx=\int\dfrac{1}{x(x+1)}dx-\dfrac{\ln(x+1)}{x}$

$\Leftrightarrow \int\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}dx=\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|-\dfrac{\ln(x+1)}{x}+C$

$\Rightarrow G(x)=\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|-\dfrac{\ln(x+1)}{x}+C$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវនៃ g គឺ $\boxed{G(x)=\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|-\dfrac{\ln(x+1)}{x}+C;C\in\mathbb{R}}$

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: -------------------- លេខ ------------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:--

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. **(១៥ពិន្ទុ)** គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2+2-3x}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-27}{3-\sqrt{x+6}}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\tan3x}{x}$ ។

II. **(១៥ពិន្ទុ)** គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i\sqrt3$, $z_2=\left(\sqrt3-1\right)-\left(\sqrt3-1\right)i$ និង $z_3=\dfrac12$ ។

គណនា z_1+z_2 ; $(z_1+z_2)\times z_3$ ។ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $Z=(z_1+z_2)\times z_3$ ។ ទាញរកតម្លៃនៃ Z^{12} ។

III. **(១៥ពិន្ទុ)** គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I}=\int_0^1(x+1)^2(x-2)dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos^2x-1\right)dx$ ។ គេមានអនុគមន៍ កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{1\}$ ដោយ

$f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x-1}$ ។ គណនា $\mathrm{K}=\int_{-1}^{0}f(x)dx$ ។

IV. **(១០ពិន្ទុ)** ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សពូកែចំនួន 10 នាក់ ដែលក្នុងនោះចំនួនសិស្សស្រី ស្មើនឹង $\dfrac23$ ដងនៃចំនួនសិស្សប្រុស។ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុមក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស 4 នាក់ដោយចៃដន្យយកទៅប្រកួតជាមួយក្រុមសិស្សនៃថ្នាក់ដទៃ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី។ B. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស។

C. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចម្នាក់ជាសិស្សប្រុស។

V. **(២៥ពិន្ទុ)១.** គេមានសមីការ $(\mathrm{E}):(5x+4y)^2=40(xy+10)$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ។

ខ. សង់ (E) ។

២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(\mathrm{o},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}},\vec{\mathrm{k}}\right)$ គេឱ្យចំណុច $\mathrm{A}(2;-2;2)$; $\mathrm{B}(2;0;0)$ និង $\mathrm{C}\left(\dfrac65;0;\dfrac25\right)$ ។

1. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។ រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ។
2. បង្ហាញថាប្លង់ (ABC) មានសមីការ $x+2y+2z-2=0$ ។
3. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (Δ) ដែលកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ A ។

VI. **(១០ពិន្ទុ) ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''+y'-2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានតម្លៃអប្បបរមាស្មើនឹង $\dfrac32$ ត្រង់ $x=0$ ។

VII. **(៣៥ពិន្ទុ)** គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-\infty,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x-3+\dfrac{4}{e^x+1}$ ហើយតាង (C) ជាខ្សែកោងតំណាងអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(\mathrm{o},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}})$ ។

1. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។
2. **a.** បង្ហាញថា $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
   b. បង្ហាញថា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ។
3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) ដែលមានសមីការ $y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $+\infty$ ។
4. **a.** បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ ។
   b. ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ (d') ដែលមានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$ ។
5. **a.** គណនាកូអរដោនេនៃ I ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (C) និងអ័ក្ស $(y'oy)$ ។
   b. បង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) ។
6. សង់ (d); (d′) និង (C) ។ ក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច (2.75 , 0) ។
7. តាង λ ជាចំនួនពិត ដែល $\lambda>\alpha$ និង តាង $A_\alpha(\lambda)$ ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយ (C), (d) និងបន្ទាត់ឈរពីរ $x=\alpha$ និង $x=\lambda$ ។
   a. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ និង គណនា $A_\alpha(\lambda)$ ជាអនុគមន៍នៃ α និង λ ។
   b. បង្ហាញថា $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\alpha(\lambda)=4\ln\left(e^\alpha+1\right)-4\alpha$ ។

អត្រាកំណែ

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2+2-3x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2+2-3x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+2}{x-2}=\frac{1^2+2}{1-2}=-3$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2+2-3x}=-3}$

ខ. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-27}{3-\sqrt{x+6}}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to3}\frac{3x^2-27}{3-\sqrt{x+6}}=\lim_{x\to3}\frac{3(x^2-9)}{(3-\sqrt{x+6})(3+\sqrt{x+6})}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{3(x-3)(x+3)(3+\sqrt{x+6})}{9-x-6}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{3(x-3)(x+3)(3+\sqrt{x+6})}{-(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\left[-3(x+3)(3+\sqrt{x+6})\right]=-3\times6\times(3+3)$$

$$=-108$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-27}{3-\sqrt{x+6}}=-108}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\tan3x}{x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{3\tan3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{3x}\times3\times3=1\times3\times3=9$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\tan3x}{x}=9}$

II. យើងមាន $z_1=1+i\sqrt3$, $z_2=(\sqrt3-1)-(\sqrt3-1)i$, $z_3=\dfrac{1}{2}$

- គណនា z_1+z_2 ; $(z_1+z_2)\times z_3$

$$z_1+z_2=1+i\sqrt3+(\sqrt3-1)-(\sqrt3-1)i$$

$$=(1+\sqrt3-1)+(\sqrt3-\sqrt3+1)i$$

$$=\sqrt3+i$$

$$(z_1+z_2)\times z_3=(\sqrt3+i)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}i$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{z_1+z_2=\sqrt3+i\ ,\ (z_1+z_2)\times z_3=\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac{1}{2}i}$

-សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $Z=(z_1+z_2)\times z_3$

គេបាន $Z=(z_1+z_2)\times z_3=\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac{1}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{Z=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}}$

- ទាញរកតម្លៃនៃ Z^{12}

យើងមាន $Z=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

នាំឱ្យ $Z^{12}=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{12}=\cos\dfrac{12\pi}{6}+i\sin\dfrac{12\pi}{6}$

$$=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{Z^{12}=1}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\mathrm{I}=\int_0^1(x+1)^2(x-2)dx=\int_0^1(x^2+2x+1)(x-2)dx$$

$$=\int_0^1(x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2)dx$$

$$=\int_0^1(x^3-3x-2)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}-2x\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2\right)-0$$

$$=\frac{1-6-8}{4}=-\frac{13}{4}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{I=-\dfrac{13}{4}}$

$$\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2x-1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2x-1)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2xdx=\left[\frac{\sin2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}-0=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\mathrm{J}=\dfrac{1}{2}}$

- បង្ហាញថា $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x-1}$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

នាំឱ្យ $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}=\dfrac{x^2+x-2+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+2)+1}{x-1}$

$=x+2+\dfrac{1}{x-1}$ ពិត

ដូចនេះ៖ $\boxed{f(x)=x+2+\dfrac{1}{x-1}}$

គណនា $\mathrm{K}=\int_{-1}^{0}f(x)dx$

$$\mathrm{K}=\int_{-1}^{0}\left(x+2+\frac{1}{x-1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{2}-2+\ln2-0=-\frac{3}{2}+\ln2$$

ដូចនេះ $\boxed{K=-\frac{3}{2}+\ln 2}$

IV. យើងមានសិស្សពូកែចំនួន 10 នាក់ ដែលក្នុងនោះចំនួនសិស្សស្រី ស្មើនឹង $\frac{2}{3}$ ដងនៃចំនួនសិស្សប្រុស

តាង x ជាចំនួនសិស្សស្រី និង y ជាចំនួនសិស្សប្រុស

គេបាន $\begin{cases} x+y=10 \\ x=\frac{2}{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$

នាំឱ្យ សិស្សប្រុសមានចំនួន 6 នាក់ និង សិស្សស្រីមានចំនួន 4 នាក់។

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី

គេបាន ចំនួនករណីអាចគឺ $n(S)=C(10,4)=\frac{10!}{(10-4)!4!}$

$=\frac{10\times9\times8\times7\times6!}{6!\times4\times3\times2\times1}=210$ ករណី

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ A គឺ $n(A)=C(4,4)=1$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{210}=\frac{1}{210}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{1}{210}}$

B. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស។

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ B គឺ $n(B)=C(6,4)=15$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{1}{14}}$ ។

C. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចម្នាក់ជាសិស្សប្រុស

ដោយ A និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា គេបាន

$P(A)+P(C)=1 \Leftrightarrow P(C)=1-P(A)$

$P(C)=1-\frac{1}{210}=\frac{210-1}{210}=\frac{209}{210}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{209}{210}}$ ។

V. ១. យើងមាន $(E):(5x+4y)^2=40(xy+10)$

ក. បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ

គេបាន $(5x)^2+2(5x)(4y)+(4y)^2=40xy+400$

$\Leftrightarrow 25x^2+40xy+16y^2=40xy+400$

$\Leftrightarrow 25x^2+16y^2=400$

$\Leftrightarrow \frac{25x^2}{400}+\frac{16y^2}{400}=1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ មានរាង $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

នាំឱ្យ (E) ជាសមីការអេលីប ដែលមានអ័ក្សធំ ជាអ័ក្ស $(y'oy)$ និង មានផ្ចិត $O(0,0)$ ។

គេបាន $a=5$; $b=4$; $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$

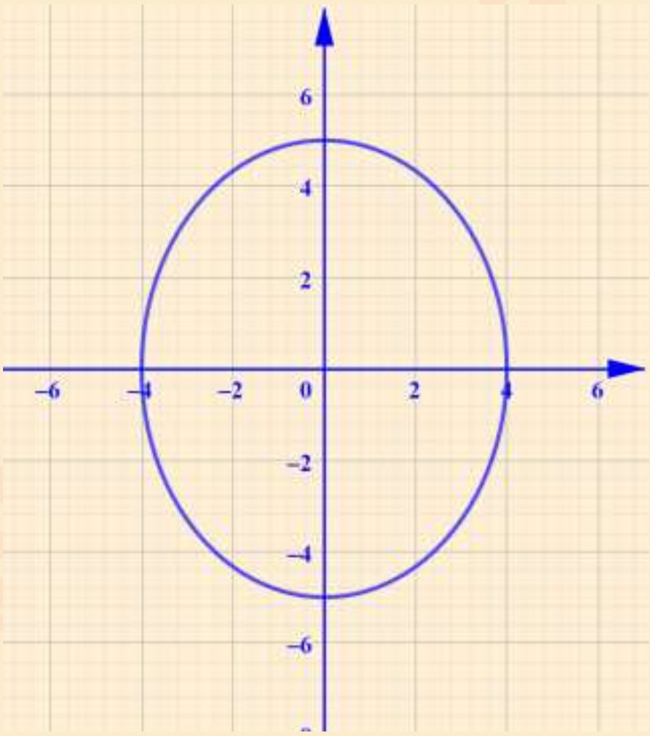
ដូចនេះ:

- ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ $2a=10$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ $2b=8$ ឯកតាប្រវែង
- កំពូល $V_1(0,-a) \Rightarrow V_1(0,-5)$

  $V_2(0,a) \Rightarrow V_2(0,5)$
- កំណុំ $F_1(0,-c) \Rightarrow F_1(0,-3)$

  $F_2(0,c) \Rightarrow F_2(0,3)$

ខ. សង់ (E)



២.យើងមាន $A(2;-2;2)$; $B(2;0;0)$ និង $C\left(\frac{6}{5};0;\frac{2}{5}\right)$ ។

1. - គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}=(2-2;0+2;0-2)=(0;2;-2)$

$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{6}{5}-2;0+2;\frac{2}{5}-2\right)=\left(-\frac{4}{5};2;-\frac{8}{5}\right)$

$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{6}{5}-2;0-0;\frac{2}{5}-0\right)=\left(-\frac{4}{5};0;\frac{2}{5}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}=(0;2;-2)\ ,\ \overrightarrow{AC}=\left(-\frac{4}{5};2;-\frac{8}{5}\right),\ \overrightarrow{BC}=\left(-\frac{4}{5};0;\frac{2}{5}\right)}$

-បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C

គេបាន $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)+(0)(2)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{8}{5}\right)=0$

ដោយ $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow \overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AC}$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ។

2. បង្ហាញថាប្លង់ (ABC) មានសមីការ $x+2y+2z-2=0$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -\frac{4}{5} & 2 & -\frac{8}{5} \end{vmatrix}$

$=\left(-\frac{16}{5}+4\right)\vec{i}-\left(0-\frac{8}{5}\right)\vec{j}+\left(0+\frac{8}{5}\right)\vec{k}$

$=\frac{4}{5}\vec{i}+\frac{8}{5}\vec{j}+\frac{8}{5}\vec{k}$

ដោយប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច $A(2;-2;2)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\frac{4}{5};\frac{8}{5};\frac{8}{5}\right)$ គឺ

$(ABC):\left(\frac{4}{5}\right)(x-2)+\left(\frac{8}{5}\right)(y+2)+\left(\frac{8}{5}\right)(z-2)=0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}(x+2y+2z-2)=0$

$(ABC): x+2y+2z-2=0$ ពិត

ដូចនេះ ប្លង់ (ABC) មានសមីការ $x+2y+2z-2=0$ ។

3. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (Δ) ដែលកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ $A(2;-2;2)$

ដោយ $(\Delta)\perp(ABC)\Rightarrow \vec{u}=\vec{n}=(1;2;2)$

គេបាន បន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច $A(2;-2;2)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(1;2;2)$

គេបាន

$$(\Delta):\begin{cases}x=x_o+at\\ y=y_o+bt\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=z_o+ct\end{cases}\Leftrightarrow (\Delta):\begin{cases}x=2+t\\ y=-2+2t\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=2+2t\end{cases}$$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $(\Delta):\begin{cases}x=2+t\\ y=-2+2t\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=2+2t\end{cases}$ ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

យើងមាន $(E): y''+y'-2y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+\lambda-2=0$

មានឫស៖ $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$

នាំឱ្យ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x};A,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ

$\boxed{y=Ae^{x}+Be^{-2x}\ ;\ A,B\in\mathbb{R}}$ ។

ខ.រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានតម្លៃអប្បបរមាស្មើនឹង $\frac{3}{2}$ ត្រង់ $x=0$

យើងមាន $y=Ae^{x}+Be^{-2x}$ នាំឱ្យ $y'=Ae^{x}-2Be^{-x}$

ដោយចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានតម្លៃអប្បបរមាស្មើនឹង $\frac{3}{2}$ ត្រង់ $x=0$

គេបាន $\begin{cases}y(0)=\frac{3}{2}\\ y'(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ae^{0}+Be^{0}=\frac{3}{2}\\ Ae^{0}-2Be^{0}=0\end{cases}$

$\begin{cases}A+B=\frac{3}{2}\\ A-2B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ B=\frac{1}{2}\end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ $y=e^{x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$

VII. យើងមាន $f(x)=x-3+\frac{4}{e^{x}+1}$

1. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-3+\frac{4}{e^{x}+1}\right)=-\infty-3+4=\boxed{-\infty}$

(ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$)

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-3+\frac{4}{e^{x}+1}\right)=+\infty-3+0=\boxed{+\infty}$

(ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^{x}+1}=0$)

2. a. បង្ហាញថា $f'(x)=\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2$

យើងមាន $f(x)=x-3+\frac{4}{e^{x}+1}$

$f'(x)=1-\frac{4e^{x}}{(e^{x}+1)^2}=\frac{(e^{x}+1)^2-4e^{x}}{(e^{x}+1)^2}=\frac{e^{2x}+2e^{x}+1-4e^{x}}{(e^{x}+1)^2}$

$=\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{(e^{x}+1)^2}=\frac{(e^{x}-1)^2}{(e^{x}+1)^2}=\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2}$

- សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

គេបាន $f'(x)=\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2\geq 0\ ;\ \forall x\in(-\infty,+\infty)$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ ។

ហើយ $f(0)=0-3+\frac{4}{e^{0}+1}=\boxed{-1}$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

b. បង្ហាញថា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ។

យើងមាន $f'(x)=\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2$

គ្រប់ $-x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ គេបាន

$f'(-x)=\left(\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\right)^2=\left(\frac{\frac{1-e^{x}}{e^{x}}}{\frac{1+e^{x}}{e^{x}}}\right)^2=\left(\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}\right)^2=\left(-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2$

$=\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2=f'(x)$ ជាអនុគមន៍សេស។

ដូចនេះ $f'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ។

3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\mathrm{d}):\ y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $+\infty$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=0$

$\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-3+\dfrac{4}{e^x+1}-(x-3)\right]=0$

$\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{e^x+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow\quad 0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(\mathrm{d}):\ y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $+\infty$ ។

4. a. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

យើងមាន $f(x)=x-3+\dfrac{4}{e^x+1}$

គេបាន $f(x)=x+1-4+\dfrac{4}{e^x+1}=x+1+\dfrac{4-4e^x-4}{e^x+1}$

$=x+1-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=x+1-\dfrac{4e^x}{e^x+1}}$

b. ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ $(\mathrm{d}'):y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$

$\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+1-\dfrac{4e^x}{e^x+1}-(x+1)\right]=0$

$\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{4e^x}{e^x+1}\right]=0$

$\Leftrightarrow\quad -\dfrac{4(0)}{0+1}=0$

$\Leftrightarrow\quad 0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(\mathrm{d}'):y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$ ។

5. a. គណនាកូអរដោនេនៃ I ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (C) និងអ័ក្ស $(y'oy)$ ។

ដោយ $(C)\cap(y'oy)\ \Rightarrow\ x=0$

គេបាន $f(0)=0-3+\dfrac{4}{e^0+1}=-1$

ដូចនេះ $\boxed{\mathrm{I}(0,-1)}$

b. បង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C)

តាមរូបមន្ត $f(2a-x)+f(x)=2b$

$\Leftrightarrow\quad f(-x)+f(x)=2(-1)$

$\Leftrightarrow\quad -x-3+\dfrac{4}{e^{-x}+1}+x-3+\dfrac{4}{e^x+1}=-2$

$\Leftrightarrow\quad -6+\dfrac{4e^x}{1+e^x}+\dfrac{4}{e^x+1}=-2$

$\Leftrightarrow\quad -6+\dfrac{4\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=-2$

$\Leftrightarrow\quad -6+4=-2$

$\Leftrightarrow\quad -2=-2$ ពិត

ដូចនេះ I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) ។

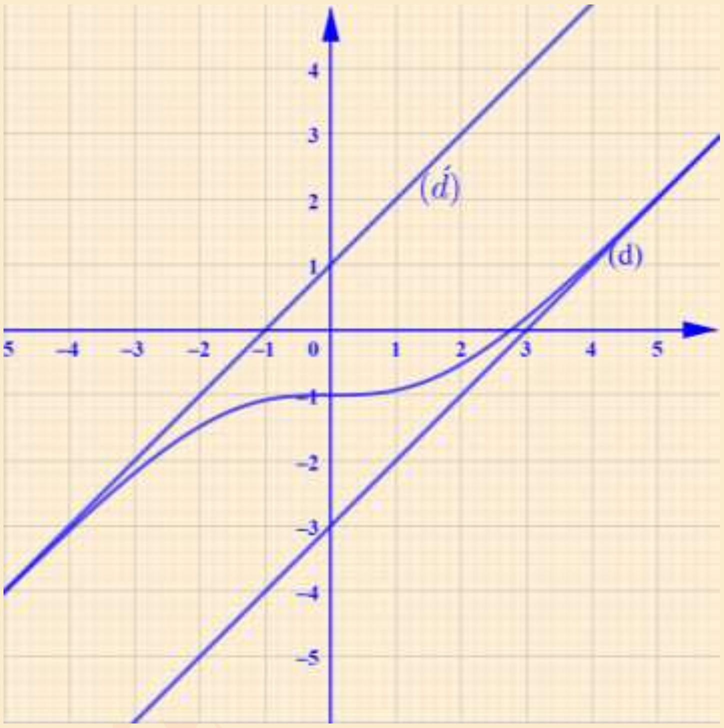
6. សង់ $(\mathrm{d});(\mathrm{d}')$ និង (C) ។ ក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(2.75\ ,\ 0)$ ។

$(\mathrm{d}):y=x-3\ ;$

x	0	3
y	-3	0

$(\mathrm{d}'):\ y=x+1\ ;$

x	0	-1
y	1	0



7. a. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

គេបាន $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^{-x}}+1}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}$

គណនា $A_\alpha(\lambda)$ ជាអនុគមន៍នៃ α និង λ ។

គេបាន $A_\alpha(\lambda)=\displaystyle\int_\alpha^\lambda\left[f(x)-(x-3)\right]dx$

$=\displaystyle\int_\alpha^\lambda\left[\frac{4}{e^x+1}\right]dx=\int_\alpha^\lambda\left[\frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}}\right]dx$

$=-4\displaystyle\int_\alpha^\lambda\frac{d\left(1+e^{-x}\right)}{1+e^{-x}}=-4\left[\ln\left|1+e^{-x}\right|\right]_\alpha^\lambda$

$=-4\ln\left|1+e^{-\lambda}\right|+4\ln\left|1+e^{-\alpha}\right|$

$=4\ln\left(\dfrac{1+e^{-\alpha}}{1+e^{-\lambda}}\right)$

ដូចនេះ $A_\alpha(\lambda)=4\ln\left(\dfrac{1+e^{-\alpha}}{1+e^{-\lambda}}\right)$ ឯកតាផ្ទៃ ។

b. បង្ហាញថា $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\alpha(\lambda)=4\ln\left(e^\alpha+1\right)-4\alpha$

គេបាន $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\alpha(\lambda)=4\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1+e^{-\alpha}}{1+e^{-\lambda}}\right)=4\ln\left(1+e^{-\alpha}\right)$

$=4\ln\left(\dfrac{e^\alpha+1}{e^\alpha}\right)=4\ln\left(e^\alpha+1\right)-4\alpha$

ដូចនេះ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\alpha(\lambda)=4\ln\left(e^\alpha+1\right)-4\alpha$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: -------------------លេខ --------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:---

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. (១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{3}-i$ និង $z_2=\sqrt{3}+3i$ ។

ក. គណនា z_1+z_2, z_1-z_2 , $z_1\times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ. សរសេរ z_1, z_2 , z_1+z_2 , $z_1\times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x}-3x+2\right)$ ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{\pi x^2-x+3}{3x^2-1}\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^2x-1}{\tan^2x-1}$

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+3\right)dx$; $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\tan x+\cot x)^2\,dx$ ។ គេមានអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $h(x)=\frac{1}{e^x-1}$ ។ បង្ហាញថា $h(x)=-\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}$ ។ គណនា $K=\int_{-\ln 3}^{-\ln 2}h(x)\,dx$ ។

IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងស្បោងមួយមានប៊ូលព៌ណស 3 ប៊ូលព៌ណខៀវ 3 និងប៊ូលព៌ណក្រហម 2 ។ គេចាប់យកប៊ូលម្តង 3 ក្នុងពេលតែមួយចេញពីស្បោងដោយចៃដន្យ។ គេសន្និដ្ឋានថាប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលនីមួយៗជាសមប្រូបាប។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. យ៉ាងតិចមានប៊ូលពីរព៌ណខៀវ។ **B.** ប៊ូលទាំងបីមានព៌ណខុសៗគ្នា។

V. (២៥ពិន្ទុ) A. គេមានសមីការប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅលើបន្ទាត់ $(d_1): y=x+1$ និងកំណុំនៅលើបន្ទាត់ $(d_2): 2x+3y-10=0$ ហើយមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាអ័ក្ស $(y'oy)$ ។ ចូរកំណត់សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល និង រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យចំណុច $A(2;1;0)$, $B(1;2;2)$, $C(3;3;1)$ និង $I(1;3;0)$ ។

1. **a.** រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AI}$ ។ **b.** គណនាប្រវែង AB , AC , BC និង AI រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។
2. **a.** ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុច A , B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ។
   b. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}(1;-1;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) រួចទាញរកសមីការប្លង់ (ABC) ។
3. **a.** ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំណុច I មិនស្ថិតនៅលើប្លង់ (ABC) ។ **b.** គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត IABC ។

VI. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 2y'-y=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត m និង p ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\left(mx^2+px\right)e^{\frac{x}{2}}$ ជាចម្លើយសមីការនៃ (E) ។

ខ. ស្រាយបំភ្លឺថា បើ g ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(g-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): 2y'-y=0$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) A. គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=-x^2-4+4\ln x$ ។

1. សិក្សាអថេរភាពនៃ g ។
2. ចូរកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $(0,+\infty)$ ។

B. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=-x+2-\frac{4\ln x}{x}$ តាង (C) ជាខ្សែកោងតំណាងអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. **a.** គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ **b.** បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។
   c. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
   d. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ ក្នុងចន្លោះ $(0,+\infty)$ មានឫស α តែមួយគត់ និងបង្ហាញថា $\alpha\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ ។
2. **a.** បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D: y=-x+2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។
   b. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C) និង បន្ទាត់ D ។
   c. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 1 ។
   d. សង់ D ; (T) និង ក្រាប (C) ។ គេឱ្យ $\ln 2=0.7$; $\ln\left(\frac{3}{2}\right)=0.4$

អត្រាកំណែ

I. យើងមាន $z_1=\sqrt{3}-i$ និង $z_2=\sqrt{3}+3i$

ក. គណនា z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត

$$z_1+z_2=\sqrt{3}-i+\sqrt{3}+3i=\boxed{2\sqrt{3}+2i}$$

$$z_1-z_2=\sqrt{3}-i-\left(\sqrt{3}+3i\right)=\sqrt{3}-i-\sqrt{3}-3i=\boxed{0-4i}$$

$$z_1\times z_2=\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+3i\right)=3+3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-3i^2=\boxed{6+2\sqrt{3}i}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+3i}=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}-3i\right)}{3-(3i)^2}=\frac{3-3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+3i^2}{12}$$

$$=\frac{-4\sqrt{3}i}{12}=\boxed{0-\frac{\sqrt{3}}{3}i}$$

ខ. សរសេរ z_1, z_2 , z_1+z_2 , $z_1\times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$z_1=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\boxed{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]}$$

$$z_2=\sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boxed{2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$z_1+z_2=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$z_1-z_2=-4i=4(-i)=4(0-i)=\boxed{4\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$z_1\times z_2=6+2\sqrt{3}i=4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\boxed{4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}i=\frac{\sqrt{3}}{3}(0-i)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}$$

II. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x}-3x+2\right)$ រាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x}-3x+2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+12x}-(3x-2)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+12x-(3x-2)^2}{\sqrt{9x^2+12x}-(3x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+12x-9x^2+12x-4}{\sqrt{9x^2+12x}+(3x-2)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{24x-4}{\sqrt{9x^2+12x}+(3x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(24-\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{9+\frac{12}{x}}+x\left(3-\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(24-\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{9+\frac{12}{x}}+3-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{24-\frac{4}{x}}{\sqrt{9+\frac{12}{x}}+3-\frac{2}{x}}$$

$$=\frac{24}{3+3}$$

$$=4$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x}-3x+2\right)=4}$

ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{\pi x^2-x+3}{3x^2-1}\right)$ រាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{\pi x^2-x+3}{3x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\cos\left[\frac{x^2\left(\pi-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{\pi-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}\right)=\cos\left(\frac{\pi-0+0}{3-0}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{\pi x^2-x+3}{3x^2-1}\right)=\frac{1}{2}}$

គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^2x-1}{\tan^2x-1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^2x-1}{\tan^2x-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^2x-\left(\sin^2x+\cos^2x\right)}{\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\cos^2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x-\cos^2x}\right)\left(-\cos^2x\right)$$

$$=-\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^2x-1}{\tan^2x-1}=-\frac{1}{2}}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+3\right)dx=\left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{4}+3x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{2^3}{9}-\frac{2^2}{4}+3\times2\right)-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+3\right)$$

$$=\frac{8}{9}-\frac{1}{9}+5+\frac{1}{4}-3=\frac{7}{9}+\frac{1}{4}+2=\frac{28+9+72}{36}$$

$$=\frac{109}{36}$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\frac{109}{36}}$

$$J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x+\cot x\right)^2dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2x+2\tan x\cot x+\cot^2x\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2x+2+\cot^2x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2x+1+\cot^2x\right)dx$$

$$=\left[\tan x-\cot x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\left(\tan\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{4}\right)-\left(\tan\frac{\pi}{6}-\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=(1-1)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{J=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

- បង្ហាញថា $h(x)=-\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}-1}$

យើងមាន $h(x)=\dfrac{1}{e^{x}-1}$

នាំឱ្យ $h(x)=\dfrac{1}{e^{x}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^{-x}}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{1-e^{-x}}{e^{-x}}}=-\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}-1}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{h(x)=-\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}-1}}$

គណនា $\text{K}=\displaystyle\int_{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} h(x)\,dx$

$$\text{K}=\int_{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} h(x)\,dx=-\int_{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}dx$$

$$=\int_{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d\left(e^{-x}-1\right)}{e^{-x}-1}=\Big[\ln\left|e^{-x}-1\right|\Big]_{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\ln\left|e^{\ln 2}-1\right|-\ln\left|e^{\ln 3}-1\right|$$

$$=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{K}=-\ln 2}$

IV. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A. យ៉ាងតិចមានប៊ូលពីរព៌ណខៀវ

គេបាន ចំនួនករណីអាចគឺ $n(S)=C(8,3)=\dfrac{8!}{(8-3)!3!}$

$$=\frac{8\times7\times6\times5!}{5!\times3\times2\times1}=56 \text{ ករណី}$$

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ A គឺ

$n(A)=C(3,2)\times C(5,1)+C(3,3)=3\times5+1=16$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{16}{56}=\dfrac{2}{7}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{2}{7}}$

B. ប៊ូលទាំងបីមានព៌ណខុសៗគ្នា

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃ B គឺ

$n(B)=C(3,1)\times C(3,1)\times C(2,1)=3\times3\times2=18$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{18}{56}=\dfrac{9}{28}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{9}{28}}$ ។

V. **A.** កំណត់សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល និង រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ

ដោយ ប៉ារ៉ាប៉ូលមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិសឈរ នោះសមីការស្តង់ដារ គឺ

$(y-k)^2=4p(x-h)$

- ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល $V(h,k)$

ដោយ $V(h,k)\in(\text{d}_1)$ $\Leftrightarrow$ $k=h+1$ (1)

- ប៉ារ៉ាបូលមានកំណុំ $F(h+p,k)$

ដោយ $F(h+p,k)\in(\text{d}_2)$ $\Leftrightarrow 2(h+p)+3k-10=0$

គេបាន $2h+3k+2p-10=0$ (2)

- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាអ័ក្ស $(\text{y}'\text{oy})$ នាំឱ្យ

$x=0\Leftrightarrow h-p=0\Rightarrow h=p$ (3)

តាម (2) គេបាន

$2h+3k+2h-10=0\Rightarrow 4h+3k-10=0$ (4)

យក $k=h+1$ ជំនួសក្នុង (4) គេបាន

$4h+3(h+1)-10=0 \Leftrightarrow 7h-7=0\Rightarrow h=1$

នាំឱ្យ $h=p=1$, $k=2$

ដូចនេះ - សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(y-2)^2=4(x-1)$

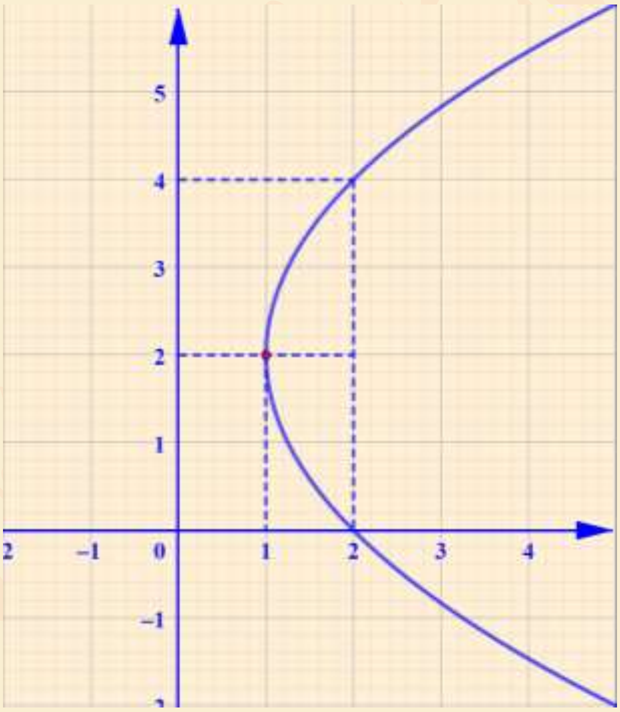
- កំពូល $V(1,2)$

- កំណុំ $F(2,2)$

-សង់ប៉ារ៉ាបូល

តារាងជំនួយ $(y-2)^2=4(x-1)$

x	0	1	4
y	0	2	3



B. យើងមានចំណុច $\text{A}(2;1;0)$, $\text{B}(1;2;2)$, $\text{C}(3;3;1)$ និង $\text{I}(1;3;0)$

1. **a.** រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$, $\overrightarrow{\text{BC}}$ និង $\overrightarrow{\text{AI}}$

$\overrightarrow{\text{AB}}=(1-2)\vec{\text{i}}+(2-1)\vec{\text{j}}+(2-0)\vec{\text{k}}=-\vec{\text{i}}+\vec{\text{j}}+2\vec{\text{k}}$

$\overrightarrow{\text{AC}}=(3-2)\vec{\text{i}}+(3-1)\vec{\text{j}}+(1-0)\vec{\text{k}}=\vec{\text{i}}+2\vec{\text{j}}+\vec{\text{k}}$

$\overrightarrow{\text{BC}}=(3-1)\vec{\text{i}}+(3-2)\vec{\text{j}}+(1-2)\vec{\text{k}}=2\vec{\text{i}}+\vec{\text{j}}-\vec{\text{k}}$

$\overrightarrow{\text{AI}}=(1-2)\vec{\text{i}}+(3-1)\vec{\text{j}}+(0-0)\vec{\text{k}}=-\vec{\text{i}}+2\vec{\text{j}}$

ដូចនេះ

$$\boxed{\begin{array}{ll}\overrightarrow{\text{AB}}=-\vec{\text{i}}+\vec{\text{j}}+2\vec{\text{k}}\ , & \overrightarrow{\text{AC}}=\vec{\text{i}}+2\vec{\text{j}}+\vec{\text{k}}\\ \overrightarrow{\text{BC}}=2\vec{\text{i}}+\vec{\text{j}}-\vec{\text{k}}\ , & \overrightarrow{\text{AI}}=-\vec{\text{i}}+2\vec{\text{j}}\end{array}}$$

b. គណនាប្រវែង AB , AC , BC និង AI

$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$

$AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

$BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$AI=\left|\overrightarrow{AI}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$

ដូចនេះ $\boxed{AB=\sqrt{6}\ ,\ AC=\sqrt{6}\ ,\ BC=\sqrt{6}\ ,\ AI=\sqrt{5}}$

-បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ដោយ $AB=AC=BC=\sqrt{6}$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

2. **a.** ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុច A , B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ

ដោយ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{AC}$ នោះ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា បានន័យថាចំណុច A , B និង C មិនរត់ត្រង់គ្នា។

ដូចនេះ ចំណុច A , B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ។

b. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}(1;-1;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC)

គេបាន $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(1)(-1)+(-1)(1)+(1)(2)=-2+2=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(1)(1)+(-1)(2)+(1)(1)=2-2=0$

នាំឱ្យ $\begin{bmatrix}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{n}\perp(ABC)$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\vec{n}(1;-1;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) ។

- ទាញរកសមីការប្លង់ (ABC)

ដោយ វ៉ិចទ័រ $\vec{n}(1;-1;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC)

គេបាន សមីការប្លង់ $(ABC): x-y+z+d=0$

ដោយ $A(2;1;0)\in(ABC)\Leftrightarrow 2-1+0+d=0\Rightarrow d=-1$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(ABC): x-y+z-1=0$ ។

3. **a.** ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំណុច I មិនស្ថិតនៅលើប្លង់ (ABC)

យើងមាន $I(1;3;0)$, $(ABC): x-y+z-1=0$

គេបាន $1-3+0-1=-3\neq 0$

នាំឱ្យ $I\notin(ABC)$

ដូចនេះ ចំណុច I មិនស្ថិតនៅលើប្លង់ (ABC) ។

b. គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត IABC

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}$

$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AI}\right|=\left|(-3)(-1)+3(2)+(-3)(0)\right|$

$=\frac{1}{6}|9|=\frac{3}{2}$ ឯកតាមាឌ

ដូចនេះ $V=\frac{3}{2}$ ឯកតាមាឌ

VI. យើងមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 2y'-y=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត m និង p ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=(mx^2+px)e^{\frac{x}{2}}$ ជាចម្លើយសមីការនៃ (E)

យើងមាន $f(x)=(mx^2+px)e^{\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow f'(x)=(mx^2+px)'e^{\frac{x}{2}}+\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'(mx^2+px)$

$=(2mx+p)e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(mx^2+px)$

$=e^{\frac{x}{2}}\left(2mx+p+\frac{1}{2}mx^2+\frac{1}{2}px\right)$

$=e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}mx^2+\left(2m+\frac{1}{2}p\right)x+p\right]$

ដោយ អនុគមន៍ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) គេបាន

$2f'(x)-f(x)=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow 2e^{\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}mx^2+\left(2m+\frac{1}{2}p\right)x+p\right]-e^{\frac{x}{2}}(mx^2+px)=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow mx^2+(4m+p)x+2p-mx^2-px=1-x$

$\Leftrightarrow (4m+p-p)x+2p=1-x$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}4m=-1\\2p=1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}m=-\frac{1}{4}\\ p=\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{m=-\frac{1}{4}\ ;\ p=\frac{1}{2}}$

ខ. ស្រាយបំភ្លឺថា បើ g ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(g-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): 2y'-y=0$

✪ បង្ហាញថា បើ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $(g-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): 2y'-y=0$

ដោយ g ជាចម្លើយនៃ (E) គេបាន $2g'-g=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) គេបាន

$2f'-f=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$ (2)

យក $(1)-(2)$ គេបាន $2(g'-f')-(g-f)=0$

$\Rightarrow 2(g-f)'-(g-f)=0$

មានន័យថា $(g-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E')

-បើ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $(g-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): 2y'-y=0$ (i)

✪ បង្ហាញថា បើ $(g-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): 2y'-y=0$ នោះ g ជាចម្លើយនៃ (E)

ដោយ $(g-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): 2y'-y=0$ គេបាន

$2(g-f)'-(g-f)=0$

$\Leftrightarrow 2g'-2f'-g+f=0$

$\Leftrightarrow 2g'-g=2f'-f$

$\Leftrightarrow 2g'-g=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$

មានន័យថា g ជាចម្លើយនៃ (E)

-បើ $(g-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): 2y'-y=0$ នោះ g ជាចម្លើយនៃ (E) (ii)

តាម (i) និង (ii) បើ g ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(g-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): 2y'-y=0$ ។

ដូចនេះ បើ g ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(g-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'): 2y'-y=0$ ។

VII. **A.** គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ

$g(x)=-x^2-4+4\ln x$ ។

1. សិក្សាអថេរភាពនៃ g

គេបាន

$g'(x)=-2x+\frac{4}{x}=\frac{-2x^2+4}{x}$

$=\frac{2(2-x^2)}{x}=\frac{2(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}{x}$

ដោយ $x>0$ និង $2(\sqrt{2}+x)>0$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ នោះ $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\sqrt{2}-x$ ឱ្យ $\sqrt{2}-x=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}$

តារាងសញ្ញានៃ $g'(x)$

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

- ចំពោះ គ្រប់ $x\in(0,\sqrt{2})$ នោះ $g'(x)>0$ នាំឱ្យ g ជាអនុគមន៍កើន។
- ចំពោះគ្រប់ $x\in(\sqrt{2},+\infty)\Leftrightarrow g'(x)<0$ នាំឱ្យ g ជាអនុគមន៍ចុះ។
- ចំពោះ $x=\sqrt{2} \Leftrightarrow g'(x)=0$ នាំឱ្យ g ជាអនុគមន៍ថេរ។

2. កំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $(0,+\infty)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

ចំណុចបរមា

$g(\sqrt{2})=-(\sqrt{2})^2-4+4\ln(\sqrt{2})=-6+2\ln 2=-4.6$

លីមីត

$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+}(-x^2-4+4\ln x)=\boxed{-\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x^2-4+4\ln x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(-1-\frac{4}{x}+\frac{4\ln x}{x^2}\right)$

$=(+\infty)^2(-1-0+0)=\boxed{-\infty}$

តារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-4.6	↘	$-\infty$

តាមតារាងអថេរភាព គេបាន $g(x)<0$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។

ដូចនេះ $g(x)<0$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។

B. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ដោយ

$f(x)=-x+2-\frac{4\ln x}{x}$ ។

1. a. គណនាលីមីត $\lim_{x\to0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$។

គេបាន $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(-x+2-\frac{4\ln x}{x}\right)=\boxed{+\infty}$

(ព្រោះ $\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{4\ln x}{x}\right)=+\infty$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+2-\frac{4\ln x}{x}\right)=\boxed{-\infty}$

(ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4\ln x}{x}\right)=0$)

b. បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។

យើងមាន $f(x)=-x+2-\frac{4\ln x}{x}$

$f'(x)=-1-4\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{-x^2-4+4\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$ ពិត

ដូចនេះ $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។

c. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ដោយ $x^2>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$

តែ $g(x)<0$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$

នាំឱ្យ $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

d. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ ក្នុងចន្លោះ $(0,+\infty)$ មានឫស α តែមួយគត់

- f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ នោះអនុគមន៍ f ជាប់លើ $(0,+\infty)$ នាំឱ្យក្រាបនៃអនុ- f កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ α តែមួយគត់។
- $f(0,+\infty)=\left(\lim_{x\to0^+} f(x);\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(+\infty,-\infty)$

នាំឱ្យ $0\in(+\infty,-\infty)$ ។

ដូចនេះ សមីការ $f(x)=0$ ក្នុងចន្លោះ $(0,+\infty)$ មានឫស α តែមួយគត់។

- បង្ហាញថា $\alpha\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$

គេបាន $f(1)=-1+2-\frac{4\ln 1}{1}=1$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}+2-\frac{4\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{4\times0.4}{\frac{3}{2}}=-0.56$

ដោយ $f(1)\times f\left(\frac{3}{2}\right)=-0.56<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល សមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ ។

ដូចនេះ $\alpha\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ ។

2. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ D: $y=-x+2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ កាលណា $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[-x+2-\frac{4\ln x}{x}-(-x+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4\ln x}{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow 0=0$ ពិត

ដូចនេះបន្ទាត់ $D: y=-x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។

b. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C) និង បន្ទាត់ D ។

គេបាន $(C)-D=-\dfrac{4\ln x}{x}$

ដោយ $x>0$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ នោះ $(C)-D$ មានសញ្ញាដូច $-4\ln x$

- បើ $-4\ln x=0 \Rightarrow x=1$
- បើ $-4\ln x>0 \Rightarrow x<1$
- បើ $-4\ln x<0 \Rightarrow x>1$

តារាងសញ្ញានៃ $(C)-D$

x	0		1		$+\infty$
$(C)-D$		+	0	-	

- ចំពោះ $x\in(0\,,1)$ $\Leftrightarrow$ $(C)-D>0$ នាំឱ្យក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ D ។
- ចំពោះ $x\in(1\,,+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $(C)-D<0$ នាំឱ្យក្រាប (C) នៅក្រោមបន្ទាត់ D ។
- ចំពោះ $x=1$ $\Leftrightarrow$ $(C)-D=0$ នាំឱ្យក្រាប (C) ប្រសព្វនឹងបន្ទាត់ D ត្រង់ចំណុចមានកូអរដោនេ $(1\,,1)$ ។

c. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 1 ។

រូបមន្ត $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\Leftrightarrow (T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

គេបាន

$$f'(x)=\frac{-x^2-4+4\ln x}{x^2} \Leftrightarrow f'(1)=\frac{-1^2-4+4\ln(1)}{1^2}=-5$$

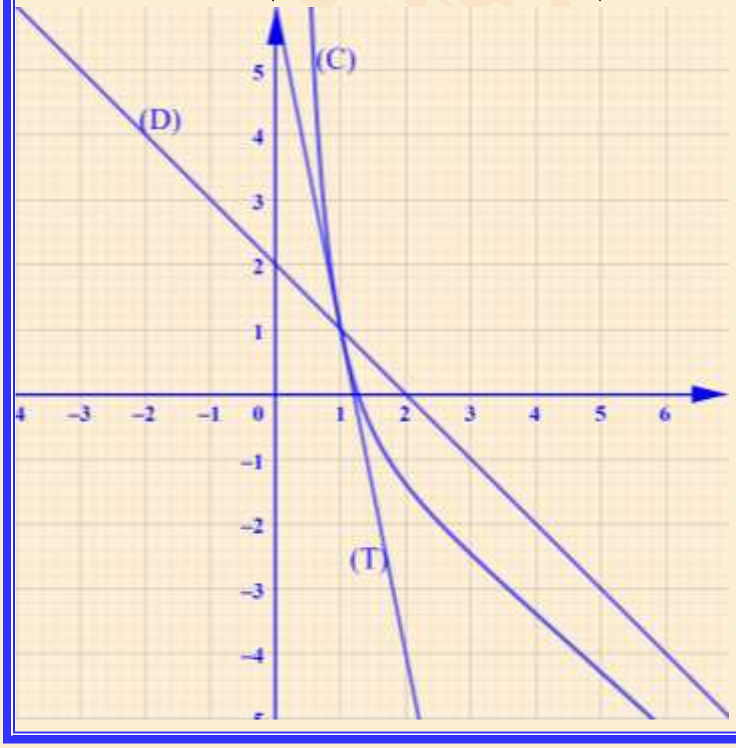
ហើយ $f(1)=1$

នាំឱ្យ $(T): y=(-5)(x-1)+1=-5x+6$

ដូចនេះ $\boxed{(T): y=-5x+6}$

d. សង់ D ; (T) និង ក្រាប (C)

$D: y=-x+2$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$ និង $(T): y=-5x+6$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{6}{5} \\ \hline y & 6 & 0 \end{array}$



មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------**លេខ** --------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:--

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. **(១៥ពិន្ទុ)** គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\tan^2 3x}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$

II. **(១០ពិន្ទុ)** ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលក្រហម 2 គ្រាប់ ខៀវ 5 គ្រាប់ និងស 16 គ្រាប់។ បើគេទាញបានប៊ូលក្រហមមួយគេទទួលបានប្រាក់ 100$ ខៀវមួយ 50$ បើបានប៊ូលព៌ណស គេមិនបានទទួលប្រាក់ទេ ។ អ្នកលេងម្នាក់ទាញយក ប៊ូល 5 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យពីថង់ ។
គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖
ក. បានប្រាក់ 100$ ។
ខ. បានប្រាក់ 250$ ។

III. **(១៥ពិន្ទុ)** គេមានសមីការ $z^2-6z+12=0$ ។
ក. រកឫសកុំផ្លិច z_1 និង z_2 នៃសមីការនេះ ដោយដឹងថាឫស z_1 មានផ្នែកនិមិត្តជាចំនួនវិជ្ជមាន។
ខ. គណនា ម៉ូឌុលនិង អាគុយម៉ង់នៃ $2z_1+\bar{z}_2$ ។ រួចកំណត់តម្លៃនៃ $(2z_1+\bar{z}_2)^6$ ។

IV. **(១៥ពិន្ទុ)** គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^1\sqrt{x}(2x-1)^2\,dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{1-\sin x}\,dx$ និង $K=\int_2^3\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}\,dx$ ។

V. **(២៥ពិន្ទុ)** **A.** គេឱ្យអេលីបមួយមានកំណុំ $F_1(-2,-2)$ និង $F_2(4,-2)$ ។ ចូរកំណត់សមីការស្តង់ដារនៃអេលីប ដែលមានកំពូលនៅលើបន្ទាត់ $(L): x-y-8=0$ ។ រួចសង់អេលីបនេះ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេមានចំណុច $A(-1;-1;4)$, $B(2;0;2)$, $C(1,-4,-1)$; $J(2;0;5)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(1;-1;1)$ ។
ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ}$ ។
ខ. គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}$ និង $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។ រួចទាញរកសមីការប្លង់ (ABC) ។
គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច J លើប្លង់ (ABC) ។

VI. **(១០ពិន្ទុ)** **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+y'-2y=0$ ។
ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $g(x)=e^x+e^{-2x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។

VII. **(៣៥ពិន្ទុ)** គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(1+x^2)e^{-x}$ តាង (C) ជាខ្សែកោងតំណាងអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. **a.** គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ។
b. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក។

2. **a.** បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x)=-(x-1)^2e^{-x}$ ។
b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

3. **a.** កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច J ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 0 ។
b. គេឱ្យ A និង B ជាចំណុចនៃ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីស 1 និង 3 រៀងគ្នា។ បង្ហាញថា A និង B ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប (C) ។

4. គណនា $f(-1)$; $f(3)$ រួចសង់ក្រាប (C) និង បន្ទាត់ប៉ះក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

5. គេឱ្យ S ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) ,អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=3$ ។
a. គេឱ្យ F ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $F(x)=-(x^2+2x+3)e^{-x}$ ។ បង្ហាញថា F ជាព្រីមីទីវនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។
b. គណនា S ។ គេឱ្យ $\dfrac{2}{e}=0.73$; $e=2.7$; $e^3=20$ ។

អត្រាកំណែ

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+1-3^2(x+3)}{(x+2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\sqrt{x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-9x-26}{(x+2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\sqrt{x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(2x-13)}{(x+2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\sqrt{x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2x-13}{\sqrt{2x^2+1}+3\sqrt{x+3}}=\frac{2(-2)-13}{\sqrt{9}+3\sqrt{1}}=-\frac{17}{6}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}=-\dfrac{17}{6}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\tan^2 3x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\tan^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{\tan^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{x^2}{\tan^2 3x}\times 2$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{3x}{\tan 3x}\right)^2\times\frac{2}{9}=\frac{2}{9}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\tan^2 3x}=\dfrac{2}{9}}$

គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

<u>របៀបទី១</u>

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x-1)\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)}{\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-1}{4\cos^2 x-2}\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{2\left(2\cos^2 x-1\right)}\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(\cos x-\sin x)}{2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}\left(\frac{2\cos x+\sqrt{2}}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{-\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)}{2\cos x(\cos x+\sin x)}\right]=\frac{-\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{\frac{2\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}}$

<u>របៀបទី២</u>

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

តាង $t=\dfrac{\pi}{4}-x\ \Rightarrow\ x=\dfrac{\pi}{4}-t$

បើ $x\to\dfrac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ t\to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)-1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)-\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\tan t}{1+\tan t}-1}{2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos t+\sin\frac{\pi}{4}\sin t\right)-\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\tan t-1-\tan t}{1+\tan t}}{\sqrt{2}\cos t+\sqrt{2}\sin t-\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-2\tan t}{\sqrt{2}(\cos t+\sin t-1)(1+\tan t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-2}{-\sqrt{2}}\times\frac{\frac{\tan t}{t}}{\frac{1-\cos t}{t}-\frac{\sin t}{t}}\times\frac{1}{1+\tan t}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{0-1}\times\frac{1}{1+0}=-\sqrt{2}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}}$

II. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

ក. បានប្រាក់100$ ។

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលអ្នកលេងទាញបានប្រាក់100$

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(23,5)=33649$ ករណី

ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ

$$n(A)=C(2,1)\times C(16,4)+C(5,2)\times C(16,3)$$
$$=2\times 1820+10\times 560=3640+5600$$
$$=9240\ \text{ករណី}$$

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{9240}{33649}=\dfrac{120}{437}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{P(A)=\dfrac{120}{437}}$

ខ. បានប្រាក់ 250$

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលអ្នកលេងទាញបានប្រាក់ 250$

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ

$$n(B)=C(2,2)\times C(5,1)\times C(16,2)$$
$$+C(2,1)\times C(5,3)\times C(16,1)+C(5,5)$$
$$=1\times 5\times 120+2\times 10\times 16+1$$
$$=921\ \text{ករណី}$$

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{921}{33649}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(B)=\frac{921}{33649}}$

III. យើងមានសមីការ $z^2-6z+12=0$ ។

ក. រកឫសកុំផ្លិច z_1 និង z_2 នៃសមីការនេះ ដោយដឹងថាឫស z_1 មានផ្នែកនិមិត្តជាចំនួនវិជ្ជមាន

គេបាន $\Delta'=b'^2-ac=(-3)^2-12=-3\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=i\sqrt{3}$

$$z_1=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{3+i\sqrt{3}}{1}=3+i\sqrt{3}$$

$$z_2=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{3-i\sqrt{3}}{1}=3-i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ: $\boxed{z_1=3+i\sqrt{3}\ ,\ z_2=3-i\sqrt{3}}$

ខ. គណនា ម៉ូឌុលនិង អាគុយម៉ង់នៃ $2z_1+\bar{z}_2$

គេបាន $2z_1+\bar{z}_2=2(3+i\sqrt{3})+3+i\sqrt{3}=9+3\sqrt{3}i$

នាំឱ្យ $r=\sqrt{9^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{81+27}=6\sqrt{3}$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{9}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\end{array}\right|\Rightarrow\arg(2z_1+\bar{z}_2)=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះ: ម៉ូឌុល $r=6\sqrt{3}$ និង $\arg(2z_1+\bar{z}_2)=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ ។

