លេខបន្ទប់ : 01
លេខតុ : M

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង: ០២ មេសា ២០១២

វិញ្ញាសាទី១: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ សម្រាប់ថ្ងៃទី: ០២-៤-២០១២

រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាផលបូក $S_{2012} = \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos 2012a$ ។

II. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $A = 6^{2012} + 13^{2012} - 2^{2012} - 17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44 ។

III. (១០ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការ $\sin^2 x^2 + \sin^2 2x^2 = \sin^2 3x^2 + \sin^2 4x^2$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) ប្រអប់មួយមានបាតជាចតុកោណកែងដែលមានអង្កត់ទ្រូងប្រវែង $D(a) = \dfrac{a^2 - \sqrt{a^4 + 4} + 2}{a}$ ដែល $a > 0$ ។

រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់បាតប្រអប់ ។

V. (១៥ពិន្ទុ) ពហុធា $r(x) = x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ មានឫសប្រាំផ្សេងគ្នា a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ហើយ

$s(x) = -x^2 + 5$ ជាពហុធាមួយទៀត ។

គណនាផលគុណ $p = s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5)$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ ដែល a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយខុសពី 1 ។

គណនាផលបូក $S = f(\frac{1}{2012}) + f(\frac{2}{2012}) + \cdots + f(\frac{2011}{2012})$ ។

VII. (២០ពិន្ទុ) រង្វង់ផ្ចិត O កាំ R មួយចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានមុំក្នុងទាំងបីជាមុំស្រួច ហើយ $\angle ACB, \angle ABC$

ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព $\angle ACB - \angle ABC \geq \dfrac{\pi}{6}$ ។ H ជាចំណោលកែងនៃកំពូល A ទៅលើជ្រុង BC របស់ត្រីកោណ ។

បង្ហាញថា $\angle BAC + \angle COH < \dfrac{\pi}{2}$ ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ០២.០៤.២០១២

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ១ ថ្ងៃទី ០២.០៤.២០១២

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I-(១០ពិន្ទុ) គណនា $S_{2012}=\cos a+\cos 2a+\cos 3a+\cdots+\cos 2012a$

- បើ $a=k2\pi, k\in Z$ នោះ $\cos a=\cos 2a=\cdots=\cos 2012a=1$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $S_{2012}=2012$

- បើ $a\neq k2\pi, k\in Z\Rightarrow \sin\frac{a}{2}\neq 0$ គេអាចសរសេរ ២ពិន្ទុ

$$2\sin\frac{a}{2}S_{2012}=2\sin\frac{a}{2}\cos a+2\sin\frac{a}{2}\cos 2a+2\sin\frac{a}{2}\cos 3a+\cdots+2\sin\frac{a}{2}\cos 2012a$$ ២ពិន្ទុ

$$=(-\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{3a}{2})+(-\sin\frac{3a}{2}+\sin\frac{5a}{2})+\cdots+(-\sin\frac{4023a}{2}+\sin\frac{4025a}{2})$$

$$=\sin\frac{4025a}{2}-\sin\frac{a}{2}=2\sin\frac{2012a}{2}\cos\frac{2013a}{2}$$ ២ពិន្ទុ

$$\Rightarrow S_{2012}=\frac{\sin\frac{2012a}{2}\cos\frac{2013a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\sin 1006a\cos\frac{2013a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}, a\neq k2\pi$$ ២ពិន្ទុ

II- (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $A=6^{2012}+13^{2012}-2^{2012}-17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44

គេមាន $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+y^{n-1})=(x-y)z$ ចែកដាច់នឹង $x-y$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $(6^{2012}-2^{2012})+(13^{2012}-17^{2012})=4k-4l$ ចែកដាច់នឹង 4 ២ពិន្ទុ

តាមរបៀបដូចគ្នាដែរ $(6^{2012}-17^{2012})+(13^{2012}-2^{2012})=-11m+11n$ ចែកដាច់នឹង 11 ២ពិន្ទុ

ដោយ $A\equiv 0\ (\text{mod } 4), A\equiv 0\ (\text{mod } 11), GCD(4,11)=1$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $6^{2012}+13^{2012}-2^{2012}-17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44 ។ ២ពិន្ទុ

III-(១០ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការ $\sin^2 x^2+\sin^2 2x^2=\sin^2 3x^2+\sin^2 4x^2$

សមីការអាចសរសេរ

$$\frac{1-\cos 2x^2}{2}+\frac{1-\cos 4x^2}{2}=\frac{1-\cos 6x^2}{2}+\frac{1-\cos 8x^2}{2}$$ ២ពិន្ទុ

$$\Leftrightarrow \cos 2x^2+\cos 4x^2=\cos 6x^2+\cos 8x^2$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x^2\cos x^2=\cos 7x^2\cos x^2$$

$$\Leftrightarrow \cos x^2(\cos 7x^2-\cos 3x^2)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x^2\sin 2x^2\sin 5x^2=0 \quad (E)$$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន

$$\cos x^2=0\Leftrightarrow x_1^2=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k=0,1,2,\ldots$$ ២ពិន្ទុ

$\sin 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 = l\frac{\pi}{2}, l = 0,1,2,\ldots \quad \sin 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x_3^2 = m\frac{\pi}{5}, m = 0,1,2,\ldots$ ២ពិន្ទុ

- បើ $l = 2n+1 \Rightarrow x_2^2 = (2n+1)\frac{\pi}{2} = x_1^2$

- បើ $l = 2n \Rightarrow x_2^2 = n\pi = x_3^2$ នៅពេលដែល $m = 5p$

$(E) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, x = \pm\sqrt{m\frac{\pi}{5}}$ ដែល $k = 0,1,2,\ldots$ និង $m = 0,1,2,\ldots$ ។ ២ពិន្ទុ

IV-(១៥ពិន្ទុ) រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់បាតប្រអប់ដែលអាចផលិតបាន

គេមាន

$$D(a) = \frac{a^2 - \sqrt{a^4+4}+2}{a} = \frac{(a^2+2)^2 - (a^4+4)}{a(a^2+2+\sqrt{a^4+4})}$$ ៣ពិន្ទុ

$$= \frac{4a^2}{a(a^2+2+\sqrt{a^4+4})} = \frac{4}{(a^2+2+\sqrt{a^4+4})/a}$$

$$= \frac{4}{a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}}$$ ៣ពិន្ទុ

តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន

$$a+\frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2},\ a^2+\frac{4}{a^2} \geq 4 \Rightarrow \sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}} \geq 2$$ ៣ពិន្ទុ

$$a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}} \geq 2\sqrt{2}+2 \Rightarrow D(a) = \frac{4}{a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}} \leq \frac{4}{2\sqrt{2}+2} = 2\sqrt{2}-2$$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់បាតប្រអប់ $Max(D(a)) = 2\sqrt{2}-2$ ឯកតាប្រវែង។ ៣ពិន្ទុ

V-(១៥ពិន្ទុ) គណនាផលគុណ $p = s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5)$

ដោយ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ជាឫសពហុធា $r(x)$ នោះគេបាន

$$r(x) = x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5) = \prod_{i=1}^{5}(x-a_i)$$ ៣ពិន្ទុ

ផលគុណ $p = s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5) = (5-a_1^2)(5-a_2^2)(5-a_3^2)(5-a_4^2)(5-a_5^2)$ ៣ពិន្ទុ

$$p = \prod_{i=1}^{5}(\sqrt{5}-a_i) \times \prod_{i=1}^{5}(\sqrt{5}+a_i)$$ ៣ពិន្ទុ

$$= \prod_{i=1}^{5}(\sqrt{5}-a_i) \times (-1)\left(\prod_{i=1}^{5}(-\sqrt{5}-a_i)\right) = -r(\sqrt{5})r(-\sqrt{5})$$ ២ពិន្ទុ

$$= -((\sqrt{5})^5 - 5(\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}+1)((-\sqrt{5})^5 - 5(-\sqrt{5})^3 - 3(-\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}+1)$$ ២ពិន្ទុ

$$= -(-14+2\sqrt{5})(-14-2\sqrt{5}) = -176$$ ២ពិន្ទុ

VI-(២០ពិន្ទុ) គណនាផលបូក $S=f(\frac{1}{2012})+f(\frac{2}{2012})+\cdots+f(\frac{2011}{2012})$

គេមាន

$$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}$$ ៣ពិន្ទុ

$$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a^x}=1$$ ៣ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ

$$f(\frac{1}{2012})+f(\frac{2011}{2012})=1$$ ២ពិន្ទុ

$$f(\frac{2}{2012})+f(\frac{2010}{2012})=1$$ ២ពិន្ទុ

$$f(\frac{3}{2012})+f(\frac{2009}{2012})=1$$ ២ពិន្ទុ

....

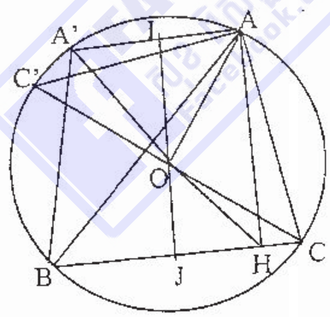
$$f(\frac{1005}{2012})+f(\frac{1007}{2012})=1$$ ២ពិន្ទុ

$$f(\frac{1006}{2012})=f(1/2)=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}=1/2$$ ៣ពិន្ទុ

ដោយបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន

$$S=f(\frac{1}{2012})+f(\frac{2}{2012})+\cdots+f(\frac{2011}{2012})=1005+(1/2)=1005.5$$ ៣ពិន្ទុ

VII- (២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\angle BAC+\angle COH<\frac{\pi}{2}$



៤ពិន្ទុ

គេគូសអង្កត់ធ្នូ $AA'\parallel BC$ ហើយគេបាន $\angle ACB=\angle A'BC$ ២ពិន្ទុ

$$\angle A'BC-\angle ABC\geq\frac{\pi}{6}\Rightarrow\angle A'BC\geq\angle ABC+\frac{\pi}{6}$$

$$\angle CBA+\angle ABA'\geq\angle ABC+\frac{\pi}{6}\Rightarrow\angle ABA'\geq\frac{\pi}{6}$$ ២ពិន្ទុ

$$\Rightarrow\angle AOA'\geq\frac{\pi}{3}$$

តាង I,J ជាចំណុចកណ្តាលអង្កត់ធ្នូ AA',BC រៀងគ្នា។

ត្រីកោណសមបាត OAA' មាន $\angle AOA'\geq\frac{\pi}{3}\Rightarrow AA'\geq OA=R$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $AI\geq R/2$

$AIJH$ ជាចតុកោណកែង នោះគេបាន $AI = HJ \geq R/2$ ២ពិន្ទុ

ត្រីកោណកែង$JOH : OH > JH \geq R/2 \Rightarrow OH > R/2$ (1)

តែ $HC = JC - JH < R - JH \leq R/2 \Rightarrow HC < R/2$ (2) ២ពិន្ទុ

$(1) \& (2) \Rightarrow HC < OH$

$\Rightarrow \angle COH < \angle OCH$ ២ពិន្ទុ

គូសអង្កត់ផ្ចិត CC' ហើយគេបាន $\angle C'CB = \angle C'AB$ (ស្កាត់ធ្នូរួម$C'B$) ២ពិន្ទុ

$\angle COH < \angle OCH \Rightarrow \angle COH + \angle BAC < \angle OCH + \angle BAC$

$\angle COH + \angle BAC < \angle C'AB + \angle BAC = \angle C'AC = \pi/2$ ២ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០២ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

អ្នកកត់ត្រា

ហ៊ាក ស៊ីណាត

10

ថ្ងៃទី ០២ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

បានឃើញ និង ឯកភាព

ប្រធានក្រុមកំណែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ុ សាងលី

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង: ០២ មេសា ២០១២

វិញ្ញាសាទី២: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ សម្រាប់ថ្ងៃទី: ០៤-៤-២០១២

រយៈពេល ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) គេតាង $[x]$ ជាផ្នែកគត់នៃចំនួនពិត x ហើយដែលកំណត់ដោយ $[x] \le x < [x]+1$ ។

បង្ហាញថា បើ b ជាចំនួនគត់វិឡាទីបវិជ្ជមាន នោះគេបាន $\left[\dfrac{x}{b}\right] = \left[\dfrac{[x]}{b}\right]$ ។

II. (១០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $f(x) = \cos x + \cos(\sqrt{p}\,x)$ ដែល p ជាចំនួនបឋម ។

បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ ។

III. (២០ពិន្ទុ) គេឱ្យផលបូក $S(a,b) = (a+1)^b + (a+2)^b + (a+3)^b + (a+4)^b + (a+5)^b$ ដែល a និង b ជាពីរចំនួនគត់វិឡាទីបមិនអវិជ្ជមាន ។

បង្ហាញថា $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ។

IV. (២០ពិន្ទុ) សមីការ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា a, b និង c ។

គណនាតម្លៃលេខនៃ $F_7(a,b,c) = \dfrac{a^7 - b^7}{a-b} + \dfrac{b^7 - c^7}{b-c} + \dfrac{c^7 - a^7}{c-a}$ ។

V. (២០ពិន្ទុ) ត្រីកោណ ABC មួយមាន $\angle ABC = 2a$ និងផ្ទៃក្រឡា s ។ D ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើជ្រុង AC ហើយដែលរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABD ប៉ុនគ្នានឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ BCD ។

បង្ហាញថា $BD = \sqrt{\dfrac{s}{\tan a}}$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ និង $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ ចំពោះ $n \ge 2$ ។

១- បង្ហាញថា $x_{k+1} \cdot x_{k+2} - x_k \cdot x_{k+3} = (-1)^k$ ចំពោះ $\forall k \in N$ ។

២- គេតាង $arc\cot$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $\cot$ ។

បង្ហាញថា $arc\cot x_1 - arc\cot x_3 - arc\cot x_5 - \cdots - arc\cot x_{2011} = arc\cot x_{2012}$ ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ០២.០៤.២០១២

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ២ ថ្ងៃទី ០៤.០៤.២០១២

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា បើ b ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទិបវិជ្ជមាន នោះ $[x/b]=[[x]/b]$:

តាង $a=[x]$ ហើយតាមវិធីចែកអឺគ្លីតនៃ $a \& b$ គេបាន $a=bq+r, 0\le r<b$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $0\le r<b \Rightarrow bq\le bq+r<b(q+1)$ ហើយ $bq\le a<b(q+1) \Rightarrow q\le \dfrac{a}{b}<q+1$

គេទាញបាន $[a/b]=q$ ហើយ $[a/b]=[[x]/b]=q$ (1) ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $[x]\le x<[x]+1 \Rightarrow x=a+\varepsilon=bq+r+\varepsilon, 0\le\varepsilon<1$

គេបាន $[x/b]=[(bq+r+\varepsilon)/b]=[q+(r+\varepsilon)/b]$ ២ពិន្ទុ

តែ $0\le\varepsilon<1 \& 0\le r\le b-1 \Rightarrow 0\le r+\varepsilon<b$ ហើយ $0\le(r+\varepsilon)/b<1$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $q\le q+(r+\varepsilon)/b<q+1$ ហើយ $q\le[x/b]<q+1 \Rightarrow [x/b]=q$ (2)

តាម(1) & (2) $\Rightarrow [x/b]=[[x]/b]$ ។ ២ពិន្ទុ

II-(១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ :

ឧបមាថា f មានខួប T នោះគេបាន $f(x+T)=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ២ពិន្ទុ

បានន័យថា $\cos(x+T)+\cos(x\sqrt{p}+T\sqrt{p})=\cos x+\cos(x\sqrt{p})$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ ២ពិន្ទុ

ពិនិត្យចំពោះ $x=0$ គេបាន : $\cos T+\cos T\sqrt{p}=2 \Leftrightarrow \cos T=1 \wedge \cos T\sqrt{p}=1$ ២ពិន្ទុ

$T=k2\pi \wedge T\sqrt{p}=m2\pi, k\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}$ ហើយ $\sqrt{p}=\dfrac{m2\pi}{k2\pi}=\dfrac{m}{k}$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $\sqrt{p}\in\overline{Q}_+ \wedge \dfrac{m}{k}\in Q_+$ នោះគេបាន $\sqrt{p}=\dfrac{m}{k}$ ជាករណីមិនអាចមាន ។

ដូចនេះ f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ ។ ២ពិន្ទុ

III-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4

ចំពោះ $a\ge 0$ គេបាន $a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$ ចែកនឹង 5 បានសំណល់ $0,1,2,3,4$ ។ ២ពិន្ទុ

គេបាន $S(a,b)\equiv 0^b+1^b+2^b+3^b+4^b=1^b+2^b+3^b+4^b \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

តាមការសង្កេតគេបាន : $2^{4m}\equiv 1, 2^{4m+1}\equiv 2, 2^{4m+2}\equiv 4, 2^{4m+3}\equiv 3 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

$3^{4m}\equiv 1, 3^{4m+1}\equiv 3, 3^{4m+2}\equiv 4, 3^{4m+3}\equiv 2 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

$4^{4m}\equiv 1, 4^{4m+1}\equiv 4, 4^{4m+2}\equiv 1, 4^{4m+3}\equiv 4 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

-បើ $b=4m+1$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន

$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+1}+2^{4m+1}+3^{4m+1}+4^{4m+1}\equiv 1+2+3+4=10\equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod 5$ ២ពិន្ទុ

-បើ $b=4m+2$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន

$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+2}+2^{4m+2}+3^{4m+2}+4^{4m+2}\equiv 1+4+4+1=10\equiv 0 \pmod{5}$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod{5}$

-បើ $b=4m+3$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន

$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+3}+2^{4m+3}+3^{4m+3}+4^{4m+3}\equiv 1+3+2+4=10\equiv 0 \pmod{5}$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod{5}$.

ដូចនេះ $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ។ ២ពិន្ទុ ២ពិន្ទុ

IV-(២០ពិន្ទុ) គណនាតម្លៃលេខនៃ $F_7(a,b,c)=\dfrac{a^7-b^7}{a-b}+\dfrac{b^7-c^7}{b-c}+\dfrac{c^7-a^7}{c-a}$ ៖

សមីការ $t^3=3t^2+4t-5$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $t=0$ គឺថា $t\neq 0$

នោះគេបាន $t^3=3t^2+4t-5 \Leftrightarrow t^{k+3}=3t^{k+2}+4t^{k+1}-5t^k$ ២ពិន្ទុ

ដោយ a, b និង c ជាឫសបីផ្សេងគ្នានោះគេបាន $a^{k+3}=3a^{k+2}+4a^{k+1}-5a^k$ (1),

$b^{k+3}=3b^{k+2}+4b^{k+1}-5b^k$ (2) , $c^{k+3}=3c^{k+2}+4c^{k+1}-5c^k$ (3) ២ពិន្ទុ

$(1)-(2)$ រួចចែកនឹង $(a-b)$: $\dfrac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}=3\dfrac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}+4\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}-5\dfrac{a^k-b^k}{a-b}$ (4) ២ពិន្ទុ

$(2)-(3)$ រួចចែកនឹង $(b-c)$: $\dfrac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}=3\dfrac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}+4\dfrac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}-5\dfrac{b^k-c^k}{b-c}$ (5) ២ពិន្ទុ

$(3)-(1)$ រួចចែកនឹង $(c-a)$: $\dfrac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}=3\dfrac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}+4\dfrac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}-5\dfrac{c^k-a^k}{c-a}$ (6) ២ពិន្ទុ

ដោយបូក $(4)+(5)+(6)$ អង្គ និងអង្គ

$$\frac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}+\frac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}+\frac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}=3\left(\frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}+\frac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}+\frac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}\right)+$$

$$+4\left(\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}+\frac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}+\frac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}\right)-5\left(\frac{a^k-b^k}{a-b}+\frac{b^k-c^k}{b-c}+\frac{c^k-a^k}{c-a}\right) \quad (7)$$ ២ពិន្ទុ

តាង $F_k=\dfrac{a^k-b^k}{a-b}+\dfrac{b^k-c^k}{b-c}+\dfrac{c^k-a^k}{c-a}$ $\quad F_{k+1}=\dfrac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}+\dfrac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}+\dfrac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}$

$F_{k+2}=\dfrac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}+\dfrac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}+\dfrac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}$, $F_{k+3}=\dfrac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}+\dfrac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}+\dfrac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}$

គេបាន $F_{k+3}=3F_{k+2}+4F_{k+1}-5F_k$ (8) ២ពិន្ទុ

- បើ $k=0$ នោះគេបាន $F_0=0, F_1=1+1+1=3, F_2=2(a+b+c)=2\times 3=6$

ហើយតាម (8) គេបាន $F_3=3F_2+4F_1-5F_0=3\times6+4\times3-5\times0=30$ ២ពិន្ទុ

- បើ $k=1$ នោះតាម (8) គេបាន $F_4=3F_3+4F_2-5F_1=90+24-15=99$

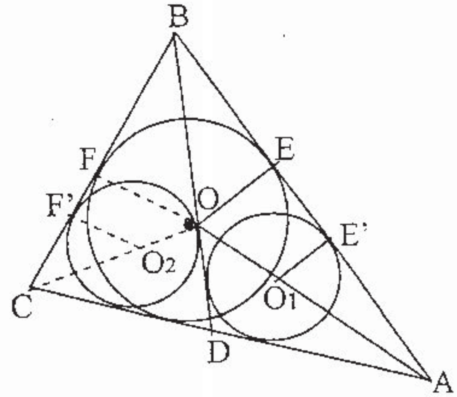
- បើ $k=2$ នោះតាម (8) គេបាន $F_5=3F_4+4F_3-5F_2=297+120-30=387$ ២ពិន្ទុ