រួចកំណត់តម្លៃនៃ $(2z_1+\bar{z}_2)^6$ ។

គេបាន $2z_1+\bar{z}_2=6\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

នាំឱ្យ $(2z_1+\bar{z}_2)^6=\left[6\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$

$$=(6\sqrt{3})^6\left(\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}\right)$$

$$=(6\sqrt{3})^6(-1+0)=-(6\sqrt{3})^6=-6^6\cdot 3^3$$

ដូចនេះ: $\boxed{(2z_1+\bar{z}_2)^6=-1259712}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int_0^1\sqrt{x}(2x-1)^2dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(4x^2-4x+1)dx$$

$$=\int_0^1\left(4x^{2+\frac{1}{2}}-4x^{1+\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\int_0^1\left(4x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\left[\frac{4x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}-\frac{4x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\left[\frac{8}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{8}{7}-\frac{8}{5}+\frac{2}{3}\right)-0=\frac{22}{105}$$

ដូចនេះ: $\boxed{I=\frac{22}{105}}$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin x}{1-\sin^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin x}{\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{\sin x}{\cos^2x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos x)}{\cos^2x}=\left[\tan x+\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\tan\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\right)-\left(\tan 0+\frac{1}{\cos 0}\right)=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-1=\sqrt{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{J=\sqrt{2}}$

$$K=\int_2^3\frac{2x^2-3x+2}{x-1}dx=\int_2^3\left(2x-1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=\left[x^2-x+\ln|x-1|\right]_2^3=(3^2-3+\ln 2)-(2^2-2+\ln 1)$$

$$=6+\ln 2-2=4+\ln 2$$

ដូចនេះ: $\boxed{K=4+\ln 2}$

V. **A.** កំណត់សមីការស្តង់ដារនៃអេលីប

ដោយ អរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបដូចគ្នានោះ អ័ក្សធំស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

នាំឱ្យសមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

- កំណុំ $F_1(h-c,k)=F_1(-2,-2)\Rightarrow h-c=-2\ \ (1)\ ;k=-2$

  $F_2(h+c,k)=F_2(4,-2)\Rightarrow h+c=4\ \ (2)$

យក $(1)+(2)$ គេបាន $2h=2\Rightarrow h=1$

តាម (2) គេបាន $1+c=4\Rightarrow c=3$

- កំពូល $V(h\pm a;k)\in(L)$ នាំឱ្យ $h\pm a-k-8=0$

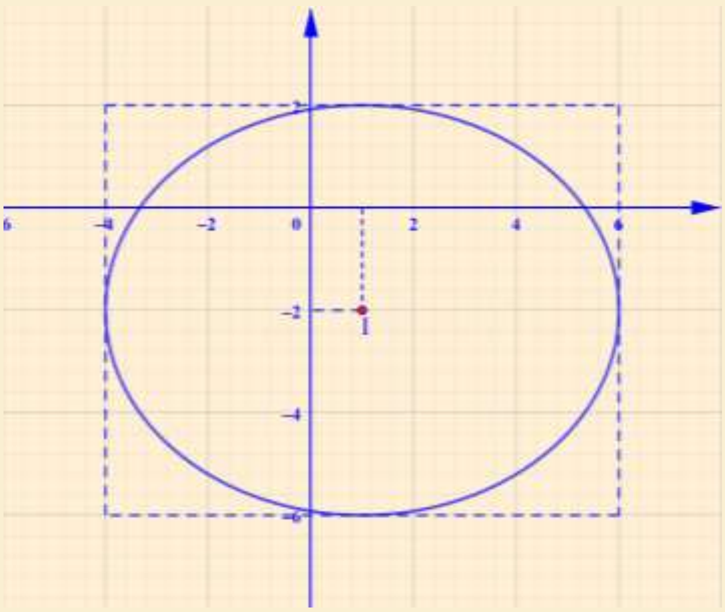
  $1\pm a+2-8=0\ \Leftrightarrow\ \pm a=5$

  $\Rightarrow\ a=5\ ;(a>0)$

ម្យ៉ាងទៀត $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដារនៃអេលីបគឺ $\boxed{\frac{(x-1)^2}{5^2}+\frac{(y+2)^2}{4^2}=1}$

- សង់អេលីប



B. យើងមានចំណុច $A(-1;-1;4)$, $B(2;0;2)$, $C(1,-4,-1)$; $J(2;0;5)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(1;-1;1)$

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ}$ ។

$\overrightarrow{AB}=(2+1;0+1;2-4)=(3;1;-2)$

$\overrightarrow{AC}=(1+1;-4+1;-1-4)=(2;-3;-5)$

$\overrightarrow{BC}=(1-2;-4-0;-1-2)=(-1;-4;-3)$

$\overrightarrow{CJ}=(2-1;0+4;5+1)=(1;4;6)$

ដូចនេះ

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=(3;1;-2)\ ,\ \overrightarrow{AC}=(2;-3;-5)\ ,\ \overrightarrow{BC}=(-1;-4;-3)\quad \overrightarrow{CJ}=(1;4;6)}$$

ខ. គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}$ និង $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AC}$

គេបាន $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=(1)(3)+(-1)(1)+(1)(-2)=3-1-2=0$

$\vec{a}\cdot\overrightarrow{AC}=(1)(2)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0\ ;\ \vec{a}\cdot\overrightarrow{AC}=0}$

-ទាញរកសមីការប្លង់ (ABC)

ដោយ $\begin{bmatrix}\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{a}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\vec{a}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{a}\perp\overrightarrow{AC}\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{a}\perp(ABC)$

នាំឱ្យ វ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(1;-1;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC)

គេបាន សមីការប្លង់ $(ABC): x-y+z+d=0$

ដោយ $A(-1;-1;4)\in(ABC)\Leftrightarrow\ -1-(-1)+4+d=0$

$\Rightarrow d=-4$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(ABC): x-y+z-4=0$ ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច H

ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច J លើប្លង់ (ABC) នាំឱ្យមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (JH) គឺ $\vec{u}=\vec{a}=(1;-1;1)$

គេបានសមីការបន្ទាត់ $(JH):\begin{cases}x=2+t\\ y=-t\quad ;t\in\mathbb{R}\\ z=5+t\end{cases}$

ដោយ $H\in(ABC)\Rightarrow\ x_H-y_H+z_H-4=0\quad(*)$

ហើយ $H\in(JH)\Rightarrow\begin{cases}x_H=2+t\\ y_H=-t\qquad(**)\\ z_H=5+t\end{cases}$

យក $x_H=2+t;y_H=-t;z_H=5+t$ ជំនួសក្នុង $(*)$

គេបាន $2+t-(-t)+5+t-4=0\ \Leftrightarrow 3t=-3\ \Rightarrow t=-1$

យក $t=-1$ ជំនួសក្នុង $(**)$

គេបាន $\begin{cases}x_H=2-1=1\\ y_H=-(-1)=1\\ z_H=5-1=4\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{H(1;1;4)}$

VI. ក.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+y'-2y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+\lambda-2=0$ មានឫស $\lambda_1=1;\ \lambda_2=-2$

នាំឱ្យចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$; $A,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{x}+Be^{-2x};A,B\in\mathbb{R}$

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $g(x)=e^x+e^{-2x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

គេបាន $g'(x)=e^x-2e^{-2x}$

$g''(x)=e^x+4e^{-2x}$

ដោយ $g(x)$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) កាលណា

$g''(x)+g'(x)-2g(x)=0$

$\Leftrightarrow\ e^x+4e^{-2x}+e^x-2e^{-2x}-2\left(e^x+e^{-2x}\right)=0$

$\Leftrightarrow\ 2e^x+2e^{-2x}-2e^x-2e^{-2x}=0$

$\Leftrightarrow\quad 0=0$ ពិត

ដូចនេះ $g(x)=e^x+e^{-2x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។

VII. យើងមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(1+x^2)e^{-x}$

1. a. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x^2)e^{-x}=(1+\infty)(+\infty)=\boxed{+\infty}$

b. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)e^{-x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{x^2}{e^x}\right)=0+0=0$ ពិត

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ។

- ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

ដូចនេះ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$ ។

2. a. បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x)=-(x-1)^2e^{-x}$

យើងមាន $f(x)=(1+x^2)e^{-x}$

គេបាន $f'(x)=2xe^{-x}-e^{-x}(1+x^2)=(2x-1-x^2)e^{-x}$

$=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$ ពិត

ដូចនេះ គ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x)=-(x-1)^2e^{-x}$ ។

b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x)=-(x-1)^2e^{-x}$

នាំឱ្យ $f'(x)\le0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជានិច្ចចុះលើ $\mathbb{R}$ ។

- សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គេបាន $f(1)=(1+1^2)e^{-1}=\dfrac{2}{e}=\boxed{0.73}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0.73	↘	0

3. a. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច J ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 0 ។

គេបាន $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\Rightarrow\ y = f'(0)(x-0)+f(0)$

យើងមាន $f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x} \Rightarrow f'(0) = -(0-1)^2 e^0 = -1$

និង $f(0) = (1+0^2)e^0 = 1$

គេបាន $y = (-1)(x-0)+1 = -x+1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = -x+1$ ។

b. បង្ហាញថា A និង B ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប (C)

យើងមាន A និង B ចំណុចរបត់នៃ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីស 1 និង 3 រៀងគ្នាគេបាន

$f'(x) = -(x-1)^2 e^{-x}$

$\Rightarrow f''(x) = -\left[2(x-1)e^{-x} - e^{-x}(x-1)^2\right]$

$= e^{-x}(-2x+2+x^2-2x+1)$

$= (x^2-4x+3)e^{-x}$

ដោយ $e^{-x} > 0$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ នោះ $f''(x)$ មានសញ្ញាដូច x^2-4x+3

ឱ្យ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3 = 0$

មានឫស $x=1$; $x=3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	

តាមតាងសញ្ញា $f''(x)$ ប្តូរពី **(+)** ទៅ (-) ត្រង់ $x=1$ និងប្តូរសញ្ញាពី (-) ទៅ **(+)** ត្រង់ $x=3$ នោះ f មានចំណុចរបត់ត្រង់ $x=1$ និង $x=3$ ។

នាំឱ្យ A និង B ជាចំណុចរបត់នៃ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីស 1 និង 3 រៀងគ្នា

ដូចនេះ A និង B ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប (C) ។

4. -គណនា $f(-1)$; $f(3)$

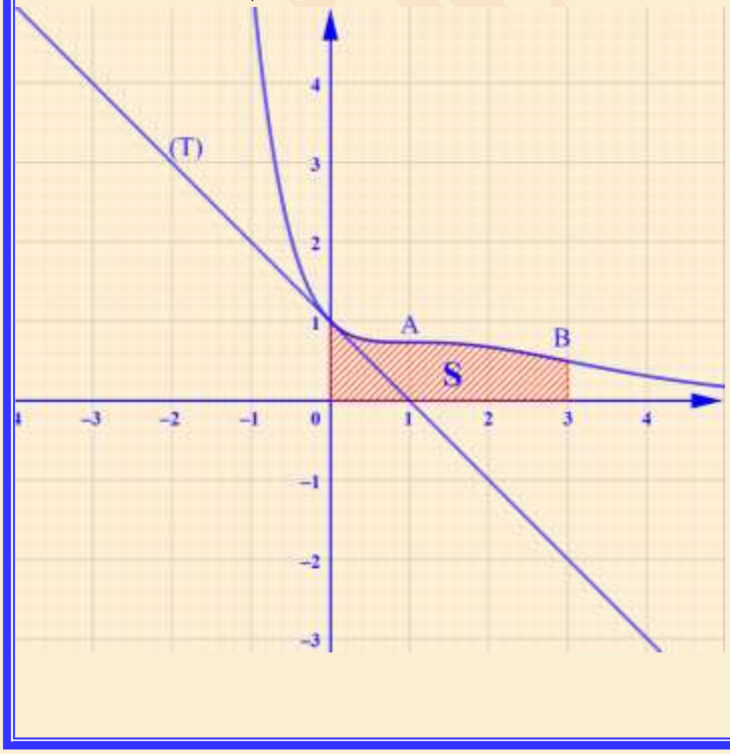
$f(-1) = \left[1+(-1)^2\right]e^{-(-1)} = 2(2.7) = \boxed{5.4}$

$f(3) = (1+3^2)e^{-3} = \dfrac{10}{e^3} = \boxed{0.5}$

-សង់ក្រាប (C) និង បន្ទាត់ប៉ះក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$

$y = -x+1$;

x	0	1
y	1	0



5. a. បង្ហាញថា F ជាព្រីមីទីវនៃ f លើ $\mathbb{R}$

យើងមាន $F(x) = -(x^2+2x+3)e^{-x}$

គេបាន $F'(x) = -\left[(2x+2)e^{-x} - e^{-x}(x^2+2x+3)\right]$

$= (-2x-2+x^2+2x+3)e^{-x}$

$= (1+x^2)e^{-x} = f(x)$

ដោយ $F'(x) = f(x)$ នាំឱ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

ដូចនេះ F ជាព្រីមីទីវនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។

b. គណនា S

គេបាន $S = \int_0^3 f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^3$

$= \left[-(x^2+2x+3)e^{-x}\right]_0^3$

$= -(3^2+2\times3+3)e^{-3} + (0+3)e^0$

$= -\dfrac{18}{e^3}+3$

$= \dfrac{3e^3-18}{e^3}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $S = \dfrac{3e^3-18}{e^3}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: -------------------លេខ ----------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:--------------------------------------

៧

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\pi\cos^2 x\right)}{x^2}$ គ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 18 គ្រាប់ ដែលសរសេរលេខពី 1 ដល់ 18 ។ គេចាប់យកប៊ូល 2 ចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. " គេចាប់បានប៊ូលទាំងពីរមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 3 " ។ B. "គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3 " ។

C. "គេចាប់បានប៊ូលទាំងពីរសុទ្ធតែមានលេខចែកដាច់នឹង 3 ផងនិងចែកដាច់នឹង 2 ផង" ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$; $b=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ និង $c=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$ ។

ក. សរសេរ a និង b ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2=0$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overline{c}(a+b)=2$ ។ រួចបង្ហាញថា $a+b=c$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^{\ln 2}\left(\dfrac{e^{2x}+3e^x+2}{e^x+1}\right)dx$; $J=\int_0^{\pi}\left(\sqrt{1-\cos 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}\right)dx$ និង $K=\int_0^1\dfrac{x^4}{x+1}dx$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ) A. គេមានសមីការ $64y^2-36x^2=-2304$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និង កំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល។ រកសមីការអាស៊ីមតូតរបស់អ៊ីបូលនេះ និងសង់អ៊ីពែបូលនេះ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $A(0;-2;-2)$, $B(1;-2;-4)$, $C(-3,-1,2)$ ។

១. បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ។ រួចបង្ហាញថា $2x+2y+z+6=0$ ជាសមីការមួយនៃប្លង់ (ABC) ។

២. គេឱ្យស្វ៊ែរ (S) ដែលមានសមីការ $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $I(1;0;1)$ និងកាំ $R=5$ ។

៣. ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម I និងកែងនឹងប្លង់ (ABC) ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃ H ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់ (ABC) ។

VI. (១០ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''+6y'+9y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយនេះ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) : $y=-x+1$ ត្រង់ចំណុចមួយដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 0 ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-1,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)$ តាង (C) ជាខ្សែកោងតំណាងអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. a. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

b. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ រួចបញ្ជាក់ថាក្រាប (C) មានមែកប៉ារ៉ាបូលខាង $+\infty$ ។

2. a. បង្ហាញថា គ្រប់ $x\in(-1,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{3+x}{(x+1)^2}$ ។

b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

c. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ នៅក្នុងចន្លោះ $(-1,+\infty)$ មានឫស α តែមួយគត់ និងបង្ហាញថា $\alpha\in\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$ ។

3. បង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចមួយដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 0 មានសមីការ $y=3x-1$ ។

4. គណនា $f(3)$; $f(7)$ រួចសង់ក្រាប (C) និង បន្ទាត់ប៉ះ (T) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

5. គេឱ្យ S ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) ,អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=\alpha$ ។

a. គេឱ្យ F ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(-1,+\infty)$ ដោយ $F(x)=(x-1)\ln(x+1)$ ។ បង្ហាញថា F ជាព្រីមីទីវនៃ f លើ $(-1,+\infty)$ ។

b. ស្រាយបំភ្លឺថា $S=\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha+1}$ ។ គេឱ្យ $\ln\left(\dfrac{7}{5}\right)=0.34$; $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)=0.4$, $\ln 2=0.7$ ។

អត្រាកំណែ

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x\to2}\frac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^3+3x^2-x+6)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x^3+3x^2-x+6)$$
$$=2^3+3\cdot2^2-2+6$$
$$=14$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to2}\frac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}=14$

ខ. $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi\cos^2x)}{x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi\cos^2x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin[\pi(1-\sin^2x)]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi-\pi\sin^2x)}{x^2}\qquad \because \sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi\sin^2x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi\sin^2x)}{\pi\sin^2x}\times\frac{\pi\sin^2x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(\pi\sin^2x)}{\pi\sin^2x}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\pi\right)\qquad \because \lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$$
$$=1\times1^2\times\pi=\pi$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi\cos^2x)}{x^2}=\pi$

គ. $\lim_{x\to1}\frac{x-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1+1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{x-1}{x-1}+\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}\right]=\lim_{x\to1}\left[1+\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}\right]$$

តាង $t=x-1\Rightarrow x=1+t$

បើ $x\to1\quad\Rightarrow\quad t\to0$

$$\lim_{t\to0}\left[1+\frac{1-\sin\left[\frac{\pi}{2}(1+t)\right]}{t}\right]\qquad \because \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$$
$$=\lim_{t\to0}\left[1+\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}t}{t}\right]\qquad \because \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$
$$=\lim_{t\to0}\left[1+\frac{2\sin^2\frac{\pi}{4}t}{t}\right]$$
$$=\lim_{t\to0}\left[1+2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}t}{\frac{\pi}{4}t}\right)^2\times\left(\frac{\pi}{4}\right)^2t\right]\qquad \because \lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$$
$$=1+2\times1^2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2(0)$$
$$=1+0=1$$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to1}\frac{x-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}=1$

II. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A. " គេចាប់បានប៊ូលទាំងពីរមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 3 "

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(18,2)=\frac{18!}{16!2!}=153$ ករណី

ដោយលេខដែលចែកដាច់នឹង 3 មានលេខ 3,6,9,12,15,18

នោះចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ

$n(A)=C(6,2)=\frac{6!}{4!2!}=15$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{15}{153}=\frac{5}{51}$

ដូចនេះ: $P(A)=\frac{5}{51}$

B. "គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង 3 "

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ

$n(B)=C(6,1)\times C(12,1)=6\times12=72$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{72}{153}=\frac{8}{17}$

ដូចនេះ: $P(B)=\frac{8}{17}$

C. "គេចាប់បានប៊ូលទាំងពីរសុទ្ធតែមានលេខចែកដាច់នឹង 3 ផងនិងចែកដាច់នឹង 2 ផង"

លេខចែកដាច់នឹង 3 ផងនិងចែកដាច់នឹង 2 ផងមានលេខ 6,12 ,18

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ

$n(C)=C(3,2)=3$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{3}{153}=\frac{1}{51}$

ដូចនេះ: $P(C)=\frac{1}{51}$

III. យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $a=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}i$; $b=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i$ និង

$c=\sqrt2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

ក. សរសេរ a និង b ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$a=\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i=\boxed{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$b=-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i=\boxed{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$$

រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2=0$

$$a^2+b^2=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2$$

$$=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow a^2+b^2=0$ ពិត

ដូចនេះ: $\boxed{a^2+b^2=0}$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\bar c(a+b)=2$ រួចបង្ហាញថា $a+b=c$ ។

របៀបទី១ គេបាន

$$\bar c(a+b)=\sqrt2\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i-\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i\right)$$

$$=\sqrt2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\left(\frac{\sqrt3-1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)i\right]$$

$$=\sqrt2\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\left[\left(\frac{\sqrt3-1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)i\right]$$

$$=\sqrt2\left(-\frac12\times\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}i+\frac{\sqrt2}{2}\times\left(-\frac12\right)i\right)$$
$$\left[\left(\frac{\sqrt3-1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)i\right]$$

$$=\sqrt2\times\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{\sqrt3-1}{2}-\frac{\sqrt3+1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt3-1}{2}+\frac{\sqrt3+1}{2}i\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt3-1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt3+1}{2}\right)^2 i^2$$

$$=\frac{3-2\sqrt3+1}{4}+\frac{3+2\sqrt3+1}{4}=\frac84=2 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\bar c(a+b)=2}$

របៀបទី២

$$\bar c(a+b)=\sqrt2\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\left[\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\sqrt2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$+\sqrt2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$+\sqrt2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\sqrt2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\sqrt2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i\right)+\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i\right)$$

$=1-i+1+i=2$ ពិត

ដូចនេះ: $\boxed{\bar c(a+b)=2}$

បង្ហាញថា $a+b=c$

យើងមាន $\bar c(a+b)=2$

$$a+b=\frac{2}{\bar c}=\frac{2c}{c\bar c}$$

$$=\frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}{\sqrt2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\times\sqrt2\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}$$

$$=\frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}{2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}{\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right]}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos0+i\sin0}$$

$$=\frac{c}{1}=c \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ: $\boxed{a+b=c}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\mathrm{I}=\int_0^{\ln2}\left(\frac{e^{2x}+3e^x+2}{e^x+1}\right)dx=\int_0^{\ln2}\frac{(e^x+1)(e^x+2)}{e^x+1}dx$$

$$=\int_0^{\ln2}(e^x+2)dx=\left[e^x+2x\right]_0^{\ln2}$$

$$=\left(e^{\ln2}+2\ln2\right)-\left(e^0+0\right) \qquad \because e^{\ln x}=x$$

$$=2+2\ln2-1$$

$$=1+2\ln2$$

ដូចនេះ: $\boxed{\mathrm{I}=1+2\ln2}$

$$\mathrm{J}=\int_0^{\pi}\left(\sqrt{1-\cos2x}+\sqrt{1-\sin2x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2\sin^2x}+\sqrt{\cos^2x+\sin^2-2\sin x\cos x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\sqrt2|\sin x|+\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\sqrt2|\sin x|+|\cos x-\sin x|\right)dx$$

$$=\sqrt2\int_0^{\pi}|\sin x|dx+\int_0^{\pi}|\cos x-\sin x|dx$$

$$=\sqrt2\int_0^{\pi}\sin xdx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx$$

$$=-\sqrt2\left[\cos x\right]_0^{\pi}+2\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\sqrt2(\cos\pi-\cos0)+2\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-\sin0-\cos0\right)$$

$$=-\sqrt2(-1-1)+2(1+0-0-1)=2\sqrt2$$

ដូចនេះ: $\boxed{\mathrm{J}=2\sqrt2}$

របៀបទី២

$$\mathrm{J}=\int_0^{\pi}\left(\sqrt{1-\cos2x}+\sqrt{1-\sin2x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2\sin^2x}+\sqrt{\cos^2x+\sin^2-2\sin x\cos x}\right)dx$$

$=\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2}|\sin x|+\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\right)dx$

$=\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2}|\sin x|+|\cos x-\sin x|\right)dx$

$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|dx+\int_0^{\pi}|\cos x-\sin x|dx$

$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x-\sin x)dx$

$=-\sqrt{2}\left[\cos x\right]_0^{\pi}+\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\sin x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=-\sqrt{2}(\cos\pi-\cos 0)+\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-\sin 0-\cos 0\right)$

$+\left(-\sin\pi+\cos\pi+\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\sqrt{2}(-1-1)+(1+0-0-1)+(-0-1+1-0)$

$=\boxed{2\sqrt{2}}$

$\text{K}=\int_0^1\frac{x^4}{x+1}dx$

$=\int_0^1\left(x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right]_0^1$

$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+\ln 2\right)-0$

$=\frac{3-4+6-12}{12}+\ln 2=-\frac{7}{12}+\ln 2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{K}=-\frac{7}{12}+\ln 2}$

V. **A.** បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល

យើងមាន $64y^2-36x^2=-2304$

$\Leftrightarrow\ \frac{64y^2}{-2304}-\frac{36x^2}{-2304}=1$

$\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

$\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{8^2}-\frac{y^2}{6^2}=1$ មានរាង $\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

ជាសមីការអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតគល់ O និង អ័ក្សទទឹងជាអ័ក្ស $(x'ox)$

ដែល $a=8$, $b=6$, $c=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$

- រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និង កំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល
- កំពូល $V_1(-a,0)\Rightarrow\ V_1(-8,0)$

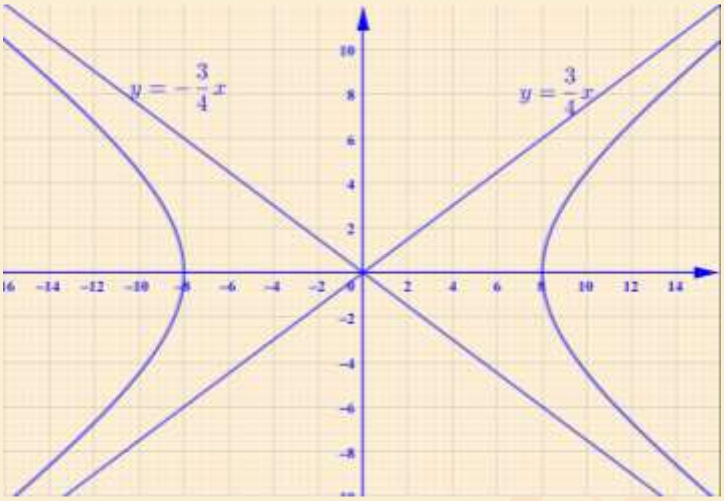
  $V_2(a,0)\Rightarrow\ V_2(8,0)$
- កំណុំ $F_1(-c,0)\Rightarrow\ F_1(-10,0)$

  $F_2(c,0)\Rightarrow\ F_2(10,0)$
- សមីការអាស៊ីមតូត $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{6}{8}x=\pm\frac{3}{4}x$

ដូចនេះ

- កំពូល $V_1(-8,0)$; $V_2(8,0)$
- កំណុំ $F_1(-10,0)$; $F_2(10,0)$
- សមីការអាស៊ីមតូត $y=\pm\frac{3}{4}x$

- សង់អេលីបអ៊ីពែបូល



B. យើងមាន $\text{A}(0;-2;-2)$, $\text{B}(1;-2;-4)$, $\text{C}(-3;-1;2)$

១. បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}=(1-0;-2+2;-4+2)=(1;0;-2)$

$\overrightarrow{AC}=(-3-0;-1+2;2+2)=(-3;1;4)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-2\\-3&1&4\end{vmatrix}=(0+2)\vec{i}-(4-6)\vec{j}+(1-0)\vec{k}$

$=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}$

បង្ហាញថា $2x+2y+z+6=0$ ជាសមីការមួយនៃប្លង់ (ABC) ។

ដោយប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

គេបាន $(\text{ABC}):\ 2x+2y+z+d=0$

ដោយ $\text{A}(0;-2;-2)\in(\text{ABC})\ \Leftrightarrow\ 2(0)+2(-2)-2+d=0$

$\Rightarrow\ d=6$

នាំឱ្យ $(\text{ABC}):\ 2x+2y+z+6=0$ ពិត

ដូចនេះ $2x+2y+z+6=0$ ជាសមីការមួយនៃប្លង់ (ABC) ។

២ . ស្រាយបញ្ជាក់ថាស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $\text{I}(1;0;1)$ និងកាំ $\text{R}=5$

យើងមានស្វ៊ែរ (S) មានសមីការ $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

$\Leftrightarrow\ x^2-2x+y^2+z^2-2z-23=0$

$\Leftrightarrow\ x^2-2x+1^2-1^2+y^2+z^2-2z+1^2-1^2-23=0$

$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=25$

$\Leftrightarrow\ (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=5^2$

គេបានសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែរ (S) គឺ

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

នាំឱ្យស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $\text{I}(1;0;1)$ និងកាំ $\text{R}=5$

ដូចនេះ ស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $\text{I}(1;0;1)$ និងកាំ $\text{R}=5$ ។

៣. ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម I និងកែងនឹងប្លង់ (ABC)

ដោយ បន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម I និងកែងនឹងប្លង់ (ABC) នោះ មេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

គេបាន $(\Delta):\begin{cases}x=x_o+at\\y=y_o+bt\ ;\ t\in\mathbb{R}\\z=z_o+ct\end{cases}$; $(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\\y=2t\qquad ;\ t\in\mathbb{R}\\z=1+t\end{cases}$

ដូចនេះ $(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2t \quad ; t\in\mathbb{R}\\ z=1+t\end{cases}$

ខ. រកកូអរដោនេនៃ H ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់ (ABC)

ដោយ $H\in(ABC) \Rightarrow 2x_H+2y_H+z_H+6=0 \quad (*)$

ហើយ $H\in(\Delta)\Rightarrow\begin{cases}x_H=1+2t\\ y_H=2t\\ z_H=1+t\end{cases} \quad (**)$

យក $x_H=1+2t; y_H=2t; z_H=1+t$ ជំនួសក្នុង $(*)$

គេបាន $2(1+2t)+2(2t)+1+t+6=0 \Leftrightarrow 9t=-9 \Rightarrow t=-1$

យក $t=-1$ ជំនួសក្នុង $(**)$

គេបាន $\begin{cases}x_H=1+2(-1)=-1\\ y_H=2(-1)=-2\\ z_H=1-1=0\end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{H(-1;-2;0)}$

VI. ក.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+6y'+9y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+6\lambda+9=0$

$\Delta'=3^2-9=0$

មានឫសឌុប $\lambda_0=-\frac{b'}{a}=-\frac{3}{1}=-3$

នាំឱ្យចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=(A+Bx)e^{\lambda_0 x}$; $A,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=(A+Bx)e^{-3x}; A,B\in\mathbb{R}$

ខ.រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

យើងមាន $y=(A+Bx)e^{-3x}$

$y'=Be^{-3x}-3e^{-3x}(A+Bx)$

$=e^{-3x}(B-3A-3Bx)$

ដោយក្រាបនៃចម្លើយនេះ ប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(d): y=-x+1$ ត្រង់ចំណុចមួយដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 0

គេបាន $\begin{cases}y(0)=1\\ y'(0)=-1\end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases}(A+0)e^0=1\\ e^0(B-3A-0)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ B=2\end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) គឺ $y=(1+2x)e^{-3x}$

VII. យើងមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-1,+\infty)$ ដោយ

$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)$

1. a. គណនាលីមីត $\lim_{x\to-1^+}f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)\right]=\frac{-2}{0^+}+\ln(0^+)$$
$$=-\infty-\infty=\boxed{-\infty}$$

រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$

ដូចនេះ $x=-1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។

b. គណនា $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ បញ្ជាក់ថាក្រាប (C) មានមែកប៉ារ៉ាបូលខាង $+\infty$

គេបាន $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\ln(x+1)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\ln(x+1)\right]$$
$$=\frac{1-0}{1+0}+\ln(+\infty)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x(x+1)}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right]$$
$$=\boxed{0}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0}$ ។

- បញ្ជាក់ថាក្រាប (C) មានមែកប៉ារ៉ាបូលខាង $+\infty$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

ដូចនេះ ក្រាប (C) មានមែកប៉ារ៉ាបូលមានទិសតាមអាស៊ីមតូតបន្ទាត់ (ox) ខាង $+\infty$ ។

2. a. បង្ហាញថា គ្រប់ $x\in(-1,+\infty)$, $f'(x)=\frac{3+x}{(x+1)^2}$

យើងមាន $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)$

គេបាន $f'(x)=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{2+x+1}{(x+1)^2}=\frac{3+x}{(x+1)^2}$ ពិត

ដូចនេះ គ្រប់ គ្រប់ $x\in(-1,+\infty)$, $f'(x)=\frac{3+x}{(x+1)^2}$ ។

b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x)=\frac{3+x}{(x+1)^2}$

ដោយ $(x+1)^2>0\,;\,3+x>0,\ \forall x\in(-1,+\infty)$

នាំឱ្យ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in(-1,+\infty)$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(-1,+\infty)$ ។

- សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

c. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ នៅក្នុងចន្លោះ $(-1,+\infty)$ មានឫស α តែមួយគត់

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(-1,+\infty)$ និងអនុគមន៍ f ជាប់លើ $(-1,+\infty)$ ។

ហើយ $f(0,+\infty)=\left(\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\,;\,\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$

នាំឱ្យ $0\in f(0,+\infty)$

ដូចនេះ សមីការ $f(x)=0$ ក្នុងចន្លោះ $(0,+\infty)$ មានឫស α តែមួយគត់ដែល $f(\alpha)=0$ ។

-បង្ហាញថា $\alpha\in\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{\frac{2}{5}-1}{\frac{2}{5}+1}+\ln\left(\frac{2}{5}+1\right)=\frac{-3}{7}+\ln\frac{7}{5}=-0.43+0.34=-0.09$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}+\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{-1}{3}+\ln\frac{3}{2}=-0.33+0.4=0.07$$

ដោយ $f\left(\frac{2}{5}\right)\times f\left(\frac{1}{2}\right)=(-0.09)(0.07)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$ ។

ដូចនេះ $\alpha\in\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$ ។

3. បង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចមួយដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 0 មានសមីការ $y=3x-1$

គេបាន $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\Rightarrow\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$

យើងមាន $f'(x)=\frac{3+x}{(x+1)^2}\ \Leftrightarrow\ f'(0)=\frac{3+0}{(0+1)^2}=3$

និង $f(0)=\frac{0-1}{0+1}+\ln(0+1)=-1$

គេបាន $y=(3)(x-0)-1=3x-1$ ពិត

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $(T):\ y=3x-1$ ។

4. -គណនា $f(3)\,;\,f(7)$

$$f(3)=\frac{3-1}{3+1}+\ln(3+1)=\frac{2}{4}+\ln4=\frac{1}{2}+\ln2^2$$

$$=\frac{1}{2}+2\ln2=0.5+1.4=\boxed{1.9}$$

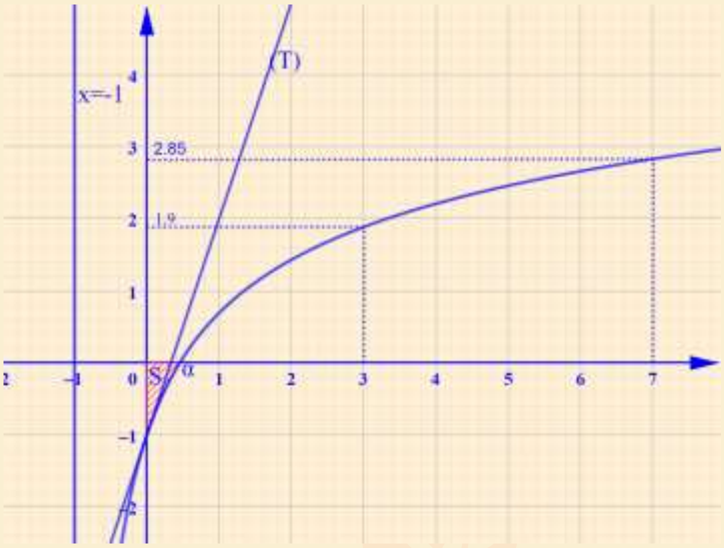
$$f(7)=\frac{7-1}{7+1}+\ln(7+1)=\frac{6}{8}+\ln8=\frac{3}{4}+\ln2^3$$

$$=\frac{3}{4}+3\ln2=0.75+2.1=\boxed{2.85}$$

-សង់ក្រាប (C) និង បន្ទាត់ប៉ះ (T) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$

$y=3x-1\,;$

x	0	$\frac{1}{3}$
y	-1	0



5. a. បង្ហាញថា F ជាព្រីមីទីវនៃ f លើ $(-1,+\infty)$

យើងមាន $F(x)=(x-1)\ln(x+1)$

គេបាន $F'(x)=(x-1)'\ln(x+1)+(x-1)\left[\ln(x+1)\right]'$

$$=\ln(x+1)+(x-1)\frac{(x+1)'}{x+1}$$

$$=\ln(x+1)+\frac{x-1}{x+1}=f(x)$$

ដោយ $F'(x)=f(x)$ នាំឱ្យ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

ដូចនេះ F ជាព្រីមីទីវនៃ f លើ $(-1,+\infty)$ ។

b. ស្រាយបំភ្លឺថា $S=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha+1}$

គេបាន $S=-\int_0^{\alpha} f(x)dx=-\left[F(x)\right]_0^{\alpha}$

$$=-\left[(x-1)\ln(x+1)\right]_0^{\alpha}$$

$$=-(\alpha-1)\ln(\alpha+1)+(0-1)\ln(0+1)$$

$$=-(\alpha-1)\ln(\alpha+1)$$

ដោយ $f(\alpha)=0\ \Leftrightarrow\ \frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\ln(\alpha+1)=0$

$\Rightarrow \ln(\alpha+1)=-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$

$$S=-(\alpha-1)\left(-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha+1}$$

$=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha+1}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{S=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha+1}}$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: ------------------**លេខ** --------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:--

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|3-x|}{x^2-9}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ **គ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2x\tan 3x}$ **ឃ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\cot 3x}{1-\tan x}$

II. (១០ពិន្ទុ)ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន 7 គ្រាប់ដែលចុះលេខ 1ដល់ 7 និង ឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន 5 គ្រាប់ដែលចុះលេខពី5 ដល់ 9 ។
គេចាប់យកឃ្លី 2 គ្រាប់ព្រម គ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល៖
ក. ចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 2 គ្រាប់។ **ខ.** ចាប់បានឃ្លីមានពណ៌ដូចគ្នា ។
គ. ចាប់បានឃ្លីលេខគូជាពណ៌ក្រហម និង លេខសេសជាឃ្លីពណ៌ខៀវ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2=z_1^2$ និង $z_3=z_1^3$ ។
ក. គណនា $|z_1|$ និង $\arg(z_1)$ ។
ខ. ចូរសរសេរ z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $z_2=\overline{z}_1$ ។ **គ.** ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z_3=1$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖ $\mathrm{I}=\int_1^3\left(1-2x+3x^2\right)dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^2dx$ និង $\mathrm{K}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\cos\left(2x+\dfrac{5\pi}{6}\right)+4\sin x\cos x\cos^3 2x\right]dx$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ) 1. គេមានសមីការប៉ារ៉ាបូលមួយដែលមានកំណុំ $\mathrm{F}(1,4)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស។
ក. ចូរកំណត់សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល។
ខ. គេឱ្យ $\mathrm{N}(x_o,4)$ ជាចំណុចនៅលើប៉ារ៉ាបូល ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច N រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។
2. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។គេមានចំណុច $\mathrm{A}(-2;2;8)$, $\mathrm{B}(6\,;6\,;0)$, $\mathrm{C}(2,-1,0)$, $\mathrm{D}(0;1;-1)$
និង (S) ជាសំណុំចំណុច M ដែលមានទំនាក់ទំនង $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0$ ។
១. កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\times\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ ។ រួចបង្ហាញថា $x+2y+2z=0$ ជាសមីការមួយនៃប្លង់ (OCD) ។
២ . បង្ហាញថា (S) ជាស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត $\Omega(2;4;4)$ និងកាំ $\mathrm{R}=6$ ។
៣. **ក.** គណនាចម្ងាយរវាងពីរចំណុច Ω ទៅប្លង់ (OCD) ។
ខ. ចូរបង្ហាញថាប្លង់ (OCD) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ។

VI. (១០ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''-4y'+3y=0$ ។
ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ដែល $y(0)=-1$ និង $y''(0)=-17$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) ផ្នែកA. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=1+xe^x$ ។
1. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ដោយស្គាល់ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ ។
2. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g លើ $\mathbb{R}$ ។រួចទាញរកសញ្ញា នៃ g លើ $\mathbb{R}$ ។

ផ្នែកB. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x+e^x}{1-e^x}$ មានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។
1. a. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ ។ **b.** ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត**ឈរ**នៃក្រាប (C) ។
2. a. ចូរស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f(x)=x+\dfrac{(x+1)e^x}{1-e^x}$ ។
b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d_1) មានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូត**ទ្រេត**នៃ (C) ខាង $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (d_1) ។
3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d_2) ដែលមានសមីការ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូត **ដេក**នៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង (d_2) ។
4. a. បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(1-e^x\right)^2}$ ។
b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់តារាង អថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
5. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $\left(-\ln 2,-\ln\dfrac{3}{2}\right)$ ។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(\alpha)=\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$ ។
6. សង់បន្ទាត់ (d_1); (d_2) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ គេឱ្យ $e^{-1}=0.4$; $\ln 2=0.7$; $\ln\dfrac{3}{2}=0.4$ ។

អត្រាកំណែ

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{|3-x|}{x^2-9}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{|3-x|}{x^2-9}$ $\qquad \because |3-x|=\begin{cases}3-x & \text{if } 3-x\ge0\\ -(3-x) & \text{if } 3-x<0\end{cases}=\begin{cases}3-x & \text{if } x\le3\\ -(3-x) & \text{if } x>3\end{cases}$

$$==\lim_{x\to3^+}\frac{-(3-x)}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+3}$$

$$=\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{|3-x|}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ រាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}$$

$$=\frac{1}{(-\infty)(-1-1)}=\frac{1}{+\infty}$$

$$=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=0}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{2x\tan3x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{2x\tan3x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{2x\tan3x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}\times\frac{x^2}{x\tan3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{3x}{\tan3x}\times\frac{1}{3}$$

$$=1^2\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{2x\tan3x}=\dfrac{1}{3}}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\cot3x}{1-\tan x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cot3x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\frac{\cos3x}{\sin3x}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin3x+\cos3x}{\sin3x}}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin3x+\cos3x}{\cos x-\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin3x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{3\sin x-4\sin^3x+4\cos^3x-3\cos x}{\cos x-\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin3x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-3(\cos x-\sin x)+4\left(\cos^3x-\sin^3x\right)}{\cos x-\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin3x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-3(\cos x-\sin x)+4(\cos x-\sin x)\left(\cos^2x+\sin^2x+\sin x\cos x\right)}{\cos x-\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin3x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)\left[-3+4\left(1+\frac{1}{2}\sin2x\right)\right]}{\cos x-\sin x}\times\frac{\cos x}{\sin3x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+2\sin2x)\frac{\cos x}{\sin3x}$$

$$=\left(1+2\sin\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}}=(1+2)\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\frac{\sqrt2}{2}}=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\cot3x}{1-\tan x}=3}$

II. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(12,2)=\dfrac{12!}{10!2!}=66$ ករណី

ក.ចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 2 គ្រាប់

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 2 គ្រាប់

នោះចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ

$n(A)=C(7,2)=\dfrac{7!}{5!2!}=21$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{21}{66}=\dfrac{7}{22}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{7}{22}}$

ខ. ចាប់បានឃ្លីមានពណ៌ដូចគ្នា

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីមានពណ៌ដូចគ្នា

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ

$n(B)=C(7,2)+C(5,2)=\dfrac{7!}{5!2!}+\dfrac{5!}{3!2!}=21+10=31$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{31}{66}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{31}{66}}$

គ. ចាប់បានឃ្លីលេខគូជាពណ៌ក្រហម និង លេខសេសជាឃ្លីពណ៌ខៀវ

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានឃ្លីលេខគូជាពណ៌ក្រហម និង លេខសេសជាឃ្លីពណ៌ខៀវ ។

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ

$n(C)=C(3,1)\times C(3,1)=3\times3=9$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{9}{66}=\dfrac{3}{22}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\dfrac{3}{22}}$

III. យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt3}{2}$; $z_2=z_1^2$ និង $z_3=z_1^3$

ក. គណនា $|z_1|$ និង $\arg(z_1)$

$$r=|z_1|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{a}{r}=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow \arg(z_1)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះ: $\boxed{|z_1|=1\ ;\ \arg(z_1)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}}$

ខ.សរសេរ z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេបាន $z_2=z_1^2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

ដូចនេះ: $\boxed{z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}}$

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z_2=\bar{z}_1$

$$z_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$=\overline{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\bar{z}_1$$ ពិត

ដូចនេះ: $\boxed{z_2=\bar{z}_1}$

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z_3=1$

យើងមាន $z_3=z_1^3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3$

$$=\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}$$
$$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$
$$=1$$ ពិត

ដូចនេះ: $\boxed{z_3=1}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int_1^3(1-2x+3x^2)dx=\left[x-x^2+x^3\right]_1^3$$
$$=(3-3^2+3^3)-(1-1+1)$$
$$=21-1$$
$$=20$$

ដូចនេះ: $\boxed{I=20}$

$$J=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)^2dx=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-2e^x+1)dx$$
$$=\left[\frac{e^{2x}}{2}-2e^x+x\right]_0^{\ln 2}$$
$$=\left(\frac{e^{2\ln 2}}{2}-2e^{\ln 2}+\ln 2\right)-\left(\frac{e^0}{2}-2e^0+0\right)$$
$$=\left(\frac{4}{2}-4+\ln 2\right)-\left(\frac{1}{2}-2\right)$$
$$=2-4+\ln 2+\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}+\ln 2$$

ដូចនេះ: $\boxed{J=-\frac{1}{2}+\ln 2}$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+4\sin x\cos x\cos^3 2x\right]dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+2\cos^3 2x\sin 2x\right]dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)-\cos^3 2x(\cos 2x)'\right]dx$$
$$=\left[\frac{\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)}{2}-\frac{\cos^4 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)}{2}-\frac{\cos^4\left(\frac{2\pi}{6}\right)}{4}\right)-\left(\frac{\sin\frac{5\pi}{6}}{2}-\frac{\cos^4 0}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{-\frac{1}{2}}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4}\right)-\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{64}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=-\frac{17}{64}$$

ដូចនេះ: $\boxed{K=-\frac{17}{64}}$

V. **1.** ក. កំណត់សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល

ដោយ ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាអ័ក្សអាប់ស៊ីសនោះ

សមីការស្តង់ដារ $(x-h)^2=4p(y-k)$

យើងមានកំណុំ $F(h,k+p)=F(1,4)\ \Rightarrow\ h=1\,;\,k+p=4\quad(1)$

ហើយប៉ារ៉ាបូលមានសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស

$y=0\ \Leftrightarrow\ k-p=0\quad(2)$

យក $(1)+(2)\ \Leftrightarrow\ 2k=4\ \Rightarrow\ k=2$

តាម $(2)\ \Rightarrow\ p=k=2$

ដូចនេះ: $\boxed{(x-1)^2=4(2)(y-2)}$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច N

ដោយ $N(x_o,4)$ ជាចំណុចនៅលើប៉ារ៉ាបូល

គេបាន $(x_N-1)^2=8(y_N-2)$

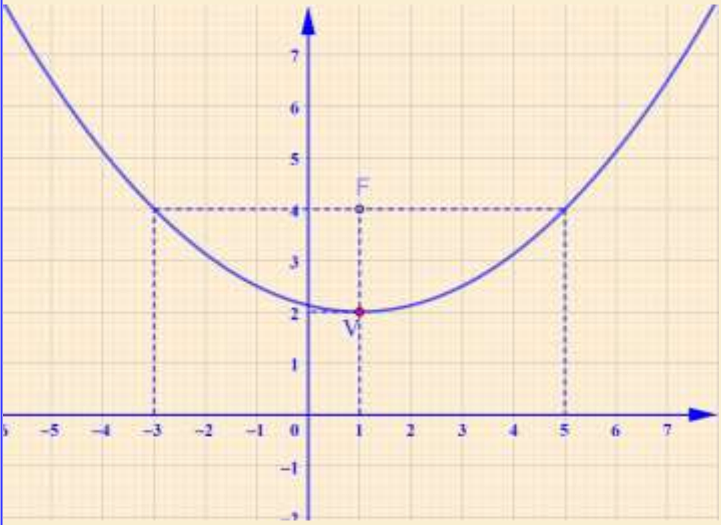
$(x_o-1)^2=8(4-2)\ \Leftrightarrow\ (x_o-1)^2=16$

$x_o-1=\pm 4\ \Leftrightarrow\ x_o=1-4\,;\,x_o=1+4$

នាំឱ្យ $x_o=-3\,;\,x_o=5$

ដូចនេះ: $\boxed{N_1(-3,4)\,;\,N_2(5,4)}$

- សង់ប៉ារ៉ាបូល



B. យើងមាន

$A(-2;2;8)$, $B(6\,;\,6\,;\,0)$, $C(2,-1,0)$, $D(0;1;-1)$

១. កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OC}=(2-0;-1-0;0-0)=(2;-1;0)$

$\overrightarrow{OD}=(0-0;1-0\,;-1-0)=(0;1\,;-1)$

$$\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(1-0)\vec{i}-(-2-0)\vec{j}+(2-0)\vec{k}$$

$=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}}$

-បង្ហាញថា $x+2y+2z=0$ ជាសមីការមួយនៃប្លង់ (OCD)

ដោយប្លង់ (OCD) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

គេបាន (OCD): $x+2y+2z+d=0$

ដោយ $O(0;0;0)\in(OCD)$ $\Leftrightarrow$ $(0)+2(0)+2(0)+d=0$

$\Rightarrow$ $d=0$

នាំឱ្យប្លង់ (OCD) មានសមីការ $x+2y+2z=0$ ពិត

ដូចនេះ $x+2y+2z=0$ ជាសមីការមួយនៃប្លង់ (OCD) ។

២ . បង្ហាញថា (S) ជាស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត $\Omega(2;4;4)$ និងកាំ $R=6$

តាង $(x;y;z)$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុច M

ដោយ (S) ជាសំណុំចំណុច M ដែលមានទំនាក់ទំនង $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

គេបាន $\overrightarrow{MA}=(-2-x;2-y;8-z)$, $\overrightarrow{MB}=(6-x;6-y;-z)$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

$\Leftrightarrow$ $(-2-x)(6-x)+(2-y)(6-y)+(8-z)(-z)=0$

$\Leftrightarrow$ $-12+2x-6x+x^2+12-2y-6y+y^2-8z+z^2=0$

$\Leftrightarrow$ $x^2-4x+y^2-8y+z^2-8z=0$

$\Leftrightarrow$ $x^2-4x+4-4+y^2-8y+4^2-4^2+z^2-8z+4^2-4^2=0$

$\Leftrightarrow$ $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2-36=0$

$\Leftrightarrow$ $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6^2$

គេបានសមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ែរ (S) គឺ

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

នាំឱ្យស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $\Omega(2;4;4)$ និងកាំ $R=6$ ពិត

ដូចនេះ ស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $\Omega(2;4;4)$ និងកាំ $R=6$ ។

៣. ក. គណនាចម្ងាយរវាងពីរចំណុច Ω ទៅប្លង់ (OCD)

រូបមន្ត $d(\Omega,(OBC))=\dfrac{|ax_o+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

គេបាន $d(\Omega,(OBC))=\dfrac{|1(2)+2(4)+2(4)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{18}{3}=6$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ $d(\Omega,(OBC))=6$ ឯកតាប្រវែង

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (OCD) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S)

ដោយ $d(\Omega,(OBC))=R=6$

នាំឱ្យប្លង់ (OCD) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S)

ដូចនេះ ប្លង់ (OCD) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ។

VI. ក.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''-4y'+3y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-4\lambda+3=0$

មានឫសឌុប $\lambda_1=1;\ \lambda_2=3$

នាំឱ្យចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$; $A,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{x}+Be^{3x}$; $A,B\in\mathbb{R}$

ខ.រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ដែល $y(0)=-1$ និង $y''(0)=-17$ ។

យើងមាន $y=Ae^{x}+Be^{3x}$

$\Rightarrow$ $y'=Ae^{x}+3Be^{3x}$

$\Rightarrow$ $y''=Ae^{x}+9Be^{3x}$

គេបាន $\begin{cases}y(0)=-1\\ y''(0)=-17\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}Ae^0+Be^0=-1\\ Ae^0+9Be^0=-17\end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases}A+B=-1\\ A+9B=-17\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}A=1\\ B=-2\end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) គឺ $y=e^{x}-2e^{3x}$

VII. ផ្នែក**A.**គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=1+xe^{x}$

1. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ដោយស្គាល់ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+xe^{x})=1+(+\infty)(+\infty)=\boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+xe^{x})=1+0=\boxed{1}$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$)

2. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g លើ $\mathbb{R}$

យើងមាន $g(x)=1+xe^{x}$

$g'(x)=e^{x}+xe^{x}=(x+1)e^{x}$

ដោយ $e^{x}>0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x+1$

ឱ្យ $x+1=0$ $\Rightarrow$ $x=-1$

- ចំណុចរបមា

$g(-1)=1-e^{-1}=1-0.4=\boxed{0.6}$

តារាងសញ្ញានៃ $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1 ↘	0.6	↗ $+\infty$

- ទាញរកសញ្ញា នៃ g លើ $\mathbb{R}$

តាមតារាងសញ្ញានៃ $g'(x)$ គេទាញបាន $g(x)>0\ ;\ \forall\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)>0\ ;\ \forall\in\mathbb{R}}$

ផ្នែកB. យើងមាន f អនុគមន៍កំណត់ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x+e^x}{1-e^x}$