- បើ $k=3$ នោះតាម (8) គេបាន $F_6=3F_5+4F_4-5F_3=1161+396-150=1407$

- បើ $k=4$ នោះតាម (8) គេបាន $F_7=3F_6+4F_5-5F_4=4221+1548-495=5274$

ដូចនេះ $F_7(a,b,c)=\dfrac{a^7-b^7}{a-b}+\dfrac{b^7-c^7}{b-c}+\dfrac{c^7-a^7}{c-a}=5274$ ២ពិន្ទុ

V-(២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $BD=\sqrt{\dfrac{s}{\tan a}}$:



៤ពិន្ទុ

តាង : s_1 និង p_1 ជាផ្ទៃក្រឡា និង កន្លះបរិមាត្រនៃΔABD s_2 និង p_2 ជាផ្ទៃក្រឡា និង កន្លះបរិមាត្រនៃΔBCD

p ជា កន្លះបរិមាត្រនៃΔABC r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងΔABC r' ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងΔABD និងΔBCD

E និង E' ជាចំនុចប៉ះរវាងAB ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុងΔABC និងΔABD

F និង F' ជាចំនុចប៉ះរវាងBC ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុងΔABC និងΔBCD

គេបាន : $s=s_1+s_2$, $pr=p_1r'+p_2r'=(p_1+p_2)r'$ (1) ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត ; $2p_1+2p_2=2p+2BD \quad \Rightarrow p_1+p_2=p+BD$

(1) អាចសរសេរ : $pr=(p+BD)r'$ ហើយ $\dfrac{r'}{r}=\dfrac{p}{p+BD}$ (2) ២ពិន្ទុ

$\Delta E'AO_1 \sim \Delta EAO$: $\dfrac{AE'}{AE}=\dfrac{r'}{r}$ ហើយ $\Delta F'CO_2 \sim \Delta FCO$: $\dfrac{CF'}{CF}=\dfrac{r'}{r}$ (3) ២ពិន្ទុ

ក្នុងΔABC គេមាន $p=AE+BF+FC=AE+BC \Rightarrow AE=p-BC$

ក្នុងΔABC គេមាន $p=CF+AE+EB=CF+AB \Rightarrow CF=p-AB$

ក្នុងΔABD គេមាន $AE'=p_1-BD$ ក្នុងΔBCD គេមាន $CF'=p_2-BD$ ២ពិន្ទុ

(3) : $\dfrac{r'}{r}=\dfrac{p_1-BD}{p-BC}=\dfrac{p_2-BD}{p-AB}=\dfrac{p_1+p_2-2BD}{2p-(BC+AB)}$

$\dfrac{r'}{r}=\dfrac{p+BD-2BD}{AC}=\dfrac{p-BD}{AC}$ (4) ២ពិន្ទុ

តាម (2) និង (4) : $\dfrac{p}{p+BD}=\dfrac{p-BD}{AC} \Rightarrow p\cdot AC=p^2-BD^2$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow BD^2=p(p-AC)=p\cdot BE$ (5) ព្រោះ $BI=p-AC$

២ពិន្ទុ

ក្នុងΔEBO : $BE=\dfrac{r}{\tan a}$

២ពិន្ទុ

(5) : $BD^2=\dfrac{pr}{\tan a}=\dfrac{s}{\tan a} \Rightarrow BD=\sqrt{\dfrac{s}{\tan a}}$

VI-(២០ពិន្ទុ) ១- បង្ហាញថា $x_{k+1}\cdot x_{k+2}-x_k\cdot x_{k+3}=(-1)^k$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k

- ចំពោះ $k=1$ គេបាន $x_2\cdot x_3-x_1\cdot x_4=1\times 2-1\times 3=-1=(-1)^1$

-ឧបមាពិត ដល់ $k=p$ គឺថា $x_{p+1}\cdot x_{p+2}-x_p\cdot x_{p+3}=(-1)^p$ ២ពិន្ទុ

-សិក្សាករណី $k=p+1$

$x_{p+2}\cdot x_{p+3}-x_{p+1}\cdot x_{p+4}=x_{p+2}(x_{p+1}+x_{p+2})-x_{p+1}(x_{p+2}+x_{p+3})$

$=(x_{p+2})^2-x_{p+1}(x_{p+1}+x_{p+2})=(x_{p+2})^2-(x_{p+1})^2-x_{p+1}x_{p+2}$ ២ពិន្ទុ

$=(x_{p+2}-x_{p+1})(x_{p+2}+x_{p+1})-x_{p+1}x_{p+2}$

$=(x_{p+1}+x_p-x_{p+1})(x_{p+3})-x_{p+1}x_{p+2}$

$=x_p x_{p+3}-x_{p+1}x_{p+2}$

$=(-1)(x_{p+1}x_{p+2}-x_p x_{p+3})=(-1)(-1)^p=(-1)^{p+1}$ ២ពិន្ទុ

ដូច្នេះ $x_{k+1}\cdot x_{k+2}-x_k\cdot x_{k+3}=(-1)^k$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។

២- បង្ហាញថា $arc\cot x_1-arc\cot x_3-arc\cot x_5-\cdots-arc\cot x_{2011}=arc\cot x_{2012}$

គេដឹងថា $a=\cot\alpha, b=\cot\beta \Leftrightarrow \alpha=arc\cot a, \beta=arc\cot b$ ២ពិន្ទុ

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}\Leftrightarrow \alpha-\beta=arc\cot\left(\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}\right)$$ ២ពិន្ទុ

$$\Leftrightarrow arc\cot a-arc\cot b=arc\cot\left(\frac{ab+1}{b-a}\right)$$

គេអាចសរសេរ

$$arc\cot x_{2i}-arc\cot x_{2i+1}=arc\cot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i+1}-x_{2i}}\right)=arc\cot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i}+x_{2i-1}-x_{2i}}\right)$$ ២ពិន្ទុ

$$arc\cot x_{2i}-arc\cot x_{2i+1}=arc\cot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i-1}}\right)\quad(1)$$

តាមសំណួរទី១ ខាងលើ និងយក $k=2i-1$ នោះគេបាន ២ពិន្ទុ

$x_{2i}\cdot x_{2i+1}-x_{2i-1}\cdot x_{2i+2}=-1\Rightarrow x_{2i}\cdot x_{2i+1}+1=x_{2i-1}\cdot x_{2i+2}$

តាម (1) គេបាន $arc\cot x_{2i}-arc\cot x_{2i+1}=arc\cot x_{2i+2}$

ដោយជួសតម្លៃ $i=1,2,3,\cdots,1005$ នោះគេបាន

$arc\cot x_1-arc\cot x_3=arc\cot x_4$ (ព្រោះ $x_2=x_1$) ២ពិន្ទុ

$arc\cot x_4-arc\cot x_5=arc\cot x_6$

.... ២ពិន្ទុ

$arc\cot x_{2010}-arc\cot x_{2011}=arc\cot x_{2012}$

បូកអង្គ និងអង្គ គេបាន ២ពិន្ទុ

$arc\cot x_1-arc\cot x_3-arc\cot x_5-\cdots-arc\cot x_{2011}=arc\cot x_{2012}$ ។

ថ្ងៃទី ០៤ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

អ្នកកត់ត្រា

ហ៊ាង សំអាត

ថ្ងៃទី ០៤ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១២

បានឃើញ និង ឯកភាព

ប្រធានក្រុមកំណែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ុ សៀងលី

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង : ០១_០៤_២០១៣

វិញ្ញាសា: គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ១ ថ្ងៃទី ០១_០៤_២០១៣

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប k អាចសរសេរជារាង $a^2+b^2-5c^2$ ដែល a,b,c ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។

II. (១៥ពិន្ទុ) កំណត់ចំនួនឬសគត់វិជ្ជមានទាំងអស់នៃសមីការ $x+y+z=n$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធំជាង 2 ។

III. (១៥ពិន្ទុ) ស្វ៊ីតចំនួនពិត $x_1, x_2, \ldots, x_n$ កំណត់ដោយ $x_1=0$ និង $|x_i|=|x_{i-1}+c|$ ដែល $2\le i\le n$ និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ កំណត់តម្លៃអប្បបរមារបស់ $A=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ជាអនុគមន៍នៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន c តែមួយគត់ ។

IV. (២០ពិន្ទុ) សិស្ស 9 នាក់ ធ្វើដំណើរតាមរថភ្លើងមួយ ដែលមានជា 3 បន្ទប់ដាច់ពីគ្នា ។ សិស្សម្នាក់ៗត្រូវឡើងជិះនៅក្នុងបន្ទប់ណាមួយដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

A: សិស្ស 3 នាក់ ជិះនៅក្នុងបន្ទប់ទីមួយ

B: សិស្ស 3 នាក់ ជិះនៅក្នុងបន្ទប់នីមួយៗ

C: សិស្ស 2 នាក់ជិះនៅក្នុងបន្ទប់មួយ 3 នាក់ជិះនៅក្នុងបន្ទប់មួយទៀត ហើយ 4 នាក់ជិះនៅក្នុងបន្ទប់ដែលនៅសល់ ។

V. (២០ពិន្ទុ) P ជា ចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ ។ បន្ទាត់ AP ជួប BC ត្រង់ I បន្ទាត់ BP ជួប CA ត្រង់ J ហើយបន្ទាត់ CP ជួប AB ត្រង់ K ។

បង្ហាញថា $\dfrac{PA}{PI}\times\dfrac{PB}{PJ}+\dfrac{PB}{PJ}\times\dfrac{PC}{PK}+\dfrac{PC}{PK}\times\dfrac{PA}{PI}\ge 12$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) រកគ្រប់អនុគមន៍ f ដែលកំណត់ និងមានដេរីវេចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x, y, xy\ne 1$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$ ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ០១.០៤.២០១៣

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ១ ថ្ងៃទី ០១.០៤.២០១៣

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប k អាចសរសេរជារាង $a^2+b^2-5c^2$ ដែល a,b,c ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

- ករណី $k=2n+1, n\in Z$ គេអាចសរសេរ $k=2n+1=n^2+4n^2-5n^2+2n+1$ ២ពិន្ទុ

$k=n^2+2n+1+4n^2-5n^2$

$k=(n+1)^2+(2n)^2-5n^2$ ២ពិន្ទុ

- ករណី $k=2n, n\in Z$ គេអាចសរសេរ $k=2n=n^2+4n^2-5n^2-8n+10n$ ២ពិន្ទុ

$k=n^2-4n+4+4n^2-4n+1-5n^2+10n-5$ ២ពិន្ទុ

$k=(n-2)^2+(2n-1)^2-5(n-1)^2$ ២ពិន្ទុ

II. (១៥ពិន្ទុ) កំណត់ចំនួនចម្លើយគត់វិជ្ជមានទាំងអស់នៃសមីការ $x+y+z=n$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធំជាង 2

- ដំបូងគេពិនិត្យសមីការ $y+z=k$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

y អាចយកតម្លៃ $1, 2, \ldots, k-1$ ព្រោះបើ $y\ge k \Rightarrow z\le 0$ ដែលមិនអាច ២ពិន្ទុ

z អាចយកតម្លៃ $k-y$ គឺ $z=k-1, k-2, \ldots, 1$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ សមីការ $y+z=k$ មាន $(k-1)$ គូចម្លើយគត់វិជ្ជមាន ។ ២ពិន្ទុ

- ចំពោះ សមីការ $x+y+z=n$

x អាចយកតម្លៃ $1, 2, \ldots, n-2$ ព្រោះបើ $x\ge n-1 \Rightarrow x+y+z\ge n-1+1+1=n+1$ ដែលមិនអាច ២ពិន្ទុ

ចំណែក y និង z ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $y+z=n-x$ ដែលអាចមាន $((n-x)-1)$ គូចម្លើយ (y,z)

បានន័យថា ចំពោះតម្លៃណាមួយរបស់ x គេអាចបាន $(n-x-1)$ គូចម្លើយ (y,z) ។ ២ពិន្ទុ

ដោយ $x=1, 2, \ldots, n-2$ នោះគេបានចំនួន ចម្លើយគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ទាំងអស់នៃសមីការ $x+y+z=n$

$\sigma=(n-1-1)+(n-2-1)+\cdots+(n-(n-2)-1)$ ២ពិន្ទុ

$=(n-2)+(n-3)+\cdots+1=0.5(n-1)(n-2)$ ៣ពិន្ទុ

ដូចនេះ ចំនួន ចម្លើយគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ទាំងអស់នៃសមីការ: $\sigma=0.5(n-1)(n-2)$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) កំណត់តម្លៃអប្បបរមារបស់ $A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ជាអនុគមន៍ចំនួនពិតវិជ្ជមាន c តែមួយគត់

គេមាន $\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=\sum_{i=2}^{n+1}\left|x_i\right|^2=\sum_{i=2}^{n+1}\left|x_{i-1}+c\right|^2$ ២ពិន្ទុ

$=\sum_{i=2}^{n+1}(x_{i-1}+c)^2=\sum_{i=2}^{n+1}x_{i-1}^2+2c\sum_{i=2}^{n+1}x_{i-1}+nc^2$ ២ពិន្ទុ

$=\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2+2c\sum_{i=1}^{n}x_i+nc^2$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2=2c\sum_{i=1}^{n}x_i+nc^2$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow 0\le x_{n+1}^2=2c\sum_{i=1}^{n}x_i+nc^2$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន $2c\sum_{i=1}^{n}x_i\ge -nc^2$ ២ពិន្ទុ

៣ពិន្ទុ

$$\frac{PA}{PI}=\frac{AI-PI}{PI}=\frac{AI}{PI}-1=\frac{S}{S_1}-1=\frac{S_2+S_3}{S_1}$$ ២ពិន្ទុ

តាមរបៀបដូចគ្នា

$$\frac{PB}{PJ}=\frac{S_3+S_1}{S_2}$$ ២ពិន្ទុ

$$\frac{PC}{PK}=\frac{S_1+S_2}{S_3}$$ ២ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ

$$\frac{PA}{PI}\times\frac{PB}{PJ}+\frac{PB}{PJ}\times\frac{PC}{PK}+\frac{PC}{PK}\times\frac{PA}{PI}=\frac{(S_2+S_3)(S_3+S_1)}{S_1S_2}+\frac{(S_3+S_1)(S_1+S_2)}{S_2S_3}+$$ ២ពិន្ទុ

$$+\frac{(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_3S_1}$$

$$=\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)+\left(\frac{S_3}{S_2}+\frac{S_2}{S_3}\right)+\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+3+\frac{S_1^2}{S_2S_3}+\frac{S_2^2}{S_3S_1}+\frac{S_3^2}{S_1S_2}$$ ២ពិន្ទុ

$$=\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)+\left(\frac{S_3}{S_2}+\frac{S_2}{S_3}\right)+\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+3+\frac{S_1^2+S_2^2+S_3^2}{S_1S_2S_3}$$ ២ពិន្ទុ

$$\geq 2+2+2+3+3=12$$

ដូចនេះ $\frac{PA}{PI}\times\frac{PB}{PJ}+\frac{PB}{PJ}\times\frac{PC}{PK}+\frac{PC}{PK}\times\frac{PA}{PI}\geq 12$ ។ ២ពិន្ទុ

VI. (២០ពិន្ទុ) រកគ្រប់អនុគមន៍ f

គេមាន $f'(x)=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ (1) ៣ពិន្ទុ

$$f'(y)=\frac{1+x^2}{(1-xy)^2}f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \quad (2)$$ ៣ពិន្ទុ

ដោយចែក (1) & (2) :

$$\frac{f'(x)}{f'(y)}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$$ ២ពិន្ទុ

$$\Rightarrow f'(x)(1+x^2)=f'(y)(1+y^2)$$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន អង្គទាំងពីរត្រូវតែស្មើនឹងចំនួនថេរ kណាមួយ គឺថា $f'(x)(1+x^2)=k$ ២ពិន្ទុ

$$\Rightarrow f'(x)=k/(1+x^2)$$

$$\Rightarrow f(x)=\int(k/(1+x^2))\,dx=k\arctan x+c$$ ២ពិន្ទុ

បើ $y=0\Rightarrow f(x)+f(0)=f\left(\frac{x+0}{1-0}\right)=f(x)\Rightarrow f(0)=0$ ២ពិន្ទុ

តែ $f(0)=k\arctan 0+c=0\Rightarrow c=0$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $f(x)=k\arctan x$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ ។ ២ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០១ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១៣

ប្រធានក្រុមកែវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សាងលី

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង : ០១.០៤.២០១៣

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ២ ថ្ងៃទី ០៣.០៤.២០១៣

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $A=\frac{1}{n+1}C(2n,n)$ ជាចំនួនគត់ ចំពោះ $n=1,2,3,\dots$ ។

II. (១៥ពិន្ទុ) ត្រីកោណមួយមានជ្រុងប្រវែង a, b និង c ។ គេសង់កន្លះរង្វង់បី នៅខាងក្រៅត្រីកោណ និងមានអង្កត់ផ្ចិត ជាជ្រុងនីមួយៗរបស់ត្រីកោណនោះ ។ អង្កត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ពីរៗ មានប្រវែង x, y និង z រៀងគ្នា ។ សរសេរផលបូក $\sum=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$ ជាអនុគមន៍នៃ a,b និង c ។

III. (១៥ពិន្ទុ) M ជា ចំណុច មួយនៅលើ ឬនៅក្នុងរង្វង់កាំ R មួយ ។ តាម M គេគូសអង្កត់ធ្នូពីរកែងគ្នា AC និង BD ។ រកតម្លៃធំបំផុត និងតម្លៃតូចបំផុតរបស់ផលបូក $S=AC+BD$ ។

IV. (២០ពិន្ទុ) គេឱ្យទំនាក់ទំនង D មួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

(i) $D(1,0,0,1)=1$,

(ii) $D(kw,x,ky,z)=k\,D(w,x,y,z)$,

(iii) $D(w,x,y,z)=-D(x,w,z,y)$,

(iv) $D(w+u,x,y+v,z)=D(w,x,y,z)+D(u,x,v,z)$ ដែល k,u,v,w,x,y និង z ជាចំនួនពិត ។

កំណត់ $D(a,b,c,d)$ ជាអនុគមន៍នៃចំនួនពិត a,b,c និង d ។

V. (២០ពិន្ទុ) គេតាង $s(n)$ ជាផលបូកលេខទាំងអស់របស់ចំនួន 2^n ដែល $n=1,2,3,\dots$ ។

បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $s(n+1)=s(n)$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) គេឱ្យ ចំនួនពិត $a_1,a_2,\dots,a_m$ និង $u_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ ដែល $n=1,2,\dots,m$ ។

បង្ហាញថា $\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{u_n}{n}\right)^2\le 12\sum_{n=1}^{m}a_n^2$ ។

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែថ្នាក់ជាតិប្រទេស

វិញ្ញាសាអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ០១-០៤-២០១៣

អត្រាកំណែគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ២ ថ្ងៃទី ០៣-០៤-២០១៣

រយៈពេល ១៥០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $A=\frac{1}{n+1}C(2n,n)$ ជាចំនួនគត់ចំពោះ $n=1,2,3,\ldots$

គេមាន $A=\frac{1}{n+1}C(2n,n)=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ ២ពិន្ទុ

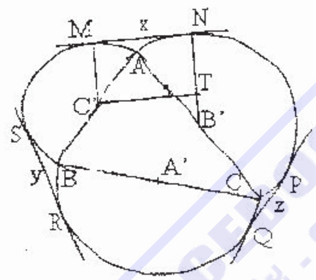
$A=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}((n+1)-n)=\frac{(2n)!(n+1)}{n!(n+1)!}-\frac{(2n)!(n)}{n!(n+1)!}$ ២ពិន្ទុ

$=\frac{(2n)!}{(n!)^2}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$ ២ពិន្ទុ

$=C(2n,n)-C(2n,n-1)$ ២ពិន្ទុ

ដោយ $C(2n,n)$ & $C(2n,n-1)$ ជាចំនួនគត់ នោះ $A=C(2n,n)-C(2n,n-1)$ ជាចំនួនគត់ ។ ២ពិន្ទុ

II. (១៥ពិន្ទុ) សរសេរផលបូក $\sum=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}$ ជាអនុគមន៍នៃ a,b និង c



៣ពិន្ទុ

គេយក ΔABC ជាត្រីកោណដែលមាន $BC=a, CA=b$ និង $AB=c$ ។

តាង A',B',C' ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងរបស់ជ្រុង BC, CA, AB ។

តាង : MN ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ផ្ចិត C' និងផ្ចិត B' ហើយ $MN=x$

RS ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ផ្ចិត A' និងផ្ចិត C' ហើយ $RS=y$

PQ ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ផ្ចិត B' និងផ្ចិត A' ហើយ $PQ=z$ ។

គូស $C'T\perp B'N$ ត្រង់ T នោះគេបាន $MNTC'$ ជាចតុកោណកែង ។ ២ពិន្ទុ

វិបាក $MN=C'T=x$

គេបាន $B'C'=a/2, B'T=B'N-TN=|(b/2)-(c/2)|$ ២ពិន្ទុ

$C'T=\sqrt{(B'C')^2-(B'T)^2}=\sqrt{(a/2)^2-((b/2)-(c/2))^2}$

$x=(1/2)\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}$ ២ពិន្ទុ

តាមរបៀបដូចគ្នា គេបាន :

$y=(1/2)\sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)}$ ២ពិន្ទុ

$z=(1/2)\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)}$

គេបាន $\frac{yz}{x}=\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{zx}{y}=\frac{1}{2}(a-b+c)$, $\frac{xy}{z}=\frac{1}{2}(-a+b+c)$ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ $\sum=\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ។ ២ពិន្ទុ

ហើយ $1 \le a_m \le 9, 0 \le a_j \le 9$ ចំពោះ $j = 0,1,2,\ldots,m-1$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $2^n \equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 3$ ២ពិន្ទុ

$2^n \equiv s(n) \pmod 3$ ២ពិន្ទុ

ម្យ៉ាងទៀត $2^{n+1} = b_p 10^p + b_{p-1}10^{p-1} + \cdots + b_1 10 + b_0$ ២ពិន្ទុ

គេទាញបាន $2^{n+1} \equiv s(n+1) \pmod 3$ ២ពិន្ទុ

$s(n+1) \equiv 2^{n+1} \equiv 2 \times 2^n \equiv 2s(n) \pmod 3$ ២ពិន្ទុ

ឧបមាថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $s(n+1) = s(n)$ នោះគេបាន : ២ពិន្ទុ

$s(n) \equiv 2s(n) \pmod 3 \Rightarrow s(n) \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow 2^n \equiv 0 \pmod 3$ ដែលជាករណីមិនអាចមាន ។ ២ពិន្ទុ

ដូចនេះ គ្មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $s(n+1) = s(n)$ ។ ២ពិន្ទុ

VI. (២០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 \le 12\sum_{n=1}^{m} a_n^2$

គេមាន $\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 = (a_n + (\frac{u_n}{n} - a_n))^2 \le 2a_n{}^2 + 2(\frac{u_n}{n} - a_n)^2 = 4a_n{}^2 + 2(\frac{u_n}{n})^2 - 4a_n\frac{u_n}{n}$ ២ពិន្ទុ

គេអាចសរសេរ $\sum_{n=1}^{m}(\frac{u_n}{n})^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{m}(\frac{u_n}{n})^2 - 4\sum_{n=1}^{m} a_n(\frac{u_n}{n})$ (1) ២ពិន្ទុ

តែ $u_n{}^2 - u_{n-1}^2 = (u_n + u_{n-1})(u_n - u_{n-1}) = (2u_n - a_n)a_n = 2u_n a_n - a_n{}^2$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow -2u_n a_n = -(u_n{}^2 - u_{n-1}^2) - a_n{}^2 \le -(u_n{}^2 - u_{n-1}^2)$

គេបាន : $-2\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n a_n}{n} = -2u_1^2 - 2\sum_{n=2}^{m}\frac{u_n a_n}{n} \le -u_1^2 - \sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n}(u_n^2 - u_{n-1}^2) = -\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2 - \frac{u_m^2}{m}$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow -2\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n a_n}{n} \le -\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2 - \frac{u_m^2}{m} \le -\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2 - \frac{u_m^2}{m(m+1)}$

$\Rightarrow -2\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n a_n}{n} \le -\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2$ (2) ២ពិន្ទុ

តាម (1) និង (2) គេបាន

$\sum_{n=1}^{m}(\frac{u_n}{n})^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n^2}{n^2(n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{m}(1 - \frac{2}{n+1})(\frac{u_n}{n})^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2$ ២ពិន្ទុ

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{m}(\frac{n-1}{n+1})(\frac{u_n}{n})^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 \Rightarrow 0 + \sum_{n=2}^{m}(\frac{n-1}{n-1})(\frac{u_n}{n})^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2$ (3) ២ពិន្ទុ

ដោយ $f(n) = \frac{n-1}{n+1}$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច នោះគេបាន $f(n) \ge f(2) = 1/3$ ចំពោះ $n \ge 2$ ២ពិន្ទុ

គេបាន $\frac{n-1}{n-1} \ge \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=2}^{m}\frac{n-1}{n+1}(\frac{u_n}{n})^2 \ge \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{m}(\frac{u_n}{n})^2$ (4) ២ពិន្ទុ

តាម (3) និង (4) គេបាន $\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 \le 12\sum_{n=1}^{m} a_n^2$ ២ពិន្ទុ

ថ្ងៃទី ០៣ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១៣

ប្រធានក្រុមកំណែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

អ៊ី សៀងលី

1

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ២៤-០៤-២០១៥

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ១ ថ្ងៃទី ២៤-០៤-២០១៥

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

លំហាត់ទីI : (៣០ពិន្ទុ)

- កំណត់សម្គាល់: គ្រប់ចម្លើយត្រូវមានការស្រាយបំភ្លឺ ។

ចូរជ្រើសរើសចម្លើយណាដែលពិតឆ្លើយនឹងសំណួរខាងក្រោម:

1. ចំនួនកុំផ្លិច i ជា :

   a. ចំនួនសូន្យ ; b. ចំនួនអវិជ្ជមាន ; c. ចំនួនវិជ្ជមាន ; d. ចម្លើយ a , bនិងc សុទ្ធតែមិនពិត។

2. សមីការ $z^3+z=0$ នៅក្នុង $\mathbb{R}$ សំណុំចំនួនពិត :

   a. គ្មានឫស ; b. មានឫសមួយ ; c. មានឫសពីរ ; d. មានឫសបី ។

3. សមីការ $z^3+z=0$ នៅក្នុង $\mathbb{C}$ សំណុំចំនួនកុំផ្លិច :

   a. គ្មានឫស ; b. មានឫសមួយ ; c. មានឫសពីរ ; d. មានឫសបី ។

4. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច xoy យើងមានចំណុចA,B,CនិងD ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_A=4+i$; $z_B=-2-i$; $z_C=2+3i$; $z_D=1$ ។ ត្រីកោណ ABC ជា :

   a. ត្រីកោណកែងត្រង់A ; b. ត្រីកោណកែងត្រង់B ; c. ត្រីកោណកែងត្រង់C ; d. ចម្លើយ a , bនិងc សុទ្ធតែមិនពិត។

5. អាគុយម៉ង់នៃ $i\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)$ មានរង្វាស់ស្មើនិងមុំ :

   a. $\left(\overline{CD},\overline{AB}\right)$; b. $\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)$; c. $\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)\right]$; d. $\left[\dfrac{\pi}{2}+\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)\right]$ ។

6. ម៉ូឌុលនៃ $i\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)$ ស្មើនឹង:

   a. $i\dfrac{AB}{CD}$; b. $i\dfrac{CD}{AB}$; c. $\dfrac{AB}{CD}$; d. $\dfrac{CD}{AB}$ ។

7. ទម្រង់ពីជគណិតនៃ $i\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)$ គឺ:

   a. $\dfrac{9}{5}+\dfrac{3}{5}i$; b. $\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i$; c. $-2+2i$; d. ចម្លើយ a , bនិងc សុទ្ធតែមិនពិត។

8. ចំណុច D នៅលើអង្កត់:

   a. $[AB]$; b. $[AC]$; c. $[BC]$; d. ចម្លើយ a , bនិងc សុទ្ធតែមិនពិត។

លំហាត់ទីII : (៤៥ពិន្ទុ)

- **ផ្នែកA.**

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ : $f(x)=xe^{1-x}$ ។

1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, $f(x)=e\times\frac{x}{e^x}$ ។
2. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ។
3. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។ បំណកស្រាយតាមក្រាបរបស់ f នៃលីមីតនេះ ។
4. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ។
5. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$ រួចសង់តារាងអថេរភាព ។

- **ផ្នែកB.**

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនសូន្យ គេកំណត់អនុគមន៍ g_n និង h_n ដែលកំណត់ $\mathbb{R}$ ដោយ :

$g_n(x)=1+x+x^2+.....+x^n$ និង $h_n(x)=1+2x+.....+nx^{n-1}$ ។

1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $(1-x)g_n(x)=1-x^{n+1}$ ។

   ដូច្នេះគេបានគ្រប់ចំនួនពិត $x\neq 1$, $g_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ។
2. ប្រៀបធៀបអនុគមន៍ g_n' និង h_n , g_n' ជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ g_n ។

   ទាញបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x\neq 1$; $h_n(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$ ។
3. គេមាន $S_n=f(1)+f(2)+.....+f(n)$; f ជាអនុគមន៍កំណត់នៅលើផ្នែក A ។

   ដោយប្រើលទ្ធផលនៃផ្នែក B កំណត់កន្សោម S_n ; រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

លំហាត់ទីIII : (១៥ពិន្ទុ)

នៅក្នុងការត្រៀមប្រឡងប្រជែងមួយ សិស្សម្នាក់ចេះតែមេរៀន៥០ ក្នុងចំណោមមេរៀនទាំងអស់១០០។ គេបានដាក់សន្លឹកឆ្នោត១០០ ដែលក្នុងសន្លឹកនិមួយៗមានសំណួរមួយ សម្រាប់មេរៀននិមួយៗខុសៗគ្នាទៅក្នុងថុងមួយ។ បេក្ខជនដែលជាសិស្សខាងលើបានចាប់យកសន្លឹកឆ្នោត ២សន្លឹកបន្តបន្ទាប់ដោយចៃដន្យ។

គេត្រូវផ្តល់ចម្លើយជាប្រភាគដែលមិនអាចសម្រួលបាន។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម :

- A : « គេចាប់បានសំណួរទាំងពីរ ដែលមិនចេះទាំងពីរ »
- B : « គេចាប់បានសំណួរទាំងពីរ ដែលចេះទាំងពីរ »
- C : « គេចាប់បានសំណួរទាំងពីរ ដែលចេះតែមួយសំណួរនិងតែមួយគត់ »
- D : « គេចាប់បានសំណួរទាំងពីរ ដែលយ៉ាងហោចណាស់ក៏គេចេះមួយសំណួរ »

លំហាត់ទីIV : (១០ពិន្ទុ)

បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq 1$:

$$1^2+2^2+3^2+......+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ។}$$

លំហាត់ I (30ពិន្ទុ)

ចម្លើយកែវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12 លើកទី1

ថ្ងៃ. 24.04.2015

(3ពិន្ទុ) 1) $\boxed{d}$ (1pt)

ពន្យល់: i ជាសំខាន់និមិត្ត (2p) ហើយ i^2 ក្នុង $\mathbb{C}$ គ្មានលំដាប់ (2pt)

(3ពិន្ទុ) 2) $\boxed{b}$ (1pt)

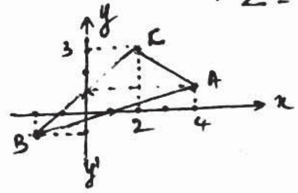
ពន្យល់: $z^2+1>0;\ \forall z\in\mathbb{R}$ (1pt)

$\Rightarrow z=0$ (1pt)

(4ពិន្ទុ) 3) $\boxed{d}$ (1pt)

ពន្យល់: $z(z^2+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 & (1pt)\\ z=-i & (1pt)\\ z=i & (1pt)\end{cases}$

(4pt) 4)



របៀបទី1

$\boxed{c}$ (1pt)

ពន្យល់:

$A(4;1);\ B(-2;-1);\ C(2;3);\ D(1;0)$

$\vec{CB}=(-4;-4)$ (1pt)

$\vec{CA}=(2;-2)$ (1pt)

$\vec{CB}\cdot\vec{CA}=0$ (1pt)

របៀបទី2

$\boxed{c}$ (1pt)

ពន្យល់:

$z_A-z_C=2(1-i)$

$z_B-z_C=4(-1-i)$ (1pt)

$Arg\left(\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=Arg\left(\frac{1}{2}i\right)$ (1pt)

$(\vec{CB};\vec{CA})=Arg\left(\frac{1}{2}i\right)=\frac{\pi}{2}$ (1pt)

(4pt) 5) $\boxed{c}$ (1pt)

របៀបទី1

ពន្យល់:

$Arg\left(i\,\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)=Arg\,i+Arg\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)$ (1pt)

$=\frac{\pi}{2}+Arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right)$

$=\frac{\pi}{2}+(\vec{CD};\vec{AB})$ (1pt)

$=\frac{\pi}{2}-(\vec{AB};\vec{CD})$ (1pt)

របៀបទី2 (សេរីតាមសិស្ស)

(4pt) 6) $\boxed{a}$ (1pt)

ពន្យល់:

$\left|i\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)\right|=|i|\left|\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right|$ (1pt)

$=1\cdot\dfrac{AB}{CD}$ (1pt)

$=\dfrac{AB}{CD}$ (1pt)

(4ពិន្ទុ) 7) $\boxed{b}$ $\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i$ (1pt)

ពន្យល់:

$z_A-z_B=6+2i$ (1pt)

$z_C-z_D=1+3i$ (1pt)

$i\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)=\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i$ (1pt)

(4ពិន្ទុ) 8) $\boxed{a}$ (1pt)

ពន្យល់:

$\dfrac{z_A+z_B}{2}=1=z_D$ (2pt)

D ជាចំណុចកណ្ដាល [AB] (1pt)

លំហាត់ II (45ពិន្ទុ)

(3ពិន្ទុ) 1) បង្ហាញថា $\forall x\in\mathbb{R}:\ f(x)=e\cdot\dfrac{x}{e^x}$

$f(x)=x\cdot e^{1-x}=x\cdot e\,e^{-x}$ (1pt)

$=x\cdot e\cdot\dfrac{1}{e^x}$ (1pt)

$=x\cdot\dfrac{e}{e^x}$ (1pt)

(3ពិន្ទុ) 2) គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{1-x})=-\infty$ (1pt)

ព្រោះ: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(e\cdot e^{-x})=+\infty$ (1pt)

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (1pt)

(5ពិន្ទុ) 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\dfrac{e}{e^x}\right)$ (1pt)

$=e\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}$

$=0$ (1pt)

ព្រោះ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ (1pt)

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (1pt)

លំហាត់ទី២ : $\boxed{ក}$ (1pt)

ចម្លើយ :

$$\cdot\; i\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = i\left(\frac{4+i+2+i}{2+3i-1}\right)$$

$$= \frac{2}{5}(4+3i)$$

$r = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\overrightarrow{AB} = (-6;-2)$; $\overrightarrow{CD} = (-1;-3)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 6+6 = 12$ (1pt)

$\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \frac{12}{2\cdot 10}$

$= \frac{3}{5}$

$\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \sqrt{1-\frac{9}{25}}$

$= \frac{4}{5}$

$\cos[\alpha + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})] = \cos\alpha\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$

$- \sin\alpha\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$

$= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}$

$= 0$ (1pt)

$\Rightarrow \alpha + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})$ (1pt)

បំលាក់ក្រាភតាមក្រប:

បន្ទាត់ $y=0$ ជាអ័ក្ស $(x'x)$ ជាអាស៊ីមតូតដេក នៃក្រាបរបស់អនុគមន៍ f ។ (1pt)

(5ពិន្ទុ) 4) គណនាដេរីវេនៃ f

$$f(x)=x.e^{1-x}$$

$$f'(x)=e^{1-x}-x.e^{1-x} \quad (3pt)$$

ដូចនេះ: $f'(x)=(1-x)e^{1-x}$ (2pt)

(6ពិន្ទុ) 5) សិក្សាអថេរភាពនិងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

$f(x)=xe^{1-x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$

$f'(x)=(1-x)e^{1-x}$ មានសញ្ញាតាម $1-x$ (1pt)

ព្រោះ: $e^{1-x}>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0$

$x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

(1pt)

- អនុគមន៍ f កើនលើ $(-\infty;1)$ (1pt)
- អនុគមន៍ f ចុះលើ $(1;+\infty)$ (1pt)
- អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមា $f(1)=1$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(1pt)

(1pt)

ផ្នែក B

(7ពិន្ទុ) 1) ស្រាយថា $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$(1-x)\,g_n(x)=1-x^{n+1}$$

$$(1-x)\,g_n(x)=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) \quad (3pt)$$

$$=1-x^{n+1}$$

ដូចនេះ: $\boxed{(1-x)\,g_n(x)=1-x^{n+1}}$ (2pt)

ចំពោះ: $\forall x\neq 1$; $g(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (2pt)

(7ពិន្ទុ) 2) ទំនាក់ទំនងរវាង g'_n និង h_n

គេមាន $g_n(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n$

$$g'_n(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

$$=h_n(x) \quad (2pt)$$

ទាញបង្ហាញថា $h_n(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

គេមាន $g_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $(x\neq 1)$

$$g'_n(x)=\frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \quad (2$$

$$=\frac{(n+1)(x^{n+1}-x^n)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2} \quad (2pt)$$

ដូចនេះ: $h_n(x)=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$ (1pt)

(9ពិន្ទុ) 3) កំណត់ទម្រង់ S_n និងគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

$$S_n=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$$

$$=1.e^0+2e^{-1}+3e^{-2}+\cdots+ne^{1-n} \quad (1pt)$$

$$=1+2(e^{-1})+3(e^{-1})^2+\cdots+n(e^{-1})^{n-1} \quad (1p$$

$$S_n=h_n(e^{-1}) \quad (2pt)$$

$$S_n=\frac{ne^{-n-1}-(n+1)e^{-n}+1}{(1-e^{-1})^2} \quad (2pt)$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{\frac{n}{e^{n+1}}-\frac{n+1}{e^n}+1}{(1-\frac{1}{e})^2}=\frac{1}{(1-\frac{1}{e})^2} \quad (2pt)$$

ព្រោះ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{e^{n+1}}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{e^n}=0$ (1p

លំហាត់III (15pt)

តាង A : « ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានសំណួរមិនចេះទាំង២ »

B : « ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានសំណួរចេះទាំង២ »

C : « ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានសំណួរចេះតែ១គត់ »

D : « ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានសំណួរយ៉ាងហោចណាស់ចេះមួយសំណួរ »

(3ពិន្ទុ) $P(A) = \frac{50}{100} \times \frac{49}{99} = \frac{49}{198}$ (3pt)

(3ពិន្ទុ) $P(B) = \frac{50}{100} \times \frac{49}{99} = \frac{49}{198}$ (3pt)

(5ពិន្ទុ) C ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានសំណួរចេះ1 និងមិនចេះ1 ឬ ចាប់បានសំណួរមិនចេះមួយ ឬ ចេះមួយ (2pt)

$P(C) = P(\text{ចេះ}1; \text{មិនចេះ}1) + P(\text{មិនចេះ}1; \text{ចេះ}1)$ (1pt)

$= \frac{50}{100} \times \frac{50}{99} + \frac{50}{100} \times \frac{50}{99}$ (1pt)

$P(C) = \frac{50}{99}$ (1pt)

(4ពិន្ទុ) D ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនៃព្រឹត្តិការណ៍ A

$P(D) = 1 - P(A)$ (2pt)

$= 1 - \frac{49}{198}$

$= \frac{149}{198}$ (2pt)

របៀបទី2 $D = B \cup C$

$\Rightarrow P(D) = P(B \cup C)$ (1pt)

$= P(B) + P(C)$ (1pt)

$= \frac{49}{198} + \frac{50}{99}$ (1pt)

$= \frac{149}{198}$ (1pt)

លំហាត់IV

បង្ហាញថា : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

$n = 1 : \ 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$ ពិត (2pt)

ឧបមាថា ពិតដល់ $n = k$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$ (1pt)

ស្រាយថាពិតដល់ $n = k+1$ (1pt)

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$

(1pt) $= (k+1)\left[\frac{1}{6} k(2k+1) + (k+1)\right]$

(2pt) $= \frac{k+1}{6}(2k^2 + 7k + 6)$

(2pt) $= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

ដូចនេះ : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ (1pt)

របៀបទី2

$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ (2pt)

យក $k = 1, 2, 3, \dots, n$

$$+\begin{cases} 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ 4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\ \dots \\ (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{cases} \quad \text{(2pt)}$$

$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1$ (2pt)

$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n -\right.$ (1pt)

(1pt) $= \frac{1}{6}\left[2(n^2 + 2n + 1) - 3n - 2\right]$

(1pt) $= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n)$

$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

ដូចនេះ : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (1pt)

24/04/2015

ក្រុមអ្នកកែសម្រួល

ថ្ងៃទី24 ខែ04 ឆ្នាំ2015

អ្នកត្រួតពិនិត្យ

3

✓ 1

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសាស្ត្រខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រលង: ២៤_០៤_២០១៥

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ លើកទី ២ ថ្ងៃទី ២៦_០៤_២០១៥

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

លំហាត់ទីI: (៣០ពិន្ទុ)