1. a. គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+e^x}{1-e^x}=\dfrac{0+e^0}{1-(e^0+0)}=\dfrac{1}{0^-}=\boxed{-\infty}$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x+e^x}{1-e^x}=\frac{0+e^0}{1-(e^0-0)}=\frac{1}{0^+}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+e^x}{1-e^x}=\frac{-\infty+0}{1-0}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+e^x}{1-e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(\frac{x}{e^x}+1\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x}{e^x}+1\right)}{\left(\frac{1}{e^x}-1\right)}=\frac{0+1}{0-1}=\boxed{-1}$$

b. ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូត**ឈរ**នៃក្រាប (C) ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\pm\infty$

ដូចនេះ $x=0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

2. a. ចូរស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f(x)=x+\dfrac{(x+1)e^x}{1-e^x}$ ។

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x+e^x}{1-e^x}$

$$f(x)=x+\frac{x+e^x}{1-e^x}-x$$

$$=x+\frac{x+e^x-x(1-e^x)}{1-e^x}$$

$$=x+\frac{x+e^x-x+xe^x}{1-e^x}$$

$$=x+\frac{(x+1)e^x}{1-e^x}$$

$=x+\dfrac{(x+1)e^x}{1-e^x}$ ពិត

ដូចនេះ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f(x)=x+\dfrac{(x+1)e^x}{1-e^x}$ ។

b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d_1) មានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូត**ទ្រេត**នៃ (C) ខាង $-\infty$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$

$\Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\dfrac{(x+1)e^x}{1-e^x}-x\right]=0$

$\Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{(x+1)e^x}{1-e^x}\right]=0$

$\Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{xe^x+e^x}{1-e^x}\right]=0\ ;\ \left(\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\right)$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{0+0}{1-0}=0$

$\Leftrightarrow\ 0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ដូចនេះ បន្ទាត់ (d_1) មានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូត**ទ្រេត**នៃ (C) ខាង $-\infty$ ។

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (d_1) ។

គេបាន $C-d_1=\dfrac{(x+1)e^x}{1-e^x}$

ដោយ $e^x>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$ នោះ $C-d_1$ មានសញ្ញាដូច $\dfrac{x+1}{1-e^x}$

- ឱ្យ $x+1=0\quad\Rightarrow\ x=-1$
- បើ $1-e^x=0\quad\Rightarrow\ x=0$
- បើ $1-e^x>0\quad\Rightarrow\ x<0$
- បើ $1-e^x<0\quad\Rightarrow\ x>0$

តារាងសញ្ញា $C-d_1$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x-1$	−	0 +	‖	+
$1-e^x$	+	+	‖	−
$C-d_1$	−	0 +	‖	−

- បើ $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ នោះ $C-d_1<0$ នាំឱ្យ ក្រាប (C) នៅក្រោមបន្ទាត់ (d_1) ។
- បើ $x\in(-1,0)$ នោះ $C-d_1>0$ នាំឱ្យ ក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ (d_1) ។
- បើ $x=-1$ នោះ $C-d_1=0$ នាំឱ្យ ក្រាប (C) ប្រសព្វជាមួយបន្ទាត់ (d_1) ត្រង់ចំណុចមួយដែលមានកូអរដោនេ $(-1,-1)$ ។

3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d_2) ដែលមានសមីការ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូត ដេកនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ (d_2) ដែលមានសមីការ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូត ដេកនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។

- សិក្សាទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង (d_2)

$$C-d_2=[f(x)-(-1)]=\frac{x+e^x}{1-e^x}+1$$

$$=\frac{x+e^x+1-e^x}{1-e^x}=\frac{x+1}{1-e^x}$$

គេបាន $C-d_2$ និង $C-d_1$ មានសញ្ញាដូចគ្នា គ្រប់ $\mathbb{R}-\{0\}$

តាមតារាងសញ្ញា $C-d_1$ គេទាញបានទីតាំងនៃ $C-d_2$ គឺ

- បើ $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ នោះ $C-d_2<0$ នាំឱ្យ ក្រាប (C) នៅក្រោមបន្ទាត់ (d_2) ។
- បើ $x\in(-1,0)$ នោះ $C-d_2>0$ នាំឱ្យ ក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ (d_2) ។
- បើ $x=-1$ នោះ $C-d_2=0$ នាំឱ្យ ក្រាប (C) ប្រសព្វជាមួយបន្ទាត់ (d_2) ត្រង់ចំណុចមួយដែលមានកូអរដោនេ $(-1,-1)$ ។

4. a. បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1-e^x)^2}$ ។

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x+e^x}{1-e^x}$

$$f'(x)=\frac{(x+e^x)'(1-e^x)-(1-e^x)'(x+e^x)}{(1-e^x)^2}$$

$$=\frac{(1+e^x)(1-e^x)+e^x(x+e^x)}{(1-e^x)^2}$$

$$=\frac{1-e^{2x}+xe^x+e^{2x}}{(1-e^x)^2}$$

$$=\frac{1+xe^x}{(1-e^x)^2}$$

ដូចនេះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1-e^x)^2}$ ។

b.សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1-e^x)^2}$

ដោយ $(1-e^x)^2>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$

គេបាន $g(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ។

- សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -1$

5. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $\left(-\ln 2,-\ln\frac{3}{2}\right)$។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(\alpha)=-\dfrac{\alpha}{\alpha+2}$ ។

គេបាន $f(-\ln 2)=\dfrac{-\ln 2+e^{-\ln 2}}{1-e^{-\ln 2}}=\dfrac{-\ln 2+e^{\ln 2^{-1}}}{1-e^{\ln 2^{-1}}}=\dfrac{-0.7+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$$=\frac{-0.7+0.5}{1-0.5}=-\frac{0.2}{0.5}=-\frac{2}{5}$$

$$f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{-\ln\frac{3}{2}+e^{-\ln\frac{3}{2}}}{1-e^{-\ln\frac{3}{2}}}=\frac{-0.4+e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}}}{1-e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}}}$$

$$=\frac{-0.4+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{-0.4+0.66}{1-0.66}=\frac{13}{17}$$

ដោយ $f(-\ln 2)\times f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{13}{17}\right)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទ តម្លៃកណ្តាល $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $\left(-\ln 2\,,-\ln\frac{3}{2}\right)$ ដែល $f(\alpha)=0$ ។

ម្យ៉ាងទៀត f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ f កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសតែមួយចំណុចគត់។

ដូចនេះសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $\left(-\ln 2,-\ln\frac{3}{2}\right)$ ដែល $f(\alpha)=0$ ។

- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(\alpha)=\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$

យើងមាន $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha+e^\alpha}{1-e^\alpha}=0 \Rightarrow e^\alpha=-\alpha$

គេបាន $f'(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e^\alpha}{(1-e^\alpha)^2}=\dfrac{1+\alpha(-\alpha)}{[1-(-\alpha)]^2}=\dfrac{1-\alpha^2}{(1+\alpha)^2}$

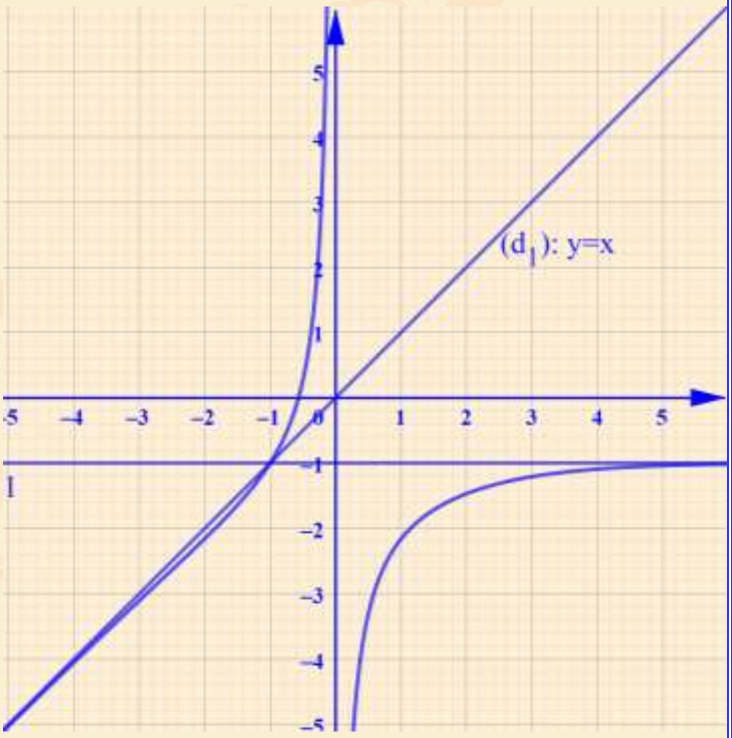
$$=\frac{(1-\alpha)(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{f'(\alpha)=\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}}$

6. សង់បន្ទាត់ (d_1); (d_2) និងក្រាប (C)។

$(d_1): y=x$

x	0	1
y	0	1



មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: --------------------លេខ ----------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:---

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:--

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. (១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច a ដែល $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)$ ។

1.a. បង្ហាញថា $a=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ។ **b.** ចូរកំណត់តម្លៃពិតប្រាកដនៃ $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ និង $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ ។

2.a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^4=8\left(1-i\sqrt{3}\right)$ ។ **b.** ចូរដោះស្រាយសមីការ $(\mathrm{E}): z^4=8\left(1-i\sqrt{3}\right)$ ។

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2\sin x}-x\right)$ **គ.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin 5x)(\sin 2x)}{-3x^2}$ **ឃ.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{6}x-\sin\frac{\pi}{3}x}{1-x}$

III. (១០ពិន្ទុ) គេបង្កើតប័ណ្ណដែលមានលេខបីខ្ទង់ដែលខ្ទង់នីមួយៗអាចជាលេខដដែលៗដោយប្រើលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ។

ក. រកចំនួនប័ណ្ណដែលអាចបង្កើតបាន។

ខ. គេរើសយកប័ណ្ណមួយដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលរើសបាន៖

A. «ប័ណ្ណជាចំនួនគូ»។ **B.** «ប័ណ្ណជាពហុគុណនៃ 5 » ។ **C.** «ប័ណ្ណជាចំនួនធំជាង 500 »។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖ $\mathrm{I}=\int_1^e \ln x\,dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x-\sin x}{1-\sin^2 x}\right)dx$ និង $\mathrm{K}=\int_{-1}^{8}\left[x+1-\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ) **១.** គេមានសមីការ $(\mathrm{E}):\ (5x+4y)^2=40(xy+10)$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរ និង សង់អេលីបនេះ។

ខ. កំណត់បរិមាត្រនៃត្រីកោណ $\mathrm{F_1F_2N}$ ដែល $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$ ជាកំណុំនិង $\mathrm{N}\in(\mathrm{E})$ ។

២. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។គេមានចំណុច $\mathrm{A}(0;-1;0)$; $\mathrm{B}(1;1;0)$ និង $\mathrm{C}(0;0;1)$ ។

1.a. កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ។ **b.** បង្ហាញថាចំណុច $\mathrm{A,B}$ និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។

c. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការប្លង់ (P) មានសមីការ $2x-y+z-1=0$ ។

2. គេមានប្លង់ $(\mathrm{Q}):\ x+y-2z+1=0$ ។ បង្ហាញថាប្លង់ (P) និង (Q) ប្រសព្វគ្នាបានសមីការបន្ទាត់ $(\Delta): x=t; y=-1+5t;\ z=3t; t\in\mathbb{R}$ ។

3. គេឱ្យសមីការស្វ៊ែ $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2z+\frac{4}{3}=0$ ។

a. បង្ហាញថាស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $\mathrm{I}(-1\,;0;1)$ ។ រួចគណនាកាំរបស់ស្វ៊ែ។ **b.** បង្ហាញថាស្វ៊ែ (S) ប៉ះនឹងប្លង់ (P) និង (Q) ។

VI. (១០ពិន្ទុ) **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(\mathrm{E}):\ y''+y'-2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) បើគេដឹងថាក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះមានបន្ទាត់ (T) ប៉ះត្រង់ $\mathrm{N}(0,3)$ ហើយបន្ទាត់ (T) កែងបន្ទាត់ $(\mathrm{L}): y=\frac{1}{3}x-1$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) **ផ្នែកA.** គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0\,,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x+1+2x\ln x$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ។ 2. គណនា $g'(x)$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។

3. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។ 4. កំណត់សញ្ញានៃ g លើ $(0\,,+\infty)$ ។

ផ្នែកB. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{1+\ln x}{(x-1)^2}$ មានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (ឯកតានៃក្រាប 2cm)។

1. រកដែនកំណត់ $\mathrm{D_f}$ នៃអនុគមន៍ f ។

2. **a.** គណនា $\lim\limits_{x\to1}f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

   b. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

3. **a.** ចូរស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x\in\mathrm{D_f}$; $f'(x)=\frac{(1-x)g(x)}{x(x-1)^4}$ ។ **b.** សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់តារាង អថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. សង់ក្រាប (C) ។ (គេឱ្យ $e^{-1}\cong0.36$; $f(1/2)\cong0.24$; $f(2)\cong1.69$; $f(3)\cong0.52$)

5. **a.** គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I}=\int_2^3\frac{1}{x(x-1)}dx$ និង $\mathrm{J}=\int_2^3 f(x)dx$ ។

   b. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ឈរ $x=2$ និង $x=3$ ។($e^{-\frac{3}{2}}\simeq0.2$)

អត្រាកំណែ

I. យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)$

1.a. បង្ហាញថា $a=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

គេបាន $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ពិត

b. ចូរកំណត់តម្លៃពិតប្រាកដនៃ $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ និង $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ ។

គេបាន $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}+i^2\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right]$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

និង $a=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

$=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)-i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{12}\right)\right]$

$=2\left(\sin\frac{11\pi}{12}-i\cos\frac{11\pi}{12}\right)$

$=2\sin\frac{11\pi}{12}-2i\cos\frac{11\pi}{12}$

ផ្ទឹម a គេបាន

$$\begin{cases}2\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\\ -2\cos\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ ;\ \sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

2.a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^4=8\left(1-i\sqrt{3}\right)$ ។

យើងមាន $a=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

នាំឱ្យ $a^4=\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\right]^4$

$=2^4\left(\cos\frac{20\pi}{12}+i\sin\frac{20\pi}{12}\right)$

$=16\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$=16\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=8\left(1-i\sqrt{3}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{a^4=8\left(1-i\sqrt{3}\right)}$

b. ដោះស្រាយសមីការ $(E): z^4=8\left(1-i\sqrt{3}\right)$

យើងមាន $(E): z^4=8\left(1-i\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow z^4=a^4$

នាំឱ្យ $z=\pm\sqrt[4]{a^4}=\pm a=\pm\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i\right)$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $z=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$ ឬ

$z=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$

II. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1^+}\frac{|x-1|}{x-1}\qquad=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}$

$=1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}=1}$

ខ. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2\sin x}-x\right)$ រាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2\sin x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2\sin x-x^2}{\sqrt{x^2+2\sin x}+x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sin x}{x\left(\sqrt{1+2\frac{\sin x}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\times\frac{2}{\sqrt{1+2\frac{\sin x}{x^2}}+1}$

ដោយ $-1\le\sin x\le1$

$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\le\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$

$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

ម្យ៉ាងទៀត $-1\le\sin x\le1$

$\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2}\le\frac{\sin x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\le\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\le\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$

គេបាន $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2\sin x}-x\right)=0\times\frac{2}{\sqrt{1+2\times0+1}}=0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2\sin x}-x\right)=0}$

គ. $\lim_{x\to0}\frac{(\sin5x)(\sin2x)}{-3x^2}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to0}\frac{(\sin5x)(\sin2x)}{-3x^2}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin5x}{x}\times\frac{\sin2x}{x}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 5x}{5x}\times\frac{\sin 2x}{2x}\times\left(-\frac{5\times 2}{3}\right)\right]=1\times 1\times\left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$=-\frac{10}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)(\sin 2x)}{-3x^2}=-\frac{10}{3}}$

ឃ. $\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{6}x-\sin\frac{\pi}{3}x}{1-x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $t=1-x \quad\Rightarrow\quad x=1-t$

បើ $x\to 1 \quad\Rightarrow\quad t\to 0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{6}x-\sin\frac{\pi}{3}x}{1-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{6}(1-t)-\sin\frac{\pi}{3}(1-t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}t\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}t\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}t-\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t+\sin\frac{\pi}{3}t\cos\frac{\pi}{3}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{6}t+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{3}t+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}t-\cos\frac{\pi}{3}t\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}t+\sin\frac{\pi}{3}t\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1-\cos\frac{\pi}{3}t-1+\cos\frac{\pi}{6}t\right]+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}t+\cos\frac{\pi}{3}t\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{3}t}{t}-\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}t}{t}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6}t}{t}+\frac{\sin\frac{\pi}{3}t}{t}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=0+\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6}t}{\frac{\pi}{6}t}\times\frac{\pi}{6}+\frac{\sin\frac{\pi}{3}t}{\frac{\pi}{3}t}\times\frac{\pi}{3}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{6}x-\sin\frac{\pi}{3}x}{1-x}=\frac{\pi}{4}}$

របៀបទី២

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{6}x-\sin\frac{\pi}{3}x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}x\right)-\sin\frac{\pi}{3}x}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3}x}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}x}{2}\right)}{1-x}$$

$$=2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}x}{2}\right)}{1-x}$$

$$=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}(1-x)}{1-x}$$

$$=2\times\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}(1-x)}{\frac{\pi}{4}(1-x)}\times\frac{\pi}{4}$$

$$=1\times 1\times\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

III. **ក.** រកចំនួនប័ណ្ណដែលអាចបង្កើតបាន

ដោយគេបង្កើតប័ណ្ណមានលេខបីខ្ទង់ដែលខ្ទង់នីមួយៗអាចជាលេខដដែលៗប្រើលេខ $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ជាចម្លាស់ច្រំដែល

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S)=6^3=216$ ករណី

ដូចនេះ ចំនួនករណីអាច $n(S)=216$ ករណី

ខ. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលរើសបាន៖

A. «ប័ណ្ណជាចំនួនគូ»

គេបានចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $n(A)=6\times 6\times 3$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6\times 6\times 3}{6^3}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{1}{2}}$

B. «ប័ណ្ណជាពហុគុណនៃ 5 »

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ

$n(B)=6\times 6\times 1$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6\times 6\times 1}{6^3}=\frac{1}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{1}{6}}$

C. «ប័ណ្ណជាចំនួនតូចជាង 500 »

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ

$n(C)=2\times 6\times 6$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{2\times 6\times 6}{6^3}=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{1}{3}}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$I=\int_1^e \ln x\,dx$

តាង $u=\ln x \quad\Rightarrow\quad du=\frac{1}{x}dx$

$dv=dx \quad\Leftrightarrow\quad \int dv=\int dx \quad\Rightarrow v=x$

$$I=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=[x\ln x-x]_1^e$$

$$=(e\ln e-e)-(\ln 1-1)$$

$$=(e-e)+1$$

$$=1$$

ដូចនេះ $\boxed{I=1}$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x-\sin x}{1-\sin^2 x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x-\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,d(\tan x)+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$=\left[\frac{\tan^2 x}{2}-\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{\tan^2\frac{\pi}{4}}{2}-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\right)-\left(0-\frac{1}{1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}+1$$

$$=\frac{1-2\sqrt{2}+2}{2}$$

$$=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{J=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}$

$$K=\int_{-1}^{8}\left[x+1-\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{x-1}\right]_{-1}^{8}$$

$$=\left(\frac{8^2}{2}+8+\frac{1}{8-1}\right)-\left(\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=40-\frac{1}{7}+1$$

$$=\frac{286}{7}$$

ដូចនេះ $\boxed{K=\frac{286}{7}}$

V. ១.គេមានសមីការ (E): $(5x+4y)^2=40(xy+10)$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរ និង សង់អេលីបនេះ

$$(E):\ (5x+4y)^2=40(xy+10)$$

$$\Leftrightarrow\quad 25x^2+40xy+16y^2=40xy+400$$

$$\Leftrightarrow\quad 25x^2+16y^2=400$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{25x^2}{400}+\frac{16y^2}{400}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

$\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ មានរាង $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ជាសមីការអេលីប។

ដូចនេះ (E) ជាសមីការអេលីបដែលមានផ្ចិត $O(0,0)$ និងអ័ក្សធំជាអ័ក្ស $(y'oy)$ ។

គេបាន $a=5$, $b=4$, $c=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$

ដូចនេះ

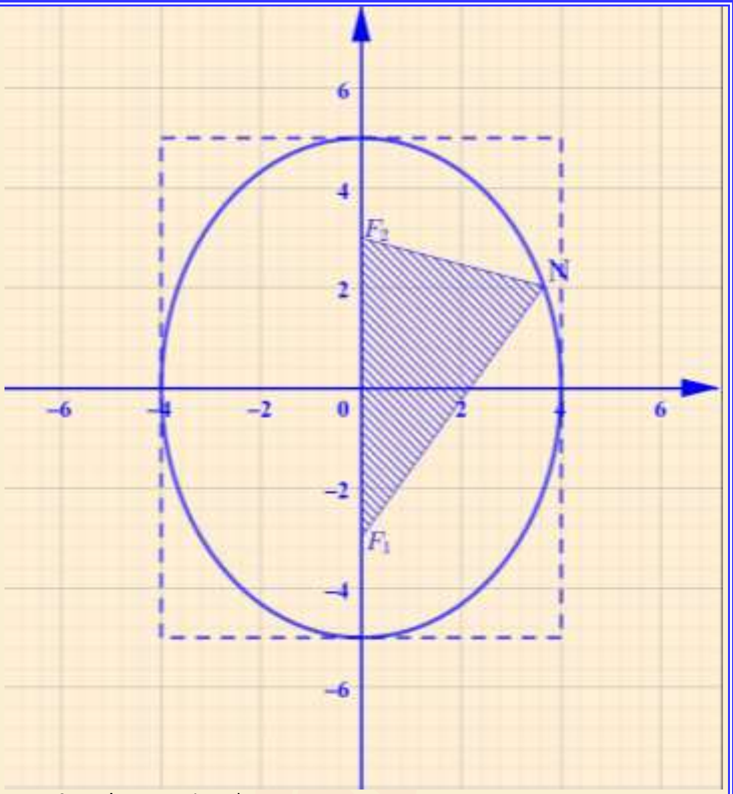
-ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=8$ ឯកតាប្រវែង

-ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=10$ ឯកតាប្រវែង

-កំពូល $V(0,\pm a)\ \Rightarrow\ V(0,\pm 5)$

- កំណុំ $F(0,\pm c)\ \Rightarrow\ F(0,\pm 3)$

- សង់អេលីប (E)



ខ. កំណត់បរិមាត្រនៃត្រីកោណ F_1F_2N

រូបមន្ត $P=F_1F_2+F_1N+F_2N$

ដោយ $N\in(E)$ តាមនិយមន័យគេបាន $F_1N+F_2N=2a=10$

តែ $F_1F_2=2c=6$

គេបានបរិមាត្រត្រីកោណ F_1F_2N គឺ $P=6+10=16$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ បរិមាត្រត្រីកោណ F_1F_2N គឺ $P=16$ ឯកតាប្រវែង

២. យើងមានចំណុច $A(0,-1,0)$; $B(1,1,0)$ និង $C(0,0,1)$

1.a.កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

គេបាន

$$\overrightarrow{AB}=(1-0;1+1;0-0)=(1;2;0)$$

$$\overrightarrow{AC}=(0-0;0+1;1-0)=(0;1;1)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&0\\0&1&1\end{vmatrix}=(2-0)\vec{i}-(1-0)\vec{j}+(1-0)\vec{k}$$

$$=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ។

b. បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq 0$ នោះ វ៉ិចទ័រ និង មិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា មានន័យថា ចំណុច A,B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

ដូចនេះ ចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។

c.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការប្លង់ (P) មានសមីការ $2x-y+z-1=0$

ដោយប្លង់ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ គេបាន

ប្លង់ $(P):2x-y+z+d=0$

តែ $A(0;-1;0)\in(P):2(0)-(-1)+0+d=0\ \Rightarrow d=-1$

គេបានប្លង់ $(P):2x-y+z-1=0$ ពិត

ដូចនេះប្លង់ (P) មានសមីការ $2x-y+z-1=0$ ។

2. បង្ហាញថាប្លង់ (P) និង (Q) ប្រសព្វគ្នាបានសមីការបន្ទាត់

$(\Delta): x=t; y=1-5t;\ z=3t\ ; t\in\mathbb{R}$ ។

គេបាន $(\mathrm{P})\cap(\mathrm{Q})$ គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 2x-y+z-1=0 & (1)\\ x+y-2z+1=0 & (2)\end{cases}$

តាង $x=t\ , t\in\mathbb{R}$

$$+\begin{cases} 2t-y+z-1=0 & (1)\\ t+y-2z+1=0 & (2)\end{cases}$$
$$3t-z=0 \Rightarrow z=3t$$

យក $z=3t$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $2t-y+3t-1=0 \Rightarrow y=-1+5t$

គេបាន $(\Delta):\begin{cases} x=t\\ y=-1+5t\ \ ; t\in\mathbb{R}\\ z=3t\end{cases}$ ពិត

ដូចនេះ $(\Delta):\begin{cases} x=t\\ y=-1+5t\ \ ; t\in\mathbb{R}\\ z=3t\end{cases}$

3. a. បង្ហាញថាស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(-1\,,0,1)$

យើងមាន សមីការស្វ៊ែ $(S): x^2+y^2+z^2+2x-2z+\frac{4}{3}=0$

$(S): x^2+2x+y^2+z^2-2z+\frac{4}{3}=0$

$\Leftrightarrow\ x^2+2x+1-1+y^2+z^2-2z+1-1+\frac{4}{3}=0$

$\Leftrightarrow\ (x+1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2+\frac{4-6}{3}=0$

$\Leftrightarrow\ (x+1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow\ (x+1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$

សមីការស្តង់ដានៃ $(\mathrm{S}): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

គេបាន $a=-1\,, b=0\,, c=1$

ដូចនេះ ស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $I(-1\,,0,1)$ ។

- រួចគណនាកាំរបស់ស្វ៊ែ

គេបាន $R^2=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad R=\sqrt{\frac{2}{3}}$

ដូចនេះ $\boxed{R=\sqrt{\frac{2}{3}}}$

b. បង្ហាញថាស្វ៊ែ (S) ប៉ះនឹងប្លង់ (P) និង (Q)

$$\mathrm{d}(\mathrm{I};(\mathrm{P}))=\frac{|ax_o+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2(-1)-(0)+1(1)-1|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}$$
$$=\frac{|-2|}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{I};(\mathrm{P}))=\frac{|ax_o+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|(1)(-1)+(1)(0)-2(1)+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}$$
$$=\frac{|-2|}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ដោយ $\mathrm{d}(\mathrm{I};(\mathrm{P}))=\mathrm{d}(\mathrm{I};(\mathrm{P}))=\mathrm{R}$

ដូចនេះ ស្វ៊ែ (S) ប៉ះនឹងប្លង់ (P) និង (Q) ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(\mathrm{E}): y''+y'-2y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+\lambda-2=0$

មានឫសឌុប $\lambda_1=1;\ \lambda_2=-2$

នាំឱ្យចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}\ ;\ A,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{x}+Be^{-2x}\ ;\ A,B\in\mathbb{R}$

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) បើគេដឹងថាក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះមានបន្ទាត់ (T) ប៉ះត្រង់ចំណុច $\mathrm{N}(0,3)$ ហើយបន្ទាត់ (T) កែងបន្ទាត់ $(\mathrm{L}): y=\frac{1}{3}x-1$

តាង m ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (T)

ដោយ $(\mathrm{T})\perp(\mathrm{L})\ \Leftrightarrow\ \mathrm{m}\left(\frac{1}{3}\right)=-1 \quad\Rightarrow \mathrm{m}=-3$

យើងមាន $y=Ae^{x}+Be^{-2x} \Rightarrow\ y'=Ae^{x}-2Be^{-2x}$

ដោយ ក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះមានបន្ទាត់ (T) ប៉ះត្រង់ចំណុច

$\mathrm{N}(0,3)$ គេបាន $\begin{cases} y(0)=3\\ y'(0)=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{0}+Be^{0}=3\\ Ae^{0}-2Be^{0}=-3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} A+B=3\\ A-2B=-3\end{cases} \Rightarrow\begin{cases} A=1\\ B=2\end{cases}$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) គឺ $y=e^{x}+2e^{-2x}$

VII. ផ្នែក**A.** គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0\,,+\infty)$ ដោយ

$g(x)=x+1+2x\ln x$

1. គណនា $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1+2x\ln x)=\boxed{1}$ (ព្រោះ៖ $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1+2x\ln x)=+\infty+1+2(+\infty)(+\infty)$

$=\boxed{+\infty}$

2. គណនា $g'(x)$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។

យើងមាន $g(x)=x+1+2x\ln x$

នាំឱ្យ $g'(x)=1+2\left(\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)=1+2\ln x+2=2\ln x+3$

ដូចនេះ៖ $\boxed{g'(x)=2\ln x+3}$

3. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g

យើងមាន $g'(x)=2\ln x+3$

- បើ $2\ln x+3=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x=-\frac{3}{2} \quad\Rightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$

- បើ $2\ln x+3>0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x>-\frac{3}{2} \quad\Rightarrow x>e^{-\frac{3}{2}}$

- បើ $2\ln x+3<0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x<-\frac{3}{2} \quad\Rightarrow x<e^{-\frac{3}{2}}$

តារាងសញ្ញានៃ $g'(x)$

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

- ចំពោះ $x\in\left(0\ ,\ e^{-\frac{3}{2}}\right)$ នោះ $g'(x)<0$ នាំឱ្យ g ជាអនុគមន៍ចុះ។

- ចំពោះ $x\in\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ នោះ៖ $g'(x)>0$ នាំឱ្យ g ជាអនុគមន៍កើន។

- ចំពោះ $x=e^{-\frac{3}{2}}$ នោះ៖ $g'(x)=0$ នាំឱ្យ g ជាអនុគមន៍ថេរ។

- ចំណុចបរមា

$$g\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=e^{-\frac{3}{2}}+1+2\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)\ln e^{-\frac{3}{2}}=0.2+1+2(0.2)\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=1.2-0.6=0.6$$

តារាងអថេរភាពនៃ g

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	1	↘	0.6	↗	$+\infty$

4. កំណត់សញ្ញានៃ g លើ $(0\,,+\infty)$

តាមតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g គេបាន $g(x)>0\ ;\ \forall x\in(0,+\infty)$

ដូចនេះ: $\boxed{g(x)>0\ ;\ \forall x\in(0,+\infty)}$ ។

ផ្នែកB. យើងមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{(x-1)^2}$

1. រកដែនកំណត់ D_f នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ កំណត់លុះត្រាតែ $\begin{cases}x>0\\(x-1)^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq 1\end{cases}$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D_f=(0,+\infty)-\{1\}$

2. a. គណនា $\lim\limits_{x\to1}f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\ln x}{(x-1)^2}=\begin{bmatrix}+\infty\ ;\ x\to1^+\\+\infty\ ;\ x\to1^-\end{bmatrix}$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1+\ln x}{(x-1)^2}=\frac{1+(-\infty)}{(-1)^2}=\boxed{-\infty}$$

-ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

ដូចនេះ: $x=1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ នៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$

និង $x=0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ នៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$ ។

b. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\ln x}{(x-1)^2}\right)=\boxed{0}$$

-ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

ដូចនេះ: $y=0$ សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។

3. a. ចូរស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x\in D_f$; $f'(x)=\dfrac{(1-x)g(x)}{x(x-1)^4}$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{(x-1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(1+\ln x)'(x-1)^2-\left[(x-1)^2\right]'(1+\ln x)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}(x-1)^2-2(x-1)(1+\ln x)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)(x-1-2x-2x\ln x)}{x(x-1)^4}$$

$$=\frac{(1-x)(x+1+2x\ln x)}{x(x-1)^4}$$

$$=\frac{(1-x)g(x)}{x(x-1)^4}\ \text{ពិត}$$

ដូចនេះ: $\boxed{f'(x)=\dfrac{(1-x)g(x)}{x(x-1)^4}\ ;\ \forall x\in D_f}$

b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{(1-x)g(x)}{x(x-1)^4}$

ដោយ $x(x-1)^4>0$, $g(x)>0\ ;\ \forall x\in D_f$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $1-x$

ឱ្យ $1-x=0\quad\Rightarrow\quad x=1$

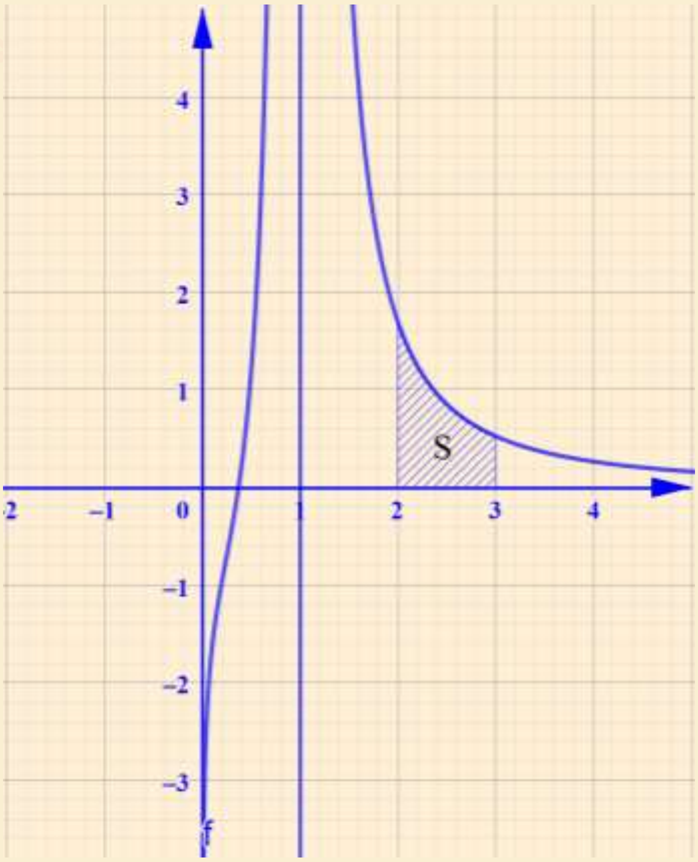
តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	-	

- ចំពោះ $x\in(0,1)$ នោះ $f'(x)>0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើន។
- ចំពោះ $x\in(1,+\infty)$ នោះ $f'(x)<0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះ។
- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

4. សង់ក្រាប (C)



5. a. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)}dx$ និង $J=\int_2^3 f(x)dx$

$$I=\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)}dx=\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[\ln|x-1|-\ln|x|\right]_2^3$$
$$=(\ln 2-\ln 3)-(\ln 1-\ln 2)$$
$$=\ln 2-\ln 3+\ln 2$$
$$=2\ln 2-\ln 3$$
$$=\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

ដូចនេះ: $\boxed{I=\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$

$$J=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 \frac{1+\ln x}{(x-1)^2}dx$$

តាង $u=1+\ln x \quad \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

$$dv=\frac{1}{(x-1)^2}dx \Leftrightarrow \int dv=\int\frac{1}{(x-1)^2}dx \Rightarrow v=-\frac{1}{x-1}$$

$$J=\left[-\frac{1+\ln x}{x-1}\right]_2^3+\int_2^3\frac{1}{x(x-1)}dx$$
$$=-\frac{1+\ln 3}{2}+1+\ln 2+I$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 3+1+\ln 2+\ln\frac{4}{3}$$
$$=\frac{1}{2}-\ln 3^{\frac{1}{2}}+\ln\frac{2\times 4}{3}$$
$$=\frac{1}{2}+\ln\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ: $\boxed{J=\frac{1}{2}+\ln\frac{8}{3\sqrt{3}}}$

b. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C), អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ឈរ $x=2$ និង $x=3$

គេបាន $S=\int_2^3 f(x)dx$

នាំឱ្យ $S=2\,\text{cm}\times 2\,\text{cm}\int_2^3 f(x)dx=4\,\text{cm}^2\, J$

$$=4\left[\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)\right]\text{cm}^2=\left[2+4\ln\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)\right]\text{cm}^2$$

ដូចនេះ: $\boxed{S=\left[2+4\ln\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)\right]\text{cm}^2}$

មណ្ឌលប្រឡង ---
លេខបន្ទប់: --------------------លេខ -----------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:--

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-x^3}{\sqrt{2x^2+1}-3}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-2\right)-x\right]$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 10 គ្រាប់ដែលក្នុងមាន ប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 3 គ្រាប់ដែលចុះលេខ $0;1;1$ ប៊ូលពណ៌សចំនួន 4 គ្រាប់ដែលចុះលេខ $0;0;1;1$ និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 3 គ្រាប់ដែលចុះលេខ (-1) ; 0 ; 1 ។ គេចាប់យកប៊ូល 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល៖

A. " ចាប់បានប៊ូល 3 គ្រាប់មានពណ៌ដូចគ្នា "
B. " ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានផលគុណស្មើនឹងសូន្យ "
C. " ចាប់បានប៊ូល 3 គ្រាប់ដែលមានផលបូកស្មើនឹងសូន្យ "

III. (១៥ពិន្ទុ) 1. នៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ គេមានសមីការ (E): $z^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)z+16=0$ ។

a. ស្រាយបញ្ជាក់ថាឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ (E) គឺ $\Delta=-4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$ ។ b. ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុង $\mathbb{C}$ ។

2. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$; $b=1+i\sqrt{3}$ និង $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ។

a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $b\bar{c}=a$ ។ រួចបង្ហាញថា $ac=4b$ ។

b. សរសេរ b និង c ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ រួចបង្ហាញថា $a=4\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_1^2(2x-1)^2\,dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^2x+\cos^4x}\,dx$ និង $K=\int_0^{\ln 2}\dfrac{e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}\left(e^x+1\right)}dx$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ) 1. គេឱ្យសមីការ (H): $x^2-4=4y^2$ ។

ក. បង្ហាញថា (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (H) ។ រួចសង់ (H) នេះ។

ខ. គេឱ្យ $M(x_0,y_0)\in(H)$ ។ គណនាផលគុណចម្ងាយទាំងពីរនៃចំណុច M ទៅសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ។

2. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។គេឱ្យសមីការឆ្លុះ (d): $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ និងសមីការប្លង់ (P): $2x-y+2z-2=0$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) ដែលកាត់បន្ទាត់ (d) ហើយ $(Q)\perp(P)$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច M នៅលើបន្ទាត់ (d) ដោយដឹងថាចម្ងាយពីចំណុច M ទៅប្លង់ (P) ស្មើ 5 ។

VI. (១០ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''-4y'+4y=0$ ។

ខ.រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាប (Γ) នៃចម្លើយនេះមានចំណុចរបត់ $I\left(\dfrac{1}{2},-2e\right)$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=-x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$ មានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (ឯកតា 2cm)។

1. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ។

2. a. ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y=-x+\dfrac{5}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$ ។

b. ដោះស្រាយសមីការ $e^{x-2}-4=0$ ។ រួចបង្ហាញថាក្រាប (C) នៅខាងលើ (Δ) លើចន្លោះ $(-\infty,2+\ln 4]$ និងនៅខាងក្រោម (Δ) លើចន្លោះ $[2+\ln 4,+\infty)$ ។

3. a. បង្ហាញថា គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$ ។ **b.** សិក្សាអថេរភាពនៃ f និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. គណនា $f''(x)$ រួចបង្ហាញថា $A(2,2)$ ជាចំណុចរបត់មួយនៃក្រាប (C) ។

5. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់។ រួចបង្ហាញថា $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$ ។

6. សង់បន្ទាត់ (Δ) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ គេឱ្យ $\ln 2\simeq 0.7$; $\ln 3\simeq 1.1$ ។

អត្រាកំណែ

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-x^3}{\sqrt{2x^2+1}-3}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-x^3}{\sqrt{2x^2+1}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2^2+2x+x^2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}{\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2^2+2x+x^2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}{2x^2+1-3^2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2^2+2x+x^2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}{2x^2-8}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2^2+2x+x^2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}{2(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(2^2+2x+x^2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}{2(x+2)}$$

$$=\frac{-(4+4+4)(3+3)}{2(2+2)}=-\frac{12\times 6}{8}=-9$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-x^3}{\sqrt{2x^2+1}-3}=-9}$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-2\right)-x\right]$ រាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-2\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-2\right)-\ln e^x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-2}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{2}{e^x}\right)$$

$$=\ln(1-0)=\ln 1=0$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-2\right)-x\right]=0}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\pi\sin^2\frac{x}{2}}\times\pi=1\times\pi=\pi$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\pi}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin x-1)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)}{4\cos^2 x-3}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin x-1)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)}{4\left(1-\sin^2 x\right)-3}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(2\sin x-1)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)}{1-4\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{-(1-2\sin x)\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)}{(1-2\sin x)(1+2\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{-\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)}{1+2\sin x}$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)}{1+1}=-\sqrt{3}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}=-\sqrt{3}}$

II. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10,3)=\dfrac{10!}{7!3!}=120$ ករណី

A. " ចាប់បានប៊ូល 3 គ្រាប់មានពណ៌ដូចគ្នា "

នោះចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ

$n(A)=C(3,3)+C(4,3)+C(3,3)=1+4+1=6$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{20}}$

B. " ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានផលគុណស្មើនឹងសូន្យ "

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ

$n(B)=C(4,3)+C(4,2)\times C(6,1)+C(4,1)\times C(6,2)$

$=4+6\times 6+4\times 15=100$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{100}{120}=\dfrac{5}{6}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{P(B)=\dfrac{5}{6}}$

C. " ចាប់បានប៊ូល 3 គ្រាប់ដែលមានផលបូកស្មើនឹងសូន្យ "

ដោយប៊ូល 3 គ្រាប់ដែលមានផលបូកស្មើនឹងសូន្យ គឺ $(0,0,0)$ ឬ $(0,1,-1)$

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ

$n(C)=C(4,3)+C(4,1)\times C(5,1)\times C(1,1)$

$=4+4\times 5\times 1=24$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(C)=\frac{1}{5}}$

III. **1.** យើងមាន $(E): z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$

a. ស្រាយបញ្ជាក់ថាឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ (E) គឺ

$\Delta=-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$

គេបាន $\Delta=b^2-4ac=\left[-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right]^2-4\times1\times16$

$=4(2+2\sqrt{12}+6)-64=32+8\sqrt{12}-64$

$=-32+8\sqrt{12}=-4(8-2\sqrt{12})=-4(6-2\sqrt{12}+2)$

$=-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$

ដូចនេះ: $\boxed{\Delta=-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}$

b. ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុង $\mathbb{C}$

គេបាន $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i$

$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})+2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{2}$

$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i$

$z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{2}$

$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})i$

ដូចនេះ: $\boxed{\begin{array}{l} z_1=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i \\ z_2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})i\end{array}}$

2. គេមាន $a=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $b=1+i\sqrt{3}$ និង $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ។

a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $b\bar{c}=a$

$b\bar{c}=(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})=\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}-i^2\sqrt{6}$

$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$=c$ ពិត

ដូចនេះ: $\boxed{b\bar{c}=a}$

រួចបង្ហាញថា $ac=4b$

យើងមាន $b\bar{c}=a$

$b\bar{c}c=ac \Leftrightarrow \quad ac=(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow ac=(1+i\sqrt{3})(2+2)=4b$ ពិត

ដូចនេះ: $\boxed{ac=4b}$

b. សរសេរ b និង c ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $b=1+i\sqrt{3}$

$=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ហើយ

$c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ: $\boxed{b=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\ ;\ c=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

បង្ហាញថា $a=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

យើងមាន $a=b\bar{c}=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$=4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ពិត

ដូចនេះ: $\boxed{a=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$I=\int_1^2(2x-1)^2\,dx=\int_1^2(4x^2-4x+1)dx$

$=\left[\frac{4x^3}{3}-2x^2+x\right]_1^2$

$=\left(\frac{4(2)^3}{3}-2(2)^2+2\right)-\left(\frac{4}{3}-2+1\right)$

$=\frac{32}{3}-\frac{4}{3}-6+1$

$=\frac{13}{3}$

ដូចនេះ: $\boxed{I=\frac{13}{3}}$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^2x+\cos^4x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4(1-\cos^2x)+\cos^4x}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\cos^2x+\cos^4x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(2-\cos^2x)^2}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-\cos^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\frac{1+\cos2x}{2}\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos2x\right)dx=\left[\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{4}\sin\pi\right)-0$

$=\frac{3\pi}{4}$

ដូចនេះ: $\boxed{J=\frac{3\pi}{4}}$

$K=\int_0^{\ln2}\frac{e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}(e^x+1)}dx=\int_0^{\ln2}\left[\frac{e^{2x}}{e^{2x}(e^x+1)}+\frac{e^x+1}{e^{2x}(e^x+1)}\right]dx$

$=\int_0^{\ln2}\left(\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{e^{2x}}\right)dx=\int_0^{\ln2}\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}+e^{-2x}\right)dx$

$=\int_0^{\ln2}\left(\frac{-(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1}+e^{-2x}\right)dx=\left[-\ln|e^{-x}+1|-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{\ln2}$

$=\left(-\ln|e^{-\ln2}+1|-\frac{e^{-2\ln2}}{2}\right)-\left(-\ln|e^0+1|-\frac{e^0}{2}\right)$

$= -\ln\frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2}$

$= \ln 2 - \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$

$= \ln\frac{4}{3} + \frac{3}{8}$

ដូចនេះ $\boxed{K = \frac{3}{8} + \ln\frac{4}{3}}$

V. **1.** យើងមានសមីការ $(H):\ x^2 - 4 = 4y^2$ ។

ក. បង្ហាញថា (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និង សមីការអាស៊ីមតូតនៃ (H) ។ រួចសង់ (H) នេះ។

គេបាន $(H):\ \frac{x^2}{4} - 1 = y^2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$ មានរាង $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ដូចនេះ (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតគល់0 និងមានអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្ស $(x'ox)$ ។

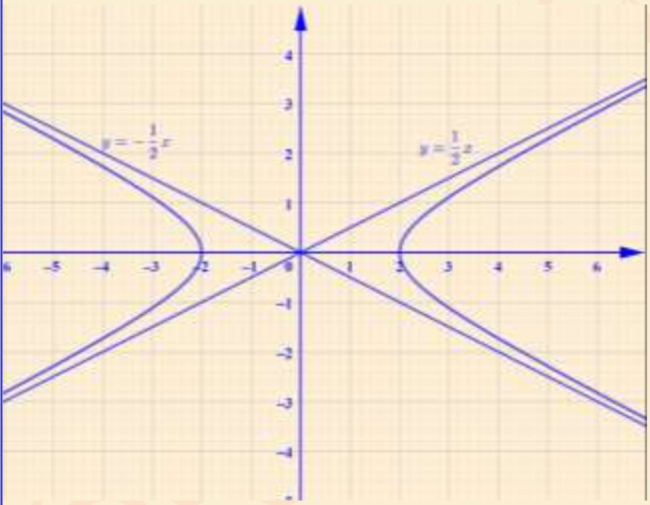
គេបាន $a = 2$, $b = 1 \Rightarrow c = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

- កូអរដោនេកំពូល $V_1(-a,0) \Rightarrow V_1(-2,0)$
  $V_2(a,0) \Rightarrow V_2(2,0)$
- កូអរដោនេកំណុំ $F_1(-c,0) \Rightarrow F_1(-\sqrt{5},0)$
  $F_2(c,0) \Rightarrow F_2(\sqrt{5},0)$
- សមីការអាស៊ីមតូត $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{1}{2}x$

ដូចនេះ កំពូល $V_1(-2,0); V_2(2,0)$

កំណុំ $F_1(-\sqrt{5},0); F_2(\sqrt{5},0)$ និងអាស៊ីមតូត $y = \pm\frac{1}{2}x$

- សង់អ៊ីពែបូល (H)



ខ. គណនាផលគុណចម្ងាយទាំងពីរនៃចំណុច M ទៅសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ។

- តាង d_1 ជាចម្ងាយពីចំណុច $M(x_o, y_o)$ ទៅអាស៊ីមតូត $x + 2y = 0$

$d_1 = \frac{|x_o + 2y_o|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|x_o + 2y_o|}{\sqrt{5}}$

-តាង d_2 ជាចម្ងាយពីចំណុច $M(x_o, y_o)$ ទៅអាស៊ីមតូត $-x + 2y = 0$

$d_2 = \frac{|-x_o + 2y_o|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-x_o + 2y_o|}{\sqrt{5}}$

គេបាន

$d_1 \times d_2 = \frac{|x_o + 2y_o|}{\sqrt{5}} \times \frac{|-x_o + 2y_o|}{\sqrt{5}} = \frac{|(2y_o + x_o)(2y_o - x_o)|}{5}$

$= \frac{|4y_o^2 - x_o^2|}{5}$

ដោយ $M(x_0, y_0) \in (H)$ នោះ $\frac{x_o^2}{4} - y_o^2 = 1 \Rightarrow y_o^2 = \frac{x_o^2}{4} - 1$

$d_1 \times d_2 = \frac{\left|4\left(\frac{x_o^2}{4} - 1\right) - x_o^2\right|}{5} = \frac{|x_o^2 - 4 - x_o^2|}{5} = \frac{|-4|}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}$

ដូចនេះ $\boxed{d_1 \times d_2 = \frac{4}{5}}$

2. ក. សរសេរសមីការប្លង់ (Q) ដែលកាត់បន្ទាត់ (d) ហើយ $(Q) \perp (P)$

យើងមានសមីការឆ្លុះ $(d): \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (-2;1;1)$

សមីការប្លង់ $(P): 2x - y + 2z - 2 = 0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_{(P)} = (2;-1;2)$

ដោយប្លង់ $(Q) \perp (P)$ នាំឱ្យវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) គឺ

$\vec{n}_{(Q)} = \vec{u} \times \vec{n}_{(P)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2+1)\vec{i} - (-4-2)\vec{j} + (2-2)\vec{k}$

$= 3\vec{i} + 6\vec{j}$

គេបានសមីការប្លង់ (Q) គឺ $3x + 6y + d = 0$

យើងមានសមីការឆ្លុះ $(d): \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ នោះ $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t;\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀត $(Q) \cap (d)$ គេបាន $3(-2t) + 6(1+t) + d = 0$

$\Leftrightarrow -6t + 6 + 6t + d = 0 \Rightarrow d = -6$

នាំឱ្យសមីការប្លង់ (Q) គឺ $3x + 6y - 6 = 0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (Q) គឺ $x + 2y - 2 = 0$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច M

តាង $(x_o; y_o; z_o)$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុច M

ដោយចម្ងាយពីចំណុច M ទៅប្លង់ (P) ស្មើនឹង 5 គេបាន

$\frac{|2x_o - y_o + 2z_o - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|2x_o - y_o + 2z_o - 2|}{3} = 5$

$|2x_o - y_o + 2z_o - 2| = 15 \quad \Rightarrow 2x_o - y_o + 2z_o - 2 = \pm 15 \quad (*)$

ដោយ $M(x_o; y_o; z_o) \in (d) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -2t \\ y_o = 1 + t \\ z_o = t \end{cases}$ ជំនួសក្នុង $(*)$

គេបាន $2(-2t) - (1+t) + 2t - 2 = \pm 15$

$\Leftrightarrow -4t - 1 - t + 2t - 2 = \pm 15$

$\Leftrightarrow -3t = 3 \pm 15$

$\Rightarrow t = -6 \vee t = 4$

- ចំពោះ $t = -6 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -2(-6) = 12 \\ y_o = 1 - 6 = -5 \\ z_o = -6 \end{cases} \Rightarrow M(12;-5;-6)$

- ចំពោះ $t=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_o=-2(4)=-8 \\ y_o=1+4=5 \\ z_o=4 \end{cases} \Rightarrow M(-8;5;4)$

ដូចនេះ $\boxed{M(12;-5;-6)\,,\,M(-8;5;4)}$

VI. ក.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''-4y'+4y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-4\lambda+4=0$

គេបាន $\Delta'=(-2)^2-4=0$ មានឫសឌុប $\lambda_0=2$

នាំឱ្យចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=(Ax+B)e^{\lambda_0 x}$; $A,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=(Ax+B)e^{2x}$; $A,B\in\mathbb{R}$

ខ.រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (E)

យើងមាន $y=(Ax+B)e^{2x}$

$\Rightarrow y'=Ae^{2x}+2e^{2x}(Ax+B)=(2Ax+A+2B)e^{2x}$

$\Rightarrow y''=2Ae^{2x}+2e^{2x}(2Ax+A+2B)=(4Ax+4A+4B)e^{2x}$

ដោយដឹងថាក្រាប (Γ) នៃចម្លើយនេះមានចំណុចរបត់ $I\left(\frac{1}{2},-2e\right)$

គេបាន $\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right)=-2e \\ y''\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}A+B\right)e=-2e \\ (2A+4A+4B)e=0 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} A+2B=-4 \\ 6A+4B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-3 \end{cases}$

ដូចនេះ រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (E) គឺ

$g(x)=(2x-3)e^{2x}$

VII. យើងមានអនុគមន៍ $f(x)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

1. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)\right]$

$=-(-\infty)+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}(0)(0-4)=+\infty$ ពិត

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2}=0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2}\left[-\frac{x}{e^{x-2}}+\frac{5}{2e^{x-2}}-\frac{1}{2}\left(e^{x-2}-4\right)\right]$

$=(+\infty)\left[0+0-\frac{1}{2}(+\infty-4)\right]$

$=(+\infty)(-\infty)$

$=-\infty$ ពិត (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-2}}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{2e^{x-2}}=0$)

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$

2. a. ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y=-x+\frac{5}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$ លុះត្រាតែ