- កំណត់សម្គាល់: គ្រប់ចម្លើយត្រូវមានការស្រាយបំភ្លឺ ។

នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិចប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរមេ (xoy) គេមានចំនួនកុំផ្លិច

$z_1=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$; $z_2=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$; $z=x+iy$

ចម្លើយខាងក្រោម**ពិត**ឬមួយ**មិនពិត** :

1. $z_1^2=8\sqrt{3}+8i$
2. $|z_2|=\sqrt{2}$
3. $\arg\left(z_1^2\right)=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
4. $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$
5. បើ $x=y$ នោះ $\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
6. បើ $\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ នោះ $x=y$
7. គេឧបមាថា $z\neq 0$ ។ បើ $z=\dfrac{1}{z}$ នោះ $x=0$ ឬ $y=0$

លំហាត់ទីII: (៤៥ពិន្ទុ)

1. គេមានអនុគមន៍ f_1 កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដោយ :

   $f_1(x)=2x-2+\ln\left(x^2+1\right)$ ។

   a. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)$ ។

   b. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f_1 ។

   c. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f_1 ។

2. n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ។ គេមានអនុគមន៍ f_n កំណត់លើ $[0,+\infty)$ ដោយ :

   $f_n(x)=2x-2+\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$

   a. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$ ។

b. ស្រាយបំភ្លឺថាអនុគមន៍ f_n ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $[0,+\infty)$ ។

c. ស្រាយបំភ្លឺថាសមីការ $f_n(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ α_n លើ $[0,+\infty)$ ។

d. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ n , $0\langle\alpha_n\langle 1$ ។

3. ស្រាយបំភ្លឺថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ n , $f_n(\alpha_{n+1})\rangle 0$ ។

4. សិក្សាទៅលើស្វ៊ីត (α_n)

a. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (α_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

b. ទាញបង្ហាញថា (α_n) ជាស្វ៊ីតរួម ។

c. ប្រើកន្សោម $\alpha_n=1-\dfrac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$ ដើម្បីគណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតនេះ ។

លំហាត់ទីIII: (១៥ពិន្ទុ)

ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់$(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានប្លង់(P) និងប្លង់(Q) សមីការ :

(P) : $2x-4y+3z+5=0$

(Q) : $x-2y+3z-2=0$

1. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាប្លង់(P) និង(Q) មិនស្របគ្នា ។

2. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់(D)ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់(P) និងប្លង់(Q) ។

3. កំណត់សមីការនៃប្លង់(R) កាត់តាមចំណុច $A(2,-2,0)$ និងកែងទៅប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) ។

លំហាត់ទីIV: (១០ពិន្ទុ)

គេមាន $v_n=n+n\cos^2 n$ និង $w_n=\dfrac{\sin n}{n}$, n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ ។

អត្រាកំណែប្រលងសញ្ញាប័ត្រ គណិតវិទ្យា

ប្រលងលើកទី2 (24.04.2015)

លំហាត់ទី I (30 ពិន្ទុ)

$Z_1=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $Z_2=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$; $Z=x+iy$

(ពិន្ទុ 4) 1. $Z_1^2=8\sqrt{3}+8i$ ពិត (1pt)

ព្រោះថា

$Z_1^2=8+4\sqrt{3}-(8-4\sqrt{3})+2(6-2)i$ (2pt)

$Z_1^2=8\sqrt{3}+8i$ (1pt)

(ពិន្ទុ 4) 2. $|Z_2|=\sqrt{2}$ មិនពិត (1pt)

ព្រោះថា

$|Z_2|=\frac{|1+i|}{|\sqrt{3}+i|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3pt)

(ពិន្ទុ 4) 3. $\arg(Z_1^2)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ មិនពិត (1pt)

ព្រោះថា

$Z_1^2=8\sqrt{3}+8i$; $|Z_1^2|=16$ (1pt)

$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{8\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\end{cases}$ (1pt) $\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ (1pt)

(ពិន្ទុ 4) 4. $Z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ពិត (1pt)

ព្រោះថា

$Z_2=\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$ (2pt)

$Z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ (1pt)

(ពិន្ទុ 5) 5. បើ $x=y$ នោះ $\arg(Z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ មិនពិត (1pt)

ព្រោះថា

$Z=x+ix$

$|Z|=\sqrt{2x^2}=|x|\sqrt{2}$ (1pt)

• បើ $x>0 \to |Z|=x\sqrt{2}$

$Z=x\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=x\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\to \arg(Z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ (1pt)

• បើ $x<0 \Rightarrow |Z|=-x\sqrt{2}$

$Z=-x\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=-x\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \arg(Z)=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ (1pt)

• បើ $x=0 \Rightarrow Z=0$

$\Rightarrow \arg(Z)=2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ (1pt)

(ពិន្ទុ 5) 6. បើ $\arg(Z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ នោះ $x=y$ ពិត (1pt)

ព្រោះថា

$Z=|Z|\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (1pt)

$=\frac{|Z|}{\sqrt{2}}+\frac{|Z|}{\sqrt{2}}i$ (1pt)

តែ $Z=x+iy$ (1pt)

$\Rightarrow x=y=\frac{|Z|}{\sqrt{2}}$ (1pt)

(ពិន្ទុ 4) 7. បើ $Z=\frac{1}{\bar{Z}}$ នោះ $x=0$ ឬ $y=0$

$Z\neq 0$ ពិត (1pt)

ព្រោះថា

បើ $Z=\frac{1}{\bar{Z}} \Leftrightarrow Z^2=1$ (1pt)

$Z=\pm 1$ (1pt)

Z ជាចំនួនពិត

នោះ $y=0$ ។ (1pt)

លំហាត់ទី II (45 ពិន្ទុ)

(ពិន្ទុ 11) 1.

(3 ពិន្ទុ) a. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-2+\ln(x^2+1)\right]=+\infty$ (1pt)

ព្រោះ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)=+\infty$ (1pt)

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2)=+\infty$ (1pt)

(4 ពិន្ទុ) b. គណនា $f_1'(x)$

$f_1(x)=2x-2+\ln(x^2+1)$

$f_1'(x)=2+\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$ (2pt)

$=2+\frac{2x}{x^2+1}$ (2pt)

(4ពិន្ទុ) c. សង់តារាងអថេរភាពនៃ f_1

$$f_1'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1}$$

ចំពោះគ្រប់ $x \in [0;+\infty)$; $f'(x) > 0$ (1pt)

នាំឲ្យ: f_1 ជាអនុគមន៍កើនលើ $[0;+\infty)$

$f_1(0) = -2$

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f_1'(x)$	$+$
$f_1(x)$	$-2 \nearrow +\infty$

(1pt) (1pt) (1pt)

(15ពិន្ទុ) 2. $f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$; $n \in \mathbb{N}$

(ពិន្ទុ3) a. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}\right] = +\infty \quad (1pt)$$

ព្រោះ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{n} = +\infty$ (1pt)

$\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-2) = +\infty$ (1pt)

(ពិន្ទុ4) b. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f_n កើនលើ $[0;+\infty)$

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$$

$$f_n'(x) = 2 + \frac{2x}{n(x^2+1)} \quad (2pt)$$

$\forall x \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n'(x) > 0$ (1pt)

សន្និដ្ឋាន: អនុគមន៍ $f_n(x)$ កើនដាច់ខាតលើ $[0;+\infty)$ (1pt)

(ពិន្ទុ4) c. បង្ហាញថាសមីការ $f_n(x) = 0$ មានឬសតែមួយគត់ α_n លើ $[0;+\infty)$

មាន $f_n(x)$ កើនដាច់ខាត និងជាប់ លើ $[0;+\infty)$ (1pt)

$f_n(0) = 2(0) - 2 + \frac{\ln 1}{n} = -2$ (1pt)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ (1pt)

សន្និដ្ឋាន: $f_n(x) = 0$ មានឬស α_n តែមួយគត់ លើ $[0;+\infty)$ (1pt)

(ពិន្ទុ4) d: បង្ហាញថា $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 < \alpha_n < 1$

$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$

$f_n(0) = -2$

$f_n(1) = 2 - 2 + \frac{\ln 2}{n} = \frac{\ln 2}{n} > 0$ (1pt)

$f_n(x)$ ជាប់និងកើនដាច់ខាតលើ $[0;1]$ (1pt)

និង $f_n(0)\cdot f_n(1) = -2\cdot\frac{\ln 2}{n} < 0$ (1pt)

មាន α_n តែមួយគត់ ដែល $0 < \alpha_n < 1$; $f_n(\alpha_n) = 0$ (1pt)

(ពិន្ទុ8) 3. បង្ហាញថា $\forall n \in \mathbb{N}$; $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n+1} = 0 \quad (1) \quad (2pt)$$

$$f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n} \quad (2) \quad (2pt)$$

$$(2)-(1): f_n(\alpha_{n+1}) - 0 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\ln(\alpha_{n+1}^2+1) \quad (2pt)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}\ln(\alpha_{n+1}^2+1) > 0 \quad (1pt)$$

សន្និដ្ឋាន: $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ (1pt)

(ពិន្ទុ11) 4. សិក្សាពីស្វ៊ីត (α_n)

(ពិន្ទុ3): a. បង្ហាញថា (α_n) ជាស្វ៊ីតកើន

តាមសំណួរ3) $f_n(\alpha_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$f_n(\alpha_{n+1}) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$ (1pt)

និង f_n ជាអនុគមន៍កើនលើ $[0;+\infty)$ (1pt)

$\Rightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (1pt)

សន្និដ្ឋាន: (α_n) ជាស្វ៊ីតកើន ។

(ពិន្ទុ3) b. ទាញថាស្វ៊ីត (α_n) ជាស្វ៊ីតរួម

ដោយ (α_n) ជាស្វ៊ីតកើនលើ $(0;1)$ (1pt)

និង $\alpha_n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (1pt)

$\Rightarrow (\alpha_n)$ ជាស្វ៊ីតរួម (1pt)

(ពិន្ទុ5) c. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

ដោយ $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$

នាំឲ្យ: $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}\right] = 1$ (2pt)

, ព្រោះ: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n} = 0$; $\alpha_n \in (0;1)$ (2pt)

សន្និដ្ឋាន: $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$ (1pt)

របៀបទី2 $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$

ដោយ $0<\alpha_n<1 \Rightarrow 1<\alpha_n^2+1<2$ (1pt)

$0<\frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}<\frac{1}{n}$ (1pt)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}=0$ (ព្រោះ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$) (2pt)

ដូចនេះ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 1$ (1pt)

(15ពិន្ទុ) III (5ពិន្ទុ) 1. ស្រាយបញ្ជាក់ថាប្លង់ P និង Q មិនស្របគ្នា

របៀបទី1: $(P): 2x-4y+3z+5=0$ មាន $\vec{n}_1=(2;-4;3)$ (1pt)

$(Q): x-2y+3z-2=0$ មាន $\vec{n}_2=(1;-2;3)$ (1pt)

ដោយ $\frac{2}{1}\neq\frac{3}{3} \Rightarrow \vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$ មិនកូលីនេអ៊ែរ (2pt)

ដូចនេះ: ប្លង់ P និង Q មិនស្របគ្នា (1pt)

របៀបទី2 $P: 2x-4y+3z+5=0$ មាន $\vec{n}_1(2;-4;3)$ (1pt)

$Q: x-2y+3z-2=0$ មាន $\vec{n}_2(1;-2;3)$ (1pt)

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-4&3\\1&-2&3\end{vmatrix}=-6\vec{i}-3\vec{j}+0\vec{k}\neq\vec{0} \quad (2pt)$$

ដូចនេះប្លង់ Q និង P មិនស្របគ្នា (1pt)

(5ពិន្ទុ) 2. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ប្រសព្វ D

របៀបទី1 $\begin{cases}2x-4y+3z+5=0\\x-2y+3z-2=0\end{cases}$ (1pt)

តាង $y=t \Rightarrow \begin{cases}2x+3z=4t-5 & (1)\\x+3z=2t+2 & (2)\end{cases}$ (1pt)

$(1)-(2): x=-7+2t$ (1pt)

តាម (2): $-7+2t+3z=2t+2$

$z=3$ (1pt)

ដូចនេះ: $D: \begin{cases}x=-7+2t\\y=t\\z=3\end{cases} (t\in\mathbb{R})$ (1pt)

របៀបទី2

ដោយ $P\cap Q=D$

$\Rightarrow \vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-6;-3;0)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ D (2pt)

D កាត់តាម $(-7;0;3)$ (2pt)

គេបាន សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃ D: $\begin{cases}x=-7-6t\\y=-3t\\z=3\end{cases} (t\in\mathbb{R})$ (1pt)

របៀបទី3 តាង $x=t$ យើងបាន

$\begin{cases}2t-4y+3z+5=0 & (1)\\t-2y+3z-2=0 & (2)\end{cases}$ (1pt)

$(1)-(2): t-2y+7=0 \Rightarrow y=\frac{7+t}{2}$ (1pt)

$(2): t-7-t+3z-2=0 \Rightarrow z=3$ (2pt)

ដូចនេះ: $\begin{cases}x=t\\y=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}t\\z=3\end{cases} (t\in\mathbb{R})$ (1pt)

(5ពិន្ទុ) 3. រកសមីការប្លង់ R

ដោយ $R\perp P$
$R\perp Q$

នោះ $R\perp D$ (1pt)

គេបាន $\vec{u}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-6;-3;0)$

ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ R (2pt)

ដូចនេះ: $R: 2x+y-2=0$ (2pt)

IV (10ពិន្ទុ)

(5ពិន្ទុ) គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(n+n\cos^2 n)$

ដោយ $n\cos^2 n>0\ \forall n\in\mathbb{N}$ (1pt)

នោះ: $n+n\cos^2 n>n, \forall n$ (1pt)

តែ $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ នោះ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\cos^2 n)=+\infty$ (2pt)

ដូចនេះ: $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=+\infty$ (1pt)

(5ពិន្ទុ) គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}$

ដោយ $-1\leq\sin n\leq 1\ \forall n\in\mathbb{N}$ (1pt)

នោះ: $-\frac{1}{n}\leq\frac{\sin n}{n}\leq\frac{1}{n}$ (1pt)

តែ $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ (2pt)

ដូចនេះ: $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=0$ (1pt)

ថ្ងៃទី26 ខែមេសា ឆ្នាំ2015

កាត់ត្រាដោយ ឡុយ វិរៈរ័ត្ន

ឡុយ វិរៈរ័ត្ន

26/04/2015

គណៈកម្មការ និងវិភាគ

ចំណាត់ថ្នាក់ពិន្ទុ

ហ៊ុំ សិលា

3

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ២៥-០៤-២០១៧

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ ថ្ងៃទី ១ ថ្ងៃទី ២៥-០៤-២០១៧

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១៥ពិន្ទុ) នៅក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ គេមាន k ដែល $0 < k < 1$ និងស្វីត u កំណត់ដោយ $u_0 = 1$ និងចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1+k^n)u_n$ ។

1. ស្រាយបំភ្លឺដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \geq 1$; $u_n = (1+k)(1+k^2)(1+k^3)\ldots\ldots(1+k^{n-1})$ ។
2. ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}, v_n = l_n(u_n)$ បញ្ជាក់(l_n ជាអនុគមន៍លោការីតនេពែ)
   a. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \geq 0$ គេបាន $l_n(1+x) \leq x$ ។
   b. ទាញបង្ហាញថាស្វីត v ជានិច្ចតូចជាង $\dfrac{k}{1-k}$ ។

II. (១៥ពិន្ទុ) 1. ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, គេបាន $1 \leq 2-\cos x \leq 3$ រួច $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2-\cos x} \leq 1$ ។

2. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $(0;+\infty)$ ដោយ $f(x) = \dfrac{2-\cos x}{x}$ រកលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

3. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x) = \dfrac{x}{2-\cos x}$ រកលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ។

III. (២០ពិន្ទុ) ABC ជាត្រីកោណសាមញ្ញ ដែលមានកំពស់ AD, BE និង CF ។ស្រាយបំភ្លឺថាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ DEF មិនធំជាងពាក់កណ្ដាលបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណ ABC ។

IV. (២៥ពិន្ទុ) គេមានស្វីត (u_n) កំណត់ដោយ: $u_0 = -1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ និងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$ ។

1. គណនា u_2 និងសិក្សាថាតើ (u_n) ជាស្វីតនព្វន្តឬទេ?តើ (u_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រឬទេ?
2. គេកំណត់ (v_n) ដោយចំពោះគ្រប់ $n: v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$

   គណនា v_0 ។ សរសេរ v_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ v_n និងសរសេរ v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។
3. គេកំណត់ (w_n) ដោយចំពោះគ្រប់ $n: w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

   a. គណនា w_0 រួចបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ n នៃ $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$ ។

   b. សរសេរ w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។
4. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n: u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$ ។
5. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេតាង $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$ ស្រាយបំភ្លឺថាចំពោះគ្រប់ n នៃ $\mathbb{N}$, $s_n = 2 - \dfrac{2n+3}{2^n}$ ។

V. (១៥ពិន្ទុ) គេមាន $x_1, x_2, \ldots, x_5$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sum\limits_{i=1}^{5} \dfrac{1}{1+x_i} = 1$ ។ បង្ហាញថា $\sum\limits_{i=1}^{5} \dfrac{x_i}{4+x_i^2} \leq 1$ ។

VI. (១០ពិន្ទុ) យើងមាន $f(x)$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(1) = 1$ និងចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$; $f(x+5) \geq f(x) + 5$ និង $f(x+1) \leq f(x) + 1$ ។ គេមាន $g(x) = f(x) + 1 - x$ ។ ចូរកំណត់ $g(2017)$ ។

ចម្លើយកែវិញ្ញាសា គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

ថ្ងៃទី១ ថ្ងៃទី២៦ . ០៤ . ២០១៧

រយៈពេល ១៥០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I.(១៥ពិន្ទុ)

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា: $U_n = (1+k)\cdot(1+k^2)\cdots(1+k^{n-1})$

ចំពោះ $n=1$ ពិតហើយ

$U_n = (1+k)(1+k^2)\cdots(1+k^{n-2})(1+k^{n-1})$

ដូចនេះពិតជានិច្ច (5pt)

2. a. បង្ហាញថា $\ln(1+x) \leq x \ , \ x \geq 0$

តាង $f(x) = \ln(1+x) - x$

យើងបាន: $f'(x) = \frac{(1+x)'}{(1+x)} - 1$ (1pt)

$= \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leq 0$

ព្រោះ $x \geq 0$ (1pt)

$\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $[0, +\infty)$

$\Rightarrow f(x) \leq f(0)$ (1pt)

$\Rightarrow \ln(1+x) - x \leq \ln(1+0) - 0$

$\Rightarrow \ln(1+x) - x \leq 0$ (1pt)

ដូចនេះ: $\boxed{\ln(1+x) \leq x \ , \ \forall x \geq 0}$ (1pt)

b. ចូរបង្ហាញថា $V_n < \frac{k}{1-k} \ , \forall n$

(5pt)

II. (១២ពិន្ទុ)

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1 \le 2-\cos x \le 3$ និង $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2-\cos x} \le 1$

គេបាន $-1 \le \cos x \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (1pt)

$\Rightarrow 1 \ge -\cos x \ge -1\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, (1pt)

$\Rightarrow 3 \ge 2-\cos x \ge 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, (1pt)

$\Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{2-\cos x} \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, (1pt)

ដូចនេះ $1 \le 2-\cos x \le 3$

$\boxed{\text{និង } \frac{1}{3} \le \frac{1}{2-\cos x} \le 1,\ (\forall x \in \mathbb{R})}$ (1pt)

2. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

យើងមាន: $1 \le 2-\cos x \le 3$ (1pt)

$\frac{1}{x} \le \frac{2-\cos x}{x} \le \frac{3}{x},\ \forall x>0$

នាំ $\frac{1}{x} \le f(x) \le \frac{3}{x}$ (1pt)

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ (1pt)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ (1pt)

ដូចនេះ

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

3. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

យើងមាន: $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2-\cos x} \le 1$

- ករណី $x>0$: $\frac{x}{3} \le \frac{x}{2-\cos x} \le x$ (1pt)

$\frac{x}{3} \le g(x)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$ (1pt)

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$ (1pt)

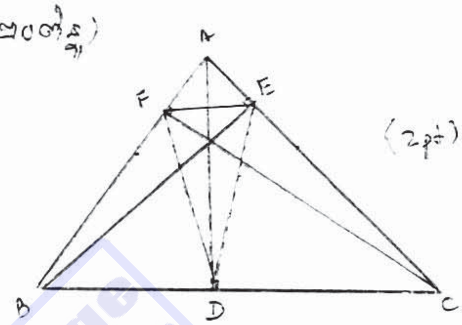
+ ករណី $x<0$: $\frac{x}{3} \ge \frac{x}{2-\cos x} \ge x$ (1pt)

$\frac{x}{3} \ge g(x) \ge x$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{3} = -\infty$ (1pt)

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$ (1pt)

III (២០ពិន្ទុ)



(2pt)

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $DE + EF + FD \le \frac{1}{2}(AB + BC +$

យើងមាន $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$

នាំឲ្យចំណុច A, B, D, E នៅលើរង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB ។ (1pt)

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសចំពោះ ΔADE

គេបាន $\frac{DE}{\sin \angle DAE} = AB$

$\Rightarrow DE = AB \sin \angle DAE$ (1pt)

$= AB \cos C$ (ព្រោះ ΔDAC កែងត្រង់ D (1pt)

+ $\angle ADC = \angle AFC = 90^\circ$

$\Rightarrow$ ចំណុច A, F, D, C នៅលើរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត (1

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសចំពោះ ΔADF

គេបាន $\frac{DF}{\sin \angle DAF} = AC$

$DF = AC.\sin \angle DAF$ (1pt)

$= AC \cos B$ (ព្រោះ ΔADB កែងត្រង់ D (1p

គេបាន $DE + DF = AB\cos C + AC \cos B$ (1) (1p

ចំពោះ $AB = 2R\sin C$, $AC = 2R\sin B$

(ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសចំពោះ ΔABC ចារឹកក្នុងរង្វង់

តាម(1) $DE + DF = 2R\sin C\cos C + 2R\sin B\cos B$ (1pt)

$= R(\sin 2C + \sin 2B)$ (1pt)

$= 2R\sin(B+C).\cos(B-C)$ (1pt)

$= 2R\sin A.\cos(B-C)$

$= AB.\cos(B-C)$ (1pt)

$DE + DF = AB\cos(B-C) \leq AB$ (i) (1pt)

តាមលំនាំដូចគ្នា $ED + EF \leq CA$ (ii) (2pt)

$FD + FE \leq BC$ (iii) (2pt)

បូកអង្គនិងអង្គ (i), (ii) និង (iii) គេបាន

$2(DE + EF + FD) \leq AB + BC + CA$ (1pt)

ដូចនេះ $\boxed{DE + EF + FD \leq \frac{1}{2}(AB + BC + CA)}$ (1pt)

IV. (២៥ពិន្ទុ) $U_0 = -1$, $U_1 = \frac{1}{2}$, $U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n$

1. គណនា U_2

គេបាន $U_2 = U_1 - \frac{1}{4}U_0$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (1pt)

$\boxed{U_2 = \frac{3}{4}}$

សិក្សាស៊ីត (U_n)

+ $U_1 - U_0 = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$

$U_2 - U_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ (1pt)

ដូចនេះ $\boxed{(U_n) \text{ មិនមែនជាស៊ីតនព្វន្តទេ}}$ (1pt)

+ $\frac{U_1}{U_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{3/4}{1/2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ (1pt)

ដូចនេះ $\boxed{(U_n) \text{ មិនមែនជាស៊ីតធរណីមាត្រទេ}}$ (1pt)

2. គណនា V_0

គេបាន $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$

$V_0 = U_1 - \frac{1}{2}U_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1) = 1$

ដូចនេះ $\boxed{V_0 = 1}$ (1pt)

ស្រាយថា V_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ V_n

$V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$

$V_{n+1} = U_{n+2} - \frac{1}{2}U_{n+1}$ (1pt)

$= U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n - \frac{1}{2}U_{n+1}$

$= \frac{1}{2}U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n = \frac{1}{2}(U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n)$

$= \frac{1}{2}V_n$

ដូចនេះ $\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n \;,\; \forall n}$ (1pt)

ស្រាយថា V_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដោយគេមាន $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$, $\forall n$

$\Rightarrow (V_n)$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី1 $V_0 = 1$

និង ផលធៀបរួម $q = \frac{1}{2}$ (1pt)

$\Rightarrow V_n = V_0 . q^n = 1.(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$ (1pt)

ដូចនេះ $\boxed{V_n = \frac{1}{2^n}}$

3. a គណនា W_0

$W_0 = \frac{U_0}{V_0} = \frac{-1}{1} = -1$ (1pt)

ដូចនេះ $\boxed{W_0 = -1}$

បង្ហាញថា $W_{n+1} = W_n + 2$, $\forall n$

ដោយគេមាន $W_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}$

តែ $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n \Rightarrow U_{n+1} = V_n + \frac{1}{2}U_n$

$\Rightarrow W_{n+1} = \frac{V_n + \frac{1}{2}U_n}{\frac{1}{2}V_n} = 2 + W_n$ (1pt)

ដូចនេះ $\boxed{W_{n+1} = W_n + 2 \;,\; \forall n}$ (1pt)

3

៦. ស្វែងរក w_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $w_{n+1} = w_n + 2$

$\Rightarrow (w_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី ១ $w_0 = -1$, និងផលសងរួម $d = 2$ (1pt)

$\Rightarrow w_n = w_0 + nd = -1 + 2n$

ដូចនេះ: $\boxed{w_n = 2n - 1 \ , \ \forall n}$ (1pt)

៧. បង្ហាញថា $U_n = \frac{2n-1}{2^n}$, $\forall n$

យើងបាន: $w_n = \frac{U_n}{v_n}$

$\Rightarrow U_n = w_n \times v_n = \frac{2n-1}{2^n}$ (3pt)

ដូចនេះ: $\boxed{U_n = \frac{2n-1}{2^n} \ , \ \forall n}$ (2pt)

៨. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$, $\forall n$

យើងបាន $S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$

$= U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$= -1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$ (1pt)

$\frac{1}{2} S_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n+1}}$ (1pt)

ដកអង្គនិងអង្គ គេបាន

$\frac{1}{2} S_n = -1 + 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$ (1pt)

$= 2\left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}\right] - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$ (1pt)

$= 1 - \frac{4 + 2n - 1}{2^{n+1}}$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}}$ (1pt)

V (១៥ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i}{4 + x_i^2} \le 1$

គេមាន $x_1, x_2, \dots, x_5$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{1+x_i} = 1$

តាង $y_i = \frac{1}{1+x_i} \Leftrightarrow x_i = \frac{1-y_i}{y_i}$ (1pt)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{5} y_i = 1$ (1pt)

គេបាន $\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i}{4 + x_i^2} = \sum_{i=1}^{5} \frac{\frac{1-y_i}{y_i}}{4 + \frac{(1-y_i)^2}{y_i^2}}$ (2pt)

$= \sum_{i=1}^{5} \frac{y_i(1-y_i)}{5y_i^2 - 2y_i + 1}$ (2pt)

$= \sum_{i=1}^{5} -\frac{1}{5} \frac{5y_i^2 - 2y_i + 1 - 3y_i - 1}{5y_i^2 - 2y_i + 1}$ (1pt)

$= -\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \left(1 - \frac{3y_i + 1}{5y_i^2 - 2y_i + 1}\right)$ (1pt)

$= -1 + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \frac{3y_i + 1}{5(y_i - \frac{1}{5})^2 + \frac{4}{5}}$ (2pt)

$\le -1 + \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \frac{3y_i + 1}{4/5}$ (ព្រោះ: $(y_i - \frac{1}{5})^2 \ge 0$)

$\le -1 + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^{5} y_i + \frac{5}{4}$ (1pt)

$\le -1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$

≤ 1 (1pt)

ដូចនេះ: $\boxed{\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i}{4 + x_i^2} \le 1}$ (1pt)

VI. (១០ពិន្ទុ) ចូរគណនា $g(2017)$

យើងមាន: $\begin{cases} f(x+5) \ge f(x) + 5 \ , \ f(1) = 1 \\ f(x+1) \le f(x) + 1 \end{cases}$

គេបាន $f(x) + 5 \le f(x+5)$

$\le f[(x+4)+1] \le f(x+4) + 1$

(ព្រោះ: $f(x+1) \le f(x) + 1$) (1pt)

$\leq f[(x+3)+1]+1 \leq$

$\leq f[x+3]+2 \leq$ (1pt)

$\leq f(x+2)+3 \leq$

$\leq f(x+1)+4 \leq$ (1pt)

$\leq f(x)+5$

$\Rightarrow f(x)+5 \leq f(x+5) \leq f(x+1)+4 \leq f(x)+5$ (1pt)

$\Rightarrow f(x)+5 = f(x+5) = f(x+1)+4$ (1pt)

$\Rightarrow f(x)+5 = f(x+1)+4$

$\Rightarrow f(x+1) = f(x)+1$ (1pt)

ដោយ $f(1) = 1$

$\Rightarrow f(2) = 2$

$f(3) = 3$

$------$

$f(2017) = 2017$ (2pt)

តែ $g(x) = f(x)+1-x$

$\Rightarrow g(2017) = f(2017)+1-2017$ (1pt)

ដូចនេះ: $\boxed{g(2017) = 1}$ (1pt)

ភ្នំពេញថ្ងៃទី25 ខែតុលា ឆ្នាំ2017

អ្នកកត់ ⑥

ទុំ. សីហស៊ី

បានឃើញ និងឯកភាព

ប្រធានក្រុមកិច្ចការ

ស៊ី សាវឿ

អនុប្រធាន

សៅ ឈឹមគ្រឹ ⑤

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស
ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២
សម័យប្រឡងៈ ២៥-០៤-២០១៧
វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ ថ្ងៃទី ៣ ថ្ងៃទី ២៧/០៤-២០១៧
រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១៥ពិន្ទុ) កំណត់តម្លៃចំនួនពិតអវិជ្ជមាន a ដែលវិសមភាព $\sin^2 x + a\cos x + a^2 \ge 1 + \cos x$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

II. (២៥ពិន្ទុ) គេមាន α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $x^2 - x - 1 = 0$ ។គេកំណត់ស្វីត $a_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $n = 1, 2, ...$

1. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ n គេបាន $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ។
2. រកគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ a និង b ដែល $a < b$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n - 2na^n$ ចែកដាច់នឹង b ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ n ។

III. (២០ពិន្ទុ) គេមានត្រីធាតុនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ (x, y, z) និងជារង្វាស់នៃជ្រុងរបស់ត្រីកោណកែងមួយ ។

1. ស្រាយបំភ្លឺថាបើ p ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ នោះត្រីធាតុ (px, py, pz) ក៏ជារង្វាស់នៃជ្រុងរបស់ត្រីកោណកែងដែរ ។
2. ស្រាយបំភ្លឺថាបើត្រីធាតុ (x, y, z) ជារង្វាស់នៃជ្រុងរបស់ត្រីកោណកែងនោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ x, y និង z មិនអាចជាចំនួនសេសទាំងបីនោះទេ ។
3. ក្នុងសំណួរនេះគេសន្មតថាគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ n អាចសរសេរតែម្យ៉ាងគត់ជារាង $n = 2^\alpha \times k$ ដែល α ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិអាចសូន្យនិង k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស ។
   a. ចូររក α និង k ក្នុងករណី $n = 192$ ។
   b. x និង z ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យដែល $x = 2^\alpha \times k$ និង $z = 2^\beta \times m$ ។ចូររក α_1 និង k_1 ព្រមទាំង α_2 និង k_2 ដែល $2x^2 = 2^{\alpha_1} \times k_1$ និង $z^2 = 2^{\alpha_2} \times k_2$ ។
   c. បង្ហាញថាគ្មានគូចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ (x, z) ដែល $2x^2 = z^2$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) 1. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0; +\infty)$ ដោយ $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ ។ គណនា $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ។

2. គេមានស្វីត (u_n) កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធំជាងឬស្មើ 1 ដោយ $u_n = \dfrac{1}{n}\left[1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n-1}{n}}\right]$

ស្រាយបំភ្លឺថា $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$ ។ រួចទាញបង្ហាញថា $u_n = (e-1) f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ។

3. ប្រើសំណួរខាងលើរក $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ) គេមានរង្វង់មួយដែលមានផ្ចិត 0 និង P ជាចំណុចនៅក្រៅរង្វង់ ។ PA និង PB ជាបន្ទាត់ប៉ះគូសចេញពី P ទៅប៉ះរង្វង់ផ្ចិត 0 ត្រង់ A និង B ។ PD ជាបន្ទាត់កាត់គូសចេញពី P ដែលកាត់រង្វង់ត្រង់ C និង D ។ BF ជាបន្ទាត់ស្របនឹង PA ហើយកាត់បន្ទាត់ AC, AD រៀងគ្នាត្រង់ E និង F ។ ស្រាយបំភ្លឺថា $BE = BF$ ។

ដំណោះស្រាយ វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

ថ្ងៃទី ៣ ថ្ងៃទី ២៧.០៥.២០១៧ (វិញ្ញាសាទី២)

រយៈពេល ១៥០ នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (១៥ពិន្ទុ) កំណត់តម្លៃ a

វិសមភាព $\sin^2 x + a\cos x + a^2 \geq 1 + \cos x$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

នោះផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $x = 0$. (1pt)

. គេបាន $x=0$ វិសមភាពអាចសរសេរ

$a + a^2 \geq 2$ (1pt)

$a^2 + a - 2 \geq 0$

គេបាន $a_1 = 1$, $a_2 = -2$ (1pt)

a	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
a^2+a-2	$+$	ϕ $-$	ϕ	$+$ (1pt)

$a^2 + a - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ (1pt)

តែ $a < 0 \Rightarrow a \in (-\infty, -2]$ (1pt)

ចំពោះ $a \leq -2$ គេបាន

$\cos x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1pt)

$a\cos x \geq a$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1pt)

$a^2 + a\cos x \geq a^2 + a \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1) (1pt)

តែ $2 \geq \cos^2 x + \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1pt)

$2 \geq 1 - \sin^2 x + \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (2) (1pt)

តាម (1) និង (2) គេបាន:

$a^2 + a\cos x \geq 1 - \sin^2 x + \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1pt)

$\sin^2 x + a\cos x + a^2 \geq 1 + \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1pt)

ដូចនេះ: វិសមភាពផ្ទៀងផ្ទាត់ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ កាលណា $a \in (-\infty, -2]$ (2pt)

II. (២៥ពិន្ទុ)

1. បង្ហាញថា $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

របៀបទី1. យើងបាន

$$a_{n+2} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} \quad (2pt)$$

$$= \frac{\alpha^{n+2} - \alpha\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta - \beta^{n+2} - \alpha^{n+1}\beta + \alpha\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \quad (2pt)$$

$$= \frac{\alpha(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + \beta(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}$$

$$a_{n+2} = \frac{(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha - \beta)} \quad (2pt)$$

តែ α, β ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - x - 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \cdot \beta = -1 \end{cases} \quad (2pt)$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ដូចនេះ:

$$\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ , \ n \in \mathbb{N}} \quad (2pt)$$

របៀបទី2 យើងបាន

α, β ជាឫសសមីការ $x^2 - x - 1 = 0, \alpha \neq \beta$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\ \beta^2 - \beta - 1 = 0 \end{cases} \quad (2pt)$$

$$\begin{cases} \alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} - \alpha^n = 0 \\ \beta^{n+2} - \beta^{n+1} - \beta^n = 0 \end{cases} \quad (2pt)$$

ដកអង្គ និង អង្គ

$$(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}) - (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - (\alpha^n - \beta^n) = 0 \quad (2pt)$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\alpha - \beta$

$$\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = 0 \quad (2pt)$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

ដូចនេះ: $\boxed{a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0}$ (2pt)

2. រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b

$+$ បើ $b \mid (a_n - 2na^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ករណី $n=1$ នោះ $b \mid a_1 - 2a$

ដែល $a_1 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1$

$\Rightarrow b \mid 1-2a$

$\Rightarrow b = 2a-1$ (ព្រោះ $a<b$) (2pt)

ករណី $n>1$ នោះ

$b \mid (a_n - 2na^n)$, $b \mid (a_{n+1} - 2(n+1)a^{n+1})$

$b \mid (a_{n+2} - 2(n+2)a^{n+2})$

ដោយ $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$\Rightarrow b \mid (a_{n+1} + a_n - 2na^n - 2(n+1)a^{n+1})$ (2pt)

$b \mid (a_{n+2} - 2(n+2)a^{n+2} + 2(n+2)a^{n+2} - 2(n+1)a^{n+1} - 2na^n)$

$\Rightarrow b \mid (2(n+2)a^{n+2} - 2(n+1)a^{n+1} - 2na^n)$

ដោយ $\gcd(a,b) = 1$, $b > a$

$\Rightarrow b \mid ((n+2)a^2 - (n+1)a - n)$ (1)

និង $b \mid ((n+3)a^2 - (n+2)a - (n+1))$ (2)

$\Rightarrow b \mid (a^2 - a - 1)$ (2pt)

$\Rightarrow (2a-1) \mid (a^2 - a - 1)$

$(2a-1) \mid (2a^2 - 2a - 2)$

$(2a-1) \mid [a(2a-1) - a - 2]$

$\Rightarrow (2a-1) \mid (-a-2)$

$(2a-1) \mid [-(2a-1) - 5]$

$\Rightarrow (2a-1) \mid 5$ (2pt)

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2a-1 = 1 \\ 2a-1 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 3 \end{array}\right.$

បើ $a=1 \Rightarrow a=b=1$ មិនពិត ($a<b$)

បើ $a=3 \Rightarrow b=5$ (2pt)

⊕ បើ $a=3$, $b=5$ នោះយើងនឹងស្រាយគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន

$b \mid (a_n - 2na^n)$ គឺ $5 \mid (a_n - 2n3^n)$

· ចំពោះ $n=1 \Rightarrow 5 \mid (a_1 - 2\times3)$

$5 \mid (-5)$ ពិត (1pt)

· ឧបមាថាពិតដល់ $n=k+1$ គេបាន

$5 \mid (a_k - 2k3^k)$

$5 \mid [a_{k+1} - 2(k+1)3^{k+1}]$ (1pt)

· ស្រាយថាពិតដល់ $n=k+2$

គឺ $5 \mid [a_{k+2} - 2(k+2)3^{k+2}]$

យើងបាន:

$5 \mid (a_{k+1} + a_k - 2(k+1)3^{k+1} - 2k3^k)$

$5 \mid (a_{k+2} - 2\times3^k(3(k+1)+k))$ (1pt)

$5 \mid (a_{k+2} - 2\times3^k(4k+3))$

ដើម្បីឲ្យ $5 \mid (a_{k+2} - 2(k+2)3^{k+2})$

លុះត្រាតែ

$2(k+2)3^2 \equiv 2(4k+3) \pmod 5$

$9k + 18 \equiv 4k + 3 \pmod 5$

$5k + 15 \equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow 5 \mid (a_{k+2} - 2(k+2)3^{k+2})$ ពិត

ចំពោះ $n=k+2$

សរុបមក: $\boxed{a=3, b=5}$ (2pt)

2

III. (២០ពិន្ទុ)

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា px, py, pz ជាត្រីធាតុពីតាគ័រ

បើគេមាន x, y, z ជាត្រីធាតុពីតាគ័រ

$(x<y<z)$ (1pt)

$\Rightarrow x^2+y^2=z^2$ (1pt)

$p^2x^2+p^2y^2=p^2z^2$

$(px)^2+(py)^2=(pz)^2$ (1pt)

ដូចនេះ: $\boxed{px, py, pz \text{ ជាត្រីធាតុពីតាគ័រ}}$ (1pt)

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា x, y, z មិនអាចជាចំនួនគត់សេសទាំងបី

ឧបមាថា x, y, z ជាចំនួនគត់សេសទាំងបី (1pt)

យើងបាន: x^2+y^2 ជាចំនួនគត់គូ (1pt)

តែ z^2 ជាចំនួនគត់សេស

$\Rightarrow x^2+y^2 \neq z^2$ (ផ្ទុយពីការពិត) (1pt)

ដូចនេះ: x, y, z មិនអាចជាចំនួនគត់សេសទាំងបីទេ (1pt)

3. a. រក α និង k

យើងមាន $n = 2^\alpha \times k$

ចំពោះ $n = 192$

$\Rightarrow 2^\alpha \times k = 192 = 2^6\times 3$ (2pt)

ដូចនេះ: $\boxed{\alpha=6 \ , k=3}$ (2pt)

b. រក α_1 និង k_1 ព្រមទាំង α_2 និង k_2

យើងមាន

$x = 2^\alpha \times k \Rightarrow x^2 = 2^{2\alpha}\times k^2$

ឬ $2x^2 = 2^{2\alpha+1}\times k^2$

ដោយ $2x^2 = 2^{\alpha_1}\times k_1$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha+1 \\ k_1 = k^2 \end{cases}$ (k ជាចំនួនគត់សេស) (2pt)

ហើយ $z = 2^\beta \times m \Rightarrow z^2 = 2^{2\beta}\times m^2$

ដោយ $z^2 = 2^{\alpha_2}\times k_2$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 2\beta \\ k_2 = m^2 \end{cases}$ (2pt)

c. បង្ហាញថា គ្មានគូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x, z) ដែល $2x^2=z^2$

តាមសម្រាយខាងលើ:

$\left.\begin{array}{l} 2x^2 = 2^{2\alpha+1}\times k^2 \\ z^2 = 2^{2\beta}\times m^2 \end{array}\right\}$ (1pt)

$2x^2=z^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+1 = 2\beta \\ k^2 = m^2 \end{cases}$ (2pt)

(ផ្ទុយពីការពិត)

ដូចនេះ: $\boxed{\text{គ្មានគូ } (x, z) \text{ ដែល } 2x^2=z^2 \text{ ទេ}}$ (1pt)