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow 0(0-4)=0$

$\Leftrightarrow 0=0$ ពិត

ដូចនេះ $(\Delta): y=-x+\frac{5}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$

b. ដោះស្រាយសមីការ $e^{x-2}-4=0$

គេបាន $e^{x-2}=4 \Leftrightarrow x-2=\ln 4 \Rightarrow x=2+\ln 4$

ដូចនេះ សមីការមានឫសគឺ $x=2+\ln 4$ ។

-បង្ហាញថាក្រាប (C) នៅខាងលើ (Δ) លើចន្លោះ $(-\infty,2+\ln 4]$ និងនៅខាងក្រោម (Δ) លើចន្លោះ $[2+\ln 4,+\infty)$ ។

គេបាន $(C)-(\Delta)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)$

$=-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)=\frac{1}{2}e^{x-2}\left(4-e^{x-2}\right)$

ដោយ $e^{x-2}>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $(C)-(\Delta)$ មានសញ្ញាដូច $4-e^{x-2}$

- បើ $4-e^{x-2}=0 \Rightarrow x=2+\ln 4$
- បើ $4-e^{x-2}>0 \Rightarrow x<2+\ln 4$
- បើ $4-e^{x-2}<0 \Rightarrow x>2+\ln 4$

តារាងសញ្ញានៃ $(C)-(\Delta)$

x	$-\infty$		$2+\ln 4$		$+\infty$
$(C)-(\Delta)$		+	0	-	

តាមតារាងសញ្ញានៃ $(C)-(\Delta)$ គេបាន

- ចំពោះ $x\in(-\infty,2+\ln 4]$ នោះ $(C)-(\Delta)\geq 0$ ក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ (Δ) ។
- ចំពោះ $x\in[2+\ln 4,+\infty)$ នោះ $(C)-(\Delta)\leq 0$ ក្រាប (C) នៅក្រោមបន្ទាត់ (Δ) ។

ដូចនេះ ក្រាប (C) នៅខាងលើ (Δ) លើចន្លោះ $(-\infty,2+\ln 4]$ និងនៅខាងក្រោម (Δ) លើចន្លោះ $[2+\ln 4,+\infty)$ ។

3. a. បង្ហាញថា គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$ ។

យើងមាន $f(x)=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

គេបាន $f'(x)=-1-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)-e^{x-2}\left(\frac{1}{2}e^{x-2}\right)$

$=-\left(1+\frac{1}{2}e^{(x-2)^2}-2e^{x-2}+\frac{1}{2}e^{(x-2)^2}\right)$

$=-\left(e^{(x-2)^2}-2e^{x-2}+1\right)$

$=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2}$

b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គេបាន $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2\leq 0\ ;\ x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

គេបាន $f(2)=-2+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^0\left(e^0-4\right)=-2+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=-2+4=\boxed{2}$

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4. គណនា $f''(x)$

យើងមាន $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$

$$f''(x)=-2\left(e^{x-2}-1\right)'\left(e^{x-2}-1\right)=-2e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=-2e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right)}$

- បង្ហាញថា $\mathrm{A}(2,2)$ ជាចំណុចរបត់មួយនៃក្រាប (C)។

យើងមាន $f''(x)=-2e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right)=2e^{x-2}\left(1-e^{x-2}\right)$

ដោយ $e^{x-2}>0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f''(x)$ មានសញ្ញាដូច $1-e^{x-2}$

- បើ $1-e^{x-2}=0 \quad\Rightarrow\quad x=2$
- បើ $1-e^{x-2}>0 \quad\Rightarrow\quad x<2$
- បើ $1-e^{x-2}<0 \quad\Rightarrow\quad x>2$

តារាងសញ្ញានៃ $f''(x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

តាមតារាងសញ្ញា $f''(x)$ ប្តូរសញ្ញាពីរ $(+)$ ទៅ $(-)$ ត្រង់ $x=2$

នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់មួយគឺ $\mathrm{A}(2,2)$

ដូចនេះ $\mathrm{A}(2,2)$ ជាចំណុចរបត់មួយនៃក្រាប (C)

5. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់។ រួចបង្ហាញថា $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$។

- ដោយ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ និងជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ នោះក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុចតែមួយគត់គឺ $x=\alpha$ ។

- ហើយ $f(\mathbb{R})=f(-\infty;+\infty)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

$$=(+\infty,-\infty)$$

នាំឱ្យ $0\in(+\infty,-\infty)$

ដូចនេះ សមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់។

-បង្ហាញថា $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$

គេបាន $f(2+\ln 4)=-2-\ln 4+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}e^{2+\ln 4-2}\left(e^{2+\ln 4-2}-4\right)$

$$=-2-1.4+2.5-2(4-4)=-2+1.1=-0.9$$

$$f(2+\ln 3)=-2-\ln 3+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{2+\ln 3-2}\left(e^{2+\ln 3-2}-4\right)$$

$$=-2-1.1+2.5-1.5(3-4)=-3.1+4=0.9$$

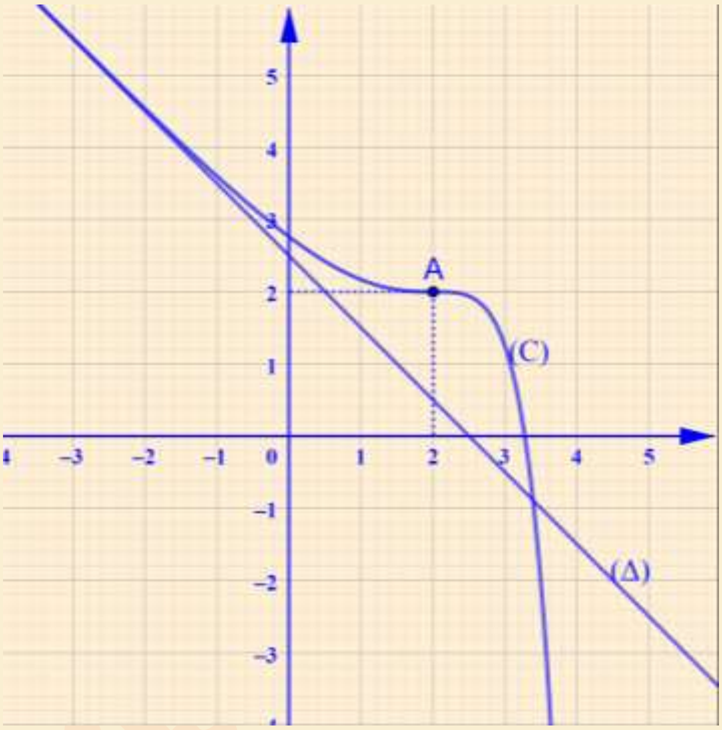
ដោយ $f(2+\ln 3)\times f(2+\ln 4)=(0.9)(-0.9)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល សមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ដែល $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$។

ដូចនេះ $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$

6. សង់បន្ទាត់ (Δ) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(\mathrm{o},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}}\right)$

(Δ): $y=-x+\dfrac{5}{2}$

x	0	$\frac{5}{2}$
y	$\frac{5}{2}$	0



មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខ ------------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:---

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^3-8}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-8x+6}-x\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 10 គ្រាប់ដែលក្នុងមាន ប៊ូលពណ៌បៃតងចំនួន 3 គ្រាប់ ប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 6 គ្រាប់ និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 1 គ្រាប់។ គេចាប់យកប៊ូល 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល៖

A. " ចាប់បានប៊ូលពណ៌បៃតងទាំង 3 គ្រាប់ " B. " ចាប់បានប៊ូល 3 មានពណ៌ដូចគ្នា "

C. " ចាប់បានប៊ូលយ៉ាងតិច 2 មានពណ៌ដូចគ្នា "

III. (១៥ពិន្ទុ) **1.** ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ នៃមានសមីការ $z^2-\sqrt{2}z+1=0$ ។

2. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ និង $b=\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$ ។

a. សរសេរ a ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និង បង្ហាញថា a^{2020} ជាចំនួនពិត។ **b.** ស្រាយបំភ្លឺថា $b^2=a$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ)1. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^1 x\left(x^2-1\right)^2dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\cos^3 x dx$ ។

2. គេមានអនុគមន៍ h កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $h(x)=\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$ ។ បង្ហាញថា $h(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$ ។ គណនា $K=\int_1^2 h(x)dx$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ) 1. ប៉ារ៉ាបូល (P) មួយមានសមីការ $y^2-4y-8x=4$ ។

ក. សរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល (P) រួចរកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (Δ) ដែលកាត់ប៉ារ៉ាបូល (P) ត្រង់ពីរចំណុច A និង B ដោយដឹងថាចំណុច $M(0,4)$ ជាចំណុចកណ្តាល $[AB]$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល (P) និង បន្ទាត់ (Δ) ។

2. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។គេឱ្យ $A(1;-2;3)$ និង សមីការឆ្លុះ $(d):\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (d) ។

ខ. គណនាចម្ងាយពីរចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (d) ។ រួចរកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត A និងប៉ះបន្ទាត់ (d) ។

VI. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_1): y''+2y'+y=-\dfrac{e^{-x}}{x^2}$ និងអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $h(x)=e^{-x}\ln x$ ។

១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា អនុគមន៍ h ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) ។

២. បង្ហាញថា បើ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_1) លុះត្រាតែ $g=(f-h)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E_2): y''+2y'+y=0$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=x+1+\dfrac{2\ln|x|}{x}$ មានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. គេឱ្យ g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $g(x)=x^2+2-2\ln|x|$ ។

a. សិក្សាអថេរភាពនៃ g ។ **b.** ចូរកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ។

2. បង្ហាញថាចំណុច $I(0,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

3. **a.** គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ខាងស្តាំនិងខាងឆ្វេងត្រង់ 0 ។ **b.** គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ និងត្រង់ $-\infty$ ។

c. បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ។ **d.** សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. **a.** បង្ហាញបន្ទាត់ $D: y=x+1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបខាង $\pm\infty$ ។

b. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ D ។

c. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ D ។

d. សង់បន្ទាត់ D និងក្រាប (C) ។

5. គេឱ្យ α ជាចំនួនពិតមួយដែលធំជាង 1 ។

a. គណនាផ្ទៃក្រឡា $A(\alpha)$ ដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C), បន្ទាត់ D និងសមីការបន្ទាត់ $x=1$ និង $x=\alpha$ ។

b. កំណត់តម្លៃ α ដោយដឹងថា $A(\alpha)=16$ ។

អត្រាកំណែ

I. គណនាលីមីតៈ

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^3-8}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x^2+2x+2^2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x^2+2x+4}=\frac{2-4}{4+4+4}=-\frac{2}{12}=-\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^3-8}=-\dfrac{1}{6}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-8x+6}-x\right)$ រាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-8x+6}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-8x+6-x^2}{\sqrt{x^2-8x+6}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-8+\frac{6}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-8+\frac{6}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}}+1}=\frac{-8}{1+1}=-4$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-8x+6}-x\right)=-4}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+2\sin x\cos x}{\sin x-2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1+2\cos x)}{\sin x(1-2\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos x}{1-2\cos x}$$

$$=\frac{1+2\cos(0)}{1-2\cos(0)}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}=-3}$

II. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10,3)=\dfrac{10!}{7!3!}=120$ ករណី

A. " ចាប់បានប៊ូលពណ៌បៃតង់ទាំង 3 គ្រាប់ "

នោះចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $n(A)=C(3,3)=1$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{120}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{120}}$

B. " ចាប់បានប៊ូល 3 មានពណ៌ដូចគ្នា "

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ

$$n(B)=C(3,3)+C(6,3)=1+\frac{6!}{3!3!}=1+20=21 \text{ ករណី}$$

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{21}{120}=\dfrac{7}{40}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{7}{40}}$

C. " ចាប់បានប៊ូលយ៉ាងតិច 2 មានពណ៌ដូចគ្នា "

តាង $\bar{C}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ខុសគ្នា

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ $\bar{C}$ គឺ

$$n(\bar{C})=C(3,1)\times C(6,1)\times C(1,1)=3\times 6\times 1=18 \text{ ករណី}$$

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $\bar{C}$ គឺ $P(\bar{C})=\dfrac{n(\bar{C})}{n(S)}=\dfrac{18}{120}=\dfrac{3}{20}$

ដោយ C និង $\bar{C}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នាគេបាន

$$P(C)+P(\bar{C})=1 \Leftrightarrow P(C)=1-P(\bar{C})=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\dfrac{17}{20}}$

III. **1.** ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ នៃមានសមីការ $z^2-\sqrt{2}z+1=0$

គេបាន $\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4(1)(1)=2-4=-2 \quad\Rightarrow \sqrt{\Delta}=i\sqrt{2}$

$$z_1=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\quad,\quad z_2=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\ ,\ z_2=\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}}$

2. យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ និង $b=\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$

a. សរសេរ a ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេបាន $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{a=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}}$

បង្ហាញថា a^{2020} ជាចំនួនពិត

យើងមាន $a=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$a^{2020}=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2020}$$

$$=\cos\frac{2020\pi}{4}+i\sin\frac{2020\pi}{4}$$

$$=\cos 505\pi+i\sin 505\pi$$

$$=\cos(504\pi+\pi)+i\sin(504\pi+\pi)$$

$$=\cos\pi+i\sin\pi$$

$=-1$ ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ a^{2020} ជាចំនួនពិត។

b. ស្រាយបំភ្លឺថា $b^2=a$

គេបាន $b^2=\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^2$

$$=\cos\frac{2\pi}{8}+i\sin\frac{2\pi}{8}$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

$=a$ ពិត

ដូចនេះ $b^2=a$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int_0^1 x\left(x^2-1\right)^2 dx=\int_0^1 x\left(x^2-1\right)^2 dx$$

$$=\int_0^1 x\left(x^4-2x^2+1\right)dx=\int_0^1\left(x^5-2x^3+x\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^6}{6}-\frac{2x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-0$$

$$=\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\frac{1}{6}}$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\cos^3 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\sin x\cos x\times\cos^3 xdx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^4 xdx$$

តាង $t=\cos x \quad\Leftrightarrow\quad dt=-\sin xdx$

$$J=-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}t^4dt=-2\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-2\left[\frac{\cos^5 x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-2\left(\frac{\cos^5\left(\frac{\pi}{3}\right)}{5}-\frac{\cos^5(0)}{5}\right)=-2\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}-\frac{1}{5}\right)$$

$$=-2\left(\frac{1}{5\times 32}-\frac{1}{5}\right)=-2\left(\frac{1-32}{160}\right)$$

$$=\frac{31}{80}$$

ដូចនេះ $\boxed{J=\frac{31}{80}}$

2. បង្ហាញថា $h(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$ ។

យើងមាន $h(x)=\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}$

$$h(x)=\frac{x^2+1-x^2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{x^2+1}{x\left(x^2+1\right)}-\frac{x^2}{x\left(x^2+1\right)}$$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+1}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{h(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+1}}$

-គណនា $K=\int_1^2 h(x)dx$

$$K=\int_1^2 h(x)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\times\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}\right)dx=\left[\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\right]_1^2$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5-\left(\ln 1-\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5-0+\frac{1}{2}\ln 2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{5}\right)+\ln 2$$

ដូចនេះ $\boxed{K=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{5}\right)+\ln 2}$

V. **1.** ប៉ារ៉ាបូល (P) មួយមានសមីការ $y^2-4y-8x=4$

ក. សរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល (P) រួចរកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល។

គេបាន (P): $y^2-4y-8x=4$

$\Leftrightarrow \quad y^2-4y+4-4+8x=4$

$\Leftrightarrow \quad y^2-4y+4=8x+8$

$\Leftrightarrow \quad (y-2)^2=8(x+1)$

$\Leftrightarrow \quad (y-2)^2=4\cdot 2(x+1)$ មានរាង $(y-k)^2=4p(x-h)$

នាំឱ្យប៉ារ៉ាបូល (P) មានអ័ក្សឆ្លុះដេក គេបាន

$h=-1,\ k=2\ ;\ 4p=8\Rightarrow p=2$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល (P) គឺ $(y-2)^2=4\cdot 2(x+1)$ ។

-កូអរដោនេកំពូល $V(h,k)\Rightarrow\ V(-1,2)$

- កូអរដោនេកំណុំ $F(h+p,k)\Rightarrow\quad F(1,2)$

- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=h-p\ \Rightarrow x=-3$

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (Δ) ដែលកាត់ប៉ារ៉ាបូល (P) ត្រង់ពីរចំណុច A និង B ដោយដឹងថាចំណុច $M(0,4)$ ជាចំណុចកណ្តាល $[AB]$ ។

តាង $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

ដោយដឹងថាចំណុច $M(0,4)$ ជាចំណុចកណ្តាល $[AB]$

គេបាន $\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B=2x_M=2(0)=0\\ y_A+y_B=2y_M=2(4)=8\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B=0\\ y_A+y_B=8\end{cases}$

ដោយ $A(x_A, y_A)\in(P) \Leftrightarrow \quad y_A^2-4y_A-8x_A=4\ (1)$

$B(x_B, y_B)\in(P) \quad\Leftrightarrow\ y_B^2-4y_B-8x_B=4\ \ (2)$

យក $(1)+(2)$ គេបាន

$$+\begin{cases} y_A^2-4y_A-8x_A=4\\ y_B^2-4y_B-8x_B=4\end{cases}$$

$y_A^2+y_B^2-4y_A-4y_B-8x_A-8x_B=8$

$\Leftrightarrow \quad y_A^2+y_B^2-4(y_A+y_B)-8(x_A+x_B)=8$

$\Leftrightarrow \quad (y_A+y_B)^2-2y_Ay_B-4(8)-8(0)=8$

$\Leftrightarrow \quad 8^2-2y_Ay_B-32=8$

$\Leftrightarrow \quad -2y_Ay_B=-24$

$\Rightarrow \quad y_Ay_B=12$

គេបាន $\begin{cases} y_A+y_B=8\\ y_Ay_B=12\end{cases}$

នាំឱ្យប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $y_A=2$, $y_B=6$

- ចំពោះ $y_A=2 \Leftrightarrow (1)$: $2^2-4(2)-8x_A=4\ \ \Rightarrow x_A=-1$
- ចំពោះ $y_B=6 \Leftrightarrow (1)$: $6^2-4(6)-8x_B=4\ \ \Rightarrow x_B=1$

នាំឱ្យ កូអរដោនេចំណុច $A(-1,2)$ និង $B(1,6)$

គេបានសមីការបន្ទាត់ (Δ) ដែលកាត់ប៉ារ៉ាបូល (P) ត្រង់ពីរចំណុច A និង B គឺ

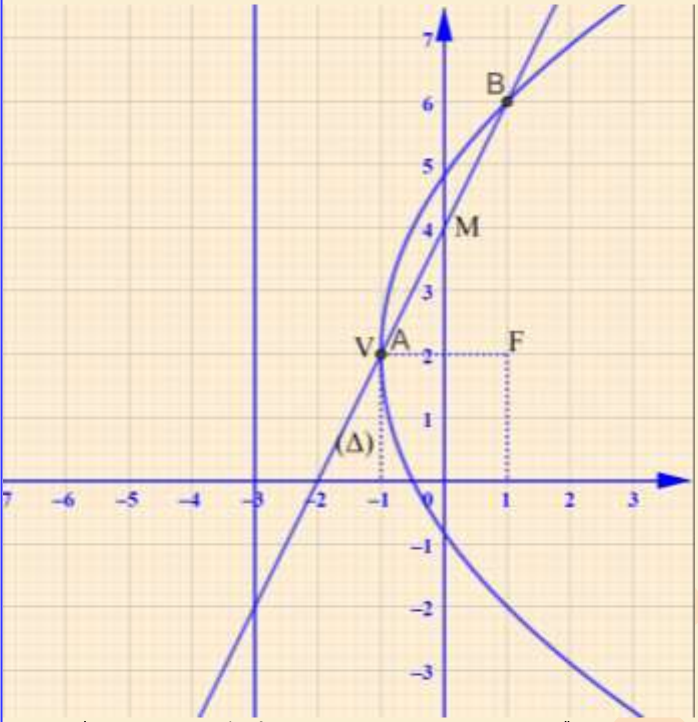
$$(\Delta): \frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \Leftrightarrow \frac{y-2}{x+1} = \frac{6-2}{1+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow\ y-2 = 2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow\ y = 2x+4 \qquad \Leftrightarrow\ x = \frac{1}{2}y-2$$

ដូចនេះ $\boxed{(\Delta):\ y = 2x+4}$

គ.គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់ដែលខណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល (P) និងបន្ទាត់ (Δ)



យើងមានអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (P) និង (Δ) គឺ

$y_A = 2$, $y_B = 6$

គេបាន $S = \int_2^6 \left[\left(\frac{1}{2}y-2\right) - \frac{1}{8}\left[(y^2-2)-8\right]\right]dy$

$$= \int_2^6 \left[\frac{1}{2}y-2-\frac{1}{8}(y^2-4y+4)+1\right]dy$$

$$= \int_2^6 \left(\frac{1}{2}y-2-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}+1\right)dy$$

$$= \int_2^6 \left(-\frac{1}{8}y^2+y-\frac{3}{2}\right)dy$$

$$= \left[-\frac{y^3}{24}+\frac{y^2}{2}-\frac{3}{2}y\right]_2^3$$

$$= -\frac{(6)^3}{24}+\frac{6^2}{2}-\frac{3}{2}\times 6-\left(-\frac{(2)^3}{24}+\frac{2^2}{2}-\frac{3}{2}\times 2\right)$$

$$= -9+18-9+\frac{1}{3}-2+3$$

$$= \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

ដូចនេះ $S = \frac{4}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ

2. យើងមាន $A(1;-2;3)$ និងសមីការឆ្លុះ:

$$(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$$

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (d)

យើងមានសមីការឆ្លុះ $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (2;1;-1)$ និងកាត់តាមចំណុច $M(-1;2;-3)$

ដោយប្លង់ $(P)\perp(d)$ នាំឱ្យវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ $\vec{n} = \vec{u} = (2;1;-1)$

គេបានសមីការប្លង់ (P) គឺ $2x+y-z+d=0$

ដោយ $A(1;-2;3)\in(P) \Leftrightarrow 2(1)+(-2)-3+d=0 \ \Rightarrow d=3$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (P) គឺ $2x+y-z+3=0$ ។

ខ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (d)

រូបមន្ត $d(A,(d)) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$

គេបាន $\overrightarrow{AM} = (-1-1;2+2;-3-3) = (-2;4;-6)$

$$\overrightarrow{AM}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4+6)\vec{i}-(2+12)\vec{j}+(-2-8)\vec{k}$$

$$= 2\vec{i}-14\vec{j}-10\vec{k}$$

នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{AM}\times\vec{u}\right| = \sqrt{2^2+(-14)^2+(-10)^2} = \sqrt{4+196+100} = \sqrt{300}$

ហើយ $|\vec{u}| = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

គេបាន $d(A,(d)) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{300}}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

ដូនេះ $d(A,(d)) = 5\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

- រកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត A និងប៉ះបន្ទាត់ (d) ។

ដោយសមីការស្វ៊ែរមានផ្ចិត A និងប៉ះបន្ទាត់ (d) នោះ

$R = d(A,(d)) = 5\sqrt{2}$

គេបាបសមីការស្តង់ដារគឺ $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2 = R^2$

ដូចនេះ $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = (5\sqrt{2})^2$ ។

VI. យើងមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E_1): $y''+2y'+y = -\frac{e^{-x}}{x^2}$ និង អនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $h(x) = e^{-x}\ln x$ ។

១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា អនុគមន៍ h ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) ។

គេបាន $h'(x) = (e^{-x})'\ln x + e^{-x}(\ln x)' = -e^{-x}\ln x + \frac{e^{-x}}{x}$

$$= e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)$$

$$h''(x) = (e^{-x})'\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)+\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)'(e^{-x})$$

$$= -e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)+\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}$$

$$= e^{-x}\left(-\frac{1}{x}+\ln x-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$= e^{-x}\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x\right)$$

ដោយអនុគមន៍ $h(x)$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) កាលណា

$$h''(x)+2h'(x)+h(x)=-\frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{-x}\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x\right)+2e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)+e^{-x}\ln x=-\frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{-x}\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln x+\frac{2}{x}-2\ln x+\ln x\right)=-\frac{e^{-x}}{x^2}$$

$\Leftrightarrow\quad -\dfrac{e^{-x}}{x^2}=-\dfrac{e^{-x}}{x^2}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះអនុគមន៍ h ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) ។

២. បង្ហាញថា បើ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_1) លុះត្រាតែ $g=(f-h)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_2): $y''+2y'+y=0$ ។

ក. បើ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_1) នោះ $g=(f-h)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_2): $y''+2y'+y=0$

ដោយ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_1) គេបាន

$$f''+2f'+f=-\frac{e^{-x}}{x^2}\quad(1)$$

តែ h ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) គេបាន

$$h''+2h'+h=-\frac{e^{-x}}{x^2}\quad(2)$$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន $f''-h''+2f'-2h'+f-h=0$

$$(f-h)''+2(f-h)'+(f-h)=0$$

នាំឱ្យ $g''+2g'+g=0$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_2) ។

បញ្ជាក់ថា $g=(f-h)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_2): $y''+2y'+y=0$

ខ. បើ $g=(f-h)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_2): $y''+2y'+y=0$ នោះ: f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_1)

ដោយ $g=(f-h)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_2): $y''+2y'+y=0$

គេបាន $(f-h)''+2(f-h)'+(f-h)=0$

$\Leftrightarrow\quad f''-h''+2f'-2h'+f-h=0$

$\Leftrightarrow\quad f''+2f'+f=h''+2h'+h$

តែ $h''+2h'+h=-\dfrac{e^{-x}}{x^2}$

គេបាន $f''+2f'+f=-\dfrac{e^{-x}}{x^2}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_1) ។

បញ្ជាក់ថា f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_1) ។

តាម ក និងខ យើងបាន f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_1) លុះត្រាតែ $g=(f-h)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_2): $y''+2y'+y=0$ ។

VII. យើងអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=x+1+\dfrac{2\ln|x|}{x}$

1. គេឱ្យ g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $g(x)=x^2+2-2\ln|x|$ ។

a. សិក្សាអថេរភាពនៃ g

គេបាន $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{2(x^2-1)}{x}$

ឱ្យ $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2(x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm1$

តារាងសញ្ញានៃ g

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2(x^2-1)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

- ចំពោះ $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$ នោះ $g'(x)>0$ នាំឱ្យ g ជាអនុគមន៍កើន។
- ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ នោះ $g'(x)<0$ នាំឱ្យ g ជាអនុគមន៍ចុះ។
- ចំពោះ $x=-1,\ x=1$ នោះ $g'(x)=0$ នាំឱ្យ g ជាអនុគមន៍ថេរ។
- ចំណុចបរមា
  - $g(-1)=(-1)^2+2-2\ln|-1|=1+2-0=3$
  - $g(1)=1^2+2-2\ln1=1+2-0=3$
- លីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2-2-2\ln|x|\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}x^2\left(1-\frac{2}{x^2}-\frac{2\ln|x|}{x^2}\right)=(\pm\infty)^2(1-0-0)$$

$$=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2-2-2\ln|x|\right)=0-2-2(-\infty)=\boxed{+\infty}$$

- តារាងអថេរភាពនៃ g

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

b. កំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ។

តាមតារាងអថេរភាពយើងទាញបាន $g(x)>0$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}}$

2. បង្ហាញថាចំណុច $I(0,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)

រូបមន្ត $f(2a-x)+f(x)=2b$

ដោយចំណុច $I(0,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) លុះត្រាតែ $f(-x)+f(x)=2$

គេបាន $\forall x,-x\in\mathbb{R}-\{0\}$

$$f(-x)+f(x)=-x+1+\frac{2\ln|-x|}{-x}+x+1+\frac{2\ln|x|}{x}$$

$$=2-\frac{2\ln|x|}{x}+\frac{2\ln|x|}{x}$$

$=2$ ពិត

ដូចនេះ ចំណុច $I(0,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

3. a. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ខាងស្តាំនិងខាងឆ្វេងត្រង់ 0

គេបាន $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x+1+\frac{2\ln|x|}{x}\right)=0+1+\frac{-\infty}{0^+}=\boxed{-\infty}$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\ln|x|}{x}=-\infty$)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+1+\dfrac{2\ln|x|}{x}\right)=0+1+\dfrac{-\infty}{0^-}=\boxed{+\infty}$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\ln|x|}{x}=+\infty$)

b. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ និងត្រង់ $-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+1+\dfrac{2\ln|x|}{x}\right)=+\infty+1+0=\boxed{+\infty}$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\ln|x|}{x}=0$)

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+1+\dfrac{2\ln|x|}{x}\right)=-\infty+1+0=\boxed{-\infty}$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2\ln|x|}{x}=0$)

c. បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=x+1+\dfrac{2\ln|x|}{x}$

$$f'(x)=1+2\frac{(\ln|x|)'x-(x)'\ln|x|}{x^2}=\frac{x^2+2\left(\frac{1}{x}\cdot x-\ln|x|\right)}{x^2}$$

$$=\frac{x^2+2-2\ln|x|}{x^2}$$

$=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ពិត

ដូចនេះ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ។

d. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ដោយ $x^2>0$ និង $g(x)>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$

នាំឱ្យ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		0 ‖		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4. a. បង្ហាញបន្ទាត់ $D: y=x+1$ ជាសមីការអាសុីមតូតទ្រេតនៃក្រាបខាង $\pm\infty$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$

$\Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[x+1+\dfrac{2\ln|x|}{x}-(x+1)\right]=0$

$\Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{2\ln|x|}{x}\right]=0$

$\Leftrightarrow\ \ 0=0$ ពិត

ដូចនេះ បន្ទាត់ $D: y=x+1$ ជាសមីការអាសុីមតូតទ្រេតនៃក្រាបខាង $\pm\infty$ ។

b. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ D

គេបានសមីការអាប់សុីស $x+1+\dfrac{2\ln|x|}{x}=x+1$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{2\ln|x|}{x}=0 \qquad \Leftrightarrow\ \ln|x|=0$

$\Leftrightarrow\ |x|=1 \qquad \Rightarrow\ x=\pm 1$

- ចំពោះ $x=1$ នោះ $y=1+1=2$ ។
- ចំពោះ $x=-1$ នោះ $y=-1+1=0$ ។

ដូចនេះកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ D គឺ $(1,2)$ និង $(-1,0)$ ។

c. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ D

គេបាន $(C)-D=\dfrac{2\ln|x|}{x}$

- បើ $2\ln|x|=0 \ \Leftrightarrow\ \ln|x|=0 \ \Leftrightarrow\ |x|=1 \ \Rightarrow\ x=\pm 1$
- បើ $2\ln|x|>0 \ \Leftrightarrow\ |x|>1 \ \Rightarrow\ x<-1 \vee x>1$
- បើ $2\ln|x|<0 \ \Leftrightarrow\ |x|<1 \ \Rightarrow\ -1<x<1$

តារាងសញ្ញានៃ $(C)-D$

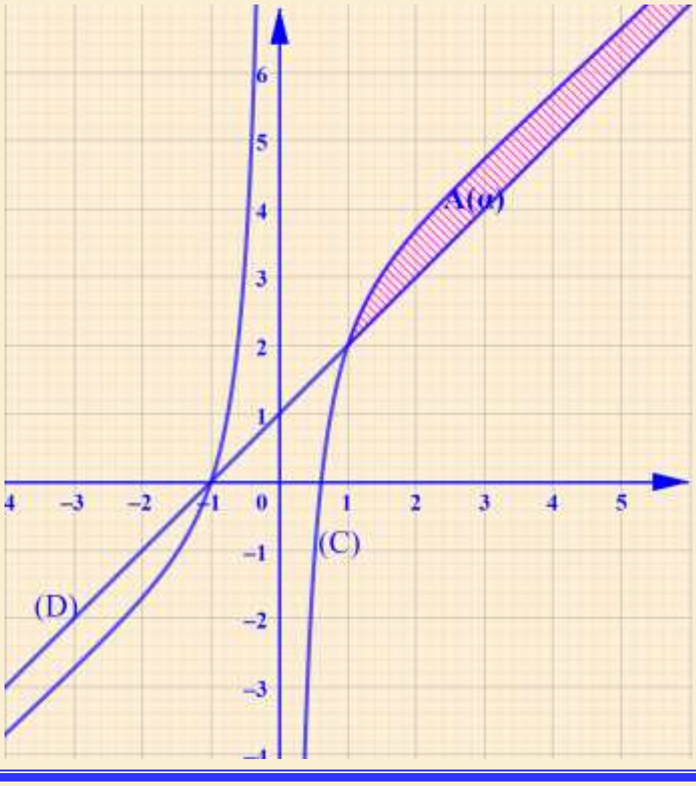
x	$-\infty$		-1		0 ‖		1		$+\infty$
$2\ln\|x\|$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$(C)-D$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

- បើ $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ នោះ $(C)-D<0 \ \Leftrightarrow\ (C)<D$ នាំឱ្យក្រាប (C) នៅក្រោមបន្ទាត់ D ។
- បើ $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$ នោះ $(C)-D>0 \ \Leftrightarrow\ (C)>D$ នាំឱ្យក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ D ។
- បើ $x=-1$; $x=1$ នោះ $(C)-D=0$ នាំឱ្យក្រាប (C) ប្រសព្វជាមួយបន្ទាត់ D ត្រង់ចំណុច $(-1,0)$ និង $(1,2)$ ។

d. សង់បន្ទាត់ D និងក្រាប (C)

តារាងតម្លៃលេខ

x	0	-1
y	1	0



5. a. គណនាផ្ទៃក្រឡា $\mathrm{A}(\alpha)$ ដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) , បន្ទាត់ D និង សមីការបន្ទាត់ $x=1$ និង $x=\alpha$

គេបាន $\mathrm{A}(\alpha)=\int_1^{\alpha}\left[f(x)-(x-1)\right]dx$

$\Leftrightarrow\quad \mathrm{A}(\alpha)=\int_1^{\alpha}\frac{2\ln|x|}{x}dx$

$\Leftrightarrow\quad \mathrm{A}(\alpha)=\int_1^{\alpha}\frac{2\ln x}{x}dx$ (ព្រោះ $x>0\Rightarrow|x|=x$)

$\Leftrightarrow\quad \mathrm{A}(\alpha)=\left[\ln^2 x\right]_1^{\alpha}=\ln^2\alpha-\ln^2 1=\ln^2\alpha$

ដូចនេះ $\boxed{\mathrm{A}(\alpha)=\ln^2\alpha}$

b. កំណត់តម្លៃ α ដោយដឹងថា $\mathrm{A}(\alpha)=16$

យើងមាន $\mathrm{A}(\alpha)=\ln^2\alpha$

$\Leftrightarrow\quad \ln^2\alpha=16 \quad\Leftrightarrow\quad \ln\alpha=\pm4$

ដោយ $\alpha>1$ នោះ $\ln\alpha=4$

នាំឱ្យ $\alpha=e^4$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha=e^4}$

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: -------------------- លេខ----------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជនៈ--

ហត្ថលេខាបេក្ខជនៈ ---

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតៈ

ក. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3}+x\right)$ 	ខ. $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sin^2 x}$ 	គ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan^4 x-1}{\sin x-\cos x}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 9 គ្រាប់ដែលក្នុងមាន ប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 5 គ្រាប់ដែលចុះលេខ 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 4 គ្រាប់ដែលចុះលេខ 1 ; 2 ; 2; 2 ។

គេចាប់យកប៊ូល 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលៈ

A. " ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា" 	B. " ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានលេខដូចគ្នា"

C. " ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នានិងមានលេខដូចគ្នា"

III. (១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i\sqrt{3}$; $z_2=1+i$ និង $t=\dfrac{z_1}{z_2}$ ។

1. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ 	**2.** គណនា ម៉ូឌុល $|t|$ និងអាគុយម៉ង់ $\arg(t)$ ។ រួចសរសេរ t ជាទម្រង់ពិជគណិត។

3. ចូរកំណត់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ និង $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលៈ $I=\int_0^{\ln 2}\dfrac{e^{2x}}{\left(e^{2x}+3\right)}dx$; $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 4x}{\sin x}dx$ និង $K=\int_1^2\left(x-1+\dfrac{2x}{x^2+1}\right)dx$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ) 1. អេលីប (E) មួយមានកូអរដោនេកំណុំ $F_1(-4,0)$ និង $F_2(4,0)$ ហើយ (E) កាត់តាមចំណុច $P(0,3)$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដានៃអេលីប (E) រួចសង់ (E) ។

ខ. គេឱ្យ M ជាចំណុចមួយនៅលើ (E) ។ គណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ MF_1F_2 ។

2. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គេឱ្យចំណុច $A(1;0;2)$, $B(-2;1;-1)$, $C(0;0;1)$, $I(1;-1;-1)$ និង $J\left(-\dfrac{1}{2};-1;\dfrac{1}{2}\right)$ ។

១.ក. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ សំគាល់ (P) ជាប្លង់ (ABC)

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(-1;0;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។ 	គ. ចូរបង្ហាញថាប្លង់ (P) មានសមីការ $x-z+1=0$ ។

២.ក. គេឱ្យបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច I និងកែងប្លង់ (P) ។ ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (Δ) ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) កាត់ប្លង់ (P) ត្រង់ J ។

VI. (១០ពិន្ទុ) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''-4y'+4y=0$ ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $h(x)=(2-x)e^{2x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) A. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=e^x(2x+1)-1$ ។

1. គណនា $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ ។

2. a. គណនា $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។ 	**b.** គណនា $g(0)$ រួចកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

B. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x\left(e^x-1\right)^2$ មានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. គណនា $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ រួចកំណត់មែកអនន្តនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។

2. គណនា $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ ។ រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។

3. a. បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\left(e^x-1\right)g(x)$ ។ 	**b.** បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើន រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. សង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

5. a. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរបង្ហាញថា $\int_0^1 x\left(e^{2x}-2e^x\right)dx=\dfrac{e^2-7}{4}$ ។

b. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និង សមីការបន្ទាត់ $x=0$ និង $x=1$ ។(គេឱ្យ $e^{-\frac{3}{2}}\simeq0.22$)

អត្រាកំណែ

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3}+x\right)$ រាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+3}+x\right)\left(\sqrt{9x^2+3}-x\right)}{\sqrt{9x^2+3}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2+3-x^2}{\sqrt{9x^2+3}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^2+3}{|x|\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(8+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(-\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(8+\frac{3}{x^2}\right)}{-\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}-1}$$

$$=\frac{(-\infty)(8+0)}{-3-1}=\frac{(-\infty)(8)}{-4}=\boxed{+\infty}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3}+x\right)=+\infty}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sin^2 x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}\right)}{\sin^2 x\left(\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x-2}{\sin^2 x\left(\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{-(1-\cos x)}{\sin^2 x\left(\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x\left(\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\times\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\left(1\times\frac{1}{2}\right)^2\times1^2\times\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{4}\times\frac{-1}{\sqrt{2}}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{8}}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sin^2 x}=-\frac{\sqrt{2}}{8}}$

គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^4 x-1}{\sin x-\cos x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^4 x-1}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\tan^2 x-1\right)\left(\tan^2 x+1\right)}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1\right)\left(\tan^2 x+1\right)}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\left(\tan^2 x+1\right)}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\sin x-\cos x}\times\frac{\left(\tan^2 x+1\right)}{\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)\left(\tan^2 x+1\right)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\tan^2\frac{\pi}{4}+1\right)}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1^2+1\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^4 x-1}{\sin x-\cos x}=4\sqrt{2}}$

II. យើងមានថង់មួយមានប៊ូលក្រហម៥គឺ $(R_1R_1R_2R_2R_2)$ និង ប៊ូលខ្មៅ ៤គឺ $(B_1B_2B_2B_2)$ គេចាប់យកប៊ូល 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(9,3)=\frac{9!}{6!3!}=84$ ករណី

គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A. " ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា"

នោះចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ

$n(A)=C(5,3)+C(4,3)=10+4=14$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{1}{6}}$

B. " ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានលេខដូចគ្នា"

បើ ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានលេខដូចគ្នាគឺ (111) ឬ (222)

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ

$n(B)=C(3,3)+C(6,3)=1+20=21$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{21}{84}=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{1}{4}}$

C. " ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នានិងមានលេខដូចគ្នា"

បើ ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នានិងមានលេខដូចគ្នាគឺ $(R_2R_2R_2)$ ឬ $(B_2B_2B_2)$

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ

$n(C)=C(3,3)+C(3,3)=1+1=2$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C គឺ $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{2}{84}=\frac{1}{42}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{1}{42}}$

III. យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i\sqrt{3}$; $z_2=1+i$ និង $t=\frac{z_1}{z_2}$ ។

1. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេបាន $z_1=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\ ,\ z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

2. គណនា ម៉ូឌុល $|t|$ និងអាគុយម៉ង់ $\arg(t)$ ។

$$t=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុល $|t|=\sqrt{2}$ និង

អាគុយម៉ង់ $\arg(t)=\frac{\pi}{12}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

- សរសេរ t ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$t=\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{1^2+1^2}$$

$$=\frac{1-i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{t=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}i}$

3. ចូរកំណត់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ និង $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ។

គេបាន $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ ;\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\mathrm{I}=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{(e^{2x}+3)}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}\times\frac{(e^{2x}+3)'}{(e^{2x}+3)}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left|e^{2x}+3\right|\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|e^{\ln 2^2}+3\right|-\frac{1}{2}\ln 4=\frac{1}{2}(\ln 7-\ln 4)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathrm{I}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{4}\right)}$

$$\mathrm{J}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\sin x}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\sin x}dx$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x\cos 2x)dx$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left[\cos(2x+x)+\cos(2x-x)\right]dx$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x+\cos x)dx=2\left[\frac{\sin 3x}{3}+\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\left(\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3}+\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\sin\frac{3\pi}{6}}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\left(\frac{-1}{3}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathrm{J}=-\frac{1}{3}}$

$$\mathrm{K}=\int_1^2\left(x-1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln\left|x^2+1\right|\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{2^2}{2}-2+\ln 5\right)-\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2\right)$$

$$=\ln 5+\frac{1}{2}-\ln 2=\frac{1}{2}+\ln\frac{5}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathrm{K}=\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$

V. យើងមានអេលីប (E) មួយមានកូអរដោនេកំណុំ $\mathrm{F}_1(-2,0)$ និង $\mathrm{F}_2(4,0)$ ហើយ (E) កាត់តាមចំណុច $\mathrm{P}(0,3)$ ។

ក. សរសេរសមីការស្តង់ដានៃអេលីប (E)

ដោយអេលីប (E) មានអរដោនេកំណុំដូចគ្នា នោះអ័ក្សធំជាអ័ក្ស $(x'ox)$ គេបានសមីការស្តង់ដារគឺ $(\mathrm{E}):\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

- កូអរដោនេកំណុំ $\mathrm{F}_1(h-c,k)=\mathrm{F}_1(-4,0)$

នាំឱ្យ $h-c=-4\ (1)\ ;\ k=0$

- កូអរដោនេកំណុំ $\mathrm{F}_2(h+c,k)=\mathrm{F}_2(4,0)$ នាំឱ្យ $h+c=4\ (2)$

យក $(1)+(2)$ គេបាន $2h=0\Rightarrow h=0$

តាម (2) គេបាន $0+c=4\ \Rightarrow c=4$

យើងបាន $(\mathrm{E}):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ដោយ $\mathrm{P}(0,3)\in(\mathrm{E})\ \Leftrightarrow\ \frac{x_{\mathrm{P}}^2}{a^2}+\frac{y_{\mathrm{P}}^2}{b^2}=1$

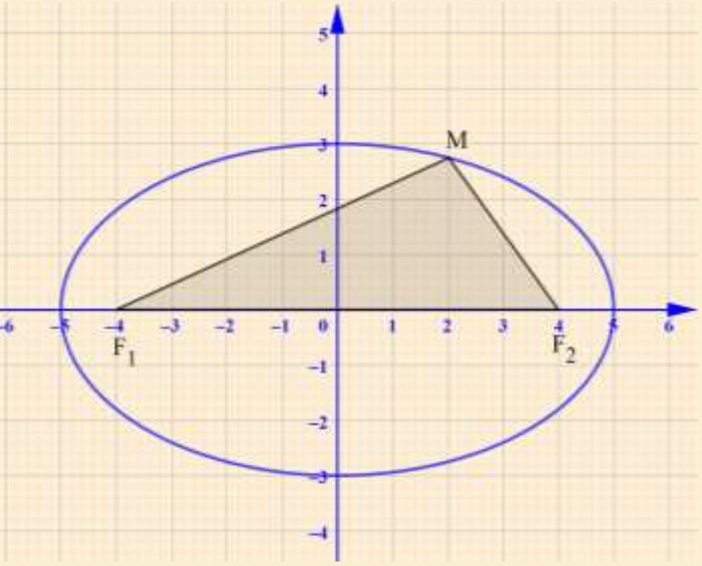
$\Leftrightarrow\ \frac{0}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1\ \Leftrightarrow\ b^2=3^2$

$\Rightarrow\ b=3$

គេបាន $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

ដូចនេះ $\boxed{(\mathrm{E}):\ \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1}$

-សង់ (E)



ខ. គណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ MF_1F_2

ដោយ M ជាចំណុចមួយនៅលើ (E)

នោះ $MF_1 + MF_2 = 2a = 2\times 5 = 10$

ហើយ $F_1F_2 = 2c = 2\times 4 = 8$

នាំឱ្យ $P = MF_1 + MF_2 + F_1F_2 = 10 + 8 = 18$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ បរិមាត្រត្រីកោណ MF_1F_2 គឺ $P = 18$ ឯកតាប្រវែង

2. ចំណុច $A(1;0;2)$, $B(-2;1;-1)$, $C(0;0;1)$, $I(1;-1;-1)$ និង $J\left(-\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ ។

១.ក. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

គេបាន $\overrightarrow{AB} = (-2-1;1-0;-1-2) = (-3;1;-3)$

$\overrightarrow{AC} = (0-1;0-0;1-2) = (-1;0;-1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1-0)\vec{i} - (3-3)\vec{j} + (0+1)\vec{k}$$

$$= -\vec{i} + \vec{k}$$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} \neq 0$ នោះចំណុច A, B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដូចនេះ ចំណុច A, B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (-1;0;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

របៀបទី១៖

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ នោះ វ៉ិចទ័រ $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)$ និង វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ កូលីនេអ៊ែគ្នា នាំឱ្យ $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (-1;0;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។

របៀបទី២៖

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = (-3)(-1)+(1)(0)+(-3)(1) = 0 \\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{u} = (-1)(-1)+(0)(0)+(-1)(1) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\perp\vec{u} \\ \overrightarrow{AC}\perp\vec{u} \end{array}\right.$$

នាំឱ្យ $\vec{u}\perp(P)$

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (-1;0;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។

គ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) មានសមីការ $x - z + 1 = 0$

ដោយ $\vec{u} = (-1;0;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

គេបាន $(P): -x + z + d = 0$

តែ $A(1;0;2)\in(P) \Leftrightarrow -1 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -1$

គេបាន $(P): -x + z - 1 = 0$ ឬ $(P): x - z + 1 = 0$

២.ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (Δ)

ដោយបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច $I(1;-1;-1)$ និងកែងប្លង់ (P) នោះ $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រ ប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (Δ)

$$\text{គេបាន}\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt\ ;\ t\in\mathbb{R} \\ z = z_o + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 \quad ;\ t\in\mathbb{R} \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ}\ (\Delta): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 \quad ;\ t\in\mathbb{R} \\ z = -1 + t \end{cases}$$

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) កាត់ប្លង់ (P) ត្រង់ J ។

តាង $J(x_j; y_j; z_j) = (\Delta)\cap(P)$

$$\text{គេបាន}\ J(x_j; y_j; z_j)\in(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_j = 1 - t \\ y_j = -1 \\ z_j = -1 + t \end{cases}$$

និង $J(x_j; y_j; z_j)\in(P) \Leftrightarrow x_j - z_j + 1 = 0\ (*)$

យក $x_j = 1 - t\ ;\ z_j = -1 + t$ ជំនួសក្នុង $(*)$

គេបាន $1 - t - (-1 + t) + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

$$\text{នោះ}\begin{cases} x_j = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_j = -1 \\ z_j = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow J\left(-\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right)\ \text{ពិត}$$

ដូចនេះ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) កាត់ប្លង់ (P) ត្រង់ J ។

VI. **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 4y' + 4y = 0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\Delta' = (-2)^2 - 4 = 0$

សមីការមានឫសឌុបគឺ $\lambda_o = 2$

គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = (Ax + B)e^{\lambda_o x}\ ;\ (A, B\in\mathbb{R})$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = (Ax + B)e^{2x}\ ;(A, B\in\mathbb{R})$

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $h(x) = (2 - x)e^{2x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។

$$h'(x) = (2-x)'e^{2x} + \left(e^{2x}\right)'(2-x) = -e^{2x} + 2e^{2x}(2-x)$$

$$= e^{2x}(-1 + 4 - 2x) = e^{2x}(3 - 2x)$$

$$h''(x) = 2e^{2x}(3 - 2x) - 2e^{2x} = e^{2x}(6 - 4x - 2) = e^{2x}(4 - 4x)$$

ដោយ $h(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $h''(x) - 4h'(x) + 4h(x) = 0$

$$\Leftrightarrow\ e^{2x}(4 - 4x) - 4e^{2x}(3 - 2x) + 4(2 - x)e^{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ e^{2x}(4 - 4x - 12 + 8x + 8 - 4x) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad e^{2x}(0)=0$

$\Leftrightarrow \quad 0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ អនុគមន៍ $h(x)=(2-x)e^{2x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

VII. A. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=e^{x}(2x+1)-1$

1. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{x}(2x+1)-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{e^{-x}}+\frac{1}{e^{-x}}-1\right)$$

$$=-1 \text{ (ព្រោះ } \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}}=0\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0\text{)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{x}(2x+1)-1\right]=(+\infty)(+\infty)=\boxed{+\infty}$$

2. a. គណនា $g'(x)$

យើងមាន $g(x)=e^{x}(2x+1)-1$

$g'(x)=e^{x}(2x+1)+2e^{x}=(2x+3)e^{x}$

ដូចនេះ $g'(x)=(2x+3)e^{x}$

- សង់តារាងអថេរភាពនៃ g

ដោយ $e^{x}>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច $2x+3$

ឱ្យ $2x+3=0 \Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$

- $g\left(-\dfrac{3}{2}\right)=e^{-\frac{3}{2}}\left[2\left(-\dfrac{3}{2}\right)+1\right]-1=(0.22)(-2)-1=\boxed{-1.44}$

តារាងអថេរភាពនៃ g

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	-1.44	$\nearrow$	$+\infty$

b. គណនា $g(0)$

គេបាន $g(0)=e^{0}(0+1)-1=\boxed{0}$

-កំណត់សញ្ញានៃ $g(x)\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$

តាមតារាងអថេរភាពនៃ g និង $g(0)=0$ គេទាញបានសញ្ញា g ដូចតទៅ

- ចំពោះគ្រប់ $x\in(-\infty;0]$ នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ g នៅក្រោមអ័ក្សអាប់ស៊ីស នាំឱ្យ $g(x)\le 0\ ;\ \forall x\in(-\infty;0]$
- ចំពោះគ្រប់ $x\in[0;+\infty)$ នោះ ក្រាបនៃអនុគមន៍ g នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស នាំឱ្យ $g(x)\ge 0\ ;\ \forall x\in[0;+\infty)$

ដូចនេះ $g(x)\le 0\ ;\ \forall x\in(-\infty;0]$ និង $g(x)\ge 0\ ;\ \forall x\in[0;+\infty)$ ។

B. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x\left(e^{x}-1\right)^{2}$

1. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{x}-1\right)^{2}=(+\infty)(+\infty)=\boxed{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(e^{x}-1\right)^{2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x}-1\right)^{2}=\boxed{+\infty}$$

- កំណត់មែកអនន្តនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

ដូចនេះ ក្រាប (C) មានមែកអនន្តកាលណា x ខិតជិត $+\infty$ ។

2. -គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{x}-1\right)^{2}=(-\infty)(0-1)^{2}=\boxed{-\infty}$$

-បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ លុះត្រាតែ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=0$

$\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(e^{x}-1\right)^{2}-x\right]=0$

$\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(e^{2x}-2e^{x}+1\right)-x\right]=0$

$\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{2x}-2xe^{x}+x-x\right)=0$

$\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^{-2x}}-\dfrac{2x}{e^{-x}}\right)=0$

$\Rightarrow \quad 0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ បង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។

3. a. បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\left(e^{x}-1\right)g(x)$ ។

យើងមាន $f(x)=x\left(e^{x}-1\right)^{2}$

$f'(x)=\left(e^{x}-1\right)^{2}+2\left(e^{x}-1\right)'\left(e^{x}-1\right)x=\left(e^{x}-1\right)^{2}+2xe^{x}\left(e^{x}-1\right)$

$=\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}-1+2xe^{x}\right) \qquad =\left(e^{x}-1\right)\left[e^{x}(2x+1)-1\right]$

$=\left(e^{x}-1\right)g(x)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\left(e^{x}-1\right)g(x)}$

b. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើន

យើងមាន $f'(x)=\left(e^{x}-1\right)g(x)$

គេបាន យកសញ្ញាតាម $e^{x}-1$ និង $g(x)$

- បើ $e^{x}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}=e^{0} \quad\Rightarrow\quad x=0$
- បើ $e^{x}-1>0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}>e^{0} \quad\Rightarrow\quad x>0$
- បើ $e^{x}-1<0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}<e^{0} \quad\Rightarrow\quad x<0$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{x}-1$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាដេរីវេ គេទាញបាន $f'(x)\ge 0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $\mathbb{R}$ ។