IV. (១៥ពិន្ទុ)

1. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

មាន $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$ កំណត់លើ $(0, +\infty)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = 1$ (1pt)

(ព្រោះ: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$) (1pt)

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1}$ (1pt)

ចំពោះ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{e^x}\left(\dfrac{1}{1-e^{-x}}\right)$

$= 0$ (1pt)

ព្រោះ: $\lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{u}{e^u} = 0, \ \lim\limits_{u\to +\infty} e^{-u} = 0$

ដូចនេះ:

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0}$ (1pt)

③

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\dots+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

គេមាន $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\dots+e^{\frac{n-1}{n}}$

$=1+e^{\frac{1}{n}}+(e^{\frac{1}{n}})^2+\dots+(e^{\frac{1}{n}})^{n-1}$ (1pt)

$=1\cdot\frac{1-(e^{\frac{1}{n}})^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ (1pt)

$=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

ដូចនេះ $\boxed{1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\dots+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}}$ (1pt)

បង្ហាញថា $U_n=(e-1)f(\frac{1}{n})$

គេមាន $U_n=\frac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\dots+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$

$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}=(e-1)\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}$ (1pt)

$=(e-1)f(\frac{1}{n})$

ដូចនេះ

$\boxed{U_n=(e-1)f(\frac{1}{n})}$ (1pt)

៣. រក $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

$U_n=(e-1)f(\frac{1}{n})$

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(e-1)f(\frac{1}{n})$

$=\lim\limits_{x\to0}(e-1)f(x)$, តាង $x=\frac{1}{n}$ (2pt)

$=(e-1)$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$ (2pt)

ដូចនេះ

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=e-1}$ (1pt)

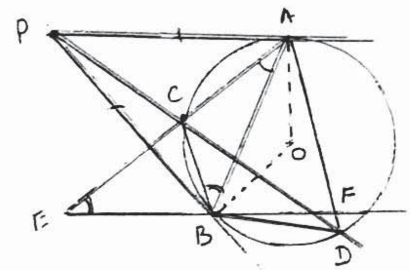
V. (២០ពិន្ទុ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $BE=BF$

យើងមាន:

$\angle AEB=\angle PAE$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង) (1pt)

$\angle PAE=\angle ABC$ (មុំចារឹកស្ទាត់ធ្នូរួម) (1pt)

$\Rightarrow\angle ABC=\angle AEB$ (1pt)



(5pt)

ក្នុង ΔABC និង ΔAEB គេមាន $\angle BAC$: មុំរួម (1pt)

$\angle ABC=\angle AEB$

នាំឲ្យ $\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow BE=\frac{AB\times BC}{AC}$ (1pt) (1)

ΔABF និង ΔADB ដូចគ្នា

ព្រោះ: $\angle BAF$ រួម (1pt)

$\angle ADB=\angle PAB$ (មុំស្ទាត់ធ្នូរួម AB) (1pt)

$\angle PAB=\angle ABF$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង) (1pt)

$\Rightarrow\angle ADB=\angle ABF$ (1pt)

នាំឲ្យ: $\Delta ABF\sim\Delta ADB\Rightarrow\frac{BF}{DB}=\frac{AB}{AD}$

$\Rightarrow BF=\frac{AB\times BD}{AD}$ (2) (1pt)

$\Delta PBC\sim\Delta PDB\Rightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{PC}{PB}$ (2pt)

$\Delta PCA\sim\Delta PAD$ ដូចគ្នា $\Rightarrow\frac{AC}{AD}=\frac{PC}{PA}$ (2pt)

ដោយ $PA=PB$ (2pt)

$\Rightarrow\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AD}$ (3) (2pt)

តាម (1), (2), (3) គេបាន:

តាម (1) , (2) នឹង (3) គេបាន

$$BE = AB \times \frac{BC}{AC}$$

$$BF = AB \times \frac{BD}{AD}$$

$$\Rightarrow BE = BF \quad (2pt)$$

ដូចនេះ $\boxed{BE = BF}$

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី 27 ខែ មេសា ឆ្នាំ 2017

អ្នកតាក់តែង

ទុំ. សំបត្តិ

បានឃើញ និង ឯកភាព

ប្រធានក្រុមគណិត

[illegible]

ឯកភាព

[illegible]

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា និងរូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និង ថ្នាក់ទី១២

សម័យប្រឡង ៖ ថ្ងៃទី២៣ ខែ មេសា ឆ្នាំ២០១៨

វិញ្ញាសាទី **១ ៖ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២** សម្រាប់ថ្ងៃទី២៣ ខែ មេសា ឆ្នាំ២០១៨

រយៈពេល ៖ ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ៖ ១០០

ប្រធាន ៖

I. (២០ពិន្ទុ) គេមានត្រីកោណ ABC ។ ចំណុច D, E និង F ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃជ្រុង BC, CA និង AB ។ ហើយ X, Y និង Z ជាជើង នៃកំពស់រៀងគ្នា គូសចេញពីកំពូល A, B និង C របស់ត្រីកោណ ABC ។ H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC ហើយ P, Q និង R ជាចំណុច កណ្តាលរៀងគ្នានៃអង្កត់ HA, HB, HC ។ បង្ហាញថាចំណុចទាំងប្រាំបួន $D, E, F, P, Q, R, X, Y, Z$ នៅលើរង្វង់តែមួយ ។

II. (១៥ពិន្ទុ) គេសន្មត $x, y \in (-2;2)$ និង $xy=-1$ ។កំណត់តម្លៃអប្បបរមារបស់ $u=\dfrac{4}{4-x^2}+\dfrac{9}{9-y^2}$ ។ ចូរជ្រើសរើសចម្លើយមួយដែលត្រូវ ។ $a.\dfrac{24}{11}$ $b.\dfrac{8}{5}$ $c.\dfrac{12}{7}$ $d.\dfrac{12}{5}$

កំណត់សម្គាល់: គ្រប់ចម្លើយដែលជ្រើសរើសត្រូវមានការស្រាយបំភ្លឺ ។ ចម្លើយដែលគ្មានការស្រាយបំភ្លឺ និងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ ។

III. (១០ពិន្ទុ) គេកំណត់ឱ្យរកមុំ θ ដែល $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ដើម្បីឱ្យសមីការដឺក្រេទី2 $x^2+4xCos\theta+Cot\theta=0$ (x ជាអញ្ញាត) មានឫសឌុប ។ រង្វាស់ θ គិតជារ៉ាដ្យង់ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គេមាន x និង y ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានមិនសូន្យដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^3+y^3=x-y$ ។ បង្ហាញថា $x^2+4y^2<1$ ។

V. (១០ពិន្ទុ) 1. កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $\dfrac{n+27}{n+4}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

2. បង្ហាញថា: គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ប្រភាគ $\dfrac{2n+1}{3n+1}$ មិនអាចសម្រួលបាន ។

VI. (២០ពិន្ទុ) គេមានស្វ៊ីត (v_n) កំណត់ដោយ $v_1=\ln(2)$ និងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ n $v_{n+1}=\ln\left(2-e^{-v_n}\right)$ ។ គេសន្មតថាស្វ៊ីត (v_n) កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនសូន្យ ។ គេកំណត់ស្វ៊ីត (S_n) ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនសូន្យ គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}v_k=v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n$ ។

គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

VII. (១០ពិន្ទុ) រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត n ដែលគេបាន $A=n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ ជាការេ នៃមួយចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត y ។

15

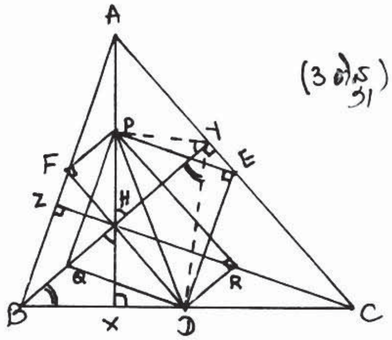
ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ថ្នាក់គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី12 វិញ្ញាសាទី1 ពិន្ទុ100

ថ្ងៃប្រឡងថ្ងៃទី 23 ខែ មេសា ឆ្នាំ 2018

រយៈពេល 180 នាទី

(20ពិន្ទុ) បង្ហាញថាចំណុចទាំង 9 D, E, F, P, Q, R, X, Y, Z នៅលើរង្វង់តែមួយ



(3ពិន្ទុ)

មាន $\left.\begin{array}{l} P \text{ កណ្តាល } AH \\ F \text{ កណ្តាល } AB \end{array}\right\} \Rightarrow PF \parallel BY$ (1ពិន្ទុ)

$\left.\begin{array}{l} F \text{ កណ្តាល } AB \\ D \text{ កណ្តាល } BC \end{array}\right\} \Rightarrow FD \parallel AC$ (1ពិន្ទុ)

ដោយ $BY \perp AC \Rightarrow BY \perp FD$ (1ពិន្ទុ)

$PF \parallel BY \Rightarrow PF \perp DF$ ត្រង់ F (1ពិន្ទុ)

នាំឲ្យ $\angle PFD = 90^\circ$ (1ពិន្ទុ)

ដោយស្រាយតាមរបៀបដូចគ្នា:

$\angle PED = \angle PRD = \angle PQD = 90^\circ$ (3ពិន្ទុ)

គេបាន 6 ចំណុច D, R, E, P, F, Q នៅលើរង្វង់ អង្កត់ផ្ចិត DP តែមួយ ① (1ពិន្ទុ)

ម្យ៉ាងទៀត $\angle PXD = 90^\circ$ នាំឲ្យ X នៅលើរង្វង់ អង្កត់ផ្ចិត DP ② (1ពិន្ទុ)

មាន ΔPHY សមបាត ($PY = \frac{AH}{2}$ មេដ្យានត្រី.កែង) (1ពិន្ទុ)

ΔBDY សមបាត ($YD = \frac{BC}{2}$ មេដ្យានត្រី.កែង) (1ពិន្ទុ)

នាំឲ្យ $\angle PYH = \angle PHY$

$\angle PHY = \angle BHX$ (ទល់កំពូល)

នាំឲ្យ $\angle PYH = \angle BHX$

និង $\angle DBY = \angle DYB$

ដោយ $\angle DBY + \angle BHX = 90^\circ$ (1ពិន្ទុ)

នាំឲ្យ $\angle PYH + \angle DYB = 90^\circ$ (1ពិន្ទុ)

Y ស្ថិតនៅលើរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត DP ③ (1ពិន្ទុ)

ស្រាយតាមរបៀបដូចគ្នា Z នៅលើរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត DP ④ (1ពិន្ទុ)

សរុបមក តាម ①, ②, ③ និង ④ 9 ចំណុច D, E, F, P, Q, R, X, Y, Z នៅលើរង្វង់ អង្កត់ផ្ចិត DP តែមួយ (1ពិន្ទុ)

II (15ពិន្ទុ) គណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ U

យើងមាន $U = \frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-y^2}$

$= \frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-\frac{1}{x^2}}$ (ព្រោះ: $xy=-1, x\neq 0, y\neq 0$) (2ពិន្ទុ)

$= \frac{4}{4-x^2} + \frac{9x^2}{9x^2-1}$

$= \frac{4(9x^2-1)+9x^2(4-x^2)}{(4-x^2)(9x^2-1)}$

$= \frac{(-9x^4+37x^2-4)+35x^2}{-9x^4+37x^2-4}$ (2ពិន្ទុ)

$= 1 + \frac{35x^2}{-9x^4+37x^2-4}$

$= 1 + \frac{35}{-9x^2+37-\frac{4}{x^2}}$ (2ពិន្ទុ)

$= 1 + \frac{35}{37-(9x^2-2\cdot 3x\cdot\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+12)}$

$U = 1 + \frac{35}{37-\left[(3x-\frac{2}{x})^2+12\right]}$ (2ពិន្ទុ)

U មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ

$37-\left[(3x-\frac{2}{x})^2+12\right]$ យកតម្លៃធំបំផុត (2ពិន្ទុ)

ត្រូវនឹង $3x-\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow 3x^2-2=0$

$x^2 = \frac{2}{3}$

ដូច្នេះ $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ (2 ពិន្ទុ)

ពេលនោះ $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ គេបាន $U = 1+\frac{35}{37-(0+12)}$

$$= 1+\frac{35}{25}$$

$$U = \frac{12}{5}$$

ដូចនេះ ចម្លើយដែលត្រូវគឺ d. $\frac{12}{5}$ (3 ពិន្ទុ)

III (10 ពិន្ទុ) កំណត់រកមុំ θ

គេមាន $x^2+4x\cos\theta+\cot\theta=0$ មានឫសឌុប

គេបាន $\Delta' = (2\cos\theta)^2-\cot\theta=0$ (2 ពិន្ទុ)

$$\cot\theta\,(4\sin\theta\cos\theta-1)=0$$

$$\cot\theta\,(2\sin2\theta-1)=0 \quad (2 \text{ ពិន្ទុ})$$

ដោយ $0<\theta<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cot\theta\neq 0$ (2 ពិន្ទុ)

$\Rightarrow 2\sin2\theta-1=0$

$$\sin2\theta=\frac{1}{2}$$

$$\sin2\theta=\sin\frac{\pi}{6} \quad (2 \text{ ពិន្ទុ})$$

ដូចនេះ $\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{12} & (1 \text{ ពិន្ទុ})\\ \theta=\frac{5\pi}{12} & (1 \text{ ពិន្ទុ})\end{cases}$

IV (15 ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $x^2+4y^2<1$

ដោយមាន $x,y>0$ នោះ $x^3+y^3>0$

ហើយ $x-y>0$ (3 ពិន្ទុ)

$x^2+4y^2<1$ សមមូល:

$(x^2+4y^2)(x-y)<x^3+y^3$ (3 ពិន្ទុ)

$x^3+4xy^2-x^2y-4y^3<x^3+y^3$

$4xy^2 < x^2y+5y^3$

$4xy < x^2+5y^2$ ① (3 ពិន្ទុ)

តាមវិសមភាពកូស៊ី:

$x^2+5y^2 \geq 2\sqrt{x^2 5y^2} = 2\sqrt{5}\,xy > 4xy$

$x^2+5y^2 > 4xy$ ② (3 ពិន្ទុ)

① និង ② យើងបាន $x^2+4y^2<1$ ពិត

ដូចនេះ $x^2+4y^2<1$ (3 ពិន្ទុ)

V (10 ពិន្ទុ) 1) កំណត់ $n\in\mathbb{N}$ ដែល $\frac{n+27}{n+4}\in\mathbb{N}$

គេមាន $\frac{n+4+23}{n+4}\in\mathbb{N}$ (1 ពិន្ទុ)

$1+\frac{23}{n+4}\in\mathbb{N}$ (1 ពិន្ទុ)

គេបាន $(n+4)\,|\,23$ (1 ពិន្ទុ)

$\Rightarrow n+4=23$ (1 ពិន្ទុ)

$\Rightarrow n=19$ (1 ពិន្ទុ)

2) បង្ហាញថា $\forall n\in\mathbb{N}$ ប្រភាគ $\frac{2n+1}{3n+1}$ មិនអាចសម្រួលបាន

តាង $\gcd(2n+1,3n+1)=d$ (1 ពិន្ទុ)

គេបាន $\begin{cases}d\,|\,2n+1\\ d\,|\,3n+1\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}d\,|\,6n+3\\ d\,|\,6n+2\end{cases}$ (1 ពិន្ទុ)

$\Rightarrow d\,|\,(6n+3)-(6n+2)$ (1 ពិន្ទុ)

$\Rightarrow d\,|\,1$

$\Rightarrow d=1$ (1 ពិន្ទុ)

ដូចនេះ ប្រភាគ $\frac{2n+1}{3n+1}$ សម្រួលមិនបាន (1 ពិន្ទុ)

VI (20 ពិន្ទុ) គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$

$V_1=\ln2$, $V_{n+1}=\ln(2-e^{-V_n})$

តាង $U_{n+1}=e^{V_{n+1}}$ យើងបាន (2 ពិន្ទុ)

$U_{n+1}=e^{\ln(2-e^{-V_n})}=2-e^{-V_n}$ (2 ពិន្ទុ)

$$=2-\frac{1}{e^{V_n}}=2-\frac{1}{U_n}$$

$U_{n+1} = 2 - \frac{1}{U_n}$ (2 ពិន្ទុ)

ចំពោះ $n = 1, 2, 3$ គេបាន

$U_1 = e^{V_1} = e^{\ln 2} = 2 = \frac{1+1}{1}$ (2 ពិន្ទុ)

$U_2 = 2 - \frac{1}{U_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2}$

$U_3 = 2 - \frac{1}{U_2} = 2 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{3+1}{3}$

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺពិត $U_k = \frac{k+1}{k}$ (2 ពិន្ទុ)

ស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$

$U_{k+1} = 2 - \frac{1}{U_k} = 2 - \frac{1}{\frac{k+1}{k}}$

$= 2 - \frac{k}{k+1}$

$= \frac{2(k+1)-k}{k+1}$

$U_{k+1} = \frac{(k+1)+1}{k+1}$ ពិត (4 ពិន្ទុ)

ដូចនេះ $U_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

$\Rightarrow e^{V_{n+1}} = \frac{n+2}{n+1}$

$V_{n+1} = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$V_{n+1} = \ln(n+2) - \ln(n+1)$ (2 ពិន្ទុ)

គេបាន

$$\begin{cases} V_1 = \ln 2 - \ln 1 \\ V_2 = \ln 3 - \ln 2 \\ - - - - - - \\ V_n = \ln(n+1) - \ln n \end{cases}$$

$S_n = \ln(n+1) - \ln 1$ (2 ពិន្ទុ)

$= \ln(n+1)$ ព្រោះ $\ln 1 = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (2 ពិន្ទុ) 3

VII (10 ពិន្ទុ) រកចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n ដែល $A = n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18$ ជាការេនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបមួយ

$A = n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18$

$= n^4 - 4n^3 + 4n^2 + 18n^2 - 36n + 18$ (1 ពិន្ទុ)

$A = n^2(n-2)^2 + 18n(n-2) + 18$

តាង $A = y^2$, $x = n(n-2)$, $(x+1) = (n-1)^2 \geq 0$ (1 ពិន្ទុ)

$\Rightarrow y^2 = x^2 + 18x + 18$

$\Rightarrow y^2 = (x+9)^2 - 63$

$\Rightarrow (x+9)^2 - y^2 = 63$

$\Rightarrow (x+9-y)(x+9+y) = 63$ (1 ពិន្ទុ)

ដោយ $63 = 1 \times 63 = 3 \times 21 = 7 \times 9$

ដែល $x+9-y < x+9+y$

គេបាន $(x+9-y, x+9+y) = (1, 63), (3, 21), (7, 9), (-63, -1), (-21, -3), (-9, -7)$ (1 ពិន្ទុ)

ករណី $(x+9-y, x+9+y) = (1, 63), (3, 21), (7, 9)$

$(x, y) = (23, 31), (3, 9), (-1, 2)$ (1 ពិន្ទុ)

ករណី $(x+9-y, x+9+y) = (-63, -1), (-21, -3), (-9, -7)$

$(x, y) = (-41, 31), (-21, 9), (-17, 1)$ (1 ពិន្ទុ)

ដោយ $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

ដូច្នេះ ករណីទី២ មិនយក៖

④

- បើ $x=23 \Rightarrow n^2-2n=23$

$$(n-1)^2=24$$

គ្មាន n គត់ (1 ពិន្ទុ)

- បើ $x=3$ នាំឲ្យ $n^2-2n=3$

$$(n-1)^2=4$$

$$n-1=2$$

$$n=3$$ (1 ពិន្ទុ)

បើ $x=-1 \Rightarrow n^2-2n=-1$

$$(n-1)^2=0$$

$$n=1$$ (1 ពិន្ទុ)

ចម្លើយ $n=1$, $n=3$ (1 ពិន្ទុ)

ថ្ងៃទី 23 ខែ តុលា ឆ្នាំ 2018

អ្នកតាក់តែង

ស្វាង ភក្តីដារា

បានឃើញ និងឯកភាព

ប្រធាន ក្រុមកិច្ចការ

ជី សារ៉ាវលី

ឯកភាព

ប្រធានគណៈកម្មការ

ពិល ភារិន

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា និងរូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី៩ និង ថ្នាក់ទី១២

....

សម័យប្រឡង ៖ ថ្ងៃទី២៣ ខែ មេសា ឆ្នាំ២០១៨

វិញ្ញាសាទី **២ ៖ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២** សម្រាប់ថ្ងៃទី**២៥ ខែ មេសា ឆ្នាំ២០១៨**

រយៈពេល ៖ ១៨០ នាទី ពិន្ទុ ៖ ១០០

ប្រធាន ៖

I. (១០ពិន្ទុ) ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ វិសមីការ $\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3+2>0$ ។

II. (២០ពិន្ទុ) គេមានត្រីកោណ ABC និង O ជាចំណុចនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\overline{OA}+2\overline{OB}+3\overline{OC}=\bar{0}$ ។ រកផលធៀបរវាងផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC និងផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ AOC ។

III. (១០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(0)=1$ និង ចំពោះគ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$, $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$ យកលំនាំបែបនេះ ។ ចូរកំណត់ $f(x)$?