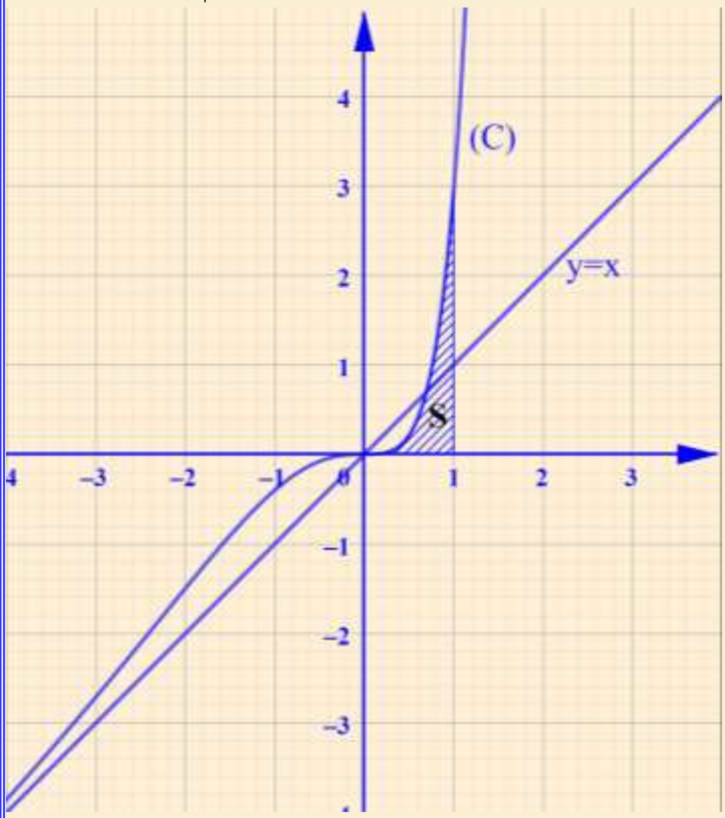
-សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. សង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$

$y = x$;

x	0	1
y	0	1



5. **a.** បង្ហាញថា $\int_0^1 x\left(e^{2x}-2e^x\right)dx = \dfrac{e^2-7}{4}$ ។

តាង $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \left(e^{2x}-2e^x\right)dx \Leftrightarrow \int dv = \int\left(e^{2x}-2e^x\right)dx$

$\Rightarrow v = \dfrac{e^{2x}}{2} - 2e^x$

$$\int_0^1 x\left(e^{2x}-2e^x\right)dx = \left[x\left(\frac{e^{2x}}{2}-2e^x\right)\right]_0^1 - \int_0^1\left(\frac{e^{2x}}{2}-2e^x\right)dx$$

$$= \left[x\left(\frac{e^{2x}}{2}-2e^x\right) - \frac{e^{2x}}{4} + 2e^x\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - 2e - \frac{e^2}{4} + 2e\right) - \left(0 - \frac{1}{4} + 2\right)$$

$$= \frac{e^2}{4} - \frac{7}{4} = \frac{e^2-7}{4}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\int_0^1 x\left(e^{2x}-2e^x\right)dx = \dfrac{e^2-7}{4}}$

b. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និង សមីការបន្ទាត់ $x = 0$ និង $x = 1$

គេបាន $S = \int_0^1 x\left(e^x - 1\right)^2 dx$

$S = \int_0^1 x\left(e^{2x} - 2e^x + 1\right)dx$

$= \int_0^1 x\left(e^{2x}-2e^x\right)dx + \int_0^1 x dx$

$= \dfrac{e^2-7}{4} + \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= \dfrac{e^2-7}{4} + \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{e^2-7+2}{4}$

$= \dfrac{e^2-5}{4}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $S = \dfrac{e^2-5}{4}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: -------------------- លេខ------------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន: --

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

ប្រធាន

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-x\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2\pi x}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ស 6 គ្រាប់ដែលចុះលេខ -1 ; -1 ; 0 ; 1; 1 ;1 និងឃ្លីពណ៌ខ្មៅចំនួន 4 គ្រាប់ដែលចុះលេខ -1 ; 0 ; 1; 1។ គេចាប់យកឃ្លី 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។

ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A "ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា"។ ខ.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B " ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានលេខដូចគ្នា"

គ. បង្ហាញថា $P(A\cup B)=\dfrac{17}{60}$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=2+3i$; $b=4+5i$; $c=6+3i$ និង $d=4+i$ ។

1. ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$។ 2. បង្ហាញថា $(a-c)^2=2(a-d)(a-b)$។

3. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $\dfrac{a-d}{a-c}$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) 1. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^1\left(\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x}{3}+1\right)dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3 x\,dx$ ។

2.គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=\dfrac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}$ ។ បង្ហាញថា $g(x)=e^x+1+\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ។ គណនា $K=\int_0^{\ln 2}g(x)\,dx$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ) 1. អ៊ីពែបូលមួយមានកំពូល $V_1(3\,,0)$ និង $V_2(-3\,,0)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $P(5\,,2)$។

ក. រកសមីការស្តង់ដារ និងកូអរដោនេកំណុំ រួចរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល ខ. សង់អ៊ីពែបូលនេះ។

2. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$។ គេឱ្យចំណុច $A(1;-1;2)$, $B(2;-1;1)$, $C(-2;0;4)$ និង $D(0;-2;1)$ ។

១. ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{DA}$ ។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$ ។

ខ.បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។ រួចកំណត់សមីការបន្ទាត់ (DA)។

២.ក. បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ស្មើនឹង $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ។ ខ. គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត DABC ។

VI. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'+y=xe^{-x}$ ។

ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ g ដែល $g(x)=\dfrac{x^2}{2}\cdot e^{-x}$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $(f-g)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_0): $y'+y=0$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(2\,,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{1}{2}x-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)$ មានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

1. **a.**គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា x ខិតជិត 2 ។ **b.**ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $x\in(2\,,+\infty)$; $f(x)=\dfrac{1}{2}x-5+3\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$។

c. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ ។

2. **a.**បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y=\dfrac{1}{2}x-5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។ **b.** សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងនៃ (C) នឹង Δ ។

3. **a.** គណនា $f'(x)$ និងបង្ហាញថា គ្រប់ x លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$; $f'(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}$ ។

b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. សង់បន្ទាត់ Δ និង ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។ ដោយក្រាប (C) កាត់អ័ក្ស $(x'ox)$ ត្រង់ចំណុច $(2.4;0)$ និង $(9.2;\,0)$ ។

5. គេមានអនុគមន៍ h និង H កំណត់លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$ ដែល $h(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ និង $H(x)=(x-1)\ln(x-1)-(x-2)\ln(x-2)$ ។

a. បង្ហាញថាអនុគមន៍ H ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ h លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$ ។ **b.**ចូរកំណត់ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$ ។

6. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (C) ;អ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់ឈរ $x=3$ និង $x=9$ ។គេឱ្យ $\ln 3\simeq 1.1$; $\ln 2\simeq 0.7$; $\ln 7\simeq 1.9$

អត្រាកំណែ

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-1)(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-1)(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{1}{(4-1)(2+2)}=\frac{1}{12}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\dfrac{1}{12}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-x\right)$ រាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-x\right)\left(\sqrt{2x^2+3x+1}+x\right)}{\sqrt{2x^2+3x+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+1-x^2}{\sqrt{2x^2+3x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{|x|\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{(+\infty)(1+0+0)}{\sqrt{2+0+0}+1}=+\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-x\right)=+\infty}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2\pi x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2\pi x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\pi x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\times\frac{x^2}{\sin^2\pi x}\times2\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\pi x}{\sin\pi x}\times\frac{1}{\pi}\right)^2\times2\right]$$

$$=\left(1\times\frac{1}{2}\right)^2\left(1\times\frac{1}{\pi}\right)^2\times2=\frac{1}{2\pi^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2\pi x}=\dfrac{1}{2\pi^2}}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos2x}{\cos x-\sin x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos2x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos2x}{\cos x-\sin x}=\sqrt{2}}$

II. យើងមានថង់មានឃ្លីពណ៌ស 6 ចុះលេខ -1 ; -1 ; 0 ; 1; 1 ;1 និងឃ្លីពណ៌ខ្មៅចំនួន 4 ចុះលេខ -1 ; 0 ; 1; 1 គេចាប់យកប៊ូល 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10,3)=\dfrac{10!}{7!3!}=120$ ករណី

ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A "ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា" នោះចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ

$n(A)=C(6,3)+C(4,3)=20+4=24$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A គឺ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{24}{120}=\dfrac{1}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{5}}$

ខ.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B " ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានលេខដូចគ្នា"

គេបាន ចំនួនករណីស្របនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ

$n(B)=C(3,3)+C(5,3)=1+10=11$ ករណី

នាំឱ្យ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B គឺ $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{11}{120}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{11}{120}}$

គ. បង្ហាញថា $P(A\cup B)=\dfrac{17}{60}$

គេបាន $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

តែ $A\cap B=\{$ ស1ស1ស1 $\}$

នាំឱ្យ $n(A\cap B)=1$ នោះ $P(A\cap B)=\dfrac{1}{120}$

គេបាន $P(A\cup B)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{11}{120}-\dfrac{1}{120}=\dfrac{24+10}{120}=\dfrac{34}{120}=\dfrac{17}{60}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{P(A\cup B)=\dfrac{17}{60}}$

III. យើងមានចំនួនកុំផ្លិច $a=2+3i$; $b=4+5i$; $c=6+3i$ និង $d=4+i$ ។

1. ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

គេបាន $\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{2+3i-(4+5i)}{2+3i-(6+3i)}=\dfrac{2+3i-4-5i}{2+3i-6-3i}=\dfrac{-2-2i}{-4}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$

2. បង្ហាញថា $(a-c)^2=2(a-d)(a-b)$

$(a-c)^2=(2+3i-6-3i)^2=(-4)^2=16 \quad (1)$

$$\begin{aligned}2(a-d)(a-b)&=2(2+3i-4-i)(2+3i-4-5i)\\&=2(-2+2i)(-2-2i)\\&=2\left[(-2)^2-(2i)^2\right]\\&=2(4+4)\\&=16 \qquad (2)\end{aligned}$$

តាម (1) និង (2) គេបាន $(a-c)^2=2(a-d)(a-b)$

ដូចនេះ $\boxed{(a-c)^2=2(a-d)(a-b)}$

3. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $\dfrac{a-d}{a-c}$

$$\begin{aligned}\frac{a-d}{a-c}&=\frac{2+3i-4-i}{-4}=\frac{-2+2i}{-4}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{a-d}{a-c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$\mathrm{I}=\int_0^1\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+1\right)dx=\left[\frac{x^3}{18}-\frac{x^2}{6}+x\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{6}+1\right)-0=\frac{1-3+18}{18}=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathrm{I}=\dfrac{8}{9}}$

$$\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx$$

តាង $t=\cos x \Leftrightarrow dt=-\sin x dx$

$$\mathrm{J}=-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-t^2\right)dt=-\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=-\left[\cos x-\frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=-\left[\cos\frac{\pi}{6}-\frac{\cos^3\frac{\pi}{6}}{3}-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathrm{J}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$

របៀបទី២

$$\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[-3\cos x+\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{4}\left[-3\cos\frac{\pi}{6}+\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{3}-\left(-3\cos 0+\frac{\cos 0}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+0+3-\frac{1}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{8}{12}$$

$$=\boxed{\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}}$$

2. បង្ហាញថា $g(x)=e^x+1+\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ។

យើងមាន $g(x)=\dfrac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}$

$$g(x)=\frac{e^{2x}+2e^x+1+e^x}{e^x+1}=\frac{\left(e^x+1\right)^2}{e^x+1}+\frac{e^x}{e^x+1}$$

$=e^x+1+\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=e^x+1+\dfrac{e^x}{e^x+1}}$

$$\mathrm{K}=\int_0^{\ln 2}g(x)dx=\int_0^{\ln 2}\left(e^x+1+\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$

$$\begin{aligned}&=\left[e^x+x+\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^{\ln 2}\\&=\left(e^{\ln 2}+\ln 2+\ln\left|e^{\ln 2}+1\right|\right)-\left(e^0+0+\ln\left|e^0+1\right|\right)\\&=2+\ln 2+\ln 3-1-\ln 2\\&=1+\ln 3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mathrm{K}=1+\ln 3}$

V. យើងមានអ៊ីពែបូលមួយមានកំពូល $\mathrm{V}_1(3,0)$ និង $\mathrm{V}_2(-3,0)$

ក. រកសមីការស្តង់ដារ និងកូអរដោនេកំណុំ រួចរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល

ដោយអ៊ីពែបូលមានអរដោនេកំពូលទាំងពីរដូចគ្នា នោះអ័ក្សទទឹង ស្របអ័ក្ស $(x'ox)$ គេបានសមីការស្តង់ដារគឺ

$$(\mathrm{H}):\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

- កូអរដោនេកំពូល $\mathrm{V}_1(h-a,k)=\mathrm{V}_1(-3,0)$

នាំឱ្យ $h-a=-3 \quad (1)\,;\quad k=0$

- កូអរដោនេកំណុំ $\mathrm{V}_2(h+a,k)=\mathrm{V}_2(3,0)$ នាំឱ្យ $h+a=3 \quad (2)$

យក $(1)+(2)$ គេបាន $2h=0\Rightarrow h=0$

តាម (2) គេបាន $0+a=3 \Rightarrow a=3$

យើងបាន $(\mathrm{H}):\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

ដោយ $\mathrm{P}(5,2)\in(\mathrm{H}) \Leftrightarrow \dfrac{x_{\mathrm{P}}^2}{3^2}-\dfrac{y_{\mathrm{P}}^2}{b^2}=1$

$\Leftrightarrow \frac{5^2}{3^2}-\frac{2^2}{b^2}=1 \quad \Leftrightarrow \frac{4}{b^2}=\frac{25}{9}-1=\frac{16}{9}$

$\Leftrightarrow b^2=\frac{9}{4} \qquad \Rightarrow b=\frac{3}{2}$

គេបាន $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{45}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

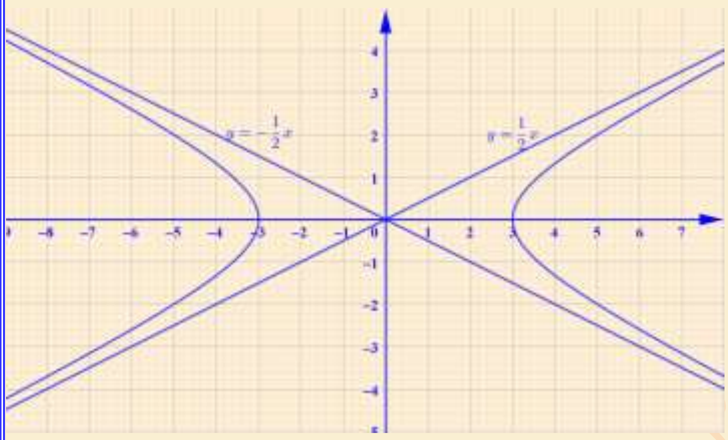
ដូចនេះ៖

- សមីការស្តង់ដារ $(\mathrm{H}): \frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$

- កូអរដោនេកំណុំ $F(\pm c, 0) \Rightarrow F\left(\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

- សមីការអាស៊ីមតូតគឺ $y=\pm\frac{b}{a}x \quad \Rightarrow \quad y=\pm\frac{1}{2}x$

ខ. សង់អ៊ីពែបូលនេះ៖



2. យើងមានចំណុច $\mathrm{A}(1;-1;2)$, $\mathrm{B}(2;-1;1)$, $\mathrm{C}(-2;0;4)$ និង $\mathrm{D}(0;-2;1)$

១.ក.រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{AB}=(2-1;-1+1;1-2)=(1;0;-1)$

$\overrightarrow{AC}=(-2-1;0+1;4-2)=(-3;1;2)$

$\overrightarrow{BC}=(-2-2;0+1;4-1)=(-4;1;3)$

$\overrightarrow{DA}=(1-0;-1+2;2-1)=(1;1;1)$

-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=(0+1)\vec{i}-(2-3)\vec{j}+(1-0)\vec{k}$$

$=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=\overrightarrow{DA}$ ពិត

ដូចនេះ៖ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}}$

ខ.បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់(P)មួយ

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq 0$ នោះ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែគ្នា

នាំឱ្យ ចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់(P)មួយ

ដូចនេះ ចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់(P)មួយ

-រួចកំណត់សមីការបន្ទាត់ (DA)

ដោយ បន្ទាត់(DA) កាត់តាមចំណុច $\mathrm{A}(1;-1;2)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{DA}=(1;1;1)$ គេបាន

$$\begin{cases}x=x_o+at\\ y=y_o+bt \,;\, t\in\mathbb{R}\\ z=z_o+ct\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+t\\ y=-1+t \,;\, t\in\mathbb{R}\\ z=2+t\end{cases}$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{(\mathrm{DA}):\begin{cases}x=1+t\\ y=-1+t \,;\, t\in\mathbb{R}\\ z=2+t\end{cases}}$

២.ក. បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ស្មើនឹង $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

គេបាន $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ពិត

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ស្មើនឹង $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ខ. គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត DABC

គេបាន $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{DA}\right|$

$V=\frac{1}{6}\left|(1)(1)+(1)(1)+(1)(1)\right|=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ឯកតាមាឌ

ដូចនេះ៖ $V=\frac{1}{2}$ ឯកតាមាឌ

VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(\mathrm{E}): y'+y=xe^{-x}$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ g ដែល $g(x)=\frac{x^2}{2}\cdot e^{-x}$ ជាចម្លើយនៃ(E)

គេបាន $g'(x)=\frac{2x}{2}\cdot e^{-x}-e^{-x}\left(\frac{x^2}{2}\right)=e^{-x}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$

ដោយ អនុគមន៍ g ដែល $g(x)=\frac{x^2}{2}\cdot e^{-x}$ ជាចម្លើយនៃ(E) លុះត្រាតែ $g'(x)+g(x)=xe^{-x}$

$\Leftrightarrow \quad e^{-x}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{x^2}{2}e^{-x}=xe^{-x}$

$\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}=xe^{-x}$

$\Rightarrow \quad xe^{-x}=xe^{-x}$ ពិត

ដូចនេះ អនុគមន៍ g ដែល $g(x)=\frac{x^2}{2}\cdot e^{-x}$ ជាចម្លើយនៃ(E) ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការ(E) លុះត្រាតែ $(f-g)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E_o): y'+y=0$

a. បង្ហាញថា បើអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការ(E) នោះ $(f-g)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E_o): y'+y=0$

គេបាន f ជាចម្លើយនៃសមីការ(E) នោះ $f'+f=xe^{-x}$ (1)

តែ អនុគមន៍ g ជាចម្លើយនៃ(E) នាំឱ្យ $g'+g=xe^{-x}$ (2)

យក (1)−(2) គេបាន $f'-g'+f-g=0$

$\Leftrightarrow \quad (f-g)'+(f-g)=0$

បញ្ជាក់ថា $(f-g)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E_o): y'+y=0$ ។

b.បង្ហាញថាបើ $(f-g)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E_o): y'+y=0$ នោះអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការ(E)

ដោយ $(f-g)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E_o): y'+y=0$ គេបាន

$(f-g)'+(f-g)=0$

$\Leftrightarrow \quad f'-g'+f-g=0$

$\Leftrightarrow \quad f'+f=g'+g$

តែ $g'+g=xe^{-x}$

គេបាន $f'+f=xe^{-x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

បញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

តាម a. និង b. គេបាន អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $(f-g)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E_0): y'+y=0$ ។

VII. យើងមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(2,+\infty)$ ដែល

$$f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)$$

1. a. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា x ខិតជិត 2 ។

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\left[\frac{1}{2}x-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)\right]$$

$$=1-5+3\ln1-3(-\infty)=\boxed{+\infty}$$

b. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $x\in(2,+\infty)$; $f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

យើងមាន $f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)$

$$f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\left[\ln(x-1)-\ln(x-2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \text{ ពិត}$$

c. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ ។

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)\right]$$

$$=(+\infty)-5+3\ln1$$

$$=\boxed{+\infty}$$

2. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y=\frac{1}{2}x-5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x-5\right)\right]=0$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)-\left(\frac{1}{2}x-5\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\left[3\ln\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)\right]=0$$

$\Leftrightarrow \quad 3\ln1=0$

$\Rightarrow \quad 0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ បន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y=\frac{1}{2}x-5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។

b. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងនៃ (C) នឹង Δ

គេបាន $(C)-(\Delta)=3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

យើងមាន $x-1>x-2$; $\forall x\in(2,+\infty)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x-2}>1$; $\forall x\in(2,+\infty)$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)>\ln1$

$\Leftrightarrow \quad 3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)>0$; $\forall x\in(2,+\infty)$

នាំឱ្យ $(C)-(\Delta)>0$ នោះ ក្រាប (C) នៅលើបន្ទាត់ (Δ) គ្រប់ $x\in(2,+\infty)$ ។

3. a. គណនា $f'(x)$ និងបង្ហាញថា គ្រប់ x លើចន្លោះ $(2,+\infty)$; $f'(x)=\frac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}$

យើងមាន $f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)$

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x-2}$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)+6(x-2)-6(x-1)}{2(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{x^2-3x+2+6x-12-6x+6}{2(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)} \text{ ពិត}$$

b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

យើងមាន $f'(x)=\frac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}$

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x-4)}{2(x-1)(x-2)}$$

ដោយ $\frac{x+1}{2(x-1)(x-2)}>0$; $\forall x\in(2,+\infty)$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x-4$

ឱ្យ $x-4=0 \Rightarrow x=4$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

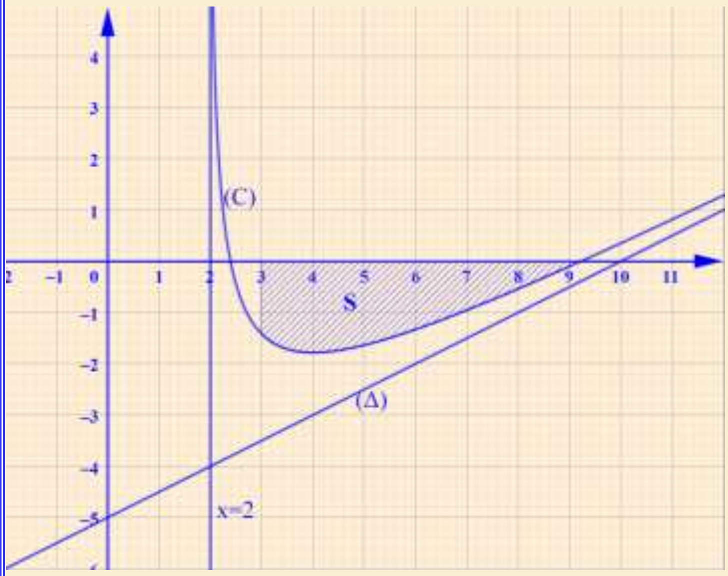
- ចំពោះ គ្រប់ $x\in(2,4)$ នោះ $f'(x)<0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើន។
- ចំពោះ គ្រប់ $x\in(4,+\infty)$ នោះ $f'(x)>0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះ។
- ចំពោះ $x=4$ នោះ $f'(x)=0$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ថេរ។
- ចំណុចបរមា

$$f(4)=\frac{1}{2}(4)-5+3\ln3-3\ln2=-3+3.3-2.1=\boxed{-1.8}$$

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1.8	↗	$+\infty$

4. សង់បន្ទាត់ Δ និង ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។ ដោយ ក្រាប (C) កាត់អ័ក្ស $(x'ox)$ ត្រង់ចំណុច $(2.4;0)$ និង $(9.2;\ 0)$



5. a. បង្ហាញថាអនុគមន៍ H ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ h លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$

យើងមាន $h(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ និង

$$H(x)=(x-1)\ln(x-1)-(x-2)\ln(x-2)$$

$$H'(x)=\ln(x-1)+\frac{x-1}{x-1}-\ln(x-2)-\frac{x-2}{x-1}$$

$$=\ln(x-1)+1-\ln(x-2)-1$$

$$=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=h(x)$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ H ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ h លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$

b. កំណត់ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$

គេបាន

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\left[\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2-5x+3\int\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}x^2-5x+3(x-1)\ln(x-1)-3(x-2)\ln(x-2)+C$$

ដូចនេះព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$ គឺ

$$F(x)=\frac{1}{4}x^2-5x+3(x-1)\ln(x-1)-3(x-2)\ln(x-2)+C$$

6. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (C) ; អ័ក្សអាប់ស៊ីស និង បន្ទាត់ឈរ $x=3$ និង $x=9$ ។

គេបាន

$$S=-\int_3^9 f(x)dx=-\left[F(x)\right]_3^9$$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^2-5x+3(x-1)\ln(x-1)-3(x-2)\ln(x-2)\right]_3^9$$

$$=-\left(\frac{9^2}{4}-45+24\ln 8-21\ln 7-\frac{3^2}{4}+15-6\ln 2+0\right)$$

$$=-\left(\frac{81}{4}-45+72\ln 2-21\ln 7-\frac{9}{4}+15-6\ln 2\right)$$

$$=-(-12+66\ln 2-21\ln 7)$$

$$=12-66\ln 2+21\ln 7$$

$$S=12-66(0.7)+21(1.9)$$

$$=12-46.2+39.9$$

$$=5.7$$

ដូចនេះ $S=5.7$ ឯកតាផ្ទៃ

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: ---------------------លេខតុ--------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ----------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x-2)+x(x+2)-x-1}{1-x^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x+\sin 5x}{x}\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{\tan x-1}\right)$ ។

II. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)$ និង $z_2=1-i$ ។

1. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

2.a. ចូរកំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ $\dfrac{z_1}{z_2}$ ។ **b.** បង្ហាញថា $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

III. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលចំនួន 10 គ្រាប់ដែលក្នុងនោះមានប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 5 គ្រាប់ចុះលេខ 0,0,1,2,3 ប៊ូលពណ៌បៃតង់ចំនួន 3 គ្រាប់ចុះលេខ 0,2,3 និង ពណ៌ខ្មៅចំនួន 2 គ្រាប់ចុះលេខ 1,3 ។

1. គេចាប់យកប៊ូល 3 ដំណាលគ្នាចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. « យកបានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា» ។ **B.** « យកបានប៊ូលចុះលេខ 0 តែមួយគត់» ។ **C.** « យកបានប៊ូលទាំង 3 ដែលមានផលបូកស្មើនឹង 4 » ។

2. គេចាប់យកប៊ូលម្តងមួយៗចំនួន 3 ដងចេញពីថង់ដោយចាប់ហើយមិនដាក់ប៊ូលចូលក្នុងថង់វិញ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

D. « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខ្មៅយ៉ាងហោចណាស់មួយ» ។ **E.** « គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ខុសគ្នា» ។

F.«គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានផលគុណនៃលេខរបស់វាស្មើនឹង 0 »។

3.គេចាប់យកប៊ូលម្តងមួយៗចំនួន 3 ដងចេញពីថង់ដោយចាប់ហើយដាក់ប៊ូលចូលក្នុងថង់វិញ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

G. « គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ខ្មៅយ៉ាងហោចណាស់មួយ» ។ **H.** «គេចាប់បានប៊ូលដែលមានលេខ 0 នៅលើកទី១» ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I}=\int_1^2\left(6x^2-2x+1\right)dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$ និង $\mathrm{K}=\int_1^2\left(\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}\right)dx$ ។

V. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(\mathrm{E}): y''+5y'+6y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនោះប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y=1-2x$ ត្រង់ចំណុច $\mathrm{A}(0,1)$ ។

VI. A. គេមានសមីការប៉ារ៉ាបូលមួយ $(\mathrm{P}): x^2-4x-4y+16=0$ ។

1. កំណត់កូអរដោនេកំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល (P) ។

2. រកតម្លៃ x_1 និង x_2 នៃ x_0 ដែលចំណុច $(x_0, 4)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល (P) ។ សង់ប៉ារ៉ាបូល (P) ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $\mathrm{A}(1;0;1)$, $\mathrm{B}(0;2;2)$ និង $\mathrm{C}(2;1;0)$ ។

1. បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

2. រកកូអរដោនេនៃ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។ រកសមីការប្លង់ (ABC) ។

3. គណនាចម្ងាយពីចំណុច $\mathrm{I}(1;-2;3)$ ទៅប្លង់ (ABC) ។ រកសមីការទូទៅស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត I ហើយប៉ះប្លង់ (ABC) ។

VII. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=2-xe^{-x+1}$ និង (C) ជាតំណាងក្រាបនៃអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$, (យកឯកតា 1cm) ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

2. **a -** គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ។ **b -** បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ និង បកស្រាយលទ្ធផលលីមីតនេះតាមក្រាភិច។

3. **a -** បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=(x-1)e^{-x+1}$ ។ **b -** សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. **a -** គណនា $f''(x)$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

b - បង្ហាញថា ក្រាប (C) មានចំណុចរបត់មួយដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 2 ។

5. សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ ។ (គេឱ្យ $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\simeq 4.25$; $f(2)\simeq 1.25$)

6. កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ f និង បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$; $e^{x-1}\geq x$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---
លេខបន្ទប់: --------------------**លេខតុ**--------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- -------------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គេមានសមីការ $(E): z^2-4z+16=0$ ។

1. ដោះស្រាយសមីការក្នុង (E) សំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ (ដោយយក z_1 ជាឫសមានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន)។

2. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ **3.** កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$ ។

II. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7x^2-28}{x^3-2\left(x^2+3\right)+3x}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+\pi x}-1}{x}\right)$ ។

III. ក្នុងថង់មួយប៊ូល 6 ដែលគេសរសេរលេខ $-2,-1,0,1,1,2$ ។ គេចាប់យកប៊ូលបចំនួន 3 ដំណោលគ្នាចេញពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ។ គេតាងព្រឹត្តិការណ៍

A. «ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានប៊ូលតែមួយគត់ជាលេខ 1 »។ B. «ផលបូកលេខលើប៊ូលទាំង 3 ស្មើនឹង 0 »។

C. «ផលគុណលេខលើប៊ូលទាំង 3 ស្មើនឹង 2 »។

បង្ហាញថា $P(A)=\dfrac{3}{5}$, $P(B)=\dfrac{1}{5}$ និង $P(C)=\dfrac{3}{20}$ ។

IV. **ក.** គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2\left(4x^3+6x-1\right)dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^3 x\,dx$ ។

ខ. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^4+2x-1}{x^2+1}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $f(x)=x^2-1+\dfrac{2x}{x^2+1}$ ។ គណនា $K=\int\limits_0^1 f(x)dx$ ។

V. **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(E): y''-y'-2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនោះមានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 3 ត្រង់ $x=0$ ។

VI. **A.** គេមានសមីការ (H): $16\left(x^2-9\right)=9y^2$ ។ បង្ហាញថា (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ និង សមីការអាស៊ីមតូត នៃ (H) រួចសង់ក្រាប (H) ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $A(2;5;-3)$, $B(1;0;0)$, $C(3;0;-2)$ និង $D(-3;-1;k)$ ។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យចំណុច A,B,C និង D ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

គ. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ដែល $f(x)=2x+1+\ln(x-1)-\ln(x+1)$ តាង (C) ជាក្រាបរបស់វានៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

1. a. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា x ខិតជិត 1 ។ **b.** ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $x\in(1,+\infty)$; $f(x)=2x+1+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ ។

c. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ ។

2. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d_1) ដែលមានសមីការ $y=2x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។

b. ចូរសិក្សាទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង (d_1) លើចន្លោះ $(1,+\infty)$ ។

3. a. គណនា $f'(x)$ និងបង្ហាញថា គ្រប់ x លើចន្លោះ $(1,+\infty)$; $f'(x)=\dfrac{2x^2}{(x-1)(x+1)}$ ។

b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $(1,+\infty)$ ។

4. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនៅលើ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះ (d_2) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $\dfrac{8}{3}$ និងសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ (d_2) នេះ។

5. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ G កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ដែល $G(x)=(x-1)\ln(x-1)-(x+1)\ln(x+1)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ។ដែល $g(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ ។ រួចកំណត់ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $(1,+\infty)$ ។

6. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត (d_1) និងបន្ទាត់ប៉ះ (d_2) ។ ប្រើតម្លៃប្រហែល $\ln 3=1.1$ និងក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(1.09\,;0)$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ----------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គេចាប់យកសំបុត្រ ២ សន្លឹកព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីប្រអប់មួយដែលមានសំបុត្រចំនួន ៩សន្លឹកចុះលេខពី១ ដល់៩។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. សំបុត្រទាំង ២ ជាលេខសេស។

B. សំបុត្រ១សន្លឹកជាលេខគូ និង ១សន្លឹកទៀតជាលេខសេស។

C. សំបុត្រទាំង ២ មានផលបូកផលលេខជាចំនួនគូ ។

II. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-4}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2\sin 3x}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}$ ។

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1-i$; $z_2=\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ និង $z_3=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$។

1. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង $\left(1+i\sqrt{3}\right)$ ។

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z_2=\left(i\sqrt{3}\right)z_1$ ។

3. ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $z_1+z_2=z_3$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $\mathrm{I}=\int_0^4\left(3x^2-8x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos 2x+\cos^2 x-\dfrac{1}{2}\right)dx$ និង $\mathrm{K}=\int_1^2\left(\dfrac{2x^2+x+2}{x+1}\right)dx$ ។

V. 1. **ក.** ចូរកំណត់ទម្រង់ស្តង់ដានៃសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំណុំ $(3,4)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាអ័ក្ស $(x'ox)$ ។

ខ. ចូរកំណត់តម្លៃ x_1 និង x_2 នៃ x_A ដែលចំណុច $A(x_A,4)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនោះ ។

2. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $A(1;-2;2)$; $B(2;3;1)$; $C(1;1;1)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(-2;1;3)$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចគណនាប្រវែង AB, AC និង BC ។

ខ. បង្ហាញថាចំណុច A , B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ ។

គ. គណនា $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ និង $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}$ រួចកំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E_o): $y'+\dfrac{1}{2}y=0$ និង (E): $y'+\dfrac{1}{2}y=2xe^{-\frac{1}{2}x}$ ។

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលក្នុង $\mathbb{R}$ នៃសមីការ (E_o) ។

2. **a.** ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ $g(x)=\left(x^2+1\right)e^{-\frac{1}{2}x}$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។

b. ស្រាយបំភ្លឺថាបើ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(f-g)$ ជាចម្លើយនៃសមីការសមីការ (E_o) ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+\dfrac{1}{1-e^x}$ តាង (C) ជាក្រាបរបស់វានៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(\vec{o};\vec{i};\vec{j}\right)$ ។

1. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់។

2. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (d) ។

3. **a.** ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=x+1+\dfrac{e^x}{1-e^x}$ ។

b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d') ដែលមានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង (d') ។

4. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើដែនកំណត់ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

5. បង្ហាញថាបើ $x>0$ នោះសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $[\ln 2;1]$ ។

6. ចូរស្រាយបភ្លឺថា $f'(\alpha)=1+\alpha+\alpha^2$ ។

7. **a.** សង់បន្ទាត់ (d) ; (d') និងក្រាប (C) ។

b. ដោយប្រើក្រាបចូរកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) ប្រសព្វជាមួយបន្ទាត់ (d_m) ដែលមានសមីការ $y=x+m$ ។

(គេឱ្យ $\dfrac{1}{1-e}=-0.58$; $\ln 2=0.7$)

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

៤

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{\sqrt{4-x}-1}$ ខ. $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-\cos2x+1}{x^2}$ គ. $\lim_{x\to0}\frac{3\sin\pi x}{-4x}$ ។

II. បេក្ខជនម្នាក់បានទាញយកលំហាត់ 3 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ ចេញពីលំហាត់ 12 ដែលរៀបចំដោយមេប្រយោគប្រឡង ។ ក្នុងនោះមានលំហាត់ពីជគណិត 7 , លំហាត់អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 3 និងលំហាត់ធរណីមាត្រ 2 ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

១. A «លំហាត់ទាំង3 ជាលំហាត់ពិជគណិត» ។ ២. B«លំហាត់ទាំង3 មានលំហាត់ធរណីមាត្រតែមួយគត់ »។

៣. C«លំហាត់យ៉ាងតិច 2 ជាលំហាត់ពិជគណិត» ។

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $a=2i$; $b=\sqrt{3}+i$ និង $c=\sqrt{3}+3i$ ។

1. គណនា $c-a$; $b-a$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។
2. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច b និង c ។ 3. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $\frac{c-a}{b-a}$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $\mathrm{I}=\int_0^1 x\left(x^2+2\right)dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^5x+\tan^7x\right)dx$ និង $\mathrm{K}=\int_1^2\left(4x-3+\frac{1}{2x+1}\right)dx$ ។

V. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(\mathrm{E}): y''-y'=4(y-y')$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=6$ និង $y'(0)=-4$ ។

VI. 1. រកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលមួយដែលមានកំណុំទាំងពីរនៅត្រង់ចំណុច $(-10,0)$ និងចំណុច $(10,0)$ ហើយមានកំពូលនៅលើបន្ទាត់ $(\mathrm{L}):\ y=x-8$ ។ កំណត់កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និង សមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល រួចសង់អ៊ីពែបូលនេះ។

2. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $\mathrm{A}(1;-1;4)$, $\mathrm{B}(7;-1;-2)$ និង $\mathrm{C}(1;5;-2)$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។ រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ខ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(1;1;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់មួយនៃប្លង់ (ABC) ។

គ. ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $x+y+z-4=0$ ជាសមីការមួយនៃប្លង់ (ABC) ។

VII. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ៖ $f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right)$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍គូ។
2. គណនា $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ។
3. a. ស្រាយបំភ្លឺថា $f(x)-x=\ln\left(1+e^{-2x}\right)$ ។

   b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។និងសិក្សាទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ (d) និង (C) ។
4. a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)+x=\ln\left(1+e^{2x}\right)$ ។

   b.បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d') ដែលមានសមីការ $y=-x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។

   c. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ (d') និង (C) ។
5. ស្រាយបភ្លឺថា $f'(x)=\frac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
6. សង់ (C) ; (d) និង (d') ។
7. តាង M និង N ជាពីរចំណុចនៅលើខ្សែកោង (C) ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ $\ln2$ និង $-\ln2$ រៀងគ្នា។
8. a.សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច M ។

   b. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T') ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច N ។

   c.បង្ហាញថាបន្ទាត់ (T) និង (T') ប្រសព្វគ្នាលើអ័ក្សអរដោនេ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: -------------------លេខតុ------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជនៈ--
ហត្ថលេខាបេក្ខជនៈ------------- -------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលចំនួន 9 គ្រាប់ ដែលក្នុងនោះមានប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 4 ចុះលេខ $-2;2;2;2$ និង ប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 5 ចុះលេខ $-2;-2;0;2;2$ ។ គេចាប់យកប៊ូល 2 ដំណាលគ្នាចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A." ចាប់បានប៊ូលទាំងពីរមានពណ៌ដូចគ្នា " ។ B." ចាប់បានប៊ូលទាំងពីរមានលេខដូចគ្នា " ។

C." ចាប់បានប៊ូលទាំងពីរមានពណ៌ដូចគ្នានិងមានផលបូកស្មើនឹង 0 " ។

D." ចាប់បានប៊ូលទាំងពីរមានពណ៌ដូចគ្នា ដោយដឹងថាមានផលបូកស្មើនឹង 0 " ។

II. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\tan x-1}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^3-2x^2+4x-5\right)-\sqrt{x+7}}{x-2}$ ។

III. គេមានសមីការ $(E): z^2+2z\sqrt{3}+4=0$ ។

1. ដោះស្រាយសមីការក្នុង (E) សំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ (ដោយយក z_1 ជាឫសមានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន)។

2. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ **3.**កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $Z=\dfrac{2i-z_1}{z_2-z_1}$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\displaystyle\int_1^3\frac{4x^5+5x-3}{x^2}dx$; $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 2x-\tan^2 x\right)dx$ និង $K=\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}+2e^{2x}+e^x}{e^x+1}dx$ ។

V. **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(E): y''-2y'+y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយនោះមានតម្លៃអតិបរមាស្មើ 1 ត្រង់ $x=0$ ។

VI. **1.**ប៉ារ៉ាបូលមួយមានសមីការ $(P): y^2-4y-4x+8=0$ និង សមីការបន្ទាត់ $(d): y=2x-4$ ។

ក. សរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល (P) រួចរកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប៉ារ៉ាបូល (P) ។ រួចសង់ (P) និង (d) ។

2. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $A(-1;-1;4)$, $B(2;0;2)$, $C(1;-4;-1)$, $J(2;0;5)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(1;-1;1)$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។

ខ. គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}$ និង $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។ រួចទាញរកសមីការប្លង់ (ABC) ។

គ. បង្ហាញថា $H(1;1;4)$ ជាចំណោលកែងនៃចំណុច J លើប្លង់ (ABC) ។

VII. **ផ្នែកA.** គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(-1,+\infty)$ ដោយ៖ $g(x)=\ln(x+1)+x$ ។

1. សិក្សាអថេរភាពនៃ g ។

2. គណនា $g(0)$ ។ រួចកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $(-1,+\infty)$ ។

ផ្នែកB. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-1,+\infty)$ ដោយ៖ $f(x)=\dfrac{x\ln(x+1)}{x+1}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. បង្ហាញថា $x\in(-1;+\infty)$ នោះ៖ $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ។

2. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើចន្លោះ $(-1,+\infty)$ ។

3. គណនា $f(3)$ និង $f(7)$ រួចសង់ខ្សែកោង (C) ។

4. គេអនុគមន៍ h កំណត់លើ $(-1,+\infty)$ ដោយ $h(x)=(x+1)\ln(x+1)$ ។

a. គណនា $h'(x)$; $\forall x\in(-1,+\infty)$ ។

b. បង្ហាញថា $\forall x\in(-1,+\infty)$ នោះ៖ $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ ។

c. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $\Delta: x=0$ និង $\Delta': x=e-1$; អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងខ្សែកោង (C) ។ (គេឱ្យ $\ln 2=0.7$)

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: -------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ------------------------------

៦

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x^2-2x-4}{x^2+3x+2}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin 2x^2}{4x^2}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}$ ។

II. ក្នុងថង់មួយប៊ូល 10 ដែលក្នុងនោះប៊ូល 6 មានពណ៌ស ហើយគេសរសេរលេខ $-1,0,0,1,1,1$ និងប៊ូល 4 មានពណ៌ខ្មៅហើយគេសរសេរលេខ $-1,-1,0,1$ ។ គេចាប់យកប៊ូលបចំនួន 3 ដំណោលគ្នាចេញពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ។ គេតាងព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. «ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា »។ B. «ផលបូកលេខលើប៊ូលទាំង 3 ស្មើនឹង 0 »។

C. «ចាប់បានប៊ូលយ៉ាងតិចណាស់មួយដែលសរសេរលេខ 0 »។

1. បង្ហាញថា $P(A)=\dfrac{1}{5}$; $P(B)=\dfrac{37}{120}$ និង គណនា $P(C)$ ។

2. **a** - បង្ហាញថា $P(A\cap B)=\dfrac{1}{15}$ និង គណនា $P\left(\overline{A\cup B}\right)$ ។ **b** - តើព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ទាក់ទងគ្នាដែលឬទេ ? ចូលបញ្ជាក់។

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+2i$, $z_2=2+i$ និង $w=2\sqrt{2}\left(-\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ ។

1. គណនា $u=z_1-z_2$ រួចសរសេរ u ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

2. រកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ u^6 ។ **3.** សរសេរ $u\times w$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

IV. **1.**គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_1^2\left(6x^2-2x+1\right)dx$; $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x+\cot x\right)^2dx$

2. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2(2x+1)}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{x^2}$ គ្រប់ $\mathbb{R}-\{0\}$ និង $K=\int_1^2 f(x)dx$ ។

V. **1.** គេឱ្យសមីការអេលីប (E): $9x^2+25y^2-90x-150y+225=0$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអេលីប (E) ប៉ះទៅនឹងអ័ក្ស (ox) និង (oy) រៀងគ្នាត្រង់ពីរចំណុច P និង Q ដែលត្រូវកំណត់។

ខ. គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរ ។ រួចសង់ (E) ។

2. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $A(2;-2;2)$, $B(2;0;0)$ និង $C\left(\dfrac{6}{5};0;\dfrac{2}{5}\right)$ ។

ក. បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ចំណុច C ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការប្លង់ (ABC) គឺ $x+2y+2z-2=0$ ។

គ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (Δ) ដែលកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ចំណុច A ។

VI. **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''-5y'+6y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(\ln 2)=4$ និង $y'(0)=2$ ។

VII. គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x}{2}+3\ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ តាង (C) ជាក្រាបរបស់វានៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $\left(\vec{o},\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។

2. **a.** គណនា $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$; $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ ។ **b.** រកសមីការ អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

3. **a.** បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) ដែលមានសមីការ $y=\dfrac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។

b. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C) ធៀបនិងបន្ទាត់ (d) លើ D ។

4. **a.** ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x\in D$; $f'(x)=\dfrac{x^2-x-20}{2(x+1)(x-2)}$ ។ **b.** សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ D ។

5. សង់អាស៊ីមតូត និង ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $\left(\vec{o},\vec{i},\vec{j}\right)$ តែមួយ។ (គេយក $\ln 2=0.7$)

6. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យសមីការ $6\ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+x-2m=0$ មានឬសពិតវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នាដោយប្រើក្រាប។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------ -------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលចំនួន 10 គ្រាប់ ដែលក្នុងនោះមាន ប៊ូលពណ៌សចំនួន 4 ចុះលេខ $1,2,2,2$ និង ប៊ូលពណ៌លឿងចំនួន 6 ចុះលេខ $0,0,0,2,2,2$ ។ គេចាប់យកប៊ូល 3 ដំណាលគ្នាចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ និងគេតាងព្រឹត្តិការណ៍៖

A." ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា" ។ B." ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានលេខដូចគ្នា" ។

C." ចាប់បានប៊ូលដែលមានផលគុណស្មើនឹងសូន្យ" ។

1. គណនា $P(A)$; $P(B)$ និង $P(A/B)$ ។

2. គណនា $P(C)$ ។

II. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+6(x-2)-x^2+6}{x-1}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}$ ។

III. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=2\sqrt{3}-2i$ និង $z_2=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ។

១. គណនា $A=z_1^2+z_2^2+4z_1i+\sqrt{2}.z_2$ ដោយឱ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ជាពិជគណិត ។

២. សរសេរ z_1 , z_2 និង $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

៣. បង្ហាញថា $B=z_1^6+z_2^{12}$ ជាចំនួនពិត។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2\dfrac{2x^4+3x^2-4}{x^2}dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}-1\right)dx$ ។

$K=\int_2^3\dfrac{x+1}{(x-1)^3}dx$ ។ ដើម្បីគណនា K ត្រូវបង្ហាញថា $\dfrac{x+1}{(x-1)^3}=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)^3}$ ។

V. **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(E): y''-4y'+3y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីរ៉េង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=4$ និង $y'(0)=6$ ។

VI. **A.** បង្ហាញថាសមីការអេលីប $9x^2+25y^2+90x-150y+225=0$ នេះប៉ះអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង អ័ក្សអរដោនេ។ រួចកំណត់កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអេលីប រួចសង់រូប ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេមានចំណុច $A(2;3;4)$, $B(3;5;6)$, $C(4;6;7)$ និង $D(3;4;5)$ ។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ។ ទាញបង្ហាញថាចតុកោណ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោ ABCD ។

គ. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A , B និង D ។

VII. 1. គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)=(1+2x)e^x-1$; $x\in\mathbb{R}$ ។

a. សិក្សាអថេរភាពនៃ g រួចគណនា $g(0)$ ។

b. សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

2. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x(e^x-1)^2$; $x\in\mathbb{R}$ ។ មានក្រាបតំណាង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(o,\vec{i},\vec{j})$ (មានឯកតា $2cm$)។

a. បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះ $f'(x)=(e^x-1)g(x)$ ។

b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

c. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

d. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y=x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។

e. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C) ធៀបនិងបន្ទាត់ (Δ) ។

f. ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ចូរសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (Δ) ។

3. គេឱ្យ A ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌប្លង់កំណត់ដោយក្រាប (C) និងសមីការបន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=2$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡា A ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

៨

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. ក.ដោះស្រាយសមីការនៅក្នុង $\mathbb{C}$ នៃសមីការ $z^2-2z+4=0$ យើងតាងដោយ z_1 ជាឫសរបស់សមីការផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាននិងតាង z_2 ឫសមួយទៀត។
ខ. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ។
គ. ចូរបង្ហាញថា $z_1^{2019}+z_2^{2019}=-2^{2020}$ ។

II. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានក្មេងប្រុស **10** នាក់ និងក្មេងស្រី **5** នាក់ គេជ្រើសរើសក្មេង **3** នាក់ដោយចៃដន្យម្តងមួយៗបន្តបន្ទាប់គ្នា។ រកប្រូបាបដែលរើសបាន៖
ក. ក្មេងប្រុសពីរនាក់ដំបូង និង ទីបីជាក្មេងស្រី។
ខ. ទីមួយ និង ទីបីជាក្មេងស្រី និងទីពីរជាក្មេងប្រុស។
គ. ទីមួយនិង ទីបីមានភេទដូចគ្នា និង ទីពីរមានភេទផ្ទុយគ្នា។

III. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-\sqrt{5x^2-4}}{x^3-8}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{1}\left(9x^2+2x-6\right)dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2 x+\tan^4 x\right)dx$ និង $K=\int_0^1\left(\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}\right)dx$ ។

V. **a.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(E): y''+2y'+y=0$ ។
b. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) បើគេដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះមានតម្លៃអតិបរមាស្មើនឹង 1 ត្រង់ $x=0$ ។

VI. **A.** គេមានសមីការអ៊ីពែបូល $(H): 16x^2-25y^2=400$ ។
1. រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរនិងកំណុំ F_1 និង F_2 រួចកំណត់សមីការអាស៊ីមតូតនៃ (H) ។
2. **a.** បើ $M\in(H)$ ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $H=OM^2-MF_1\times MF_2$ ។
b.កំណត់តម្លៃនៃ $S=\left(MF_1+MF_2\right)^2-4OM^2$ ។
B.ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(-1;1;0)$ និង $D(2;-1;k)$ ។
ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។
ខ. កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យចំណុច A,B,C និង D ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។
គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច H ដែលជាចំណោលកែងនៃចំណុច D មកលើប្លង់ (ABC) ។

VII. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=(x+1)e^{1-x}$ ហើយមានក្រាប (C) នៅក្នុងអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។
1. **a**- គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ។
b-បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$; រួចបកស្រាយលទ្ធផលលីមីតនេះតាមក្រាបភិច។
c-បង្ហាញថាអរដោនេស្មើសូន្យជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។
2. **a**-បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x ; $f'(x)=-xe^{1-x}$ ។
b-សិក្សាអថេរភាពនៃ f និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
3. **a**- បង្ហាញថាក្រាប (C) មានចំណុចរបត់ I មួយ ដែលត្រូវកំណត់ កូអដោនេ។
b- គេឱ្យ T ជាបន្ទាត់ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច I។ បង្ហាញថា T មាន សមីការ $y=-x+3$។
4. គណនា $f(-1)$ រួចសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ T ។ (គេយក $e=2.7$)។
5. គេឱ្យ α ជាចំនួនពិតធំជាង -1 ដែល $I(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx$ ។
a. ចូរបកស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រនៃ $I(\alpha)$ ។
b. ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំនួនពិត x ; $f(x)=f''(x)+2e^{1-x}$ ។
c. ស្រាយបំភ្លឺថា $I(\alpha)=e^2-(2+\alpha)e^{1-\alpha}$ ។
d. គណនា $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$; រួចបកស្រាយលទ្ធផលលីមីតនេះតាមក្រាបភិច។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ -------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ------------------------------

៩

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}\ ;(a\in\mathbb{R})$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 5x}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{4x-\pi}$ ។

II. គេកំណត់សមីការនៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ $(E):\ z^3+8=0$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a , b និង c ដើម្បីឱ្យ $z^3+8=(z+2)(az^2+bz+c)$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $z^3+8=0$ ។

គ. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃឫស z_1 , z_2 , z_3 របស់សមីការ (E) ។

III. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 10 គ្រាប់ដែលក្នុងមាន ប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 3 គ្រាប់ដែលចុះលេខ $0;1;1$ ប៊ូលពណ៌សចំនួន 4 គ្រាប់ដែលចុះលេខ $0;0;1;1$ និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 3 គ្រាប់ដែលចុះលេខ $(-1)\ ;\ 0\ ;\ 1$ ។ គេចាប់យកប៊ូល 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល៖

A. " ចាប់បានប៊ូល 3 គ្រាប់មានពណ៌ដូចគ្នា" ។

B. " ចាប់បានប៊ូល 3 គ្រាប់ដែលមានផលគុណស្មើនឹងសូន្យ "។

C. " ចាប់បានប៊ូល 3 គ្រាប់ដែលមានផលបូកស្មើនឹងសូន្យ"។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I}=\int_1^2\left[(x-1)(x^2+2x-3)\right]dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\cos x\,dx$; $\mathrm{K}=\int_{-1}^{0}\left(\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x-1}\right)dx$ ។