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាផលបូក :

$$S_n=\ln\left(1+\frac{1}{Cosx}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{Cos2x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{Cos2^2x}\right)+.....+\ln\left(1+\frac{1}{Cos2^{n-1}x}\right)$$ ។

V. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $(2^{33}-1)$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

VI. (១០ពិន្ទុ) ស្រាយបំភ្លឺដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនសូន្យ គេបាន: $n!\geq 2^{n-1}$ ។

VII. (១៥ពិន្ទុ) គេមានបន្ទាត់ (d) ដែលមានសមីការ $y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}$ ។

1. បង្ហាញថាបើ (x,y) ជាគូនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប នោះចំនួនគត់ $15x-12y$ ចែកដាច់នឹង 3 ។
2. តើមានចំណុចនៃបន្ទាត់ (d) ដែលកូអរដោនេជាពីរចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបឬទេ ? ចូរស្រាយបំភ្លឺ ។

VIII. (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n លេខខ្ទង់រាយនៃចំនួន $p=n^2+n$ មិនអាចស្មើរនឹង4 ជាដាច់ខាត ។

15

សម្រាំកំណែលសញ្ញាបត្រ គណិតវិទ្យាទុតិយភូមិ

វិញ្ញាសាទី2 គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12

រយៈពេល 180នាទី សម័យប្រលង 23.04.18

I (10ពិន្ទុ) ដោះស្រាយវិសមីការក្នុងសំណុំចំនួនពិត

$$\sqrt{\log_2 x - 1} + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3 + 2 > 0$$

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} \log_2 x - 1 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ (1ពិន្ទុ)

$\begin{cases} \log_2 x \geq \log_2 2 \\ x > 0 \end{cases}$

$x \geq 2$ (1ពិន្ទុ)

តាង $t = \sqrt{\log_2 x - 1}$

$\Leftrightarrow \log_2 x = t^2 + 1,\ t \geq 0$ (1ពិន្ទុ)

វិសមីការទៅជា $\sqrt{\log_2 x - 1} - \frac{3}{2}\log_2 x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow t - \frac{3}{2}(t^2+1) + 2 > 0$ (1ពិន្ទុ)

$-3t^2 + 2t + 1 > 0$

មានឫស $t = 1$, $t = -\frac{1}{3}$ (1ពិន្ទុ)

t	$-\frac{1}{3}$		0		1	$+\infty$
$-3t^2+2t+1>0$	$-$ 0	$+$	//	+ //	0	$-$

(1ពិន្ទុ)

គេបាន $0 \leq t < 1$ (1ពិន្ទុ)

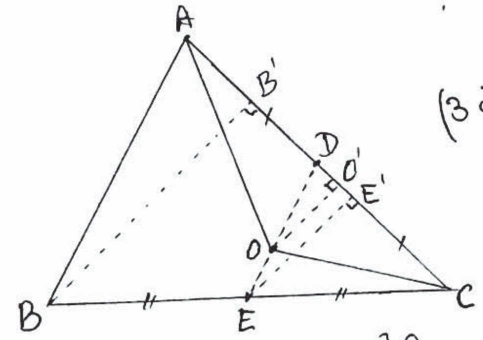
$0 \leq \sqrt{\log_2 x - 1} < 1$ (1ពិន្ទុ)

$1 \leq \log_2 x < 2$ (1ពិន្ទុ)

$\boxed{\text{ដូចនេះ: } 2 \leq x < 4}$ (1ពិន្ទុ)

1

II (20ពិន្ទុ) រកផលធៀបផ្ទៃក្រឡា ΔABC និង ΔA…



(3ពិន្ទុ)

តាង D , E ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ AC, BC (.

យើងបាន $\vec{OA} + \vec{OC} = 2\vec{OD}$

$\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OE}$

ឬ $2(\vec{OB} + \vec{OC}) = 4\vec{OE}$ (1ពិន្ទុ)

បូកអង្គនិងអង្គ

$\vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC} = 2\vec{OD} + 4\vec{OE}$

$\vec{O} = 2\vec{OD} + 4\vec{OE}$

$\Rightarrow \vec{OD} + 2\vec{OE} = \vec{0}$ (1ពិន្ទុ)

$\Rightarrow$ D , O , E រត់ត្រង់គ្នា ហើយ. (1ពិន្ទុ)

$OD = 2EO = \frac{2}{3}ED$ (1ពិន្ទុ)

ម្យ៉ាងទៀត. D, E ជាចំណុចកណ្តាលនៃ AC, BC

រៀងគ្នា : $DE \parallel AB$, $DE = \frac{1}{2}AB$ (1ពិន្ទុ)

តាង OO', BB', EE' ជាកម្ពស់រៀងគ្នានៃ

ΔAOC , ΔDEC , ΔABC (1ពិន្ទុ)

យើងបាន $OO' \parallel BB' \parallel EE'$ (1ពិន្ទុ)

$\Rightarrow \frac{EE'}{BB'} = \frac{CE}{CB} = \frac{1}{2}$ (1ពិន្ទុ)

$\frac{OO'}{EE'} = \frac{DO}{DE} = \frac{2}{3}$ (1ពិន្ទុ)

$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} AC \times OO'$

$S_{\Delta DEC} = \frac{1}{2} DC \times EE'$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \times BB'$$

$$\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta DEC}} = 2\,\frac{OO'}{EE'} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad ① \quad (3\text{ពិន្ទុ})$$

$$\frac{S_{\Delta DEC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{EE'}{BB'} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad ② \quad (2\text{ពិន្ទុ})$$

គុណអង្គនិងអង្គនៃ ① និង ②

$$\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AOC}} = 3}$ (2ពិន្ទុ)

III (10ពិន្ទុ) កំណត់ $f(x)$

មាន $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(xy+1) = f(x)\cdot f(y) - f(y) - x + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ①

របៀបទី 1

ជំនួស y ដោយ x និង x ដោយ y

$f(xy+1) = f(x)\cdot f(y) - f(x) - y + 2$ ② (3ពិន្ទុ)

តាម ① និង ②

$-f(y) - x + 2 = -f(x) - y + 2$ (3ពិន្ទុ)

$f(x) = f(y) + x - y$

យក $y = 0$, $f(x) = f(0) + x - 0$ (2ពិន្ទុ)

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = x + 1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (2ពិន្ទុ)

របៀបទី 2.

មាន $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(xy+1) = f(x)\cdot f(y) - f(y) - x + 2 \end{cases}$ ①

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

យក $y = 0$: ① $f(1) = f(x)\cdot f(0) - f(0) - x + 2$ (3ពិន្ទុ)

$f(1) = f(x) - 1 - x + 2$

$f(1) = f(x) - x + 1$ ② (2ពិន្ទុ)

យក $x = 0$: $f(1) = 1 + 1 = 2$ (3ពិន្ទុ)

② $\Rightarrow 2 = f(x) - x + 1$

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = x + 1}$ (2ពិន្ទុ)

IV (15 ពិន្ទុ) គណនាផលបូក

$$S_n=\ln\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\cos 2x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\cos 2^2x}\right)+\dots+\ln\left(1+\frac{1}{\cos 2^{n-1}x}\right)$$

ដោយដឹងថា

$$1+\frac{1}{\cos 2x}=\frac{\cos^2x-\sin^2x+1}{\cos^2x-\sin^2x}$$

$$=\frac{2\cos^2x}{\cos^2x-\sin^2x} \quad (2\text{ ពិន្ទុ})$$

$$=\frac{2\cos^2x}{\cos^2x(1-\tan^2x)}$$

$$=\frac{2}{1-\tan^2x} \quad (2\text{ ពិន្ទុ})$$

តែ $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2x}$ (2 ពិន្ទុ)

$$\Rightarrow \frac{\tan 2x}{\tan x}=\frac{2}{1-\tan^2x}$$

$$1+\frac{1}{\cos 2x}=\frac{\tan 2x}{\tan x} \quad (2\text{ ពិន្ទុ})$$

ស្រាយដូចគ្នាគេបាន

$$1+\frac{1}{\cos 2^kx}=\frac{\tan 2^kx}{\tan 2^{k-1}x},\ k=0,1,2,\dots,n-1 \quad (2\text{ ពិន្ទុ})$$

គេបាន

$$S_n=\ln\left[\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos 2x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos 2^2x}\right)\dots\left(1+\frac{1}{\cos 2^{n-1}x}\right)\right] \quad (1\text{ ពិន្ទុ})$$

$$=\ln\left[\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\tan 2^kx}{\tan 2^{k-1}x}\right] \quad (2\text{ ពិន្ទុ})$$

$$S_n=\ln\left[\frac{\tan 2^{n-1}x}{\tan\frac{x}{2}}\right] \quad (2\text{ ពិន្ទុ})$$

3

V (10 ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $2^{33}-1$ ចែកដាច់នឹង 7

របៀបទី1

គេបាន $2^3=8\equiv 1 \pmod 7$ (4 ពិន្ទុ)

$\Rightarrow (2^3)^{11}\equiv 1 \pmod 7$ (4 ពិន្ទុ)

$\boxed{\text{ដូចនេះ } 2^{33}-1\equiv 0 \pmod 7}$ (2 ពិន្ទុ)

របៀបទី2

គេបាន $\dfrac{2^{33}-1}{7}=\dfrac{(2^3)^{11}-1}{(2^3)-1}$ (4 ពិន្ទុ)

$=(2^3)^{10}+(2^3)^9+\dots+(2^3)+1$ (4

ជាចំនួនគត់

$\boxed{\text{ដូចនេះ } 2^{33}-1 \text{ ចែកដាច់នឹង } 7}$ (2 ពិន្ទុ)

VI (10 ពិន្ទុ) ស្រាយបំភ្លឺដោយប្រើវិចារតាមកំណើនគណិតវិទ្យាចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$n!\geq 2^{n-1}$$

ចំពោះ $n=1$ $\quad 1!=1=2^{1-1}$

$\Rightarrow 1!\geq 2^{1-1}$ ពិត (2 ពិន្ទុ)

ឧបមាថាពិតដល់ n. $\quad n!\geq 2^{n-1}$ (2 ពិន្ទុ)

ស្រាយបំភ្លឺថា $\quad (n+1)!\geq 2^n$

គេបាន $\quad (n+1)\cdot n!\geq (n+1)\cdot 2^{n-1}$

$(n+1)!\geq (n+1)\cdot 2^{n-1}$ ① (2ពិ

ដោយ $n\geq 1 \Rightarrow (n+1)\geq 2$

$\Rightarrow (n+1)\cdot 2^{n-1}\geq 2^n$ ② (2 ពិន្ទុ

តាម ① និង ② គេបាន $(n+1)!\geq 2^n$ ពិត

$\boxed{\text{ដូចនេះ } n!\geq 2^{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}}$ (2ពិន្ទុ)

III (15ពិន្ទុ) $d: y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}$

1. បង្ហាញថាបើ (x,y) ជាគូនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប នោះចំនួនគត់ $15x-12y$ ចែកដាច់នឹង 3

យើងមាន

$$15x-12y=3(5x-4y)$$ (2ពិន្ទុ)

ដោយ $x,y\in\mathbb{Z}$ នោះ $5x-4y\in\mathbb{Z}$ (2ពិន្ទុ)

ដូចនេះ $\boxed{15x-12y \text{ ចែកដាច់នឹង } 3}$ (1ពិន្ទុ)

2. តើមានចំណុចលើបន្ទាត់ d ដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបឬទេ?

របៀបទី1

យើងមាន

$$y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}\Leftrightarrow 12y=15x-8$$

$$15x-12y=8$$

$$3(5x-4y)=8 \quad (1)$$ (2ពិន្ទុ)

ដោយ $3(5x-4y)$ ចែកដាច់នឹង 3 $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ (2ពិន្ទុ)

8 មិនចែកដាច់នឹង 3 (2ពិន្ទុ)

$\Rightarrow$ សមីការ (1) គ្មានចម្លើយជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបទេ (2ពិន្ទុ)

ដូចនេះ គ្មានចំណុចដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់ នៅលើបន្ទាត់ d ទេ (2ពិន្ទុ)

របៀបទី2

ឧបមាថាមានគូចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប (x_0,y_0) នៅលើបន្ទាត់ d (2ពិន្ទុ)

យើងបាន

$$y_0=\frac{5}{4}x_0-\frac{2}{3}\Leftrightarrow 12y_0=15x_0-8$$

$$15x_0-12y_0=8$$ (2ពិន្ទុ)

ដោយ $15x_0-12y_0$ ចែកដាច់នឹង 3 (2ពិន្ទុ)

តែ 8 ចែកដាច់នឹង 3 វាផ្ទុយពីការពិត (2ពិន្ទុ)

ដូចនេះ គ្មានចំណុចណាដែលមានកូអរដោនេជាចំនួនគត់លើបន្ទាត់ d ទេ (2ពិន្ទុ)

VIII (10ពិន្ទុ) បង្ហាញថាចំនួន $p=n^2+n$ មិនអាចមានខ្ទង់រាយស្មើ 4 ដាច់ខាត

គេមាន n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិនោះ

$$n\equiv r \pmod{10},\ r=0,1,\dots,9$$ (2ពិន្ទុ)

$$n^2\equiv r^2 \pmod{10}$$ (2ពិន្ទុ)

$$\Rightarrow n^2+n\equiv r^2+r \pmod{10}$$ (2ពិន្ទុ)

$$\Rightarrow n^2+n\equiv 0,2,6,2,0,0,2,6,2,0 \pmod{10}$$ (2ពិន្ទុ)

គេបាន $n^2+n\equiv 0,2,6 \pmod{10}$ (1ពិន្ទុ)

គ្រប់ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

ដូចនេះ $\boxed{n \text{ គ្មានលេខខ្ទង់រាយស្មើ 4 ដាច់ខាត}}$ (1ពិន្ទុ)

របៀបទី2

តាង $n\equiv r \pmod{10}$, $r=0,1,2,\dots,9$ (2ពិន្ទុ)

$$n^2\equiv r^2\equiv r' \pmod{10}$$ (2ពិន្ទុ)

$$\Rightarrow n^2+n\equiv r+r'\equiv r'' \pmod{10}$$ (2ពិន្ទុ)

គេបានតារាង

4

គេបានតារាង

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
r'	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$r+r'$	0	2	6	12	10	10	12	16	12	10
r''	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

(3 ពិន្ទុ)

ដូចនេះ $p = n^2 + n$ មិនអាចមានខ្ទង់រាយស្មើ 4 បានទេ (1 ពិន្ទុ)

ថ្ងៃពុធ ១១កើត ខែពិសាខ ឆ្នាំច សំរឹទ្ធិស័ក ព.ស ២

ថ្ងៃទី 25 ខែមេសា ឆ្នាំ 2018

បានឃើញ និងឯកភាព

ប្រធានក្រុមកម្មការ

ម៉ៅ សារ៉េន

គណិត

សុវ៉ាន - ឧត្ដិដា

ឯកភាព

ប្រធានគណៈកម្មការ

បណ្ឌិត ជ័យ សារិន

5

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ២២.០៤.២០១៩

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ (វិញ្ញាសាទី ១) ថ្ងៃទី ២២.០៤.២០១៩

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (ពិន្ទុ១៥) គេមាន n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ គេដឹងថាសំណល់នៃការចែក n ដោយ 12 គឺ6 និង សំណល់នៃការចែក n ដោយ19 គឺ13 ។ ចូររកសំណល់នៃការចែក n ដោយ 228 ?

II. (ពិន្ទុ១០) គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_0 = 2$ និងគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេបាន $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$ ។ គេមានស្វ៊ីត (v_n) កំណត់ដោយគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ; $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$ ។ បង្ហាញឱ្យឃើញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ; $u_n = \left(7\times 2^n\right) - 5 - 3n - 2n^2$ ។

III. (ពិន្ទុ២០) គេមានត្រីកោណ ABC ដែល $\angle A = 60^\circ$; $AB > AC$; O ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC និង H ជាចំណុចប្រសព្វរវាងកំពូលទាំងពីរ BE និង CF គូសចេញរៀងគ្នាពីកំពូល B និង C នៃត្រីកោណ ABC ។ ចំណុច M និង N ជាចំណុចនៅលើរៀងគ្នានៃអង្កត់ BH និង HF ដែល BM=CN ។

ចូររកតម្លៃ $\dfrac{\mathrm{MH+NH}}{\mathrm{OH}}$ ។

IV. (ពិន្ទុ១៥) គេមាន a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរិមានៃកន្សោម

$S = \dfrac{a+3c}{a+2b+c} + \dfrac{4b}{a+b+2c} - \dfrac{8c}{a+b+3c}$ ។ ចូររកតម្លៃនៃ b និង c ជា អនុគមន៍នៃ a នៅពេល S យកតម្លៃអប្បបរិមានេះ ។

V. (ពិន្ទុ១៥) គេមាន a,b,c,d ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c+d = 6$ និង $a^2+b^2+c^2+d^2 = 12$ ។ ចូរបង្ហាញថា ÷ $36 \le 4\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right) - \left(a^4+b^4+c^4+d^4\right) \le 48$

VI. (ពិន្ទុ២៥) គេមានស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនសូន្យដោយ $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n+k^2}{n^3+k^3}$ ។

a. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនសូន្យ ; $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} + \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}$ ។

b. គេតាងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនសូន្យ ; $y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty} y_n$ ។

c. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ n ; $\left|x_n - y_n\right| \le \dfrac{1}{n}$ ។ ទាញបង្ហាញ $\lim_{n\to+\infty} x_n$ ។

15

អត្រាកំណែ គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

វិញ្ញាសាទី១ (ថ្ងៃទី22/04/2019)

I (ពិន្ទុ 15') ស្វែងរកសំណល់នៃការចែក n ដោយ 228

• របៀបទី1 យើងមាន:

- ដោយ n ចែកនឹង 12 បានសំណល់ 6

នោះគេបាន: $n = 12x + 6$, $x \in \mathbb{N}$ (2ពិន្ទុ)

- ដោយ n ចែកនឹង 19 បានសំណល់ 13

នោះគេបាន $n = 19y + 13$, $y \in \mathbb{N}$ (2ពិន្ទុ)

គេបាន $12x + 6 = 19y + 13$

$\Rightarrow 12x - 19y = 7 \quad (1)$ (2ពិន្ទុ)

តែគេមាន: $12(-1) - 19(-1) = 7 \quad (2)$

ដោយដក (1) និង (2) អង្គនិងអង្គ (2ពិន្ទុ)

$12(x+1) - 19(y+1) = 0$ (2ពិន្ទុ)

$12(x+1) = 19(y+1)$

តែ $GCD(12, 19) = 1$

នោះគេបាន $x + 1 = 19K$, $K \in \mathbb{N}$

$x = 19K - 1$ (2ពិន្ទុ)

$n = 12(19K - 1) + 6$

$n = 228K - 12 + 6 = 228K - 6$

$n = 228K - 228 + 222 = 228(K-1) + 222$

$n = 228Q + 222$, $Q \in \mathbb{N}$ (2ពិន្ទុ)

ដូចនេះ:

n ចែកនឹង 228 បានសំណល់ 222

(1ពិន្ទុ)

+ របៀបទី2

រកសំណល់នៃវិធីចែក n នឹង 228

តាមលក្ខខណ្ឌ

n ចែកនឹង 12 សំណល់ 6 និងចែកនឹង 19 សំណល់ 13

គេបាន $\begin{cases} n = 12k_1 + 6 \\ n = 19k_2 + 13 \end{cases}$ (2ពិន្ទុ) ដែល $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ (2ពិន្ទុ)

(ទំព័រទី1)

$\begin{cases} 19n = 228k_1 + 114 & (2ពិន្ទុ) \\ 12n = 228k_2 + 156 & (2ពិន្ទុ) \end{cases}$

$7n = 228(k_1 - k_2) - 42$

$\Rightarrow 7(n + 6) = 228(k_1 - k_2)$ (2ពិន្ទុ)

ដោយ $gcd(7, 228) = 1$

$\Rightarrow n + 6$ ចែកដាច់នឹង 228 (2ពិន្ទុ)

គេបាន $n + 6 = 228q$ ដែល $q \in \mathbb{N}$

$n = 228q - 6$

ឬ $n = 228q' + 222$, $q' \in \mathbb{N}$ (2ពិន្ទុ)

ដូចនេះ:

n ចែកនឹង 228 សំណល់ 222

(1ពិន្ទុ)

- របៀបទី3

រកសំណល់នៃការចែក n ដោយ 228

យើងមាន:

n ចែកនឹង 12 បានសំណល់ 6

នោះ: $n = 12K + 6$, $K \in \mathbb{N}$ (2ពិន្ទុ)

n ចែកនឹង 19 បានសំណល់ 13

នោះ: $n = 19K' + 13$ $K' \in \mathbb{N}$, (2ពិន្ទុ)

$\Rightarrow 12K + 6 = 19K' + 13$ (2ពិន្ទុ)

$12K = 19K' + 7$

$K = K' + \frac{7(K'+1)}{12}$ (2ពិន្ទុ)