V. **a.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(E):\ y''-3y'+2y=0$ ។

b. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) បើគេដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច $(0\ ;1)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានសមីការ $y=1$ ។

VI. **1.** ចំណុច P មួយចល័តដែលមានចម្ងាយស្មើពីរចំណុច $F(-1\ ,\ 2)$ និងបន្ទាត់មួយមានសមីការ $y-6=0$ ។ រកសមីការនៃសំណុំចំណុចនៃ ចំណុច P ។

2. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេមានចំណុច $A(2;-1;1)$, $B(1;\ 2;5)$, $C(4;3;5)$ និង $D(5;0;1)$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកឈ្មោះចតុកោណ ABCD ។

ខ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

គ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំណុច $K(3;1;3)$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅចតុកោណ ABCD ។

ឃ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច K ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ។

VII. **ផ្នែក A** គេមានអនុគមន៍ $h(x)=1+xe^x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

ក. គណនា $h'(x)$ ។ រកឫស និង សញ្ញា $h'(x)$ ។

ខ. គណនា $h(-1)$ សង់តារាងអថេរភាព រួចទាញរកទាញ $h(x)$ ។

ផ្នែក B f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x+e^x}{e^x-1}$ មានក្រាប (C) ។

ក. គណនាលីមីតនៃ f កាលណា $\to 0\ ;\to-\infty$ និង $\to+\infty$ ។ រួចរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d:\ y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) នៅខាង $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។

គ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta\ :\ y=-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) នៅខាង $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ Δ ។

ឃ. គណនា $f'(x)$ ។ ប្រើលទ្ធផលផ្នែក **A** បង្ហាញថា f ចុះជានិច្ចលើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ។

ង. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ សង់បន្ទាត់ d , Δ និងក្រាប (C) ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ ----------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ---------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

១០

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1+\sqrt{2x-1}}{1-x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(8\sin x-\sin 2x)}{1-\cos x}$ គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)$ ។

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=\dfrac{z+2-i}{z+i}$ គេឱ្យ $z=a+ib$ និង $z\neq -i$ ។
ក. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពិជគណិតជាអនុគមន៍នៃ a និង b ។
ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដើម្បីឱ្យ Z ជាចំនួនពិត។ គ. រកទំនាក់ទំនងរវាង a និង b ដើម្បីឱ្យ Z ជាចំនួននិមិត្ត។

III. ក្នុងបន្ទប់រៀនមួយមាននិស្សិត 30 នាក់ដែលក្នុងនោះចំនួននិស្សិត ប្រុសស្មើនឹង $\dfrac{2}{3}$ ដងនៃចំនួននិស្សិតស្រី ។ គេជ្រើសរើសនិស្សិត 3 នាក់ដោយចៃដន្យ ដើម្បីយកទៅចូលរួមធ្វើសិក្ខាសាលាមួយស្តីពីបរិស្ថាន។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖
A. «ជ្រើសរើសនិស្សិតប្រុសម្នាក់ និង និស្សិតស្រី 2 នាក់»។ **B.** «ជ្រើសរើសបាននិស្សិតប្រុស 2 នាក់ និងនិស្សិតស្រីម្នាក់»។
C. «ជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចនិស្សិតស្រី 1 នាក់» ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I}=\int_{-1}^{2}\left(4-6x-3x^2\right)dx$; $\mathrm{J}=\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-4\sin 2x)\,dx$
និង $\mathrm{K}=\int_{-1}^{0}\left(\dfrac{x^3-3x}{x^2-2}\right)dx$ (ណែនាំ: ដើម្បីគណនា K ត្រូវបង្ហាញថា $\dfrac{x^3-3x}{x^2-2}=x-\dfrac{x}{x^2-2}$; $\forall x\neq\pm\sqrt{2}$)

V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''-y'=2(y'-y)$ ។
a. សរសេរ (E) ជាទម្រង់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២មានមេគុណថេរអូម៉ូសែន។ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ។
b. រកចម្លើយមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដោយដឹងថា $y(1)=2e$ និង $y'(0)=-1$ ។

VI. **A.** ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល កំណុំ ប្រវែងអ័ក្សតូច ប្រវែងអ័ក្សធំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃអេលីបមួយដែលមានសមីការ $(\mathrm{E}):9y^2+25x^2=225$ ។ សង់អេលីប (E) ។
2. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $\mathrm{A}(3;-2;2)$, $\mathrm{B}(6;1;5)$ និង $\mathrm{C}(6;-2;-1)$ ។
១. ក. បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។ ខ. បង្ហាញថាប្លង់ $(\mathrm{P}):x+y+z-3=0$ អរតូកូណាល់នឹងបន្ទាត់ (AB) ហើយកាត់តាមចំណុច A ។
គ. រកសមីការប្លង់ (P') កាត់តាម A កែងនឹងបន្ទាត់ (AC) ។ រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតបន្ទាត់ (Δ) ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (P') ។
២. ក. គេឱ្យ $\mathrm{D}(0;4;-1)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (AD) កែងនឹងប្លង់ (ABC) ។ គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត ABCD ។
ខ. បង្ហាញថា មុំ BDC មានរង្វាស់ស្មើនឹង $\pi/4$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ BDC ។ ទាញរកចម្ងាយពី A ទៅប្លង់ (BDC) ។

VII. **ផ្នែក A** គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(2\,,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{1}{2}x-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)$ មានក្រាប (C) ។
1. **a.** គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា x ខិតជិត 2 ។ **b.** ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ x កំណត់លើ $(2\,,+\infty)$; $f(x)=\dfrac{1}{2}x-5+3\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ ។
c. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ ។
2. **a.** បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ ដែលមានសមីការ $y=\dfrac{1}{2}x-5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $+\infty$ ។
b. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ $(2\,,+\infty)$, $\dfrac{x-1}{x-2}>1$ និងទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង Δ ។
3. a. គណនា $f'(x)$ និងបង្ហាញថា គ្រប់ x លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$; $f'(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}$ ។
b. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ នៅលើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$ ។ c. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$ ។
4. **a.** បង្ហាញសមីការ $f(x)=0$ មានឫសមួយគឺ α ក្នុងចន្លោះ $[2.1,3]$ និងមានឫសមួយទៀត β ក្នុងចន្លោះ $[9,10]$ ។
b. កំណត់តម្លៃប្រហែលដោយបង្គត់ត្រឹម 10^{-1} នៃឫស α និង β ។ (គេឱ្យ $\ln 11=2.4$; $\ln 2=0.7$; $\ln(8/7)=0.1$; $\ln(9/10)=0.1$)
5. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ Δ ។

ផ្នែក B **1.** គេមានអនុគមន៍ h និង H កំណត់លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$ ដែល $h(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ និង $\mathrm{F}(x)=(x-1)\ln(x-1)-(x-2)\ln(x-2)$ ។
a. បង្ហាញថាអនុគមន៍ H ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ h លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$ ។ **b.** ចូរកំណត់ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $(2\,,+\infty)$ ។
2. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (C) ; អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x=3$ និង $x=9$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2-4x+24}{x-2}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x^2-x+3}{3x^2-1}\right)$ **គ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos^2 x-1}{\tan^2 x-1}$ ។

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$, $z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$ និង $v=\dfrac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}+\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}i$ ។
ក. ចូរសរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ជាត្រីកោណមាត្រ។   **ខ.**ចូរគណនាកន្សោម A ដែល $A=v+z_1+z_2^2$ ។
គ. ចូរគណនា w ដែល $w=z_1^{120}+z_2^{120}$ ។

III. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលក្រហមចំនួន 4 គ្រាប់ចុះលេខ 1 , 2 , 3 , 4 និងប៊ូលបៃតងចំនួន 6 គ្រាប់លេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ។ គេចាប់យកប៊ូល 3 ព្រមគ្នាចេញពីក្នុងថង់នោះដោយចៃដន្យ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖
A. «យកបានប៊ូលពណ៌ដូចគ្នា»។   **B.** «យកបានប៊ូលសុទ្ធតែចុះលេខគូ»។
C. «យកបានប៊ូលចុះលេខផ្គុំបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលផងរួម d = 2 » ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I}=\int_0^{\pi}e^x\left(1+\dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$; $\mathrm{J}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx$ និង $\mathrm{K}=\int_0^1\left(\dfrac{8x-7}{(x-2)(x+1)}\right)dx$
(ណែនាំ: ដើម្បីគណនា K ត្រូវបង្ហាញថា $\dfrac{8x-7}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{5}{x+1}$; $\forall x\neq -1 , x\neq 2$)

V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y'+2y=2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^x}$ ។
1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=e^{-2x}\ln\left(1+2e^x\right)$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។
2. បង្ហាញថាអនុគមន៍ φ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(\varphi-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការសមីការ (E′) : $y'+2y=0$ ។

VI. **1.** គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយដែលមានកំពូលជាចំណុច O(0,0) និង កំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស។
a. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះបើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},-3\right)$ ។
b. រកកូអរដោនេរបស់កំណុំសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។
2.ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេមានចំណុច A(3;2;4) , B(0;3;5) , C(0;2;1) និង D(3;1;0) ។
១. ក. ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ ។   **ខ.** បង្ហាញថា ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃរបស់វា។
២. គេឱ្យ S ជាស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត I(2;−2;5) និង កាំស្មើនឹង $3\sqrt{2}$ ហើយ (P) ជាសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច A,B និង D ។
ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)$ ។   **ខ.**បង្ហាញថាប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ែ S ត្រង់ចំណុច A ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ និង អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ក្នុង $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$ ។
ផ្នែកA.1.ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ x កំណត់លើ $(0,+\infty)$; $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^x-1}$ ។ **2.**ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ x លើ $(0,+\infty)$; $f(x)=2x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^x}{e^x-1}$ ។
3. ដោះស្រាយសមីការ $g(x)=0$ បន្ទាប់មកដាក់ជាផលគុណកត្តានៃ $g(x)=0$ ។
ផ្នែក B. 1.គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា x ខិតជិត 0 និងខិតជិត $+\infty$ ។
2. a.ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់ (D) ដែលមានសមីការ $y=2x+\dfrac{1}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) តំណាងដោយ f ។
b. សិក្សាទីតាំងរវាង (C) និងបន្ទាត់ (D) ។
3. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f មានសញ្ញាដូចអនុគមន៍ g (**ផ្នែកA**) រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
4. សង់ក្រាប (C) និង អាស៊ីមតូតទ្រេតក្នុងតម្រុយអរតូដោម៉ាល់ (ក្រាបយកឯកតា 1cm)។
5. ដោយប្រើក្រាបចូរកំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (C) ប្រសព្វជាមួយបន្ទាត់ (D_m) ដែលមានសមីការ $y=2x+m$ ។
ផ្នែក C. 1. ដោយប្រើទម្រង់ $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ចូរកំណត់ព្រីមីទីវលើ $(0,+\infty)$ នៃអនុគមន៍ $x\mapsto\dfrac{e^x}{e^x-1}$ ។
2. ចូរកំណតត់ដោយប្រើ **A.2.** នៃព្រីមីទីវលើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)-\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)$ ។
3. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ (C) , (D) និងសមីការ $x=\ln 2$ និង $x=\ln 4$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ---------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

១២

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $a=\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $b=1-i$ ។

ក. ចូរសរសេរ a និង b ជាទម្រង់ជាត្រីកោណមាត្រ។ **ខ.** កំណត់ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_0=a/b$ ។

គ. ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $\cos(\pi/12)$ និង $\sin(\pi/12)$ ។ **ឃ.**ដោះស្រាយក្នុងចន្លោះ $[-\pi\,,\,\pi)$ នៃសមីការ $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$ ។

II. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^3+x^2+3x+4}{3x^2+x-2}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}$ ។

III. ក្នុងក្លឹបសិក្សាគណិតវិទ្យាមួយមានសិស្ស 12 នាក់។ គ្រូចង់បែងចែកសិស្សទាំងនោះជាក្រុមមួយដែលមានគ្នា 5 នាក់។ សិស្សពីនាក់ A និង B បើចូលក្នុងក្រុមគឺត្រូវចូលទាំងពីរ ហើយបើអត់ចូលក្រុមគឺអត់ទាំងពីរ។

ក. តើគ្រូអាចបង្កើតក្រុមខុសៗគ្នាបានប៉ុន្មានបែប?

ខ. គ្រូជ្រើសរើសមួយក្រុមដោយចៃដន្យ ដើម្បីយកទៅប្រឡងសិស្សពូកែ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

X. ជ្រើសរើសបានក្រុមសិស្សដែលមានសិស្ស **A** និង **B** ។ **Y.** ជ្រើសរើសបានក្រុមសិស្សដែលគ្មានសិស្ស **A** និង **B**។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 2x\left(x^2+3\right)^5dx$; $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\right)dx$ ។

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}$; $\forall x\neq0$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$; $\forall x\neq0$ ។ គណនា $K=\int_1^2 f(x)dx$ ។

V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E_1): $y''+2y'+y=-\frac{e^{-x}}{x^2}$ និងអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $h(x)=e^{-x}\ln x$ ។

a. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ h ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_1) ។

b. ស្រាយបំភ្លឺថា បើ f ជាចម្លើយនៃ (E_1) នោះ $g=(f-h)$ ជាចម្លើយនៃសមីការសមីការ (E_2) : $y''+2y'+y=0$ ។

VI. **១.** គេឱ្យអេលីប (E) : $y^2=\frac{4}{9}(1+x)(5-x)$ ។

ក. សរសេរ (E) ជាទម្រង់ស្តង់ដារ។ **ខ.** រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល និង កំណុំរបស់អេលីប (E) រួចសង់ក្រាបវា។

២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $A(1;0;2)$, $B(0;0;4)$, $C(2;3;9)$, $K(-1;4;4)$ និង ប្លង់ (P): $2x-3y+z-4=0$ ។

1. បង្ហាញថា (P) គឺជាប្លង់កំណត់ដោយចំណុច A, B និង C ។
2. **a.** គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ **b.** កំណត់ចម្ងាយពីរចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (BC) ។
3. **a.** គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែតនៃ KABC ។ **b.** ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) ដែលកាត់តាម K ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។
   c. រកកូអរដោនេនៃ G ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (Δ) និង (P) ។ **d.**បង្ហាញថា G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC ។

VII. **ផ្នែកA**. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ $(-1\,,+\infty)$ ដែល $f(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$ ។

1. គណនា $f'(x)$ ។ ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។
2. គណនា $f(0)$ ។ បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់គឺ α នៅក្នុងចន្លោះ $[-0.72\,;-0.71]$ ។
3. ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ ចំពោះ $x\in(-1\,,+\infty)$ ។

ផ្នែក B. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $D=(-1\,,0)\cup(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$ ។

1. **a.**គណនាលីមីតនៃ g កាលណា x ខិតជិត 0 ខាងឆ្វេង និង x ខិតជិត 0 ខាងស្តាំ។ **b.** គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ។
2. **a.** គណនា $g'(x)$ ។ **b.** បង្ហាញថា $g(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ រួចកំណត់តម្លៃប្រហែលនៃ $g(\alpha)$ ដោយយក $\alpha\approx-0.715$
3. **a.**សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។ **b.** ចូរសង់ខ្សែកោងនៃអនុគមន៍ g ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់(2cm លើ (ox) ; 1cm លើ (oy))
4. គេឱ្យ h ជាអនុគមមន៍កំណត់លើ D ដែល $h(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}-\frac{1}{x(x+1)}$ ។

a. ចូរកំណត់អនុគមន៍ u និង v ដោយស្គាល់ $h(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ ។ រួចទាញរកព្រីមីទីវនៃ h ។

b. ចូរកំណត់ព្រីមីទីវនៃ $\frac{1}{x(x+1)}$ ។ **c.** ទាញចេញពីសំណួរខាងលើ ចូរកំណត់ព្រីមីទីវនៃ g ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ --------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ------------------------------

១៣

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. ក្នុងកាបូបលុយមួយមានក្រដាសប្រាក់ ២០០០៛ ចំនួន ៥សន្លឹក និង ៥០០០៛ ចំនួន៤ សន្លឹក។ គេហូតយកក្រដាសប្រាក់ចំនួន៤សន្លឹកព្រមគ្នាដោយចៃដន្យពីកាបូប។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោមៈ

A. «គេហូតបានក្រដាសប្រាក់ ២០០០៛ ចំនួន ២សន្លឹកគត់»។ **B.** «គេហូតបានក្រដាសប្រាក់ ៥០០០៛ មួយសន្លឹកយ៉ាងតិច»។

C. «ក្រដាសប្រាក់ដែលគេហូតបាន75% ជាក្រដាសប្រាក់ ៥០០០៛ »។

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$ និង $z_3 = -1-2i$ ។

ក. គណនា $z_1 - z_3$; $z_2 - z_3$ និង $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ ។ **ខ.** ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ ។ **គ.** ចូរសរសេរ $\dfrac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ជាត្រីកោណមាត្រ។

III. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x-25}{\sqrt{2x-1}-3}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-\sin^2 x}{2+\sin x}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I} = \int_1^5 \left(x^2+2x-3\right)dx$; $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$ និង $\mathrm{K} = \int_e^{e^2} \dfrac{1}{x\ln x\left(2+\ln x\right)}dx$ ។

V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y' + 3y = e^{-3x}\ln x$ ។

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $y' + 3y = 0$ ។

2. គេឱ្យ $z = ye^{3x}$ ។ **a.** បង្ហាញថា y ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) បើ $z' = \ln x$ ។ **b.** រួចទាញរកចម្លើយនៃ (E) ។

VI. **1.** គេឱ្យ (P) ដែលមានសមីការ $y^2 + 2y - 6x + 10 = 0$ ។

ក. បង្ហាញថា (P) ជាប៉ារ៉ាបូល រួចកំណត់កូអរដោនេនៃ កំពូល កំណុំ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។

ខ. បង្ហាញថាចំណុច $\mathrm{A}(3,2) \in (\mathrm{P})$ រួចកំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះ (P) ត្រង់ A ហើយសង់រូប (P) ។

2. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(\mathrm{o}, \vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}}\right)$ មួយគេមានចំណុច $\mathrm{A}(1;2;3)$, $\mathrm{B}(0;1;4)$, $\mathrm{C}(-1;-3;2)$, $\mathrm{D}(4;-2;5)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{\mathrm{n}} = (2;-1;1)$ ។

១. ក. បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ **ខ.** បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{\mathrm{n}} = (2;-1;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។

គ. ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

២. គេមាន Δ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រដែល $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \ ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = 4-t \end{cases}$ ។បង្ហាញថា D ជាចំណុចមួយនៅលើបន្ទាត់ Δ រួចរកចម្ងាយពីរចំណុចនេះទៅប្លង់ (ABC)

៣. គេឱ្យចំណុច E ជាចំណោលកែងនៃចំណុច D លើប្លង់ (ABC) ។ ចូរបង្ហាញថាចំណុច E ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC ។

VII. **ផ្នែកA.** គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើចន្លោះ $[0\ ,+\infty)$ ដែល $g(x) = e^x - x - 1$ ។

1. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមមន៍ g ។

2. ចូរកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

3. ទាញបញ្ជាក់ថាគ្រប់ x ក្នុង $[0\ ,+\infty)$; $e^x - x > 0$ ។

ផ្នែក B. គេអនុគមន៍ f កំណត់លើ $[0,1]$ ដែល $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ មាន (C) តំណាងឱ្យអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។ ដោយដឹងថា អនុគមន៍ f កំណត់ដែនកំណត់នៅក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ។

1. បង្ហាញថាខ្សែកោង (C) មានសមីការអាស៊ីមតូតដេកខាង $+\infty$ ។

2. បង្ហាញថាគ្រប់ x ក្នុង $[0,1]$; $f(x) \in [0,1]$ ។

3. គេមាន (D) ជាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ៖ $y = x$ ។

a. បង្ហាញថាគ្រប់ $x \in [0,1]$; $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$ ។ **b.** ចូរសិក្សាទីតាំងរវាងបន្ទាត់ (D) និងក្រាប (C) នៅក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ។

4. **a.** កំណត់ព្រីមីទីវនៃ f លើ $[0,1]$ ។ **b.** គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់ដែលកំណត់ដោយក្រាប (C) ; បន្ទាត់ (D) និងសមីការបន្ទាត់ $x = 0$; $x = 1$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---
លេខបន្ទប់: -------------------លេខតុ -------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

១៤

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. នៅក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សពូកែចំនួន 10 នាក់ ដែលក្នុងនោះចំនួនសិស្សស្រីស្មើនឹង $\frac{3}{2}$ ដងនៃចំនួនសិស្សប្រុស។ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុម ក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស 4 នាក់ដោយចៃដន្យ យកទៅប្រកួតជាមួយក្រុមសិស្សនៃថ្នាក់ដទៃ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A «ក្រុមសិស្សដែលរើសបានសុទ្ធតែប្រុស»។ **B** «ក្រុមសិស្សដែលរើសបានជាសិស្សដែលមានភេទដូចគ្នា»។

C «ក្រុមសិស្សដែលរើសបានសិស្សស្រីពីរនាក់យ៉ាងច្រើនម្នាក់»។

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+2i$, $z_2=2+i$ និង $w=2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ។

ក. គណនា $z=z_1-z_2$ រួចសរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ ខ. រកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z^2 ។ គ.សរសេរ $z\times w$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

III. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-4}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2+\cos x}\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{3x-\pi}$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^4\left(\sqrt{x}-2x+x^2\right)dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx$ និង $K=\int_1^2\frac{x^3}{x+1}dx$ ។

V. **a.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ (E): $y''+2y'-3y=0$ ។

b. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) បើគេដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច $A(0,1)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 2 ។

VI. **A.** គេមានសមីការបន្ទាត់ $d: x+y-3=0$ និងសមីការអ៊ីពែបូល $(H): 16x^2-9y^2=144$ ។

1. រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និង កំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល។ រកសមីការអាស៊ីមតូតរបស់អ៊ីពែបូលនេះ ។

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា d ប្រសព្វនឹង (H) ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា។ រួចកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វទាំងពីរនេះ ហើយសង់ d និង (H) ។

B. នៅក្នុងលំហនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1;0;2)$, $B(-2;1;-1)$ និង $C(0;0;1)$ ។

1. **a.**កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ **b.** បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។

c.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការប្លង់ (P) មានសមីការ $x-z+1=0$ ។

2. គេមានកូអរដោនេនៃចំណុច $I(1;-1;-1)$ និង $J\left(-\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ ហើយបន្ទាត់ Δ ដែលកាត់តាម I និងកែងនឹងប្លង់ (P) ។

a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ កាត់តាមប្លង់ (P) ត្រង់ចំណុច J ។ **b.** គណនាចម្ងាយ IJ ។

VII. ១. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=x+1-x\ln x$ ។

1. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។

2. **a.**បង្ហាញថាសមីការ $g(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់គឺ α ក្នុង $(0,+\infty)$ ។ **b.** បញ្ជាក់ថា $3<\alpha<4$ ។

c. ទាញបញ្ជាក់ថា បើ $g(x)>0$ នោះ $x\in(0,\alpha)$ និង $g(x)<0$ នោះ $x\in(\alpha,+\infty)$ ។

3. **a.**កំណត់ដេរីវេនៃអនុគមន៍លើ $(0,+\infty)$ នៃអនុគមន៍ $h: x\mapsto\frac{1}{2}x^2\ln x$ ។ **b.**ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ $x\in(0,+\infty)$; $g(x)=1+\frac{3}{2}x-h'(x)$ ។

c. ចូរកំណត់ព្រីមីទីវនៃ g ។

២. គេអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$ មាន (C) តំណាងឱ្យអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។

2. **a.** បង្ហាញថា f មានដេរីវេលើ $(0,+\infty)$ គឺ $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$ ។ **b.**សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3. a.បង្ហាញថា $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$ ។ **b.** សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A មានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 1 ។

4. សង់ (T) និង (C) ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-x|}{1-x}$ **ខ.** $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1}$ **គ.** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ។

II. ក្នុងទូដាក់សៀវភៅមួយមានសៀវភៅពីជគណិត 7 ក្បាលនិងសៀវភៅធរណីមាត្រ 6 ក្បាល។ គេជ្រើសរើសយកសៀវភៅ 3ក្បាលព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។
ក. រកប្រូបាបដែលយកបានសៀវភៅពីជគណិត 2 ឬ 1 ក្បាល។
ខ.រកប្រូបាបដែលយកបានសៀវភៅពីជគណិតយ៉ាងច្រើន 2 ក្បាល។
គ. រកប្រូបាបដែលយកបានសៀវភៅពីជគណិតយ៉ាងតិច 2 ក្បាល។

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{2}(1+i)$, $z_2=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ និង $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ។
ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
ខ.សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
គ.ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I}=\int_1^2\frac{x^2-3x+2}{x^4}dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\cos x dx$ និង $\mathrm{K}=\int_0^{\ln 3}\frac{e^{3x}+e^x+1}{e^{2x}(e^x+1)}dx$ ។

V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(\mathrm{E}_0): y''+4y=0$ និង $(\mathrm{E}_1): y''+4y=3\sin x$ ។
a. បង្ហាញថា $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ ជាចម្លើយមួយនៃ (E_0) ។
b. បង្ហាញថា បើ g ជាចម្លើយមួយនៃ (E_0) នោះ $\mathrm{h}(x)=g(x)+\sin x$ ជាចម្លើយនៃ (E_1) ។

VI. 1. ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល នៅលើបន្ទាត់ $\mathrm{L}_1: x+3y+1=0$ និងកំណុំនៅលើបន្ទាត់ $\mathrm{L}_2: 3x-2y+29=0$ និងមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាអ័ក្សអរដោនេ។
2.ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ គេឱ្យ $\mathrm{A}(1;-2;3)$ និង សមីការឆ្លុះ $\mathrm{d}: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-1}$ ។
ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ d ។
ខ. គណនាចម្ងាយពីរចំណុច A ទៅបន្ទាត់ d ។ រួចរកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត A និងប៉ះបន្ទាត់ d ។

VII. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^x$ និងមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។(ឯកតា 1cm)។
1. **a.** គណនា $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ។
b.បង្ហាញបន្ទាត់ $(\mathrm{D}): y=2x-2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។
2. **a.** បង្ហាញថា $f'(x)=2(e^x-1)^2$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
b. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគន៍ f លើ $\mathbb{R}$ ។ (គេឱ្យ $f'(0)=0$)។
c. បង្ហាញថាមានចំនួនពិត α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $(1,\ln 4)$ ដែល $f(\alpha)=0$ ។
3. **a.** សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $(\mathrm{D}): y=2x-2$ នៅលើចន្លោះ $(-\infty,\ln 4)$ និង $(\ln 4,+\infty)$ ។
b. បង្ហាញថា (C) មានចំណុចរបត់មួយដែលមាន កូអរដោនេ $(0,-5)$ ។
c. សង់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ នៃបន្ទាត់ (D) និង ក្រាប (C) ។ (គេឱ្យ $\alpha\approx 1.3$ និង $\ln 4\approx 1.4$)។
4. **a.** បង្ហាញថា $\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^x)dx=-\frac{9}{2}$ ។
b. គណនាដោយគិតជា cm^2 នៃផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C), បន្ទាត់ (D) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ឈរ $x=0, x=\ln 4$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---

លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- -------------------------------

១៦

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-\sin 2x}{x+\tan 3x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$ គ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x\cos x}\right)$ ឃ. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$

II. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ស 6 គ្រាប់ដែលចុះលេខ -1 ; -1 ; 0 ; 1; 1 ;1 និងឃ្លីពណ៌ខ្មៅចំនួន 4 គ្រាប់ដែលចុះលេខ -1 ; 0 ; 1; 1 ។ គេចាប់យកឃ្លី3គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។

ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A"ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា"។ ខ.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B " ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានលេខដូចគ្នា"

គ. បង្ហាញថា $P(A\cup B)=17/60$ ។

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=1+i$, $y=1-i\sqrt{3}$ និង $U=\dfrac{z^3}{\bar{y}^2}$ ។

ក. សរសេរ z និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ រួចបង្ហាញថា $U=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។

ខ. បង្ហាញថា U^{24} ជាផ្នែកពិត និង បង្ហាញ U^6 ជាផ្នែកនិមិត្ត។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $U=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ ។ រួចទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ និង $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។

IV. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $[0\,;+\infty)$ ដោយ៖ $f(x)=\dfrac{e+xe^x}{e^x}$ ហើយមានក្រាប (C) នៅក្នុងអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. គណនា $f(0)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

2. **a.** ស្រាយបញ្ជាក់ $f'(x)=e^{-x}(e^x-e)$ ។ **b.** សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3. **a.** បង្ហាញថា $f(x)-x=e^{1-x}$ ។

b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ។រួចសិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C) និង (d) លើ $[0\,;+\infty)$ ។

4. សង់ (C) និង (d) ក្នុងអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

5. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) ,បន្ទាត់ (d) និងសមីការ បន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=1$ ។

6. គេឱ្យចំណុច P នៅលើ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ $x=1-\ln 2$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ (C) ត្រង់ P គឺកែងនឹងបន្ទាត់ (d) ។

V. **A.** គេឱ្យ g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ ។ **2.** គណនា $g'(x)$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ និង សិក្សាអថេរភាពនៃ g ។

3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $g(1)=0$ និង បង្ហាញថា $g(x)=0$ មានឫសតែ មួយគត់គឺ $\alpha\in(2,e)$ ។ **4.** សិក្សាមែកអនន្តនៃ (C_g) ។

5. សង់ក្រាប (C_g) ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ដែលឯកតា $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\text{cm}$ ។ **6.** សិក្សាតាមក្រាបសញ្ញានៃ g លើ $(0,+\infty)$ ។

B. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ: $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$ តាង (C_f) ជាក្រាបតំណាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(o,\vec{i},\vec{j})$ មានឯកតា $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\text{cm}$ ។

1. បង្ហាញថា $D_f=(0,e)\cup(e,+\infty)$ ។

2. គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ D_f និង ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C_f) ។

3. បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ និង សង់តារាង អថេរភាពនៃ f ។

4. **a.** ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ គ្រប់ $x\in D_f$ ។

b. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $(\Delta): y=x$ កាត់ក្រាប (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 1 និង α ។ **c.** បង្ហាញថា $f(x)-x\le 0$ គ្រប់ $x\in(1,\alpha)$ ។

5. សង់ (C_f) និង (Δ) ។

6. **a.** បង្ហាញថា $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$ ។ **b.** គណនាផ្ទៃក្រឡា $A(x)$ ដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C_f), (Δ) និងសមីការបន្ទាត់ $x=1$ និង $x=\sqrt{e}$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---
លេខបន្ទប់: -------------------លេខតុ ------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------ ----------------------------

១៧

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^3+4x^2+5x+2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x-2}}$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin\pi x}$ ។

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=i-\sqrt{3}$, $z_2=1-i$ និង $w=\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}$ ។

ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ ខ. រកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ $\dfrac{z_1}{z_2}$ ។ គ. សរសេរ $Z=\dfrac{z_1w}{z_2}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។

III. ក្នុងទូដាក់សៀវភៅមួយមានសៀវភៅពិជគណិត 8 ក្បាល និង សៀវភៅធរណីមាត្រ 4 ក្បាល។ គេហូតយកសៀវភៅ 2 ក្បាលដោយហូតយកម្តងមួយក្បាល(យកហើយមិនដាក់វិញ) ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

A. ហូតបានសៀវភៅពិជគណិតទាំង 2 លើក ។ **B.** ហូតបានសៀវភៅធរណីមាត្រទាំង 2 លើក ។

C.ហូតបានលើកទី1 ជាសៀវភៅពិជគណិតលើកទី2 ជាសៀវភៅធរណីមាត្រ។

IV. ១.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$; $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{8}\cos4x+\dfrac{1}{2}\cos2x\right)dx$ ។

២.គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1+x-x^2}{x^2(1+x)}$; $\forall x\neq0, x\neq-1$ ។ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1+x-x^2}{x^2(1+x)}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{1+x}$; $\forall x\neq0, x\neq-1$ រួចគណនា $K=\int_1^3 f(x)$ ។

V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(E): y'-y=\dfrac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$ ។ ក.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ h ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(h-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E_o): y'-y=0$ ។

VI. ១. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(2;-1;3)$, $B(1;-3;5)$ និង $C(9;-1;3)$ ។

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C មិនស្ថិតលើបន្ទាត់តែមួយ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

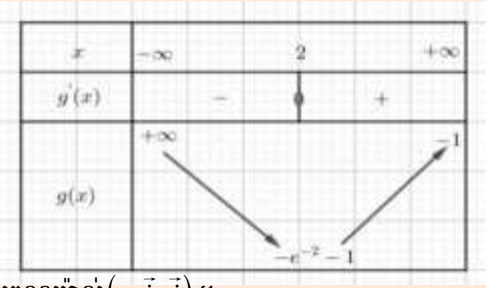
ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) រួចគណនាកូអរដោនេចំណុច D ដោយដឹងថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

គ.កំណត់កូអរដោនេនៃចុះណុច H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ (ABC) ។

២. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានកំពូល $(-6,7)$ និង $(2,7)$ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e=\dfrac{3}{2}$ ។ កំណត់កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ រួចសង់អ៊ីពែបូលនេះ។

VII. **ផ្នែក A.** g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=a+(bx+c)e^{-x}$

ដែល a,b និង c ជាចំនួនពិត។ គេឱ្យតារាងនេះជាតារាងអថេរភាពនៃ g ។



1.គណនា a ។

2.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $g'(x)=(b-c-bx)e^{-x}$ ។រួចទាញថា $b=-c$ ។

3. បង្ហាញថា $g(x)=(1-x)e^{-x}-1$ ។

4. គណនា $g(0)$ និង សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ផ្នែក B. គេអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=x(e^{-x}-1)$ និងមានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=g(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3. **a.** ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) មានសមីការ $y=-x$ ជាអាស៊ីមតូតមួយនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។ **b.** ចូរសិក្សាទីតាំងរវាងបន្ទាត់ (d) និង ក្រាប (C) ។

4. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

5. តាង α ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងតាង $I(\alpha)=\int_0^{\alpha}xe^{-x}dx$ ។

a. ចូរបកស្រាយតាមក្រាបនៃតម្លៃ $I(\alpha)$ ។ **b.** គណនា $I(\alpha)$ ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក និង គណនា $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)$ ។

6. តាង (D) មានលក្ខខណ្ឌកំណត់ដោយ $(D):\begin{cases}-x\le y\le f(x)\\0\le x\le1\end{cases}$ ។

a.គណនាចំនួនពិត a, b និង c ដែលកំណត់ដោយអនុគមន៍ $K(x)=(ax^2+bx+c)e^{-2x}$ គឺជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ x^2e^{-2x} លើ $\mathbb{R}$ ។

b.គណនាមាឌនៃសូលីតដែលបង្កើតដោយការបង្វិល (D) ជុំវិញអ័ក្ស $(x'ox)$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: ------------------ លេខតុ ----------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------ ---------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 3 ហើយគេសរសេរលេខ $-1,-1,1$ ប៊ូលពណ៌បៃតងចំនួន 2 ហើយគេសរសេរលេខ $-2,2$ និងប៊ូលពណ៌សចំនួន 4 ហើយគេសរសេរលេខ $1,-2,2,2$ ។

1. គេចាប់យកប៊ូលចំនួន 3 ក្នុងពេលតែមួយចេញពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

A. «ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា»។ **B.** «ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានផលគុណជាចំនួនអវិជ្ជមាន »។

C. «ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នានិងផលគុណជាចំនួនអវិជ្ជមាន» **D.** «ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នាឬផលគុណជាចំនួនអវិជ្ជមាន»

2. គេចាប់យកប៊ូលម្តងមួយៗចំនួន 3 ដងចេញពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យហើយដាក់ចូលថង់វិញ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

E. «ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា»។ **F.** «ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នាដោយលើកដំបូងជាពណ៌ក្រហម»។

II. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x+2x-1-\sqrt{2x-1}}{1-x}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2\sin(x-2)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ ។

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=5\sqrt{2}(1+i)$ និង $z_2=-5\left(1+i\sqrt{3}\right)$ ។

ក. ចូរកំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 , z_2 , $\overline{z_1}$ និង $\dfrac{1}{z_1}$ ។

ខ. តាង Z ជាចំនួនកុំផ្លិចកំណត់ដោយ $z_1 Z=z_2$ ចូរសរសេរ Z ជាទម្រង់ពិជគណិត និងជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

គ. ចូរកំណត់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$ និង $\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2\left(4x^3-6x^2+2x-9\right)dx$; $J=\int_0^{\pi}\dfrac{1}{1+\sin x}dx$ និង $k=\int_0^1\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}dx$ ។

V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'+8y=nx^2+px+q$ ។

ក. រកចំនួនពិត n,p,q ដោយដឹងថា $f(x)=2x^2-x+3$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។

ខ. រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''+4y'+8y=0$ ។ **គ.** បង្ហាញថា $h=f+g$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។ ទាញរក $h(x)$ ។

VI. ១. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(1;1;-2)$; $B(1;2;-2)$; $C(0;1;1)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=3\vec{i}+\vec{k}$ ។

ក. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។ **ខ.** គណនា $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ និង $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។

គ. ចូរបង្ហាញថាប្លង់ (P) មានសមីការ $3x+z-1=0$ ។

២. គេឱ្យសមីការអេលីប $(E): 9x^2+16y^2=144$ ។

ក. សរសេរសមីការស្តង់ដានៃ (E) រួចកូអរដោនេនៃ កំពូល និងកំណុំនៃ (E) ។

ខ. គេឱ្យ A និង B ជាពីរចំណុចនៅលើអេលីប (E) ដែល $AF_1+BF_2=8$ ។ គណនា AF_2+BF_1 ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$ មានខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. **a.** គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$ ។ **b.** ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត (C) ។

c. សិក្សាទីតាំងរវាង (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y=x$ ។

2. **a.** បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x លើ $(0,+\infty)$; $f'(x)=\dfrac{(x^2-1)+\ln x}{x^2}$ ។

b. បង្ហាញថា $\left(x^2-1\right)$ និង $\ln x$ មានសញ្ញាដូចគ្នានៅលើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,+\infty)$ ។

c. ចូរទាញរកសញ្ញានៃ $f'(x)$ នៅលើចន្លោះ $(0,1)$ និង $(1,+\infty)$ ។

d. បង្ហាញថា 1 ជាឫសតែមួយគត់នៃសមីការ $f'(x)=0$ ។ **e.** សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3. **a.** បង្ហាញថាខ្សែកោង (C) ប៉ះនិងបន្ទាត់ D ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (Δ) ។ រួចបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុច B ដែលជាចំណុចប្រសព្វ (C) និង D ។

b. កំណត់សមីការបន្ទាត់ D ។

4. សង់បន្ទាត់ D ; (Δ) និង ខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

5. គេមាន S ជាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) ; បន្ទាត់ (Δ) និងបន្ទាត់ឈរដែលមានសមីការ $x=\dfrac{1}{e}$ និង $x=e$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- -------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

១៩

I. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស30 នាក់ដែលក្នុងនោះ 14 នាក់ជានារី ។ ក្នុងចំណោមសិស្សទាំងនោះ នារី 8 នាក់និង បុរស 4 នាក់ជាសិស្សនៅក្នុង អន្តេវាសិកដ្ឋាន។ សិស្សដទៃទៀតនៅក្រៅអន្តេវាសិកដ្ឋាន។ គេជ្រើសរើសសិស្សម្នាក់ក្នុងថ្នាក់នេះដោយចៃដន្យ។ កំណត់ព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A . សិស្សដែលជ្រើសរើសជាសិស្សនៅក្នុងអន្តេវាសិកដ្ឋាន។ B. សិស្សដែលជ្រើសរើសជាសិស្សបុរស។

ក. គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A រួចរកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B ។

ខ. គណនាប្រូបាប $P(B|A)$ មានន័យថាប្រូបាបនៃការចជ្រើសរើសសិស្សបុរសដោយដឹងថាជាសិស្សនៅក្នុងអន្តេវាសិកដ្ឋាន។ កំណត់ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A\cap B$ ។

II. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{\sqrt{1+\pi x}-1}{x}\right)$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2+3x-2}\right)$ **គ.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$ ។

III. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{3}-i$ និង $z_2=\sqrt{3}+3i$ ។

ក. គណនា z_1+z_2, z_1-z_2 , $z_1\times z_2$ និង z_1/z_2 ដោយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ. សរសេរ z_1, z_2 , z_1+z_2 , $z_1\times z_2$ និង z_1/z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

IV. ក.គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^e \ln x\,dx$ និង $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cot^2 x+\cot^4 x\right)dx$ ។

ខ.គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x}{(2x-1)^2}$; $x\neq\dfrac{1}{2}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{(2x-1)^2}$ គណនា $K=\int_0^1\left[\dfrac{2x}{(2x-1)^2}\right]dx$ ។

V. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(E): y''-y'-2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយនេះមានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 3 ត្រង់ $x=1$ ។

VI. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(-3,3)$ ដោយ $g(x)=\ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$ ។

1. សិក្សាភាពគូ និង សេសនៃអនុគមន៍ g ។
2. **a.**គណនាលីមីតនៃ g ត្រង់ -3 និង 3 ។ **b.** សិក្សាអថេរភាពនៃ g លើ $[0,3)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពលើ $(-3,3)$ ។
3. លើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេមាន (C) ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ g នៅក្នុងតម្រុយនេះ ។
   a. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច 0។ **b.** សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះ (C) ក្នុងតម្រុយនេះ។
4. សិក្សាសញ្ញានៃ $g(x)$ ទៅតាមតម្លៃនៃ x ។
5. **a.** គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $h(x)=xg(x)$ ។ **b.** គណនា $\int_0^1 g(x)\,dx$ ។

VII. ផ្នែក **A.** គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=x-e^x$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ។
2. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។ រួចទាញរកសញ្ញានៃ g លើ $\mathbb{R}$ ។

ផ្នែក**B.** f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{xe^x-1}{1-e^x}$ មានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. **a.** គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ ។ **b.** ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ (C) ។
2. **a.** ចូរស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f(x)=\dfrac{x-1}{1-e^x}-x$ ។
   b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d_1) ដែលមានសមីការ $y=-x$ ជាអាស៊ីមតូត**ទ្រេត**នៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (d_1) ។
3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d_2) ដែលមានសមីការ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូត**ដេក**នៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង (d_2) ។
4. **a.** បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(1-e^x)^2}$ ។
   b. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}-\{0\}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
5. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $\left[\dfrac{1}{2};\ln 2\right]$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(\alpha)=\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ ។
6. សង់បន្ទាត់ (d_1) ; (d_2) និងក្រាប (C) ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: -------------------លេខតុ--------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ------------------------------

២០

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{2+x-3x^2}$ $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-x-1}{x-2}$ $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x\sin 2x}{1-\cos^3 2x}$

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=2+2i$ និង $w=-1+i$ ។

១. ចូរគណនា $z+w$; $z-w$; $z\times w$ និង $\dfrac{z}{w}$ ជារាងពីជគណិត។

២. សរសេរ z និង w ជារាងត្រីកោណមាត្រ រួចគណនា $\left(\dfrac{z}{w}\right)^{2019}$ ។

III. ១. រកចំនួនពិត a, b, c បើ $f(x)=\dfrac{-4x+5}{(x-1)(x-2)^2}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{(x-2)^2}$ ។ គណនា $\int_0^1 f(x)dx$ ។

២. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ និង $J=\int_1^e\dfrac{\sin(\ln x)}{2x}dx$ ។

IV. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលក្រហម 2 គ្រាប់ ខៀវ5គ្រាប់ និង ស16 គ្រាប់។ បើគេទាញបានប៊ូលក្រហមមួយគេទទួលបានប្រាក់ 100$ ខៀវមួយ 50$ បើបានប៊ូលពណ៌ស គេមិនបានទទួល ប្រាក់ទេ ។ អ្នកលេខម្នាក់ទាញយក ប៊ូល 5 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យពីថង់ ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

ក. បានប្រាក់ 100$ ខ. បានប្រាក់ 250$ ។

V. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើ 1ត្រង់ $x=1$ ។

VI. **A.** បង្ហាញថាខ្សែកោង $\Omega: 25x^2+36y^2-900=0$ ជាអេលីប ។ កំណត់កូអរដោនេផ្ចិតកំពូល និង សង់ Ω ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេឱ្យស្វ៊ែរ (S) មានសមីការ $x^2+y^2+z^2-2x+2y-23=0$ ។

១. បង្ហាញថា (S) មានផ្ចិត $I(1;-1;0)$ និងកាំ 5 ។

២. គេឱ្យចំណុច $J(-1;1;1)$ និង (P) ជាសំណុំចំណុច $M(x;y;z)$ ដែល $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JM}=0$ ។

ក. បង្ហាញថា (P) ជាប្លង់ដែលមានសមីការ $2x-2y-z+5=0$ ។

ខ. បង្ហាញថាប្រសព្វរវាង (S) និង (P) ជារង្វង់ (C) ដែលមានផ្ចិត J និងកាំ 4 ។

៣. គេឱ្យចំណុច $A(-5;5;3)$ និង (S') ជាស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត A និង កាំ $2\sqrt{13}$ ។

ក. បង្ហាញថា A នៅលើបន្ទាត់ (IJ) ។ ខ. បង្ហាញថា $AJ=6$ ។

៤. គេឱ្យ M ជាចំណុចមួយនៃ (C) ។

ក. បង្ហាញថា ត្រីកោណ AJM ជាត្រីកោណកែងត្រង់ J ។ ខ. ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $AM=2\sqrt{13}$ ។

គ. កំណត់ចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែរ (S') និង ប្លង់ (P) ។

VII. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$ ។ យើងតាង (C) ក្រាបរបស់អនុគមន៍ f នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. ដោះស្រាយក្នុង $(0,+\infty)$ នៃសមីការ $f(x)=0$ ។

2. a - បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ។បកស្រាយលទ្ធផលលីមីតនេះតាមន័យធរណីមាត្រ។

b - គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ។ បកស្រាយលទ្ធផលលីមីតនេះតាមន័យធរណីមាត្រ។

3. a - បង្ហាញថា គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$; $f'(x)=\dfrac{2\ln x+2}{x}$ ។ b - សិក្សាអថេរភាពនិង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4. a - បង្ហាញថា ចំណុច $A(1,-3)$ ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប (C) ។

b - បង្ហាញថា សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ A គឺ $(T): y=2x-5$ ។

c - សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។គេឱ្យ $\dfrac{1}{e}\approx 0.37$; $f(4)\approx 1.7$; $f(6)\approx 3.8$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ --------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ $\mathbf{A}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-3}$ $\mathbf{B}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$ $\mathrm{C}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\tan x}-\sqrt{1+\tan x}}{\sin 2x}$ ។

II. **ក.**គេកំណត់នៅក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការ $z^2-2\sqrt{2}+4=0$ យើងតាងដោយ z_1 ឫសរបស់សមីការផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាន និងតាងដោយ z_2 ឫសមួយទៀត។

ខ.a. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ។ **b.** កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $\mathrm{I}=\int_1^2\left(6x^2-3x-1\right)dx$ និង $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$ ។

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ $f(x)=\dfrac{1}{x\left(1+x^2\right)}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}$ ។ គណនា $\int_1^2 f(x)dx$ ។

IV. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន 7 គ្រាប់ដែលចុះលេខ 1 ដល់ 7 និង ឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន 5 គ្រាប់ដែលចុះលេខពី 5 ដល់ 9 ។ គេចាប់យកឃ្លី 2 គ្រាប់ព្រម គ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល៖

ក. ចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 2 គ្រាប់។ **ខ.** ចាប់បានឃ្លីមានពណ៌ដូចគ្នា ។

គ. ចាប់បានឃ្លីលេខគូជាពណ៌ក្រហម និង លេខសេសជាឃ្លីពណ៌ខៀវ ។

V. **A.** ប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $\mathrm{O}(0,0)$ និងកំណុំ ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលបើវាកាត់តាមចំណុច $\mathrm{A}(8,8)$ ។

ខ. រកតម្លៃនៃ x_1 បើចំណុច $\mathrm{B}(x_1,-4)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល។

B. គេឱ្យចំណុច E ក្នុងតំរុយអរតូណម៉ាល់វិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ នៃលំហ គេឱ្យចំណុច $\mathrm{A}(1;0;2)$, $\mathrm{B}(0;0;1)$, $\mathrm{C}(0;-1;3)$ និង $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំណុច E មានកូអរដោនេ $(0;2;3)$ ។

ខ. បង្ហាញថាចំណុច A,B,C និង E មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។ រួចគណនាតេត្រាអ៊ែតនៃ ABCE ។

គ. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A,B និង C ។

VI. **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(\mathrm{E}): y''-3y'-4y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើខ្សែកោងអនុគមន៍ចម្លើយកាត់តាមចំណុច $(0,1)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង 9 ។

VII. **A.** g ជាអនុគមន៍កំណត់ចន្លោះ $\mathrm{I}=(-1,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$ ។

1. បង្ហាញថា $g(x)'=\dfrac{2x^2+4x+3}{x+1}$, $\forall x\in(-1,+\infty)$ ។

2. សង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។ (ដោយមិនគណនាលីមីតចុងដែនកំណត់)

3. គណនា $g(0)$ ។ រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $\mathrm{I}=(-1,+\infty)$ ។

B.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់នៅចន្លោះ $\mathrm{I}=(-1,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)}-x$ មានក្រាប (C) តំណាងអនុគមន៍នេះក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. **a/** គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

b/ បង្ហាញថា $\forall x\in(-1,+\infty)$, $f'(x)=-\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ។

c/ គូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

2. **a/** បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y=-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ ។

b/ សិក្សាទីតាំងរវាង (C) ; (Δ) ។

c/ សង់ (C) ; (Δ) ក្នុងតម្រុយតែមួយ។

3. h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathrm{I}=(-1,+\infty)$ ដែល $h(x)=\left[\ln(x+1)\right]^2$ ។

a/ គណនា $h'(x)$ កំណត់លើ $\mathrm{I}=(-1,+\infty)$ ។

b/ កំណត់ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ--------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- -------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. ប្រអប់មួយមានប៊ិចខៀវ 8 ដើម និង ប៊ិចក្រហម 7 ដើម ។ អ្នកគ្រូលីដា ចាប់យកប៊ិច 5 ដើម ព្រមគ្នាពីប្រអប់នោះដោយចៃដន្យទុកសម្រាប់លើកទឹកចិត្តសិស្សក្នុងការបង្រៀននៅថ្ងៃស្អែក។

ក. រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់បានប៊ិចខៀវ 2 ដើម និង ប៊ិចក្រហម 3 ដើម ។

ខ. រកប្រូបាបដែលគាត់ចាប់ប៊ិចក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច ។

II. គណនាលីមីត៖ $\mathbf{A}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+4x-5}$ $\mathbf{B}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3-4\sin^2 x}{2\cos x-1}$ $\mathbf{C}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-5x+1}\right)$

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\sqrt{3}+i$ និង $z_2=2\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

១.សរសេរ z_1 , z_2 និង $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

២.សរសេរផលគុណ $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។ ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

IV. **ក.** កំណត់ចំនួនពិត a , b ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{x-2}{(x-1)^2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}$ ។ គណនា $\int_0^2 f(x)dx$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $I=\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx$ និង $J=\int_0^{\pi/3}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)dx$ ។

V. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(\mathrm{E}): y''+2y'+2y=ax^2+bx+c$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $y''+2y'+2y=0$ ។ រួចទាញរកចម្លើយពិសេសនៃ សមីការនេះដោយដឹងថា $y(0)=1$ និង $y'(0)=1$ ។

ខ.កំណត់ចំនួនពិត a , b , c ដោយដឹងថា $y=2x^2-4x+5$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

VI. **១.**គេឱ្យសមីការ $(\mathrm{H}): 64x^2+576y=36(y+8)^2$ ។

ក. បង្ហាញថា (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល។

ខ. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ និង សមីការអាស៊ីមតូត នៃ (H) រួចសង់ក្រាប (H) ។

២. នៅក្នុងលំហនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបន្ទាត់ (d) កាត់តាមចំណុច $\mathrm{I}(1;-3;3)$ ស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v}=(-1;2;1)$ និងមានប្លង់ (P) មួយមានសមីការ $(\mathrm{P}): 2x+y-2z+9=0$ ។

ក.ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច D នៅលើបន្ទាត់ (d) ដោយដឹងថាចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (P) ស្មើ 2 ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P) ។

VII. **A.**គេឱ្យ g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=e^x-x-2$ ។

1. សង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។

2. **a.** ចូរបង្ហាញថាមានចំនួនពិត α តែមួយគត់ដែល $g(\alpha)=0$ រួចបង្ហាញ ថា $1<\alpha<\frac{3}{2}$ ។ **b.** ចូរកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

B. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$ និង មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. **a.** គណនា $f'(x)$ និងស្រាយបញ្ជាក់គ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $f'(x)=-\frac{e^x}{xe^x+1}\times g(x)$ ។

b. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ រួចគណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ **c.** ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$ ។

d. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

2. **a.** សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចគល់តម្រុយ O ។

b. សង់ (C) និង (T) ។ (ដោយក $\alpha=1.1$; $e=2.7$; $e^{\frac{3}{2}}=4.5$)

មណ្ឌលប្រឡង ---------------------------------------
លេខបន្ទប់: --------------------លេខ ---------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ------------------------------

២៣

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. ក្នុងស្បោងមួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហម 4 ឃ្លីពណ៌ខ្មៅចំនួន 3 និង ឃ្លីពណ៌ស ចំនួន 1 ។ គេចាប់យកម្តងឃ្លីចំនួន 3 ។ គេសន្និដ្ឋានថាប្រូបានដែលចាប់បានយកឃ្លីនីមួយៗជាសមប្រូបាប។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A.«យ៉ាងតិចមានឃ្លីពីរពណ៌ក្រហម » ។ **B.** «យ៉ាងតិចមានឃ្លីពីរពណ៌ដូចគ្នា» ។ **C.** «ឃ្លីទាំងបីមានពណ៌ខុសៗគ្នា» ។

II. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim_{x\to 2}\frac{7x^2-8x-12}{x^2-3x+2}$ ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-5(1-\cos x)}{2x^2}$ គ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$ ។

III. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=1+i$; $b=\sqrt{3}-i$; $c=\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)$ និង $d=1+i\sqrt{3}$ ។

1. សរសេរ a,b និង d ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

2. **a-** ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $ac=2d$ ។ **b-** ចូរកំណត់ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ c ។ **c-** ចូរកំណត់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $I=\int_1^e\frac{3\ln^2 x+2\ln x}{x}dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^4 x}dx$ និង $K=\int_1^2\frac{3x^4+x^2-1}{x^2}dx$ ។

V. **a.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(E): y''-3y'-10y=0$ ។

b. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) បើគេដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះមានបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $A(0,5)$ ហើយកែងបន្ទាត់បន្ទាត់ $(L): y=-\frac{1}{2}x$ ។

VI. **១.**គេមានសមីការ $(5x+4y)^2=40(xy+10)$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរ និង សង់អេលីបនេះ។

ខ.កំណត់បរិមាត្រនៃត្រីកោណ F_1F_2P ដែល F_1 និង F_2 ជាកំណុំ ហើយ P ជាចំណុចមួយនៅលើអេលីប។

២. នៅក្នុងលំហនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(\vec{o},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(0;-1;0)$, $B(1;1;0)$ និង $C(0;0;1)$ ។

1. **a.**កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ **b.** បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។

c.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការប្លង់ (P) មានសមីការ $2x-y+z-1=0$ ។

2. គេមានប្លង់ $(Q): x+y-2z+1=0$ ។ បង្ហាញថាប្លង់ (P) និង (Q) ប្រសព្វគ្នាបានសមីការបន្ទាត់ (Δ): $(x=t; y=1-5t ; z=3t)$,$t\in\mathbb{R}$ ។

3. គេឱ្យសមីការស្វ៊ែ (S): $x^2+y^2+z^2+2x-2z+4/3=0$ ។

a. បង្ហាញថាស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(-1;0;1)$ ។ រួចគណនាកាំរបស់ស្វ៊ែ។ **b.** បង្ហាញថាស្វ៊ែ (S) ប៉ះនឹងប្លង់ (P) និង (Q) ។

VII. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $(-1,+\infty)$ ដែល $f(x)=\frac{2x}{1+x}-\ln(1+x)$ តាង (C) ជាក្រាបតំណាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ មានឯកតា 1cm នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង 2cm នៅលើអ័ក្សអរដោនេ។

ផ្នែក A

1. គណនាលីមីតនៃ f ខិតជិត $+\infty$ ។

2. **a.** គ្រប់តម្លៃ x ដែលនៅចន្លោះ $(-1,+\infty)$; $f(x)=\frac{1}{1+x}\left[2x-(1+x)\ln(1+x)\right]$ គណនាលីមីតនៃ f ខិតជិត -1 (ដោយប្រើ $\lim_{X\to 0}X\ln X=0$)។

b. កំណត់សមីការ D ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

3. កំណត់ដេរីវេ f' នៃ f និង បង្ហាញថាគ្រប់ x ដែលនៅចន្លោះ $(-1,+\infty)$; $f'(x)=\frac{1-x}{(1+x)^2}\cdot(1+x)$ ។

4. **a.** សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើចន្លោះ $(-1,+\infty)$ ។ **b.** គណនាតម្លៃនៃ $f(1)$ ។ **c.** សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើចន្លោះ $(-1,+\infty)$ ។

ផ្នែក B

1. កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។

2. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $f(x)=0$ មានឬសតែមួយគត់ α នៅក្នុងចន្លោះ $[1;5]$ ។ រួចបង្ហាញថា $\ln(1+\alpha)=\frac{2\alpha}{1+\alpha}$ ។

3. ចូរកំណត់សញ្ញានៃ f លើចន្លោះ $(-1,+\infty)$ ។

4. សង់បន្ទាត់ប៉ះ (T) , អាស៊ីមតូត D និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។(ដោយយក $\alpha=3.9$; $\ln 2=0.7$; $\ln 6=1.8$)

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ--------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- -------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+6x-6}{x^2-1}$ ខ. $\lim_{x\to0}\frac{(\sin5x)(\sin4x)}{-2x^2}$ គ. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\sin x}-x\right)$ ឃ. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos7x}{e^{-x^2}-e^{13x^2}}$ ។

II. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2+\sqrt3}+i\sqrt{2-\sqrt3}$ ។
ក. គណនា z^2 , កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z^2 , និងសរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
ខ. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z ។ គ.ចូរកំណត់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $I=\int_0^1(1-x)e^x dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos^2x-1\right)dx$ និង $K=\int_{-1}^{8}\left[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)}\right]dx$ ។

IV. គេបង្កើតប័ណ្ណដែលមានលេខបីខ្ទង់ដែលខ្ទង់នីមួយៗអាចជាលេខដដែលៗដោយប្រើលេខ $1,2,3,4,5,6$ ។
ក. រកចំនួនប័ណ្ណដែលអាចបង្កើតបាន។
ខ. គេរើសយកប័ណ្ណមួយដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលរើសបាន៖
A. «ប័ណ្ណជាចំនួនគូ»។ **B.** «ប័ណ្ណជាពហុគុណនៃ 5 » ។ **C.** «ប័ណ្ណជាចំនួនធំជាង 400 »។

V. **1.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានសក្ខខណ្ឌដើម៖ $(E): y''-9y=0$ ដែល $y(\ln2)=1$ និង $y'(\ln2)=-3$ ។
2. ប្រអប់បិទជិតមួយមានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែង មានបាតជាការេ មានមាឌសរុបស្មើ $252\,\text{m}^2$ ផ្ទៃបាតថ្លៃ $5\$/1\text{m}^2$ គម្របលើថ្លៃ $2\$/1\text{m}^2$ និងផ្ទៃចំហៀងថ្លៃ $3\$/1\text{m}^2$ ។ រកវិមាត្រនៃប្រអប់ ដើម្បីឱ្យការចំណាយធ្វើប្រអប់នេះអស់សាហ៊ុយតិចបំផុត។

VI. A.កំណត់សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះដេក ហើយកាត់តាមចំណុច $(3,3)$; $(6,5)$; $(6,-3)$ ។ កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល ; កូអរដោនេនៃកំណុំ និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។
B.ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec i,\vec j,\vec k)$ មួយគេមានចំណុច $A(-1;0;1)$, $B(1;4;-1)$, $C(3;-4;-3)$ និង $D(4;0;4)$ ។
១. បង្ហាញថាចំណុច A,B,C និង D មិនស្ថិតនៅលើប្លង់តែមួយ។ ២. បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។
៣. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។ ៤. គណនាចម្ងាយ $d(O,(AB))$ ។
៥. ក. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែតនៃ $ABCD$ ។
ខ. H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច D លើប្លង់ (ABC) ។ គណនា HD ។

VII. **1.**គេឱ្យតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=(1-2x)e^{2x}-1$ ។
ចូរកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
g(x)	-1	↗	0	↘	$-\infty$

2. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(1-x)e^{2x}-x$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec i,\vec j)$ ។
a. គណនា $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ និងបង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ។
រួចបកស្រាយថាខ្សែកោងមានមែកប៉ារ៉ាបូល។
b. ស្រាយបំភ្លឺថា $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ។
c. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta: y=-x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$ ។
d. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C) និង Δ ។
3. **a.** បង្ហាញថាគ្រប់ ចំនួនពិត x ; $f'(x)=g(x)$ ។ **b.**សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
c. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ៖ $0.8<\alpha<0.9$ ។ **d.** បង្ហាញថា (C) មានចំណុចរបត់ I មួយ។
4. សង់ (C) និង Δ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec i,\vec j)$ ។
5. λ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានខុសពី 0 ដែល $I(\lambda)=\int_\lambda^0(1-x)e^{2x}dx$ ។
a. ចូរបកស្រាយតាមក្រាបភិចនៃ $I(\lambda)$ ។
b.ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកចូរបង្ហាញថា $I(\lambda)=\frac34+\left(\frac12\lambda-\frac34\right)e^{2\lambda}$ ។
c. គណនា $\lim_{\lambda\to+\infty}I(\lambda)$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---

លេខបន្ទប់: -------------------លេខតុ---------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:---

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------ ----------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^3-8x^2+4x+2}$ ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin \pi x}$ គ. $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ឃ. $\lim_{x\to 1^+}\frac{\left|1+x-2x^2\right|}{\sqrt{x+3}-2}$ ។

II. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ និង $W=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}Z$ ។

ក. ចូរសរសេរ Z និង W ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ ខ.ចូរសរសេរ W ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

III. ក.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $\mathrm{I}=\int_1^3\left(3x^2-4x+1\right)dx$ $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan x}dx$ ។

ខ. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}$ ដែលគ្រប់ $x\neq 0$ ។បង្ហាញថា $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$ ។ គណនា $\int_1^2 f(x)dx$ ។

IV. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស 25 នាក់ដែលក្នុងនោះមានសិស្សភេទប្រុស 10 នាក់និងសិស្សភេទស្រី 15 នាក់។គេបានជ្រើសរើសយកសិស្ស 4 នាក់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. **A.** «ជ្រើសរើសបានសិស្សភេទប្រុស 2 នាក់ និងសិស្សស្រី 2 នាក់»។ ខ. **B.** «ជ្រើសរើសបានសិស្សភេទសិស្សស្រីយ៉ាងច្រើន 3 នាក់»។

គ. **C.** «ជ្រើសរើសបានសិស្សភេទសិស្សស្រីយ៉ាងតិច 3 នាក់»។

V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(\mathrm{E}): 2y'-y=(1-x)e^{\frac{x}{2}}$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត m និង p ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\left(mx^2+px\right)e^{\frac{x}{2}}$ ជាចម្លើយសមីការនៃ (E) ។

ខ. ស្រាយបំភ្លឺថា បើ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $(g-f)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(\mathrm{E}'): 2y'-y=0$ ។

VI. **A.**គេមានសមីការ $(\mathrm{H}): 9x^2-16y^2-144=0$ ។

1. បង្ហាញថា (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ ;កូអរដោនេកំណុំ F_1 និង F_2 និងសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល រួចសង់ (H) ។

2. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច N ដែលនៅលើ (H) និង $\angle F_1NF_2=90^o$ ។

B.ក្នុងតម្រុយអត្ថណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យបួនចំណុច $\mathrm{A}(1;4;0)$, $\mathrm{B}(-3;2;4)$, $\mathrm{C}(3;1;2)$ និង $\mathrm{D}(7;3;-2)$ ។

1. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ និង $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ ។ គណនាប្រវែង AB, BC , CD និង AD

2.ស្រាយបញ្ជាក់ថា ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម ។ រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណនេះ។

3. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) គូសចេញពី O ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ។

4. គណណនាចម្ងាយពីគល់ O ទៅប្លង់ (ABC) ។

VII. ផ្នែក I. គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$ និងតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ។

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

1. គណនា $g(1)$ ។
2. ដោយប្រើតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ចូរបង្ហាញថា $g(x)>0$ គ្រប់ x លើ $(0,+\infty)$ ។

ផ្នែក II. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$

តាង C តំណាងខ្សែកោងនៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ មានឯកតា 2cm ។

1. គណនា $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និងទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង C ។

2. គណនា $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ។ (ដោយសរសេរ $f(x)$ ជាទម្រង់ $f(x)=x\left[\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$)។

3. **a.** ស្រាយបំភ្លឺថា $f'(x)=g(x)$ គ្រប់ x លើ $(0,+\infty)$ ។ **b.** សិក្សាអថេរភាពនៃ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4. **a.** បង្ហាញថា $\mathrm{I}(1,0)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង C ។

b.បង្ហាញថា $y=x-1$ ជាសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ (T) ត្រង់ $\mathrm{I}(1,0)$ ជាមួយក្រាប C ។ **c.** សង់បន្ទាត់ (T) និង ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

5. **a.** បង្ហាញថា $\int_1^2\left(1+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{7}{4}$ ។ **b.** បង្ហាញដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកថា $\int_1^2(x+1)\ln x dx=4\ln 2-\frac{7}{4}$ ។

c. គណនា គិតជា cm^2 នៃផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង C , អ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងសមីការបន្ទាត់ $x=1$ និង $x=2$ ។

6. ដោះស្រាយតាមក្រាបក្នុងចន្លោះនៃ $(0,+\infty)$ វិសមីការ $(x+1)\ln x\geq\frac{3}{2}(x-1)$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ---------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:---

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- -----------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គេចាប់យកសំបុត្រ ៣ សន្លឹកព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីប្រអប់មួយដែលមានសំបុត្រចំនួន ១៥សន្លឹកចុះលេខពី១ ដល់១៥។រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A. « សំបុត្រទាំង ៣ ជាចំនួនបឋម »។ B. «សំបុត្រ១សន្លឹកគត់ជាចំនួនបឋម»។

C. «សំបុត្រទាំង ៣ មានផលបូកលេខជាចំនួនគូ»។ D. «សំបុត្រទាំង ៣ មានផលគុណលេខជាចំនួនគូ»។

II. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+9x-27}{2x^3-54}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3x+|x|}{3x-2|x|}$ គ. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-1}}{1-x}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}-2\sin x}{4x-\pi}$ ។

III. **1.** គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច a កំណត់ដោយ៖ $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)$ ។

a.បង្ហាញថា $a=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$។ **b.** កំណត់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{11\pi}{12}$ និង $\sin\frac{11\pi}{12}$ ។

2. a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^4=8\left(1-i\sqrt{3}\right)$ ។ **b.** ចូរដោះស្រាយសមីការ (E): $z^4=8\left(1-i\sqrt{3}\right)$ ។

IV. ក.គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $I=\int_1^2\left(6x^2+4x-8\right)dx$ $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}\,dx$ និង ។

ខ.គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$ ដោយ $f(x)=\frac{2x+5}{x^2+3x+2}$ ។ កំណត់ចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$ ចំពោះ $x\neq-1;\ x\neq-2$ ។ រួចគណនា $K=\int_0^1 f(x)dx$ ។

V. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''+2y'-15y=0$ ។ ខ. រកចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ដោយដឹងថា $y(0)=5$ និង $y'(0)=-1$ ។

VI. **A. 1.** កំណត់ទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរ ហើយមានកំណុំ $F(2,1)$ និងកំពូលនៅលើបន្ទាត់ $3x+7y+1=0$ ។

2. រកកូអរដោនេកំពូល និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

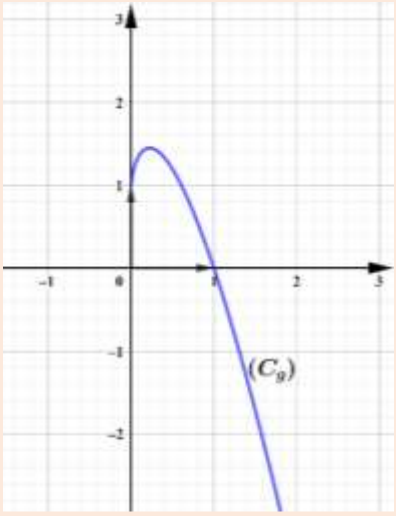
B.ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យចំណុច $A(-2;1;1)$, $B(-1;-1;0)$, $C(1;1;4)$, $E(2;2;0)$ និងបន្ទាត់ Δ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រមួយគឺ $x=\alpha; y=\alpha\ ;\ z=-\alpha+2\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}$ ។

1. a. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។ **b.** បង្ហាញថាសមីការប្លង់ (P) គឺ $x+y-z+2=0$ ។

2. a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា E មិនស្ថិតនៅលើប្លង់ (P) ។ **b.** គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត EABC ។

3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ កែងនឹងប្លង់ (P) ។

VII. **A]** គេមានរូបខាងក្រោមដំណាងក្រាបភិចក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉េនៃអនុគមន៍ g កំណត់លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=1-x-2x\ln x$ ។



1. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ ។

2. ដោយប្រើប្រាស់ក្រាបភិចចូរកំណត់ចន្លោះដែល $g(x)>0$ និង $g(x)<0$ ។

3. សិក្សាសញ្ញានៃអនុគមន៍ g លើ $(0,+\infty)$ ។

B] គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ គេបាន $\begin{cases}f(x)=x-x^2\ln x\ ,\ \ x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

តាង (C_f) ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ មានឯកតា 2cm ។

1. a.បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ និង គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ។

b.ចូរបង្ហាញថាក្រាប (C_f) មានមែកប៉ារ៉ាបូលខាង $+\infty$ ដោយបញ្ជាក់ទិសទៅ របស់វា។

2. a. បង្ហាញថា f មានដេរីវេត្រង់ 0 ។ **b.** ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C_f) ត្រង់ចំណុច ដែលមានស្មើនឹង 0 ។

3. a. បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in(0,+\infty)$; $f'(x)=g(x)$ ។ **b.** បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើនលើ $(0,1)$ និង ជាអនុគមន៍ចុះ លើ $(1,+\infty)$ ។

4. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0,+\infty)$ ។

5. a. បង្ហាញថា $\forall x\in(0,1)$; $x^2\ln x<0$ និងបង្ហាញថា $\forall x\in(1,+\infty)$; $x^2\ln x>0$ ។ **b.**សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C_f) និងបន្ទាត់ (T) ។

6. a. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $\left(\sqrt{e}\ ,\ 2\right)$។ **b.** ស្រាយបំភ្លឺថា $\alpha^\alpha=e$ ។

7. សង់ក្រាប (C_f) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ----------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)$ ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(5x)}{-2x}$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\pi-4x}$ ។

II. 1. ដោះស្រាយសមីការនៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ $z^2-z\sqrt{2}+2=0$ ។

2. **a -** គេមានចំនួនកុំផ្លិច $u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$ ។ បង្ហាញថាម៉ូឌុល $|u|=\sqrt{2}$ និង អាគុយម៉ង់ $\arg(u)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ ។

b - សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ u រួចបង្ហាញថា u^6 ជាចំនួនពិត។

III. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សពូកែចំនួន 9 នាក់ ដែលក្នុងនោះសិស្សស្រីមានចំនួន 4 នាក់។ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុម ក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស 3 នាក់ដោយ ជន្យយកទៅប្រកួតជាមួយក្រុមសិស្សនៃថ្នាក់ដទៃ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី។ B. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស។

C. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសិស្សស្រីតែម្នាក់គត់។

IV. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y''-y'=2(y'-y)$ ។

ខ. ចូរកំណត់ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ដែលមាន $y(0)=3$ និង $y'(0)=4$ ។

V. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I=\int_1^2 x\left(4x^2-3x+2\right)dx$; $J=\int_0^{\ln 2}\left(e^x+1\right)^2dx$ និង $K=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}-1\right)dx$ ។

VI. 1. គេមានសមីការ (E): $3x^2-10=\dfrac{2}{3}\left(3-2y^2\right)$ ។បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។ រួចសង់អេលីប (E) ។

2. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេមានចំណុច $A(3;2;4)$, $B(0;3;5)$, $C(0;2;1)$ និង $D(3;1;0)$ ។

a - រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{DC}$ ។

b - បង្ហាញថាចតុកោណ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម។

c - គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម ABCD ។

VII. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ៖ $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ (ឯកតា 2cm)។

1. **a -** សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ ។

b - បង្ហាញថា គ្រប់ x ខុសពីសូន្យ គេបាន $f(x)=x^2e^{-x}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ ។

c - សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C) ។

2. **a -** ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x}$ ។

b - សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 0 ។

4. គណនា $f(-2)$; $f(2)$ និង $f(3)$ ។ រួចសង់បន្ទាត់ (T) និងខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

(គេឱ្យ $e^{-3}=0.05$; $e^{-2}=0.13$; $e^{-1}=0.36$; $e=2.71$ និង $e^2=7.4$)

5. **a -** បង្ហាញថាអនុគមន៍ $F(x)$ កំណត់ដោយ $F(x)=\left(-x^2-4x-5\right)e^{-x}$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

b - គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ $x=-1$ និង $x=0$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---

លេខបន្ទប់: -------------------- លេខតុ --------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-5x^2-x+6}{x^2-3x+2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x+\sin x}{x^2+\tan x}$ គ. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos x}{\tan^2 x}$

II. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលចំនួន 5 គ្រាប់ ដែលក្នុងនោះមាន ប៊ូលពណ៌សចំនួន 2 ចុះលេខ 1 ; -1 និង ប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 3 ចុះលេខ $1;1;-1$ ។គេចាប់យកប៊ូល 2 ដំណាលគ្នាចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A." ចាប់បានប៊ូលទាំង 2 មានពណ៌ដូចគ្នា" ។ B." ចាប់បានប៊ូលទាំង 2 មានលេខដូចគ្នានិងមានពណ៌ដូចគ្នា" ។

C." ចាប់បានប៊ូលទាំង 2 មានផលបូកស្មើនឹងសូន្យ" ។ D." ចាប់បានប៊ូលទាំង 2 មានផលគុណជាចំនួនវិជ្ជមាន" ។

III. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1-i$ និង $z_2=2+\sqrt{3}+i$ ។

1. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z_1 ។

2. a - បង្ហាញថា $\dfrac{z_2}{z_1}=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ ។ **b -** សរសេរ z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

IV. 1. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $I=\int_{-1}^{0}\left(4x^3+3x^2-2\right)dx$; $J=\int_{0}^{\ln 3}\left(2e^{2x}+\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)dx$ ។

2. គេឱ្យអនុគមន៍ $h(x)=\dfrac{\sin 2x\cos x}{1+\sin x}+1$ កំណត់លើ $[0\,;\pi]$ ។ បង្ហាញថា $h(x)=2\sin x+\cos 2x$ រួចគណនា $K=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}h(x)dx$ ។

V. A. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គេឱ្យចំណុច $A(1;1;2), B(2;1;0); C(1;2;0)$ និង $D(1;0;4)$ ។

1. a - កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ។ **b -** បង្ហាញថា BCD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B ។

2. a - កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

b - បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយដែលមានសមីការ $2x+2y+z-6=0$ ។

c - គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។

B. គេឱ្យសមីការប៉ារ៉ាបូល (P) មួយមានកូអរដោនេកំណុំ $F(2,1)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាអ័ក្សអរដោនេ។

1. កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និង សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល (P) ។

2. ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច $M(2,y_0)$ ដែលស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល (P) ។ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូល (P) ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-4y'-5y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=3$ និង $y''(0)=27$ ។

VII. ផ្នែក I : គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x-\ln x-1$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)$ ។

2. a - គណនា $g'(x)$ គ្រប់ x លើ $(0,+\infty)$ ។ **b -** សង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។ រួចបង្ហាញថា $g(x)\geq 0$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។

ផ្នែក II : គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x^2-2x\ln x-\dfrac{1}{x}$ ហើយ (C_f) ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយ អរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. a - គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃ (C_f) ។

b - ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\forall x\in(0,+\infty)$ គេបាន $f(x)=x^2\left(1-2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$ ។ រួចគណនា $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ ។

2. គណនា $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ។ រួចបកស្រាយលទ្ធផលលីមីតនេះតាមក្រាបភិច។

3. a - បង្ហាញថា $\forall x\in(0,+\infty)$; $f'(x)=2g(x)+\dfrac{1}{x^2}$ ។ **b -** សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាព។

4. កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C_f) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 1 ។

5. សង់បន្ទាត់ (T) និងក្រាប (C_f) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ-----------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- -----------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-6x}\right)$ ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\tan^2 x\right)$

II. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សចំនួន 12នាក់ដែលក្នុងនោះមានសិស្សស្រីចំនួន5នាក់ និងសិស្សប្រុសចំនួន7នាក់ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុមសម្អាត់ថ្នាក់ក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស4 នាក់ដោយចៃដន្យ។ ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A." ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែជាសិស្សប្រុស "។ B." ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែជាសិស្សស្រី "។

C." ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានពាក់កណ្ដាលជាសិស្សស្រី "។

III. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $b=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ និង $c=a+b$ ។

1. **a -** ចូរសរសេរ a ; b និង c ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ **b -** បង្ហាញថា $b^2=a$ ។
2. **a -** ស្រាយបញ្ជាក់ថា b ជាឫសមួយនៃសមីការ $(\mathrm{E}): z^2+z-c=0$ ។

   b - គេឱ្យ d ជាឫសមួយទៀតនៃសមីការ (E) ។ បង្ហាញថា $d=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\left[-\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)-i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$ ។

IV. 1. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $\mathrm{I}=\int_0^1(2x-1)(2x+1)dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2x\cos x+\cos 2x)dx$ ។

2. គេមានអនុគមន៍ $\mathrm{H}(x)=\left(-x^2-2x-1\right)e^{-x}$ ជាព្រីមីទីវនៃ $\mathrm{h}(x)=\left(x^2-1\right)e^{-x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។ គណនា $\mathrm{K}=\int_0^1\ln x dx$ ។

V. **A.** ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។ គេឱ្យចំណុច $\mathrm{A}(3;1;5),\mathrm{B}(3;5;1)$ និង $\mathrm{C}(-1;5;5)$ ។

1. **a -** កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ និងប្រវែង AB និង AC ។ **b -** គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ។
2. កំណត់រង្វាស់មុំ $\angle\mathrm{BAC}$ រួចបង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

B. គេមានសមីការ (E): $25x^2+16y^2-400=0$ ។ បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរ រួចសង់រូប (E) ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(\mathrm{E}): y''-6y'+9y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដោយដឹងថាក្រាប (Γ) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះមានអតិបរមាស្មើនឹង 1 ត្រង់ 0 ។

VII. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x}{2}-1+\dfrac{2}{1+e^x}$ និង (C) ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. **a -** គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។

   b - បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) មានសមីការ $y=\dfrac{x}{2}-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $+\infty$ ។ រួចសិក្សាទីតាំងធៀប (C) និង (d) ។
2. **a -** ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)=\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{2e^x}{1+e^x}$ រួចគណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ។

   b - បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d') មានសមីការ $y=\dfrac{x}{2}+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$ ។ រួចសិក្សាទីតាំងធៀប (C) និង (d') ។
3. **a -** បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2$ ។

   b - សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
4. **a -** បង្ហាញថាគល់ O ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

   b - ស្រាយបញ្ជាក់ថាគល់ O ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប (C) ។
5. សង់ (d); (d') និង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។
6. តាង λ ជាចំនួនពិត ដែល $\lambda>0$ និង តាង $\mathrm{A}(\lambda)$ ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយ (C), (d) និងបន្ទាត់ឈរពីរ $x=0$ និង $x=\lambda$ ។

   a - បង្ហាញថា $\dfrac{2}{e^x+1}=\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$ និង គណនា $\mathrm{A}(\lambda)$ ជាអនុគមន៍នៃ λ ។

   b - បង្ហាញថា $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathrm{A}(\lambda)=2\ln 2$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---

លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ-------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

៣០

I. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{(\ln x-1)(\ln x+4)}{\ln^2 x-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{-x}+e^{x}\right)\sin^2 x}{2x^2}$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$

II. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលចំនួន 9 គ្រាប់ ដែលក្នុងនោះមានប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 4 ចុះលេខ $-2;2;2;2$ និង ប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 5 ចុះលេខ $-2;-2;0;2;2$ ។ គេចាប់យកប៊ូល 2 ដំណាលគ្នាចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A." ចាប់បានប៊ូលទាំងពីរមានពណ៌ដូចគ្នា" ។ B." ចាប់បានប៊ូលទាំងពីរមានលេខដូចគ្នា" ។

C." ចាប់បានប៊ូលទាំងពីរមានពណ៌ដូចគ្នានិងមានផលបូកស្មើនឹងសូន្យ" ។

III. **1.** គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $\mathrm{I}=\int_1^3\left(3x^2-4x+2\right)dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}dx$ ។

2. គេមានអនុគមន៍ $h(x)=x\ln x$ ។ គណនាដេរីវេ $h'(x)$ នៃអុគមន៍ $h(x)$ លើចន្លោះ $[1,e]$ ។ រួចគណនា $\mathrm{K}=\int_1^e \ln x dx$ ។

IV. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i$; $z_2=\sqrt{3}+i$; $z_3=\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)$ និង $z_4=1+i\sqrt{3}$ ។

1. ចូរសរសេរ z_1 ; z_2 និង z_4 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

2. **a -** ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z_1\cdot z_3=2z_4$ ។ **b -** សរសេរ z_3 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

V. **A.** ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។ គេឱ្យចំណុច $A(0;0;3)$, $B(1;1;0)$, $C(3;0;0)$ និង $D(0;3;0)$ ។

1. **a -** បង្ហាញថា $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=9\vec{i}+9\vec{j}+9\vec{k}$ រួចបង្ហាញថាចំណុច A, B, C និង D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

b - គណនាមាឌ V នៃតេត្រាអ៊ែត ABCD ។

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ACD ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

3. គេឱ្យ H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច B លើប្លង់ (ACD) ។ គណនា BH ។

B. គេមានសមីការ (E): $(3x-4y)^2=24(6-xy)$ ។ បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំប្រវែងអ័ក្សតូចនិងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ រួចសង់រូប (E) ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-6y'+5y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដោយដឹងថា $y'(0)=1$ និង $y''(0)=11$ ។

VII. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(x-2)^2e^x$ និង (C) ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (ឯកតា 1cm)។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។

2. **a -** ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=x^2e^x-4xe^x+4e^x$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

b - បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។ (ប្រើលទ្ធផល $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n e^x=0$; $\forall x\in\mathbb{N}^*$)

3. **a -** បង្ហាញថា $f'(x)=x(x-2)e^x$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

b - បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty,0]$ និង $[2,+\infty)$ ហើយ ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $[0,2]$ ។

c - សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$ ។

4. **a -** បង្ហាញថា $f''(x)=\left(x^2-2\right)e^x$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ រួចបង្ហាញថាក្រាប (C) មានចំណុចរបត់ពីរដែលត្រូវកំណត់កូអរដោនេ។

b - សង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

(គេឱ្យ $\sqrt{2}=1.4$; $\left(\sqrt{2}-2\right)^2e^{\sqrt{2}}=1.4$; $\left(-\sqrt{2}-2\right)^2e^{-\sqrt{2}}=2.8$ និង $f(2.8)\approx 10.5$)។

5. **a -** កំណត់តម្លៃ a,b និង c ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=(x-2)^2e^x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

b - បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ $x=0$ និង $x=1$ គឺ $\mathbf{S}=5(e-2)\mathrm{cm}^2$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ ---------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

៣១

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}$ ។

II. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សពូកែចំនួន 12 នាក់ ដែលក្នុងនោះសិស្សស្រីមានចំនួន 7 នាក់ និងសិស្សប្រុសមានចំនួន 5 នាក់។ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុមក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស 3 នាក់ដោយចៃដន្យយកទៅប្រកួតជាមួយក្រុមសិស្សនៃថ្នាក់ដទៃ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. «ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី»។ B. «ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស»។

C. « ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានយ៉ាងតិចម្នាក់ជាសិស្សស្រី»។

III. **1.** ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ នៃសមីការ $z^2-3z+3=0$ ។

2. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $z_2=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។ សរសេរ $(z_1+\overline{z}_2)$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និង គណនា $(z_1+\overline{z}_2)^{12}$ ។

(យើងតាងដោយ $\overline{z}_2$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_2)។

IV. **1.** គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $\mathrm{I}=\int_1^5\left(x^2+2x-3\right)dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos3x-4\sin2x)dx$ ។

2. យើងមានអនុគមន៍ h កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{-2,1\}$ ដោយ $\mathrm{h}(x)=\dfrac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)}$ ។

កំណត់ចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $\mathrm{h}(x)=\dfrac{\mathrm{A}}{(x-1)^2}+\dfrac{\mathrm{B}}{x-1}+\dfrac{\mathrm{C}}{x+2}$ ។ រួចគណនា $\mathrm{K}=\int_2^3\mathrm{h}(x)dx$ ។

V. **A.** ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គេឱ្យចំណុច $\mathrm{A}(1;1;-2),\mathrm{B}(1;2;-2)$, $\mathrm{C}(0;1;1)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=3\vec{i}+\vec{k}$ ។

1. **a -** កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។ **b -** បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។

2. **a -** គណនាផលគុណស្កាលែនៃ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ និង $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។ **b -** បង្ហាញថាប្លង់ (P) មានសមីការ $3x+z-1=0$ ។

3. កំណត់សមីការប្លង់ (Q) ដែលកែងនឹងបន្ទាត់ (AC) ហើយកាត់តាមចំណុច A ។

B. គេមានសមីការ $(\mathrm{H}):\ 4x^2=9(y-2)(y+2)$ ។ បង្ហាញថាសមីការ (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរនិងសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរនៃសមីការអ៊ីពែបូល រួចសង់រូប (H) ។

VI. **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(\mathrm{E}):y''-5y'+4y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ដោយដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(\mathrm{L}):\ y=-2x+1$ ត្រង់ចំណុចមួយដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 0 ។

VII. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$ និង (C) ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

2. **a -** គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ រួចបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$ ។ **b -** គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]$ ។រួចបកស្រាយលទ្ធផលនេះតាមក្រាភិច។

3. **a -** បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ គេបាន $f'(x)=-\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$ ។

b - សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ គណនា $f(1)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ **c -** កំណត់សញ្ញានៃ f គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$

4. បង្ហាញថា $\mathrm{I}(1,0)$ ជាចំណុចរបត់មួយនៃក្រាប (C) ។

5. **a -** គណនា $f(3)$; $f(4)$ និង $f(6)$ រួចសង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

b - គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកនៃប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (C) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ $x=1$ និង $x=e$ ។(គេឱ្យ $\ln2=0.7$; $\ln3=1.1$)

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: ---------------------លេខតុ---------------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ------------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

៣២

I. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+6x+5}{2x^2-x-3}$ **ខ.** $\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan 2x}$ **គ.** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}$ ។

II. ក្នុងថង់មួយមានកូនឃុកក្កតាខ្លាឃ្មុំចំនួន 8 ដែលក្នុងនោះមានកូនឃុកក្កតាខ្លាឃ្មុំពណ៌សចំនួន 3 និងពណ៌ខ្មៅចំនួន 5 ។ គេចាប់យកកូនឃុកក្កតាខ្លាឃ្មុំចំនួន 3 ពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ។ ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. «កូនឃុកក្កតាខ្លាឃ្មុំទាំងបីដែលចាប់បានមានពណ៌ស»។ B. «កូនឃុកក្កតាខ្លាឃ្មុំទាំងបីដែលចាប់បានមានពណ៌ដូចគ្នា»។

C. « កូនឃុកក្កតាខ្លាឃ្មុំទាំងបីដែលចាប់បានមានមួយយ៉ាងតិចមានពណ៌ស »។

III. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់៖ $I=\int_1^e\frac{2\ln x}{x}dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}\right)dx$; $K=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx$ ។

IV. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=(1+i)^3$; $z_2=-1+i\sqrt{3}$ និង $Z=z_1\times z_2$ ។

1. ចូរសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិតនៃ Z ។
2. កំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z_1 និង z_2 ។ **3.** ចូរកំណត់ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z ។

V. **A.** ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គេឱ្យចំណុច $A(3;2;4), B(0;3;5)$ និង $C(3;1;0)$ ។

1. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។
2. គេឱ្យចំណុច $E(1;a+2;-1)$ ដែល a ជាចំនួនពិតមួយ។

a- គណនា $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AE}$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។ **b**- កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ E ជាចំណុចមួយនៅលើប្លង់ (ABC) ។

B. គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការទូទៅ $(P): x^2+2x-8y-15=0$ ។

ក. ចូរបម្លែងសមីការ (P) ជាទម្រង់សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល។ រួចរកកូអរដោនេនៃកំពូល និង កូអរដោនេកំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល (P) ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល (P) និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ (P) ។

VI. **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+2y'+2y=0$ ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)=e^{-x}\cos x$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។

VII. **A.** គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=2e^{2x}-4e^x+2$ ។

1. **a**- បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}$; $g'(x)=4e^x\left(e^x-1\right)$ ។

b- បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើនលើ $[0,+\infty)$ និង ចុះលើ $(-\infty,0]$ ។

2. គណនា $g(0)$ និងបង្ហាញថា $g(x)\ge 0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។

B. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=2x-2+\left(e^x-2\right)^2$ ។តាង (C) ជាក្រាបនៃអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ឯកតា($\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\text{cm}$)។

1. **a**- គណនា $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ។

b- បង្ហាញថា $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+2)\right]=0$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) នៅជិត $-\infty$ ។

2. **a**- បង្ហាញថា គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=g(x)$ ។

b- សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$ ។

c- បង្ហាញថា $y=2x-2$ ជាសមីការបន្ទាត់ប៉ះនៃក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង $\ln 2$ ។

3. គណនា $f''(x)$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ រួចបង្ហាញថាក្រាប (C) មានចំណុច $A(0,-1)$ ជាចំណុចរបត់។

4. សង់ក្រាប (C), អាស៊ីមតូតទ្រេត និងបន្ទាត់ប៉ះ នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

(ដោយដឹងថាក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(0.9\,;\,0)$ និង $f(1.4)\simeq 5$; $\ln 2\simeq 0.7$)។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ ----------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

៣៣

I. បេក្ខជនម្នាក់បានទាញយកសំណួរផ្ទាល់មាត់ 3 សំណួរព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពី 12 សំណួរ ដែលរៀបចំដោយមេប្រយោគប្រឡង។ក្នុងនោះមាន 7 សំណួរពីជគណិត, 3សំណួរអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ, 2 សំណួរធរណីមាត្រ ។ ចូរគណនាប្រូបាប ដើម្បីឲ្យ:
ក.សំណួរទាំង 3 ជាសំណួរពិជគណិត ។ ខ.មានសំណួរតែមួយគត់ជាសំណួរពិជគណិត ។ គ. សំណួរទាំង 3 ខុសៗគ្នា ។

II. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-x\right]$ ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos x}$ គ. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin x}$ ។

III. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\sqrt{3}+i$ និង $z_2=2\left(-\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ ។
១. សរសេរ z_1 , z_2 និង $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។
២. សរសេរផលគុណ $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។ ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\left(2-3x+x^2\right)dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}-1\right)dx$ និង $K=\int_{-1}^{0}\left(2x-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)dx$ ។

V. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(E):\ y''-4y'+3y=0$ ។
ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=4$ និង $y'(0)=6$ ។

VI. A. គេមានសមីការប៉ារ៉ាបូលមួយ (P): $x^2-4x-4y+16=0$ ។
1. កំណត់កូអរដោនេកំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល (P) ។
2. រកកូអរដោនេនៃចំណុច $M(x_0,4)$ ដែលស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល (P) ។ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូល (P) ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេឱ្យចំណុច $A(1;0;2),B(-2;1;-1)$ និង $C(0;0;1)$ ។
១. ក. កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ ខ. បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ ដែលមានសមីការ គឺ $x-z+1=0$ ។
២. គេឱ្យចំណុច $I(1;-1;-1)$ និង $J\left(-\dfrac{1}{2};-1;\dfrac{1}{2}\right)$ ហើយ បន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម I និងកែង (P) ។
ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមប្លង់ (P) ត្រង់ J ។ ខ. គណនាចម្ងាយ IJ ។
៣. គេឱ្យ (S) ជាសំណុំចំណុច $M(x;y;z)$ ក្នុងលំហដែល $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-2=0$ ។
ក. បង្ហាញថា ជាស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត I និងកាំ R ដែលត្រូវកំណត់។ ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែរ (S) បានរង្វង់មានផ្ចិត J និងកាំ $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ។
៤. គ្រប់ $\theta\in[0;2\pi)$ នោះចំណុច $N(1+\cos\theta;-1+\sin\theta;-3)$ ។
ក. ស្រាយថា N ជាចំណុចមួយនៅលើស្វ៊ែរ (S) ។ ខ. បង្ហាញថាចំណុច N មិនកាត់តាមប្លង់ (P) ។
គ. បង្ហាញថា $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AN}=-5-\cos\theta$ ។ ឃ. កំណត់តម្លៃ θ ដើម្បីឱ្យមាឌនៃតេត្រាអ៊ែរ $ABCN$ តូចបំផុត។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{e^x-1}{x}$ ។ គេតាង ដោយ (C) ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។
1. ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ ។
2. ចូរស្រាយថាបន្ទាត់ (d): $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) កាលណា $x\to-\infty$ ។
3. ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=\dfrac{(x-1)\left(x+1-e^x\right)}{x^2}$ ។
4. គេដឹងថា $e^x\ge x+1$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។ ចូរបញ្ជាក់សញ្ញារបស់ $f'(x)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពរបស់អនុគមន៍ f ។
5. គណនា $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$ និង $f(3)$ រួចទាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសពីរ α និង β ដែល $-2<\alpha<-1$ និង $2<\beta<3$ ។
6. ចូរសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d) ។ គេយក $\dfrac{e^3-1}{3}=6.23$ និង $\dfrac{e^{-2}-1}{2}=-0.43$, $e^{-1}=0.37$, $\dfrac{e^2-1}{2}=3.15$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---
លេខបន្ទប់: -------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------ -----------------------------

៣៤

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2+2-3x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-27}{3-\sqrt{x+6}}$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\tan3x}{x}$ ។

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)i$ និង $z_3=\dfrac{1}{2}$ ។

គណនា z_1+z_2 ; $(z_1+z_2)\times z_3$ ។ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រចំនួនកុំផ្លិច $Z=(z_1+z_2)\times z_3$ ។ ទាញរកតម្លៃនៃ Z^{12} ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល $\mathrm{I}=\int_0^1(x+1)^2(x-2)dx$; $\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos^2x-1\right)dx$ ។ គេមានអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{1\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

បង្ហាញថា $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x-1}$ ។ គណនា $\mathrm{K}=\int_{-1}^{0}f(x)dx$ ។

IV. គេមានលំហាត់ពីជគណិតចំនួន 12 និង លំហាត់ធរណីមាត្រ ចំនួន8 គេបង្កើតវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ដែលក្នុងវិញ្ញាសាមួយត្រូវមាន 6 លំហាត់ ហើយក្នុងនោះត្រូវមានធរណី 2 និង ពីជគណិត 4 ។គេដឹងថាលំហាត់ធរណីមាត្រមួយដែលត្រូវតែជ្រើសរើសដាក់គ្រប់វិញ្ញាសាទាំងអស់ និង លំហាត់ពីជគណិតពីរគឺ X និង Y បើជ្រើសរើសដាក់ក្នុងវិញ្ញាសាមួយគឺត្រូវយកទាំងពីរ ហើយបើអត់ជ្រើសរើសត្រូវអត់ទាំងពីរ។

ក. តើគេអាចបង្កើតវិញ្ញាសាទាំងអស់បានប៉ុន្មានរបៀប ?

ខ. គេជ្រើសរើសយកវិញ្ញាសាមួយដើម្បីដាក់ប្រឡង។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗខាងក្រោម៖

A. ជ្រើសរើសយកវិញ្ញាសាដែលមានពីជគណិត X និង Y ។

B. ជ្រើសរើសយកវិញ្ញាសាដែលគ្មានលំហាត់ពីជគណិត X និង Y ។

V. ១. គេមានសមីការ $(\mathrm{E}):(5x+4y)^2=40(xy+10)$ ។បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និង កូអរដោនេនៃកំណុំទាំងពីរ។ រួចសង់ (E) ។

២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឱ្យចំណុច $\mathrm{A}(2;-2;2)$; $\mathrm{B}(2;0;0)$ និង $\mathrm{C}\left(\dfrac{6}{5};0;\dfrac{2}{5}\right)$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។ រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (ABC) មានសមីការ $x+2y+2z-2=0$ ។

គ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (Δ) ដែលកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ A ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''+y'-2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានតម្លៃអប្បបរមាស្មើនឹង $\dfrac{3}{2}$ ត្រង់ $x=0$ ។

VII. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-\infty,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x-3+\dfrac{4}{e^x+1}$ ហើយតាង (C) ជាខ្សែកោងតំណាងអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

2. a. បង្ហាញថា $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ b. បង្ហាញថា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍គូ។

3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) ដែលមានសមីការ $y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $+\infty$ ។

4. a. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ ។ b. ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ (d') ដែលមានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (C) ខាង $-\infty$ ។

5. a. គណនាកូអរដោនេនៃ I ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (C) និងអ័ក្ស $(y'oy)$ ។ b. បង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ (C) ។

6. សង់ (d); (d′) និង (C) ។ ក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច (2.75 , 0) ។

7. តាង λ ជាចំនួនពិត ដែល $\lambda>\alpha$ និង តាង $A_\alpha(\lambda)$ ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយ (C), (d) និងបន្ទាត់ឈរពីរ $x=\alpha$ និង $x=\lambda$ ។

a. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ និង គណនា $A_\alpha(\lambda)$ ជាអនុគមន៍នៃ α និង λ ។ b. បង្ហាញថា $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\alpha(\lambda)=4\ln\left(e^\alpha+1\right)-4\alpha$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ----------------------------------

៣៥

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{3}-i$ និង $z_2=\sqrt{3}+3i$ ។

ក. គណនា z_1+z_2, z_1-z_2 , $z_1\times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ពីជគណិត។

ខ. សរសេរ z_1, z_2 , z_1+z_2 , $z_1\times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

II. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x}-3x+2\right)$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{\pi x^2-x+3}{3x^2-1}\right)$ **គ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^2x-1}{\tan^2x-1}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+3\right)dx$; $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)^2\,dx$ ។ គេមានអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $h(x)=\frac{1}{e^x-1}$ ។ បង្ហាញថា $h(x)=-\frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}$ ។ គណនា $K=\int_{-\ln 3}^{-\ln 2}h(x)\,dx$ ។

IV. ក្នុងស្បោងមួយមានប៊ូលព័ណស 3 ប៊ូលព័ណខៀវ 3 និងប៊ូលព័ណក្រហម 2 ។ គេចាប់យកប៊ូលម្តង 3 ក្នុងពេលតែមួយចេញពីស្បោងដោយចៃដន្យ។ គេសន្និដ្ឋានថាប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលនីមួយៗជាសមប្រូបាប។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. យ៉ាងតិចមានប៊ូលពីរព័ណខៀវ។ **B.** ប៊ូលទាំងបីមានព័ណខុសៗគ្នា។

V. **A.** គេមានសមីការប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅលើបន្ទាត់ $(d_1): y=x+1$ និងកំណុំនៅលើបន្ទាត់ $(d_2): 2x+3y-10=0$ ហើយមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាអ័ក្ស $(y'oy)$ ។ ចូរកំណត់សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល និង រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(2;1;0)$, $B(1;2;2)$, $C(3;3;1)$ និង $I(1;3;0)$ ។

1. **a.** រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AI}$ ។ **b.** គណនាប្រវែង AB , AC , BC និង AI រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។
2. **a.** ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុច A , B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ។
   b. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}(1;-1;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) រួចទាញរកសមីការប្លង់ (ABC) ។
3. **a.** ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំណុច I មិនស្ថិតនៅលើប្លង់ (ABC) ។ **b.** គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $IABC$ ។

VI. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ ។

1. កំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ u កំណត់ដោយ $u(x)=axe^{-\frac{1}{2}x}$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។
2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E'): y'+\frac{1}{2}y=0$ ។
3. បង្ហាញថា v ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $h=v-u$ ជាចម្លើយនៃ (E') ។ រួចកំណត់ចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

VII. **A.** គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=-x^2-4+4\ln x$ ។

1. សិក្សាអថេរភាពនៃ g ។ 2. ចូរកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ លើ $(0,+\infty)$ ។

B. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=-x+2-\frac{4\ln x}{x}$ តាង (C) ជាខ្សែកោងតំណាងអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. **a.** គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ **b.** បង្ហាញថា $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។
   c. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។
   d. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ ក្នុងចន្លោះ $(0,+\infty)$ មានឫស α តែមួយគត់ និងបង្ហាញថា $\alpha\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ ។
2. **a.** បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D: y=-x+2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $+\infty$ ។ **b.** សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប (C) និង បន្ទាត់ D ។
   c. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 1 ។
   d. សង់ D ; (T) និង ក្រាប (C) ។ គេឱ្យ $\ln 2=0.7$; $\ln(3/2)=0.4$

មណ្ឌលប្រឡង ---

លេខបន្ទប់: -------------------លេខតុ ---------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:---

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------ ------------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\tan^2 3x}$ គ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$

II. គេមានសមីការ $z^2-6z+12=0$ ។

ក. រកឫសកុំផ្លិច z_1 និង z_2 នៃសមីការនេះ ដោយដឹងថាឫស z_1 មានផ្នែកនិមិត្តជាចំនួនវិជ្ជមាន។

ខ. គណនា ម៉ូឌុលនិង អាគុយម៉ង់នៃ $2z_1+\bar{z}_2$ ។ រួចកំណត់តម្លៃនៃ $(2z_1+\bar{z}_2)^6$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^1\sqrt{x}(2x-1)^2\,dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{1-\sin x}dx$ និង $K=\int_2^3\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}dx$ ។

IV. ក្នុងប្រអប់មួយមានប័ណ្ណចំនួន 6 សន្លឹក ដែលចុះពីលេខ 0,1,2,3,4,5 ។ គេបង្កើតចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់ខុសៗគ្នាដោយប្រើប័ណ្ណនោះ ហើយខ្ទង់ទីមួយមិនប្រើលេខសូន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A." ចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់នោះជាចំនួនគត់គូ" ។ B." ចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់នោះមានលេខ 2 មួយ " ។

C." ចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់នោះជាពហុគុណនៃ 5 " ។ D." ចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់នោះធំជាង 400 " ។

V. **A.** គេឱ្យអេលីបមួយមានកំណុំ $F_1(-2,-2)$ និង $F_2(4,-2)$ ។ ចូរកំណត់សមីការស្តង់ដារនៃអេលីប ដែលមានកំពូលនៅលើបន្ទាត់ $(L): x-y-8=0$ ។ រួចសង់អេលីបនេះ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេមានចំណុច $A(-1;-1;4)$, $B(2;0;2)$, $C(1,-4,-1)$; $J(2;0;5)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(1;-1;1)$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ}$ ។

ខ. គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}$ និង $\vec{a}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។ រួចទាញរកសមីការប្លង់ (ABC) ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច J លើប្លង់ (ABC) ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+y'-2y=0$ ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $g(x)=e^x+e^{-2x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=(1+x^2)e^{-x}$ តាង (C) ជាខ្សែកោងតំណាងអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. a. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$ ។

b. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក។

2. a. បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនពិត x, $f'(x)=-(x-1)^2e^{-x}$ ។

b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

3. a. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច J ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 0 ។

b. គេឱ្យ A និង B ជាចំណុចនៃ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីស 1 និង 3 រៀងគ្នា។ បង្ហាញថា A និង B ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប (C) ។

4. គណនា $f(-1)$; $f(3)$ រួចសង់ក្រាប (C) និង បន្ទាត់ប៉ះក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

5. គេឱ្យ S ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) ,អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=3$ ។

a. គេឱ្យ F ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $F(x)=-(x^2+2x+3)e^{-x}$ ។ បង្ហាញថា F ជាព្រីមីទីវនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។

b. គណនា S ។ គេឱ្យ $\dfrac{2}{e}=0.73$; $e=2.7$; $e^3=20$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ--------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ----------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

៣៧

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\pi\cos^2 x\right)}{x^2}$ គ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$ ។

II. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$; $b=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ និង $c=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$។

ក. សរសេរ a និង b ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2=0$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\bar{c}(a+b)=2$ ។ រួចបង្ហាញថា $a+b=c$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^{\ln 2}\left(\dfrac{e^{2x}+3e^x+2}{e^x+1}\right)dx$; $J=\int_0^{\pi}\left(\sqrt{1-\cos 2x}+\sqrt{1-\sin 2x}\right)dx$ និង $K=\int_0^1\dfrac{x^4}{x+1}dx$ ។

IV. មេបញ្ជាការមួយបានបង្កើតលេខកូដសម្ងាត់ឱ្យកូនទ័ពរបស់ខ្លួន។លេខកូដសម្ងាត់នោះប្រើលេខបីខ្ទង់ដែលខ្ទង់នីមួយៗយកចេញពីលេខ $\{1,2,3,4,5,6\}$ ។ គេបានលេខកូដដំបូងគេគឺ 111 និងចុងក្រោយគេគឺ 666 ក៏ប៉ុន្តែមេបញ្ជាការរូបនេះបង្កើតបានតែត្រឹមលេខ 511 ប៉ុណ្ណោះ។

ក. តើមេបញ្ជាការនោះមានលេខកូដកូនទ័ពសរុបចំនួនប៉ុន្មាននាក់?

ខ. មេបញ្ជាការបានជ្រើសរើសយកទាហាន 1 រូបដោយចៃដន្យដើម្បីចេញស៊ើបការណ៍ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗ៖

A . រើសបានទាហានមានលេខកូដជាចំនួនសេស។ B . រើសបានទាហានមានលេខកូដជាចំនួនគូ។

V. **A.** គេមានសមីការ $64y^2-36x^2=-2304$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និង កំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល។ រកសមីការអាស៊ីមតូតរបស់អ៊ីបូលនេះ និងសង់អ៊ីពែបូលនេះ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $A(0;-2;-2)$, $B(1;-2;-4)$, $C(-3,-1,2)$។

១. បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ។ រួចបង្ហាញថា $2x+2y+z+6=0$ ជាសមីការមួយនៃប្លង់ (ABC) ។

២ . គេឱ្យស្វ៊ែរ (S) ដែលមានសមីការ $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិត $I(1;0;1)$ និងកាំ $R=5$។

៣. ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម I និងកែងនឹងប្លង់ (ABC) ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃ H ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់ (ABC)។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''+6y'+9y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយនេះប៉ះនឹងបន្ទាត់ (d) : $y=-x+1$ ត្រង់ចំណុចមួយដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 0 ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(-1,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)$ តាង (C) ជាខ្សែកោងតំណាងអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. a. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ។

b. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ រួចបញ្ជាក់ថាក្រាប (C) មានមែកប៉ារ៉ាបូលខាង $+\infty$ ។

2. a. បង្ហាញថា គ្រប់ $x\in(-1,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{3+x}{(x+1)^2}$ ។ b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

c. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ នៅក្នុងចន្លោះ $(-1,+\infty)$ មានឫស α តែមួយគត់ និងបង្ហាញថា $\alpha\in\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$។

3. បង្ហាញថាសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចមួយដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 0 មានសមីការ $y=3x-1$ ។

4. គណនា $f(3)$; $f(7)$ រួចសង់ក្រាប (C) និង បន្ទាត់ប៉ះ (T) ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

5. គេឱ្យ S ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) ,អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ឈរ $x=0$ និង $x=\alpha$ ។

6. a. គេឱ្យ F ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(-1,+\infty)$ ដោយ $F(x)=(x-1)\ln(x+1)$ ។ បង្ហាញថា F ជាព្រីមីទីវនៃ f លើ $(-1,+\infty)$ ។

b. ស្រាយបំភ្លឺថា $S=\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha+1}$ ។ គេឱ្យ $\ln\left(\dfrac{7}{5}\right)=0.34$; $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)=0.4$, $\ln 2=0.7$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ ---------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- -----------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|3-x|}{x^2-9}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ **គ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2x\tan 3x}$ **ឃ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\cot 3x}{1-\tan x}$

II. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន 7 គ្រាប់ដែលចុះលេខ 1 ដល់ 7 និង ឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន 5 គ្រាប់ដែលចុះលេខពី 5 ដល់ 9 ។ គេចាប់យកឃ្លី 2 គ្រាប់ព្រម គ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល៖

ក. ចាប់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 2 គ្រាប់។ **ខ.** ចាប់បានឃ្លីមានពណ៌ដូចគ្នា ។

គ. ចាប់បានឃ្លីលេខគូជាពណ៌ក្រហម និង លេខសេសជាឃ្លីពណ៌ខៀវ ។

III. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2=z_1^2$ និង $z_3=z_1^3$ ។

ក. គណនា $|z_1|$ និង $\arg(z_1)$ ។

ខ. ចូរសរសេរ z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $z_2=\bar{z}_1$ ។ **គ.** ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z_3=1$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_1^3\left(1-2x+3x^2\right)dx$; $J=\int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^2dx$ និង $K=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\cos\left(2x+\dfrac{5\pi}{6}\right)+4\sin x\cos x\cos^3 2x\right]dx$ ។

V. **1.** គេមានសមីការប៉ារ៉ាបូលមួយដែលមានកំណុំ $F(1,4)$ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

ក. ចូរកំណត់សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល។

ខ. គេឱ្យ $N(x_0,4)$ ជាចំណុចនៅលើប៉ារ៉ាបូល ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច N រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

2. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។គេមានចំណុច $A(-2;2;8)$, $B(6;6;0)$, $C(2,-1,0)$, $D(0;1;-1)$ ។ និង (S) ជាសំណុំចំណុច M ដែលមានទំនាក់ទំនង $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ ។

១. កំណត់កូអរដោនេនៃវិចទ័រ $\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}$ ។ រួចបង្ហាញថា $x+2y+2z=0$ ជាសមីការមួយនៃប្លង់ (OCD) ។

២ . បង្ហាញថា (S) ជាស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត $\Omega(2;4;4)$ និងកាំ $R=6$ ។

៣. ក. គណនាចម្ងាយរវាងពីរចំណុច Ω ទៅប្លង់ (OCD) ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាប្លង់ (OCD) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ។

VI. **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''-4y'+3y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ដែល $y(0)=-1$ និង $y''(0)=-17$ ។

VII. **ផ្នែកA.** គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=1+xe^x$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ដោយស្គាល់ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ ។

2. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g លើ $\mathbb{R}$ ។រួចទាញរកសញ្ញា នៃ g លើ $\mathbb{R}$ ។

ផ្នែកB. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x+e^x}{1-e^x}$ មានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. **a.** គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ ។ **b.** ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

2. **a.** ចូរស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f(x)=x+\dfrac{(x+1)e^x}{1-e^x}$ ។

b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d_1) មានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប (C) ធៀបនឹងបន្ទាត់ (d_1) ។

3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d_2) ដែលមានសមីការ $y=-1$ ជាអាស៊ីមតូត ដេកនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង (d_2) ។

4. **a.** បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(1-e^x\right)^2}$ ។ **b.** សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់តារាង អថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

5. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $\left(-\ln 2,-\ln\dfrac{3}{2}\right)$ ។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(\alpha)=\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$ ។

6. សង់បន្ទាត់ (d_1); (d_2) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ គេឱ្យ $e^{-1}=0.4$; $\ln 2=0.7$; $\ln\dfrac{3}{2}=0.4$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---
លេខបន្ទប់: ------------------លេខតុ---------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ----------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

ពាន់

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច a ដែល $a=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)$ ។

1. a. បង្ហាញថា $a=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ។ b. ចូរកំណត់តម្លៃពិតប្រាកដនៃ $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ និង $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ ។

2. a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^4=8(1-i\sqrt{3})$ ។ b. ចូរដោះស្រាយសមីការ $(E): z^4=8(1-i\sqrt{3})$ ។

II. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2\sin x}-x\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin5x)(\sin2x)}{-3x^2}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{6}x-\sin\frac{\pi}{3}x}{1-x}$ ។

III. គេបង្កើតប័ណ្ណដែលមានលេខបីខ្ទង់ដែលខ្ទង់នីមួយៗអាចជាលេខដដែលៗដោយប្រើលេខ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ។

ក. រកចំនួនប័ណ្ណដែលអាចបង្កើតបាន។

ខ. គេរើសយកប័ណ្ណមួយដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែលរើសបាន៖

A. «ប័ណ្ណជាចំនួនគូ»។ B. «ប័ណ្ណជាពហុគុណនៃ 5 » ។ C. «ប័ណ្ណជាចំនួនធំជាង 500 »។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_1^e \ln x\,dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x-\sin x}{1-\sin^2 x}\right)dx$ និង $K=\int_{-1}^{8}\left[x+1-\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$ ។

V. ១. គេមានសមីការ (E): $(5x+4y)^2=40(xy+10)$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរ និង សង់អេលីបនេះ។

ខ. កំណត់បរិមាត្រនៃត្រីកោណ F_1F_2N ដែល F_1 , F_2 ជាកំណុំនិង $N\in(E)$ ។

២. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។គេមានចំណុច $A(0;-1;0)$, $B(1;1;0)$ និង $C(0;0;1)$ ។

1. a. កំណត់កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ b. បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។

c. ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការប្លង់ (P) មានសមីការ $2x-y+z-1=0$ ។

2. គេមានប្លង់ (Q): $x+y-2z+1=0$ ។ បង្ហាញថាប្លង់ (P) និង (Q) ប្រសព្វគ្នាបានសមីការបន្ទាត់ $(\Delta):x=t;y=-1+5t;\ z=3t;t\in\mathbb{R}$ ។

3. គេឱ្យសមីការស្វ៊ែ $(S):x^2+y^2+z^2+2x-2z+\frac{4}{3}=0$ ។

a. បង្ហាញថាស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(-1;0;1)$ ។ រួចគណនាកាំរបស់ស្វ៊ែ។ b. បង្ហាញថាស្វ៊ែ (S) ប៉ះនឹងប្លង់ (P) និង (Q) ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ (E): $y''+y'-2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) បើគេដឹងថាក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះមានបន្ទាត់ (T) ប៉ះត្រង់ $N(0,3)$ ហើយបន្ទាត់ (T) កែងបន្ទាត់ $(L): y=\frac{1}{3}x-1$ ។

VII. **ផ្នែកA.** គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x+1+2x\ln x$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ។ 2. គណនា $g'(x)$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ ។

3. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។ 4. កំណត់សញ្ញានៃ g លើ $(0,+\infty)$ ។

ផ្នែកB. f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{1+\ln x}{(x-1)^2}$ មានខ្សែកោង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ (ឯកតានៃក្រាប 2cm)។

1. រកដែនកំណត់ D_f នៃអនុគមន៍ f ។

2. a. គណនា $\lim\limits_{x\to1}f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

b. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

3. a. ចូរស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x\in D_f$; $f'(x)=\frac{(1-x)g(x)}{x(x-1)^4}$ ។ b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

4. សង់ក្រាប (C) ។ (គេឱ្យ $e^{-\frac{3}{2}}\simeq0.2$; $e^{-1}\simeq0.36$; $f(1/2)\simeq0.24$; $f(2)\simeq1.69$; $f(3)\simeq0.52$)

5. a. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_2^3\frac{1}{x(x-1)}dx$ និង $J=\int_2^3 f(x)dx$ ។

b. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ឈរ $x=2$ និង $x=3$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---
លេខបន្ទប់: -------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ---------------------------------

៤០

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-x^3}{\sqrt{2x^2+1}-3}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-2\right)-x\right]$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}$ ។

II. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 10 គ្រាប់ដែលក្នុងមាន ប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 3 គ្រាប់ដែលចុះលេខ $0;1;1$ ប៊ូលពណ៌សចំនួន 4 គ្រាប់ដែលចុះលេខ $0;0;1;1$ និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 3 គ្រាប់ដែលចុះលេខ $(-1)\,;(-1)\,;0$ ។គេចាប់យកប៊ូល 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល

A. " ចាប់បានប៊ូល 3 គ្រាប់មានពណ៌ដូចគ្នា " B. " ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានផលគុណស្មើនឹងសូន្យ "
C. " ចាប់បានប៊ូល 3 គ្រាប់ដែលមានផលបូកស្មើនឹងសូន្យ " D. " ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានផលគុណជាចំនួនវិជ្ជមាន "

III. **1.** នៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ គេមានសមីការ (E): $z^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)z+16=0$ ។

a. ស្រាយបញ្ជាក់ថាឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ (E) គឺ $\Delta=-4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$ ។ **b.** ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុង $\mathbb{C}$ ។

2. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$; $b=1+i\sqrt{3}$ និង $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ។

a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $b\bar{c}=a$ ។ រួចបង្ហាញថា $ac=4b$ ។

b. សរសេរ b និង c ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ រួចបង្ហាញថា $a=4\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_1^2(2x-1)^2\,dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^2 x+\cos^4 x}\,dx$ និង $K=\int_0^{\ln 2}\dfrac{e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}\left(e^x+1\right)}dx$ ។

V. **1.** គេឱ្យសមីការ (H): $x^2-4=4y^2$ ។

ក. បង្ហាញថា (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (H) ។ រួចសង់ (H) នេះ។

ខ. គេឱ្យ $M(x_0,y_0)\in(H)$ ។ គណនាផលគុណចម្ងាយទាំងពីរនៃចំណុច M ទៅសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរ។

2. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។គេឱ្យសមីការឆ្លុះ (d) : $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$ និងសមីការប្លង់ (P): $2x-y+2z-2=0$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) ដែលកាត់បន្ទាត់ (d) ហើយ $(Q)\perp(P)$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច M នៅលើបន្ទាត់ (d) ដោយដឹងថាចម្ងាយពីចំណុច M ទៅប្លង់ (P) ស្មើ 5 ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''-4y'+4y=0$ ។

ខ. រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាប (Γ) នៃចម្លើយនេះមានចំណុចរបត់ $I\left(\dfrac{1}{2},-2e\right)$ ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=-x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$ មានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (ឯកតា 2cm)។

1. បង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ។

2. **a.** ស្រាយបំភ្លឺថាបន្ទាត់ (Δ) ដែលមានសមីការ $y=-x+\dfrac{5}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$ ។

b. ដោះស្រាយសមីការ $e^{x-2}-4=0$ ។ រួចបង្ហាញថាក្រាប (C) នៅខាងលើ (Δ) លើចន្លោះ $(-\infty,2+\ln 4]$ និងនៅខាងក្រោម (Δ) លើចន្លោះ $[2+\ln 4,+\infty)$ ។

3. **a.** បង្ហាញថា គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$ ។

b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. គណនា $f''(x)$ រួចបង្ហាញថា $A(2,2)$ ជាចំណុចរបត់មួយនៃក្រាប (C) ។

5. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឬស α តែមួយគត់។ រួចបង្ហាញថា $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$ ។

6. សង់បន្ទាត់ (Δ) និងក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ គេឱ្យ $\ln 2\simeq 0.7$; $\ln 3\simeq 1.1$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---

លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ---------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- -------------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^3-8}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-8x+6}-x\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}$

II. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 10 គ្រាប់ដែលក្នុងមាន ប៊ូលពណ៌បៃតងចំនួន 3 គ្រាប់ ប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 6 គ្រាប់ និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន1គ្រាប់។ គេចាប់យកប៊ូល 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល៖

A." ចាប់បានប៊ូលពណ៌បៃតងទាំង 3 គ្រាប់" B." ចាប់បានប៊ូល 3 មានពណ៌ដូចគ្នា"

C." ចាប់បានប៊ូលយ៉ាងតិច 2 មានពណ៌ដូចគ្នា"

III. **1.** ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ នៃមានសមីការ $z^2-\sqrt{2}z+1=0$ ។

2. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ និង $b=\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}$ ។

a. សរសេរ a ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និង បង្ហាញថា a^{2020} ជាចំនួនពិត។ **b.** ស្រាយបំភ្លឺថា $b^2=a$ ។

IV. **1.** គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^1\sqrt{x}\left(x^2-1\right)^2dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin 2x\cos^3 x\,dx$ ។

2. គេមានអនុគមន៍ h កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $h(x)=\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$ ។ បង្ហាញថា $h(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$ ។ គណនា $K=\int_1^2 h(x)\,dx$ ។

V. **1.** ប៉ារ៉ាបូល (P) មួយមានសមីការ $y^2-4y-8x=4$ ។

ក. សរសេរសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល (P) រួចរកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃប៉ារ៉ាបូល។

ខ. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (Δ) ដែលកាត់ប៉ារ៉ាបូល (P) ត្រង់ពីរចំណុច A និង B ដោយដឹងថាចំណុច $M(0,4)$ ជាចំណុចកណ្តាល $[AB]$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្លង់ដែលខ័ណ្ឌដោយប៉ារ៉ាបូល (P) និង បន្ទាត់ (Δ) ។

2. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។គេឱ្យ $A(1;-2;3)$ និង សមីការឆ្លុះ $(d):\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$ ។

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (d) ។

ខ. គណនាចម្ងាយពីរចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (d) ។ រួចរកសមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត A និងប៉ះបន្ទាត់ (d) ។

VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E_1): $y''+2y'+y=-\dfrac{e^{-x}}{x^2}$ និងអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $h(x)=e^{-x}\ln x$ ។

១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា អនុគមន៍ h ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) ។

២. បង្ហាញថា បើ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_1) លុះត្រាតែ $g=(f-h)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E_2): $y''+2y'+y=0$ ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $f(x)=x+1+\dfrac{2\ln|x|}{x}$ មានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. គេឱ្យ g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{0\}$ ដោយ $g(x)=x^2+2-2\ln|x|$ ។

a. សិក្សាអថេរភាពនៃ g ។ **b.** ចូរកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ។

2. បង្ហាញថាចំណុច $I(0,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

3. **a.** គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ខាងស្តាំនិងខាងឆ្វេងត្រង់ 0 ។ **b.** គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $+\infty$ និងត្រង់ $-\infty$ ។

c. បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ។ **d.** សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. **a.** បង្ហាញបន្ទាត់ $D: y=x+1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបខាង $\pm\infty$ ។

b. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ D ។

c. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ D ។

d. សង់បន្ទាត់ D និងក្រាប (C) ។

5. គេឱ្យ α ជាចំនួនពិតមួយដែលធំជាង 1 ។

a. គណនាផ្ទៃក្រឡា $A(\alpha)$ ដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C), បន្ទាត់ D និងសមីការបន្ទាត់ $x=1$ និង $x=\alpha$ ។

b. កំណត់តម្លៃ α ដោយដឹងថា $A(\alpha)=16$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ---------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ---------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3}+x\right)$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sin^2 x}$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan^4 x-1}{\sin x-\cos x}$

II. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 9 គ្រាប់ដែលក្នុងមាន ប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 5 គ្រាប់ដែលចុះលេខ $1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 2$ និងប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 4 គ្រាប់ដែលចុះលេខ $1\ ;\ 2\ ;\ 2\ ;\ 2$។ គេចាប់យកប៊ូល 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដែល៖
A." ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា" B." ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានលេខដូចគ្នា"
C." ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នានិងមានលេខដូចគ្នា"

III. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i\sqrt{3}$; $z_2=1+i$ និង $t=\dfrac{z_1}{z_2}$ ។

1. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ **2.** គណនា ម៉ូឌុល $|t|$ និងអាគុយម៉ង់ $\arg(t)$ ។ រួចសរសេរ t ជាទម្រង់ពិជគណិត។

3. ចូរកំណត់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ និង $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}+3\right)}dx$; $\mathrm{J}=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\sin x}dx$ និង $\mathrm{K}=\displaystyle\int_1^2\left(x-1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$ ។

V. 1. អេលីប (E) មួយមានកូអរដោនេកំណុំ $\mathrm{F}_1(-4,0)$ និង $\mathrm{F}_2(4,0)$ ហើយ (E) កាត់តាមចំណុច $\mathrm{P}(0,3)$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដានៃអេលីប (E) រួចសង់ (E) ។

ខ. គេឱ្យ M ជាចំណុចមួយនៅលើ (E) ។ គណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ $\mathrm{MF_1F_2}$ ។

2. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(\mathrm{o},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}},\vec{\mathrm{k}}\right)$ ។ គេឱ្យចំណុច $\mathrm{A}(1;0;2)$, $\mathrm{B}(-2;1;-1)$, $\mathrm{C}(0;0;1)$, $\mathrm{I}(1;-1;-1)$ និង $\mathrm{J}\left(-\dfrac{1}{2};-1;\dfrac{1}{2}\right)$ ។

១. ក. បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ សំគាល់ (P) ជាប្លង់ (ABC)

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វ៉ិចទ័រ $\vec{\mathrm{u}}=(-1;0;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។ គ. ចូរបង្ហាញថាប្លង់ (P) មានសមីការ $x-z+1=0$ ។

២. ក. គេឱ្យបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច I និងកែងប្លង់ (P) ។ ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (Δ) ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) កាត់ប្លង់ (P) ត្រង់ J ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''-4y'+4y=0$ ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $h(x)=(2-x)e^{2x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។

VII. A. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=e^x(2x+1)-1$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ។

2. a. គណនា $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។

b. គណនា $g(0)$ រួចកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$; $\forall x\in\mathbb{R}$ ។

B. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x\left(e^x-1\right)^2$ មានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(\mathrm{o},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}}\right)$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ រួចកំណត់មែកអនន្តនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។

2. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ។ រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C) ខាង $-\infty$ ។

3. a. បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\left(e^x-1\right)g(x)$ ។

b. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើន រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. សង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(\mathrm{o},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}}\right)$ ។

5. a. ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរបង្ហាញថា $\displaystyle\int_0^1 x\left(e^{2x}-2e^x\right)dx=\frac{e^2-7}{4}$ ។

b. គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) , អ័ក្សអាប់ស៊ីស និង សមីការបន្ទាត់ $x=0$ និង $x=1$ ។(គេឱ្យ $e^{-\frac{3}{2}}\simeq 0.22$)

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ--------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ---------------------------------

៤៣

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ក. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-x\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 \pi x}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{4x-\pi}{\cos x-\sin x}$

II. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ស 6 គ្រាប់ដែលចុះលេខ -1 ; -1 ; 0 ; 1; 1 ;1 និងឃ្លីពណ៌ខ្មៅចំនួន 4 គ្រាប់ដែលចុះលេខ -1 ; 0 ; 1; 1 ។គេចាប់យកឃ្លី 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។

ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A "ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា" ។ ខ.រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B " ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានលេខដូចគ្នា"

គ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C "ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានផលបូកលេខស្មើនឹងសូន្យ " ។

ឃ. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C "ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានផលគុណលេខជាចំនួនអវិជ្ជមាន" ។ ង. គណនា $P(A\cup B)$; $P(A\setminus B)$; $P(\overline{A\cup B})$ ។

III. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=2+3i$; $b=4+5i$; $c=6+3i$ និង $d=4+i$ ។

1. ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a-b}{a-c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ ។ **2.** បង្ហាញថា $(a-c)^2=2(a-d)(a-b)$ ។

3. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $\dfrac{a-d}{a-c}$ ។

IV. 1. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^1\left(\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x}{3}+1\right)dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3 x\,dx$ ។

2. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=\dfrac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x+1}$ ។ បង្ហាញថា $g(x)=e^x+1+\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ។ គណនា $K=\int_0^{\ln 2}g(x)dx$ ។

V. 1. អ៊ីពែបូលមួយមានកំពូល $V_1(3,0)$ និង $V_2(-3,0)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $P(5,2)$ ។

ក. រកសមីការស្តង់ដារ និងកូអរដោនេកំណុំ រួចរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល ខ. សង់អ៊ីពែបូលនេះ។

2. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គេឱ្យចំណុច $A(1;-1;2)$, $B(2;-1;1)$, $C(-2;0;4)$ និង $D(0;-2;1)$ ។

១. ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{DA}$ ។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$ ។

ខ. បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។ រួចកំណត់សមីការបន្ទាត់ (DA) ។

២. ក. បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ស្មើនឹង $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ។ ខ. គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $DABC$ ។

VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'+y=xe^{-x}$ ។

ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ g ដែល $g(x)=\dfrac{x^2}{2}\cdot e^{-x}$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $(f-g)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E_o): y'+y=0$ ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(2,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{1}{2}x-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)$ មានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។

1. a. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា x ខិតជិត 2 ។

b. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $x\in(2,+\infty)$; $f(x)=\dfrac{1}{2}x-5+3\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ ។ **c.** គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f កាលណា x ខិតជិត $+\infty$ ។

2. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y=\dfrac{1}{2}x-5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។ **b.** សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងនៃ (C) នឹង Δ ។

3. a. គណនា $f'(x)$ និងបង្ហាញថា គ្រប់ x លើចន្លោះ $(2,+\infty)$; $f'(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}$ ។

b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. សង់បន្ទាត់ Δ និង ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់។ ដោយក្រាប (C) កាត់អ័ក្ស $(x'ox)$ ត្រង់ចំណុច $(2.4;0)$ និង $(9.2;0)$ ។

5. គេមានអនុគមន៍ h និង H កំណត់លើចន្លោះ $(2,+\infty)$ ដែល $h(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ និង $H(x)=(x-1)\ln(x-1)-(x-2)\ln(x-2)$ ។

a. បង្ហាញថាអនុគមន៍ H ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ h លើចន្លោះ $(2,+\infty)$ ។

b. ចូរកំណត់ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $(2,+\infty)$ ។

6. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្នែកប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (C) ;អ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងបន្ទាត់ឈរ $x=3$ និង $x=9$ ។គេឱ្យ $\ln 3\simeq 1.1$; $\ln 2\simeq 0.7$; $\ln 7\simeq 1.9$

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: -------------------លេខតុ ----------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------ --------------------------------

៤៤

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+x-1}-2x-1\right)$ ខ. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(2x-2)}{\sin(x-1)}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2\cos x-\sqrt{2}}$

II. ថង់មួយមានប៊ូល 15 ដែលគេសរសេរលេខពី 1 ដល់ 15 ។ គេចាប់យកប៊ូល 3 ចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

A. ចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែជាពហុគុណនៃ 3 ។
B. ចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានផលបូកលេខជាចំនួនគូ។
C. ចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែជាពហុគុណនៃ 5 ។
D. ចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានផលគុណលេខជាចំនួនគូ។

III. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ។

1. សរសេរ z_1 , z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ រួចស្រាយបំភ្លឺថា $z_1^2+z_2^2=0$ ។
2. បង្ហាញថា $\overline{z}_3(z_1+z_2)=2$ ។ រួចស្រាយបញ្ជាក់ $z_1+z_2=z_3$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^1(2x-1)^3\,dx$; $J=\int_0^{\ln 3}\left(e^x+e^{-x}\right)^2dx$ និង $K=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos^2x-1\right]dx$ ។

V. **A.** គេមានសមីការ (E): $(4x-3y)^2=24(6-xy)$ ។

1. បង្ហាញថាសមីការ (E) ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។
2. សង់អេលីប (E) ។

B. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។ គេឱ្យចំណុច $A(2;1;0)$, $B(1;2;2)$, $C(3;3;1)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(1;-1;1)$ ។

1. **a -** គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។
   b - បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។
2. **a -** គណនាផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}$ និង $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}$ ។ **b -** ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមបីចំណុច A,B និង C ។
3. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច H ដែលជាចំណោលកែងពីរចំណុច $D(3;1;2)$ ទៅលើប្លង់ (P) ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y''-4y=0$ ។
ខ. ចូរកំណត់ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ដែលមាន $y(0)=0$ និង $y'(0)=4$ ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=1-\frac{2}{1+e^x}$ មានក្រាប (C_f) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. **a.** គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C_f) ។
   b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
   c. សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C_f) ត្រង់ចំណុចគល់តម្រុយ O ។
2. គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $g(x)=\frac{x}{2}-f(x)$ ។
   a. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $g'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ។
   b. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។
   c. គណនា $g(0)$ និងកំណត់សញ្ញានៃ $g(x)$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។
   d. ចូរបញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងនៃ (C_f) នឹង (T) ។ រួចបង្ហាញថា O ជាចំណុចឆ្លុះនៃក្រាប (C_f) ។
3. សង់បន្ទាត់ (T) និង ក្រាប (C_f) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។
4. **a.** បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $f(x)=-1+\frac{2e^x}{1+e^x}$ ។
   b. ចូរកំណត់ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}^*$ ។

មណ្ឌលប្រឡង ---
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ-------------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:---
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- --------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-2x}{1-x^2}$ គ. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{3x-6}-\dfrac{2}{2x^2-5x+2}\right)$ ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos 4x}$

II. ថង់មួយមានប៊ូលពណ៌សមួយ ពណ៌ខៀវបី ពណ៌ក្រហមពីរ។ បើចាប់បានប៊ូលសមួយត្រូវបានប្រាក់ 4000៛, បើចាប់បានប៊ូលខៀវមួយត្រូវបានប្រាក់ 2000៛ , បើចាប់បានប៊ូលក្រហមមួយត្រូវបានប្រាក់ 3000៛ ។ គេចាប់យកប៊ូលម្តងមួយបន្តបន្ទាប់គ្នាចំនួនពីរដងដោយមិនដាក់ចូលកថង់វិញ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A. ចាប់បានប៊ូលពីរមានពណ៌ដូចគ្នា ។ **B.** ចាប់បានប្រាក់ 5000៛។ **C.**ចាប់បានប្រាក់ 6000៛ ។

III. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\dfrac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ និង $z_2=\dfrac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ ។

1. ចូរកំណត់ម៉ូលឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ។ 2. សរសេរជាទម្រង់ពិជគណិតនៃ z_1z_2 ; $\dfrac{z_1}{z_2}$; z_1^3 និង z_2^6 ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^{\ln 2}\dfrac{e^{2x}}{\left(e^{2x}+3\right)^3}dx$; $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan x}{\cos^4 x}dx$ និង $K=\int_1^2\dfrac{x^2+3x+1}{x(x+1)^2}dx$ ។

V. **1.** គេឱ្យអេលីប (E) មួយមានកំណុំ $F_1(-3,0)$ និង $F_2(3,0)$ ហើយមានកំពូលនៅលើបន្ទាត់ $(d): 3x+5y-15=0$ ។

a. សរសេរសមីការស្តង់ដារ និង កូអរដោនេកំពូលនៃអេលីប (E) ។ **b.** សង់អេលីប (E) ។

2. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។ គេឱ្យចំណុច $A(5;7;-1)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}(0;1;-1)$ សមីការស្វ៊ែរ (S): $x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z+5=0$ និងបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ ។

a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\Omega(3;2;1)$ ជាផ្ចិតនៃស្វ៊ែរ (S) រួចកំណត់កាំនៃ (S) ។

b. បង្ហាញថា $\overrightarrow{A\Omega}\times\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ និង គណនាចម្ងាយពីរ Ω ទៅបន្ទាត់ (Δ) ។

c. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច E និង F ដែលជាចំណុចប្រសព្វរវាង (S) និង (Δ) ។

d. គេឱ្យ (P) ជាប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[EF]$ ។ ចូរបង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ែរ (S) ។

VI. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+2y'+y=-x-2$ ។

ក. ចូរកំណត់ចម្លើយពិសេសនៃអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយនៃ (E) ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ h ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $(h-g)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E_o): y''+2y'+y=0$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E_o) រួចកំណត់ចម្លើយសមីការ h នៃ (E) ដែល $h(0)=-1$ និង $h'(0)=-1$ ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ មានក្រាប (C_f) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. a. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C_f) ។

b. ដោយសម្គាល់ថា $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C_f) ។

2. a. បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ គេបាន $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ ។

b. សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ **c.** បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់។

3. សង់ក្រាប (C_f) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ (គេយក $\alpha\approx 0.38$)

4. គេមានអនុគមន៍ h កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $h(x)=\ln^2 x$ ។

5. a. គណនា $h'(x)$ ។ **b.**ចូរកំណត់ព្រីមីទីវ F នៃអនុគមន៍ f លើ $(0,+\infty)$ ។

6. គណនាផ្ទៃក្រឡា S ដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C_f) ;អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ $x=1$ និង $x=e$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ--------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ----------------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ និង $z_3=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ។

1. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ។

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z_2^2=i$ ។ រួចបង្ហាញថា $z_3^4+1=z_1$ ។

II. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ស 6 គ្រាប់ដែលចុះលេខ -1 ; -1 ; 0 ; 1; 1 ;1 , ឃ្លីពណ៌ខ្មៅចំនួន 4 គ្រាប់ដែលចុះលេខ -1 ; 0 ; 1; 1 ។ និងឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន 2 គ្រាប់ដែលចុះលេខ -1, 0 ។ គេចាប់យកឃ្លី 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

A "ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា" ។ B " ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានលេខដូចគ្នា"

C "ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 ដែលមានផលគុណស្មើនឹង 0 " ។ D "ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 ដែលមានផលបូកស្មើនឹង 0 " ។

E "ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នាឬ មានលេខដូចគ្នា" ។ F "ចាប់បានឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា ដោយដឹងថាមានលេខដូចគ្នា" ។

III. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}+x\right)$ ខ. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{-x^2+x+2}{x^3-3x^2-x+3}$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)$ ឃ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}$

IV. 1. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^4\left(x-\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}dx$ ។

2. កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $F(x)=(ax+b)e^x$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)=(x+2)e^x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។គណនា $K=\int_0^{\ln 2}f(x)dx$ ។

V. **A.** គេឱ្យប៉ារ៉ាបូល (P) មួយមានអ័ក្សឆ្លុះឈរនិងមានកំពូលនៅលើបន្ទាត់ $(L):-x+2y+6=0$ ហើយ (P) កាត់តាម $A(2,0)$; $B(6,0)$ ។

1. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃ (P) រួចកូអរដោនេកំពូល និង កំណុំ នៃប៉ារ៉ាបូល (P) ។ **2.** សង់ប៉ារ៉ាបូល (P) ។

B. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។ គេឱ្យចំណុច $A(1;-1;-1);B(0;-2;1)$; $C(1;-2;0)$ និងសមីការស្វ៊ែរ

(S): $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$ ។

1. **a** - ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ ។ **b** - បង្ហាញថា $x+y+z+1=0$ ជាសមីការប្លង់ (ABC) ។

2. បង្ហាញថាផ្ចិតនៃស្វ៊ែរ (S) គឺ $\Omega(2;-1;1)$ និងកាំគឺ $R=\sqrt{5}$ ។

a - គណនា $d[\Omega,(ABC)]$ ដែលជាចម្ងាយពីចំណុច Ω ទៅប្លង់ (ABC) ។

b - បង្ហាញថាប្លង់ (ABC) កាត់ស្វ៊ែរ (S) បានរង្វង់ (Γ) មួយ (ដោយមិនចាំបាច់កំណត់ផ្ចិតនិងកាំនៃ (Γ)) ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''+y=0$ ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ $g(x)=\cos x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=e^{2x}-2e^x+2$ មានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. **a** - គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

b - គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ។ រួចបកស្រាយលទ្ធផលលីមីតតាមក្រាបភិច។

2. **a** - បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $f'(x)=2e^x\left(e^x-1\right)$ ។

b - សិក្សាអថេរភាព និង សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

3. **a** - បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f''(x)=2e^x\left(2e^x-1\right)$ ដែល f'' ជាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ f ។

b - ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុច $A\left(-\ln 2,\frac{5}{4}\right)$ ជាចំណុចរបត់នៃក្រាប (C) ។

4. **a** - សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A ។

b - ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំណុច $B(\ln 2,2)$ លើក្រាប (C) ។

c - សង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

5. គេឱ្យ **A** ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) ; អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការបន្ទាត់ $x=0$ និង $x=\ln 2$ ។ បង្ហាញថា $\mathbf{A}=2\ln 2-\frac{1}{2}$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: -------------------- លេខតុ ---------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ------------------------------

៤៧

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=1+i$, $b=\sqrt{3}-i$, $c=\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)$ និង $d=1+i\sqrt{3}$ ។

1. ចូរសរសេរ a , b និង d ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

2. a - ស្រាយបញ្ជាក់ថា $ac=2d$ ។ **b -** សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ c ។ **c -** ចូរកំណត់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

II. ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ូលចំនួន 12 គ្រាប់ដែលក្នុងនោះមានប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 5 គ្រាប់ ហើយចុះលេខ $-1,0,1,1,3$ ប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 3 គ្រាប់ ហើយចុះលេខ $-2,1,2$ និង ប៊ូលពណ៌សចំនួន 4 គ្រាប់ហើយចុះលេខ $-1,0,0,2$ ។

១. គេចាប់យកប៊ូលម្តងមួយៗបន្តបន្ទាប់គ្នាចំនួន 3 ដងចេញពីប្រអប់ដោយចាប់ហើយដាក់ចូលវិញ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

A. « ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា» ។ B. « ចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់ ជាពណ៌ខ្មៅ»។ C.«ចាប់បានប៊ូលយ៉ាងហោចណាស់មួយជាពណ៌ខ្មៅ»។

២. គេចាប់យកប៊ូលម្តងមួយៗបន្តបន្ទាប់គ្នាចំនួន 2 ដងចេញពីប្រអប់ដោយចាប់ហើយមិនដាក់ចូលវិញ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

D. « ផលបូកលេខនៃប៊ូលទាំង 2 ស្មើនឹងសូន្យ » ។ E. «ផលគុណលេខលើប៊ូលទាំង 2 ស្មើនឹងសូន្យ » ។

F. «ផលគុណលេខលើប៊ូលទាំង 2 ជាចំនួនវិជ្ជមាន » ។

III. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ **គ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ **ឃ.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-2\sqrt{x^2}}{x^2+|x|}$

IV. 1. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$; $J=\int_{\ln3}^{\ln8}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$ ។

2. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ $H(x)=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3x$ ជាព្រីមីទីវនៃ $h(x)=3\sin x-2\sin^3x$ កំណត់លើ $[0,\pi]$ ។គណនា $K=\int_0^{\frac{\pi}{3}}h(x)dx$ ។

V. **A.** គេមានសមីការ $(H):\left(\frac{2x-3y}{2}\right)\left(\frac{2x+3y}{18}\right)=1$ ។ បង្ហាញថាសមីការ (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល។ ចូររកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល (H) ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល (H) រួចសង់អ៊ីពែបូល (H) ។

B. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។ គេឱ្យចំណុច $A(1;1;0)$, $B(2;0;0)$, $C(1;3;-1)$ និង $E(2;1;2)$ ។

1. **a -** គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}$ ។ បង្ហាញថាចំណុច A;B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។

b - បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(1;1;2)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។ រួចទាញរកសមីការប្លង់ (P) ។

c - ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំណុច E មិនស្ថិតនៅលើប្លង់ (P) ។

2. **a -** ចូររកសមីការបន្ទាត់ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ (Δ) ដែលកាត់តាមចំណុច E និងកែងនឹងប្លង់ (P) ។

b - គេឱ្យ $H=(\Delta)\cap(P)$ ។ បង្ហាញថាកូអរដោនេនៃចំណុច H គឺ $\left(\frac{7}{6};\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right)$ ។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):9y''+\pi^2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយនេះកាត់ចំណុច $P\left(1,-\sqrt{2}\right)$ និងជាចំណុចប៉ះបន្ទាត់ស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

VII. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$ មានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ ។ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

2. **a -** គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ រួចបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ ។

b - គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$ ។ រួចបកស្រាយលទ្ធផលនេះតាមបែបធរណីមាត្រ។

3. **a -** បង្ហាញថាគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ ។ **b -** គណនា $f(1)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

c - ចូរកំណត់សញ្ញានៃ f លើចន្លោះ $(0,1]$ និង $[1,+\infty)$ ។ **d -** សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចអាប់ស៊ីសស្មើ1។

4. សង់បន្ទាត់ (T) និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

5. **a -** ដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ចូរបង្ហាញថា $\int_1^e\ln x\,dx=1$ ។

b - គេឱ្យ **A** ជាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) ; អ័ក្សអាប់ស៊ីសនិងសមីការ $x=1;x=e$ ។ បង្ហាញថា $\mathbf{A}=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$ ឯកតាផ្ទៃ។

មណ្ឌលប្រឡង --
លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ --------------------
ឈ្មោះបេក្ខជន:--
ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- -------------------------

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល : ១៥០នាទី
ពិន្ទុ : ១២៥

I. **1.** ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ នៃសមីការ $z^2-3z+3=0$ (តាង z_1 ជាឫសនៃសមីការដែលមានផ្នែកនិមិត្តវិជ្ជមាននិង z_2 ជាឫសផ្សេងទៀត)

2. **a**- សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ **b**- សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ $(z_1+\bar{z}_2)$ ។ **c**- បង្ហាញថា $(z_1+\bar{z}_2)^6$ ជាចំនួនពិត។

II. ក្នុងថង់មួយមានកូនបាល់ព៌ណក្រហមចំនួន 1 គ្រាប់កូនបាល់ព៌ណសចំនួន 2 គ្រាប់ និងកូនបាល់ពណ៌ខ្មៅចំនួន 3 គ្រាប់។គេចាប់យកកូនបាល់ 3 គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A "ចាប់បានកូនបាល់ទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា" ។ B " ចាប់បានកូនបាល់ទាំង 3 គ្មានបានពណ៌សរសោះ" ។

C "ចាប់បានកូនបាល់ពណ៌សទាំង 2 " ។

III. គណនាលីមីត៖ក. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4}$ ខ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x-13}+2x+7\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{6x-\pi}$

IV. **1.** គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_0^1\left(x^2-2x+4\right)^2dx$; $J=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{1-x^2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)dx$ ។

2. កោណបរិវត្តន៍មួយមានកម្ពស់ 15cm និងកាំបាត 6cm ។ស៊ីឡាំងមួយមានកាំបាត x និងកម្ពស់ h ចារឹកក្នុងកោណនេះ $(0<x\le 6\,;\,0<h\le 15)$ ។

a- បង្ហាញថា $V=15\pi x^2-\dfrac{5}{2}\pi x^3$ ដែល V ជាមាឌស៊ីឡាំង។ **b**- កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យមាឌ V មានតម្លៃអតិបរមា។

V. **A.** គេមានសមីការ $(H):16x^2-9y^2=-144$ ។ បង្ហាញថាសមីការ (H) ជាសមីការអ៊ីពែបូល។ ចូររកកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល (H) ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល (H) រួចសង់អ៊ីពែបូល (H) ។

B. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គេឱ្យចំណុច $A(1;2;2), B(3;-1;6)$ និង $C(1;1;3)$ ។

1. **a**- ស្រាយបញ្ជាក់ថាវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ ។ **b**- ចូរបង្ហាញថា $x-2y-2z+7=0$ ជាសមីការប្លង់ (ABC) ។

2. គេឱ្យចំណុច $E(5;1;4)$, $F(-1;1;12)$ និង (S) ជាសំណុំចំណុច M ដែលបញ្ជាក់ដោយ $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=0$ ។ បង្ហាញថា (S) ជាសមីការស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត $\Omega(2;1;8)$ និងកាំ $R=5$ ។

3. **a**- គណនា $d(\Omega;(ABC))$ ជាចម្ងាយរវាងចំណុច Ω ទៅប្លង់ (ABC) ។

b- បង្ហាញថាប្លង់ (ABC) កាត់ស្វ៊ែរ (S) បានរង្វង់ (Γ) មួយមានកាំ $r=4$ ។

VI. **ក.** ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-4y'+4y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយនេះមានចំណុចរបត់ $I(0,-1/2)$ ។

VII. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដែល $f(x)=2+8\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2e^{x-4}$ មានក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ (មានឯកតា 1cm)។

1. **a**- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ និងបកស្រាយលទ្ធផលនេះតាមក្រាបភិច ។

b- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ និងបកស្រាយលទ្ធផលនេះតាមក្រាបភិច ។

2. **a**- គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។

b- បង្ហាញថាក្រាប (C) មានមែកប៉ារ៉ាបូលមួយ ដែលមានទិសតាមអ័ក្សអរដោនេ ខាង $+\infty$ ។

3. **a**- បង្ហាញថា $f'(x)=\dfrac{8(x-2)\left(x^2-2x+4\right)e^{x-4}}{x^3}$ ។ **b**- ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$; $x^2-2x+4>0$ ។

c- បង្ហាញថាអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ចុះលើ $(0,2]$ និងជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(-\infty;0)$ និង $(2;+\infty)$ ។

d- សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}^*$ ។

4. សង់ក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

5. **a**- ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $H: x\mapsto\dfrac{1}{x}e^{x-4}$ ជាអនុគមន៍ព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ $h: x\mapsto\dfrac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ លើ $[2,4]$ ។

b- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=2+8e^{x-4}-32\dfrac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ។

c- គណនាប្រើអាំងតេក្រាល $\int_2^4 e^{x-4}dx$ ។

d- គណនាគិតជា cm^2 នៃផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) ; អ័ក្សអាប់ស៊ីស និងសមីការ $x=2; x=4$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: --------------------**លេខតុ**--------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ------------------------------

៤៩

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\sqrt{3}+i$; $z_2=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $a=z_1^2\times z_2$ និង $b=\dfrac{2z_1}{z_2}$ ។

1. សរសេរ z_1 ; z_2 ; z_3 ; a និង b ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

2. កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ $(-z_1)^n$ ជាចំនួនពិត។

II. ក្នុងក្លឹបសិក្សាគណិតវិទ្យាមួយមានសិស្ស 12 នាក់។ គ្រូចង់បែងចែកសិស្សទាំងនោះជាក្រុមមួយដែលមានគ្នា 5 នាក់។សិស្សពីនាក់ A និង B បើចូលក្នុងក្រុមគឺត្រូវចូលទាំងពីរ ហើយបើអត់ចូលក្រុមគឺអត់ទាំងពីរ។

ក. តើគ្រូអាចបង្កើតក្រុមខុសៗគ្នាបានប៉ុន្មានបែប?

ខ. គ្រូជ្រើសរើសមួយក្រុមដោយចៃដន្យ ដើម្បីយកទៅប្រឡងសិស្សពូកែ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

X. ជ្រើសរើសបានក្រុមសិស្សដែលមានសិស្ស A និង B ។ **Y.** ជ្រើសរើសបានក្រុមសិស្សដែលគ្មានសិស្ស A និង B ។

III. គណនាលីមីត៖ **ក.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{\ln x}$ **ខ.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\sqrt{\cos 2x}}$ **គ.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{3x-\pi}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\int_1^e \ln x\,dx$; $J=\int_0^{\pi^2}\cos\sqrt{x}\,dx$; $K=\int_0^2\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}dx$ ។

V. **A.** គេឱ្យ (P) ដែលមានសមីការ $x^2-4x-4y+16=0$ ។

1. បង្ហាញថា (P) ជាសមីការប៉ារ៉ាបូល រួចកំណត់កូអរដោនេនៃ កំពូល កំណុំ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។

2. កំណត់តម្លៃ x_1 និង x_2 នៃ x_o ដែលចំណុច $M(x_o,4)$ ស្ថិតនៅលើ (P) ។ រួចកំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (P) ត្រង់ M ហើយសង់រូប (P) ។

B. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ គេឱ្យចំណុច $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ និង $C(6;-2;-1)$ ។

1. **a -** បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែង។

b - គេឱ្យ (P) ជាសមីការប្លង់ដែលមានសមីការ $x+y+z-3=0$ ។ បង្ហាញថា (P) កែងនឹងបន្ទាត់ (AB) និងកាត់ត្រង់ចំណុច A ។

2. គេឱ្យ (Q) ជាសមីការប្លង់ដែលកែងនឹងបន្ទាត់ (AC) និងកាត់តាមចំណុច A ។ ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (Q) ។

3. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) ដែលជាបន្ទាត់ប្រសព្វគ្នារវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

VI. គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-2y'+y=x^2-4x+4$ ។

1. កំណត់ចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឱ្យ $y_p=m+nx^2$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

2. កំណត់ចម្លើយអូម៉ូសែន y_h នៃសមីការ $(E_o): y''-2y'+y=0$ ។ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

VII. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}+x+1$ មានក្រាប (C_f) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។

2. គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់ D ។

3. គេឱ្យ g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(-\infty,1)$ ដែល $g(x)=x^2-2x+\ln(1-x)$ ។

a - សិក្សាអថេរភាពនៃ g លើ $(-\infty,1)$ ។ (ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីត)

b - គណនា $g(0)$ ។ រួចទាញរកសញ្ញានៃ g លើ $(-\infty,1)$ ។

4. **a -** ចូរស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ $x\in D$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1-x)^2}$ ។ **b -** សិក្សាសញ្ញានៃ f' លើ D ។ **c -** សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ D ។

5. **a -** បង្ហាញថាបន្ទាត់ (d) ដែលមានសមីការ $y=x+1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C_f) ។

b - សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C_f) និងសមីការបន្ទាត់ (d) គ្រប់ x លើ D ។

6. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (d) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។(ដោយដឹងថាក្រាបកាត់អ័ក្ស $(x'ox)$ ត្រង់ $(0.52;0)$ និង $(-1.38;0)$

7. **a -** ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $H: x\mapsto -\dfrac{1}{2}\ln^2(1-x)$ ជាអនុគមន៍ព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ $h: x\mapsto\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ លើ $(-\infty,1)$ ។

b - គណនាផ្ទៃក្រឡាដែលខណ្ឌដោយក្រាប (C) ; បន្ទាត់ (d) និងសមីការបន្ទាត់ $x=-2$ និង $x=0$ ។

មណ្ឌលប្រឡង --

លេខបន្ទប់: --------------------លេខតុ---------------------------

ឈ្មោះបេក្ខជន:--

ហត្ថលេខាបេក្ខជន:------------- ------------------------------

៥០

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

រយៈពេល : ១៥០នាទី

ពិន្ទុ : ១២៥

I. គណនាលីមីត៖ ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x-2)+x(x+2)-x-1}{1-x^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x-3\sin x}{x^3}\right)$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\sin x-1}\right)$ ។

II. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{2\left(1-2i\sqrt{3}\right)}$ ។ **1.** សរសេរ Z ជាទម្រង់ពិជគណិត។

2. **a.** ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z^2=\bar{Z}$ ។ **b.** កំណត់តម្លៃ Z^3 និងបង្ហាញថា $1+Z+Z^2=0$ ។

III. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលចំនួន 10 គ្រាប់ ដែលក្នុងនោះមាន ប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន 3 ចុះលេខ $0;1;1$ និង ប៊ូលពណ៌សចំនួន 4 ចុះលេខ $0;0;1;1$ និង ប៊ូលពណ៌ខ្មៅចំនួន 3 ចុះលេខ $(-1);0;1$ ។ គេចាប់យកប៊ូល 3 ដំណាលគ្នាចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ និងគេតាងព្រឹត្តិការណ៍៖

A." ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានពណ៌ដូចគ្នា" ។ B." ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានផលគុណស្មើនឹងសូន្យ" ។

C." ចាប់បានប៊ូលទាំង 3 មានផលបូកស្មើនឹងសូន្យ" ។

1. គណនា $P(A)$; $P(B)$; $P(C)$; $P(A/B)$ និង $P(\bar{A}/B)$ ។ **2.** គណនា $P(A\cap C)$; $P(A\cup C)$; $P(A/C)$ និង $P(A/\bar{C})$ ។

IV. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x(\ln x+1)}{x}dx$; $J=\displaystyle\int_0^{\ln 3}e^x\left(3e^{2x}+\frac{1}{e^x+1}\right)dx$ និង $K=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x+2\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$ ។

V. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ $(E): y''+5y'+6y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយនោះប៉ះនឹងបន្ទាត់ $y=1-2x$ ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 0 ។

VI. **A.** រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយនៅត្រង់ចំណុច $F(-3,0)$ និងកំពូលពីរនៅត្រង់ចំណុច $A(-5,0)$ និង $B(5,0)$ ។ សង់រូបនៃអេលីបនេះ។

B. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេមានចំណុច $A(-2;1;1)$, $B(-1;-1;0)$, $C(1;1;4)$, $E(2;0;0)$ និងបន្ទាត់ (Δ) មួយដែលមានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រគឺ $x=t;\ y=t;\ z=2-t$; $t\in\mathbb{R}$ ។

1. **a** - បង្ហាញថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់ (P) មួយ។ **b** - បង្ហាញថាសមីការប្លង់ (P) គឺ $x+y-z+2=0$ ។

2. **a** - បង្ហាញថាចំណុច A,B,C និង E មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។ **b** - គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCE$ ។

3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) គឺកែងនឹងប្លង់ (P) ។

4. គេឱ្យ $t\neq 0$ និង $M(t;t;2-t)$ ជាចំណុចមួយលើ (Δ) ។

a - គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $MABC$ ជាអនុគមន៍នៃ t ។

b - ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច M ដោយដឹងថាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $MABC$ ស្មើនឹង 2 នៃមាឌតេត្រាអ៊ែត $EABC$ ។

VII. **ផ្អែក A]** គេឱ្យ g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=e^{x-1}-x+2$ ។

1. គណនា $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។

2. ដោយប្រើតារាងអថេរភាព ចូរកំណត់សញ្ញានៃ g លើ $\mathbb{R}$ ។

ផ្អែក B] គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x-2+\dfrac{x-1}{e^{x-1}}$ និង (C) ជាតំណាងក្រាបនៃអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ រួចកំណត់មែកអនន្តនៃក្រាប (C) ខាង $-\infty$ ។

2. **a** - គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ រួចបង្ហាញថាបន្ទាត់ $(\Delta): y=x-2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតមួយនៃក្រាប (C) ខាង $+\infty$ ។

b - សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (Δ) លើ $\mathbb{R}$ ។

3. **a** - បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{e^{x-1}}$ ។

b - បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

4. **a** - បង្ហាញថា $f''(x)=\dfrac{x-3}{e^{x-1}}$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។ **b** - បង្ហាញថា ក្រាប (C) មានចំណុចរបត់មួយដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើនឹង 3 ។

5. បង្ហាញថា សមីការ $f(x)=0$ មានឫស α តែមួយគត់លើចន្លោះ $(1,2)$ ។

6. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (Δ) ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។ (គេឱ្យ $\alpha\simeq 1.66$; $e^{-1}\simeq 0.36$; $f(0)\simeq -4.7$; $f(3)\simeq 1.2$)