ដោយ $K, K' \in \mathbb{N} \Rightarrow 12 \mid 7(K'+1)$

$\Rightarrow K' + 1 = 12t$, $t \in \mathbb{N}$ (ព្រោះ $GCD(12, 7) =$

$\Rightarrow K' = 12t - 1$ (2ពិន្ទុ)

$n = 19(12t - 1) + 13$

$n = 228t - 6$ (2ពិន្ទុ)

$n \equiv -6 \pmod{228}$

ឬ $n \equiv 222 \pmod{228}$ (2ពិន្ទុ)

ដូចនេះ:

សំណល់នៃការចែក n នឹង 228 គឺ 222

(1ពិន្ទុ)

II (ពិន្ទុ 10)

បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

គេបាន $U_n = (7\times 2^n) - 5 - 3n - 2n^2$

គេមាន

$$V_n = U_n + 2n^2 + 3n + 5$$

នោះ $V_{n+1} = U_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5$

$V_{n+1} = U_{n+1} + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 8$ (1) (២ពិន្ទុ)

ដោយ $U_{n+1} = 2U_n + 2n^2 - n$

តាម (1) គេអាចសរសេរ:

$V_{n+1} = 2U_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 7n + 10$ (២ពិន្ទុ)

$V_{n+1} = 2U_n + 4n^2 + 6n + 10$

$V_{n+1} = 2(U_n + 2n^2 + 3n + 5)$

$V_{n+1} = 2V_n$ នោះ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (២ពិន្ទុ)

មានផលធៀបរួម $q = 2$ និង

តួទី1 គឺ $V_0 = U_0 + 5 = 2 + 5 = 7$

គេបាន: $V_n = V_0 \times q^n$

$V_n = 7 \times 2^n$ (២ពិន្ទុ)

ទាញ $U_n = V_n - 5 - 3n - 2n^2$

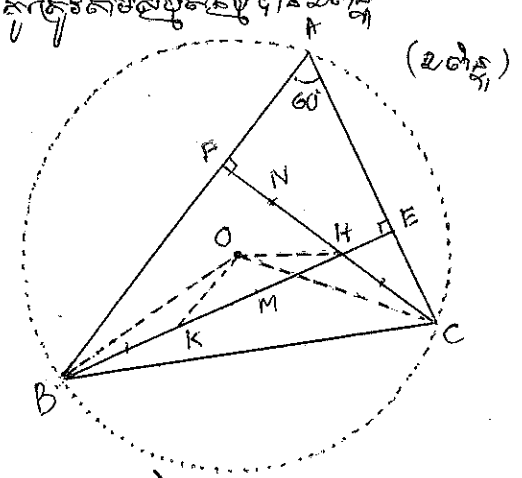
ដូចនេះ:

$$\boxed{U_n = (7\times 2^n) - 5 - 3n - 2n^2, \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

(២ពិន្ទុ)

III (20ពិន្ទុ)

- រូបគូរត្រឹមត្រូវបាន២ពិន្ទុ (២ពិន្ទុ)



- គ្មានរូបមានពិន្ទុសូន្យ

គណនាផលធៀប $\frac{MH + NH}{OH}$

យកចំណុច K លើ BE ដែល BK = CH (២ពិន្ទុ)

យើងបាន BM = CN (ស.ក)

$BK + KM = CH + HN$

$KM = NH$ (ព្រោះ $BK = CH$)

$\Rightarrow MH + NH = MH + MK$

$MH + NH = HK$ (1) (២ពិន្ទុ)

រក HK

O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC

$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle A$ (មុំផ្ចិតនិងមុំចារឹកក្នុងស្កាត់ធ្នូរួម)

$\angle BOC = 2\times 60° = 120°$ (២ពិន្ទុ)

ក្នុងចតុកោណ AEHF មាន:

$\angle A + \angle EHF = 180°$ (ព្រោះ $\angle E = \angle F = 90°$)

$\angle EHF = 180° - 60° = 120°$ (២ពិន្ទុ)

$\angle BHC = \angle EHF = 120°$ (មុំទល់កំពូល)

$\Rightarrow \angle BOC = \angle BHC = 120°$

$\Rightarrow$ ចតុកោណ BOHC ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ

ទំនាញ $\angle OBH = \angle OCH$ (មុំចារឹកស្កាត់ធ្នូរួម OH) (២ពិន្ទុ)

ក្នុង ΔKOB និង ΔHOC មាន

$OB = OC$ (កាំរង្វង់ផ្ចិត O)

$\angle OBH = \angle OCH$ (ទំនាញខាងលើ)

$BK = CH$ (តាមសម្មតិកម្មខាងលើ)

$\Rightarrow \Delta KOB \cong \Delta HOC$ (ជ.ម.ជ) (២ពិន្ទុ)

ទំនាញ: $\angle BOK = \angle COH$, $OH = OK$

$\Rightarrow \angle BOK + \angle KOC = \angle COH + \angle KOC$

$\Rightarrow \angle KOH = \angle BOC = 120°$

ដោយ $OH = OK$ (ទំនាញខាងលើ)

$\Rightarrow \Delta KOH$ សមបាតកំពូល O (មុំ 120°) (២ពិន្ទុ)

$\Rightarrow \angle OKH = \angle OHK = 30°$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស ចំពោះ ΔOHK:

$$\frac{KH}{\sin\angle KOH} = \frac{OH}{\sin\angle OKH}$$

(ទំព័រទី២)

$$\frac{KH}{\sin 120^\circ} = \frac{OH}{\sin 30^\circ} \quad (2\text{ ពិន្ទុ})$$

$$KH = \frac{OH \cdot \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{OH\frac{\sqrt3}{2}}{\frac12}$$

$$KH = OH\sqrt3$$

តាម (1) គេទាញបាន $MH + NH = OH\sqrt3$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{MH+NH}{OH} = \sqrt3}$ (2 ពិន្ទុ)

IV.(ពិន្ទុ15). រកតម្លៃអប្បបរមានៃ S:

តាង
$$\begin{cases} x = a+2b+c & (1) \\ y = a+b+2c & (2) \quad (2\text{ ពិន្ទុ}) \\ z = a+b+3c & (3) \end{cases}$$

ដកសមីការ និងសមីការ (3) និង (2)

$$z - y = c$$

ដកសមីការ និងសមីការ (1) និង (2)

$$x - y = b - c$$

$$\Rightarrow b = x - y + c$$

$$b = x - y + z - y$$

$$b = x - 2y + z$$

$$2y - x = 2(a+b+2c) - (a+2b+c)$$

$$2y - x = a + 3c$$

$$\Rightarrow S = \frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c} \quad (2\text{ ពិន្ទុ})$$

$$S = \frac{2y-x}{x} + \frac{4(x-2y+z)}{y} - \frac{8(z-y)}{z}$$

$$S = \frac{2y}{x} - 1 + \frac{4x}{y} - 8 + \frac{4z}{y} - 8 + \frac{8y}{z}$$

$$S = \left(\frac{2y}{x} + \frac{4x}{y}\right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{8y}{z}\right) - 17 \quad (2\text{ ពិន្ទុ})$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\frac{2y}{x} + \frac{4x}{y} \geq 2\sqrt8 = 4\sqrt2 \quad (1)$$

$$\frac{4z}{y} + \frac{8y}{z} \geq 2\sqrt{32} = 8\sqrt2 \quad (2) \; (2\text{ ពិន្ទុ})$$

បូក (1) និង (2) អង្គ និងអង្គ

(ទំព័រទី៣)

គេបាន $\left(\frac{2y}{x} + \frac{4x}{y}\right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{8y}{z}\right) \geq 12\sqrt2$

$$\left(\frac{2y}{x} + \frac{4x}{y}\right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{8y}{z}\right) - 17 \geq 12\sqrt2 - 17$$

$$S \geq 12\sqrt2 - 17$$

ដូចនេះ

$\boxed{S \text{ មានតម្លៃអប្បបរមា } (12\sqrt2 - 17)}$ (2ពិន្ទុ)

រកតម្លៃ b និង c ជាអនុគមន៍នៃ a កាលណា

S យកតម្លៃអប្បបរមា $12\sqrt2 - 17$

S មានតម្លៃអប្បបរមា កាលណា :

$$\begin{cases} \frac{2y}{x} = \frac{4x}{y} \\ \frac{4z}{y} = \frac{8y}{z} \end{cases} \quad (2\text{ ពិន្ទុ})$$

$$\begin{cases} y^2 = 2x^2 \\ z^2 = 2y^2 = 4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt2 x \\ z = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+2c = \sqrt2(a+2b+c) \\ a+b+3c = 2(a+2b+c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+2c = \sqrt2 a + 2\sqrt2 b + \sqrt2 c \\ a+b+3c = 2a+4b+2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2\sqrt2-1)b + (\sqrt2-2)c = (1-\sqrt2)a \\ c = 3b + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2\sqrt2-1)b + (\sqrt2-2)(3b+a) = (1-\sqrt2)a$$

$$(2\sqrt2-1)b + (3\sqrt2-6)b = (1-\sqrt2)a - (\sqrt2-2)a$$

$$(5\sqrt2-7)b = (3-2\sqrt2)a$$

$$b = \frac{(3-2\sqrt2)}{(5\sqrt2-7)}a = (1+\sqrt2)a$$

$$\Rightarrow c = 3(1+\sqrt2)a + a = (4+3\sqrt2)a \quad (3\text{ពិន្ទុ})$$

ដូចនេះ

$\boxed{\begin{array}{l} S \text{ មានតម្លៃអប្បបរមា}(12\sqrt2-17) \\ \text{កាលណា } b=(1+\sqrt2)a,\ c=(4+3\sqrt2)a \end{array}}$

V. (ពិន្ទុ 15)

បង្ហាញថា $36 \leq 4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4) \leq 48$

យើងមាន:

$$+\begin{cases}(a-1)^4 = a^4-4a^3+6a^2-4a+1\\ (b-1)^4 = b^4-4b^3+6b^2-4b+1\\ (c-1)^4 = c^4-4c^3+6c^2-4c+1\\ (d-1)^4 = d^4-4d^3+6d^2-4d+1\end{cases}$$ (2ពិន្ទុ)

$(a-1)^4+(b-1)^4+(c-1)^4+(d-1)^4$

$=(a^4+b^4+c^4+d^4)-4(a^3+b^3+c^3+d^3)+6(a^2+b^2+c^2+d^2)-4(a+b+c+d)+4$

$=(a^4+b^4+c^4+d^4)-4(a^3+b^3+c^3+d^3)+6\times12-4\times6+4$

$=(a^4+b^4+c^4+d^4)-4(a^3+b^3+c^3+d^3)+52$

គេបាន $4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4)$

$= 52-[(a-1)^4+(b-1)^4+(c-1)^4+(d-1)^4]$ (1) (2ពិន្ទុ)

តាង $x=a-1$, $y=b-1$, $z=c-1$, $t=d-1$

យើងបាន:

តាម(1) គេបាន:

$4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4)$

$=52-(x^4+y^4+z^4+t^4)$ (2ពិន្ទុ)

ដើម្បីបង្ហាញថា:

$36 \leq 4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4) \leq 48$

គេត្រូវបង្ហាញថា $36 \leq 52-(x^4+y^4+z^4+t^4) \leq 48$

សមមូល: $-36 \geq -52+x^4+y^4+z^4+t^4 \geq -48$

សមមូល: $16 \geq x^4+y^4+z^4+t^4 \geq 4$ (2ពិន្ទុ)

+ បង្ហាញថា $x^4+y^4+z^4+t^4 \geq 4$

យើងបាន:

$x^2+y^2+z^2+t^2 = (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2$

$=a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1+d^2-2d+1$

$=a^2+b^2+c^2+d^2-2(a+b+c+d)+4$

$=12-2\times6+4$

$x^2+y^2+z^2+t^2=4$

$(x^2+y^2+z^2+t^2)^2 = x^4+y^4+z^4+t^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2+2y^2t^2+2z^2t^2$ (2ពិន្ទុ)

តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន:

(ទំព័រទី4)

$$+\begin{cases}x^4+y^4 \geq 2x^2y^2\\ x^4+z^4 \geq 2x^2z^2\\ x^4+t^4 \geq 2x^2t^2\\ y^4+z^4 \geq 2y^2z^2\\ y^4+t^4 \geq 2y^4t^4\\ z^4+t^4 \geq 2z^2t^2\end{cases}$$

$3(x^4+y^4+z^4+t^4) \geq 2x^2y^2+2x^2z^2+2x^2t^2+2y^2z^2+2y^2t^2+2z^2t^2$

$4(x^4+y^4+z^4+t^4) \geq x^4+y^4+z^4+t^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2x^2t^2+2y^2z^2+2y^2t^2+2z^2t^2$

$4(x^4+y^4+z^4+t^4) \geq (x^2+y^2+z^2+t^2)^2$

$4(x^4+y^4+z^4+t^4) \geq 4^2 = 16$

$\Rightarrow x^4+y^4+z^4+t^4 \geq 4$ (2) (2ពិន្ទុ)

សម្គាល់(របៀបទី2)

គេអាចប្រើតាមវិសមភាព Cauchy Schwarz

$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)$

$\Rightarrow (1.x^2+1.y^2+1.z^2+1.t^2)^2 \leq (1^2+1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4+t^4)$ (2ពិន្ទុ)

គេបាន:

$(x^2+y^2+z^2+t^2)^2 \leq 4(x^4+y^4+z^4+t^4)$

$4^2 \leq 4(x^4+y^4+z^4+t^4)$

$4 \leq x^4+y^4+z^4+t^4$ (2) (2ពិន្ទុ)

+ បង្ហាញថា $x^4+y^4+z^4+t^4 \leq 16$

យើងមាន:

$(x^2+y^2+z^2+t^2)^2 = x^4+y^4+z^4+t^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2x^2t^2+2y^2z^2+2y^2t^2+2z^2t^2 \geq x^4+y^4+z^4+t^4$

ព្រោះ: $2x^2y^2+2x^2z^2+2x^2t^2+2y^2z^2+2y^2t^2 \geq 0$

$\Rightarrow (x^2+y^2+z^2+t^2)^2 \geq x^4+y^4+z^4+t^4$

$4^2 \geq x^4+y^4+z^4+t^4$

$16 \geq x^4+y^4+z^4+t^4$ (3) (2ពិន្ទុ)

តាម(2) និង(3) គេបាន:

$16 \geq x^4+y^4+z^4+t^4 \geq 4$

សរុប: $\boxed{36 \leq 4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4) \leq 48}$

(1ពិន្ទុ)

VI (ពិន្ទុ 25)

a. បង្ហាញថា $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3} + \frac{1}{n^2}\sum \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^3}$

គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

ដោយ $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2(\frac{1}{n}+\frac{k^2}{n^2})}{n^3(1+\frac{k^3}{n^3})} \quad (2 \text{ ពិន្ទុ})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}+(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}}{1+(\frac{k}{n})^3} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3} \quad (2 \text{ ពិន្ទុ})$$

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^3}$$

សរុប: $$\boxed{x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^3}} \quad (2 \text{ ពិន្ទុ})$$

b. គណនា $\lim_{n\to+\infty} y_n$

តាង $y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3}$

តាមផលបូក Riemann:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad (2 \text{ ពិន្ទុ})$$

ក្នុងករណី $a=0$, $b=1$ នោះគេបាន

$$S_n = \frac{1}{n}\left(f(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{2}{n})+f(\tfrac{3}{n})+\dots+f(\tfrac{n}{n})\right) \quad (2 \text{ ពិន្ទុ})$$

ដោយ

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3} \text{ នោះ } f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$$

ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ (2 ពិន្ទុ)

ពោល: $x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(1+x^3)'dx}{(1+x^3)} \quad (2 \text{ ពិន្ទុ})$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln(1+x^3)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2$$

សរុប: $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{1}{3}\ln 2} \quad (2 \text{ ពិន្ទុ})$$

c. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

គេបាន $|x_n - y_n| \le \frac{1}{n}$

ដោយ $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^3}$ (1)

$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{k}{n})^2}{1+(\frac{k}{n})^3}$ (2)

ដក (1) និង (2) អង្គនិងអង្គ

$$x_n - y_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^3}$$

$$|x_n - y_n| = \left|\left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^3}\right|$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^3} \quad (2 \text{ ពិន្ទុ})$$

គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$

គេបាន $1+(\frac{k}{n})^3 > 1 \Rightarrow 1+(\frac{k}{n})^3 \ge 1$

នោះ $\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^3} \le 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^3} \le n \quad (2 \text{ ពិន្ទុ})$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^3} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

សរុប: $$\boxed{|x_n - y_n| \le \frac{1}{n}} \quad (1 \text{ ពិន្ទុ})$$

(ទំព័រទី5)

- គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

តាមសំណួរខាងលើ $0 \leq |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - y_n| = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{1}{3}\ln 2$ (3 ពិន្ទុ)

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{3}\ln 2}$ (1 ពិន្ទុ)

បានឃើញនិងឯកភាព

ប្រធានក្រុមកំណែ គណិតវិទ្យាទី12

សៀមរាប ថ្ងៃទី 22 ខែមេសា ឆ្នាំ 2019

អ្នកតាក់តែង

យល់ព្រម

23/4/2019

(ទំព័រទី6)

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេស

ផ្នែកអក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ គណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា ថ្នាក់ទី ៩ និងទី ១២

សម័យប្រឡង: ២២-០៤-២០១៩

វិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី ១២ (វិញ្ញាសាទី ២) ថ្ងៃទី ២៤-០៤-២០១៩

រយៈពេល ១៨០នាទី ពិន្ទុ ១០០

I. (ពិន្ទុ១០) គេមាន $S=1+5^n+5^{2n}+5^{3n}$ ។ បង្ហាញថា S ចែកដាច់នឹង 13 លុះត្រាតែ n មិនចែកដាច់នឹង 4 ។

II. (ពិន្ទុ១០) គេឱ្យ $x\in\mathbb{R}$ ដែល $\frac{3}{2}\le x\le 5$ ។ បង្ហាញថា $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$ ។

III. (ពិន្ទុ២០) នៅលើប្លង់មួយ គេមានរង្វង់ពីរផ្ចិតរួម O ហើយមានកាំ R និង r $(R>r)$ ។ P ជាចំណុចនឹងនៅលើរង្វង់តូច និង B ជាចំណុចចល័តរត់នៅលើរង្វង់ធំ ។ បន្ទាត់ BP កាត់រង្វង់ធំត្រង់ C ។ បន្ទាត់កែង (l) ទៅនឹង BP ត្រង់ P កាត់រង្វង់តូចត្រង់ A (បើបន្ទាត់ (l) ប៉ះទៅរង្វង់ត្រង់ P នោះ A និង P ត្រួតស៊ីគ្នា) ។ យើងតាងមុំ $\angle OPA=\theta$ ។ គេមាន $S=BC^2+CA^2+AB^2$ ។ ចូរបង្ហាញថាពេល B រត់នៅលើរង្វង់ធំ ផ្ចិត O កាំ R គេបាន S មានតម្លៃថេរមិនអាស្រ័យនឹងមុំ θ ទេ ។

IV. (ពិន្ទុ១៥) គេមាន a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត ។ ចូរបង្ហាញថាបើ $(4a^2-1)^2$ ចែកដាច់នឹង $(4ab-1)$ នោះ $a=b$ ។

V. (ពិន្ទុ១០) គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ $u_o=2$ និងគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n , $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេតាង $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_o+u_1+u_2+.....+u_n$ ។ ចូរគណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

VI. (ពិន្ទុ១០) គេមានស្វ៊ីត $u_n=\dfrac{n^2+\sin n}{5n^3+\cos(\pi n)}$ ។

a. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

b. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ។

VII. (ពិន្ទុ២៥) រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ÷

$f\left[x+f(x+y)\right]+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x)$ ចំពោះគ្រប់ x និង y ជាចំនួនពិត ។

M12 II

ចម្លើយកំណែវិញ្ញាសា គណិតវិទ្យា ទី១២
វិញ្ញាសាទី ២

I (ពិន្ទុ 10) បង្ហាញថា S ចែកដាច់នឹង 13 លុះត្រាតែ n មិនចែកដាច់នឹង 4

+ បង្ហាញថា បើ S ចែកដាច់នឹង 13 នោះ n មិនចែកដាច់នឹង 4

ឧបមាថា n ចែកដាច់នឹង 4

គេបាន $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ (½ពិន្ទុ)

$$5^n = 5^{4k} = (5^4)^k = 625^k$$

តែ $625 \equiv 1 \pmod{13}$

$$625^k \equiv 1 \pmod{13}$$
$$5^n \equiv 1 \pmod{13}$$
$$5^{2n} \equiv 1 \pmod{13}$$
$$5^{3n} \equiv 1 \pmod{13}$$
$$\Rightarrow 5^n + 5^{2n} + 5^{3n} \equiv 3 \pmod{13}$$
$$1 + 5^n + 5^{2n} + 5^{3n} \equiv 4 \pmod{13}$$ (2ពិន្ទុ)
$$S \equiv 4 \pmod{13}$$

នេះបញ្ជាក់ថា S មិនចែកដាច់នឹង 13

សរុប៖ បើ S ចែកដាច់នឹង 13 នោះ (1ពិន្ទុ)

n មិនចែកដាច់នឹង 4 (1)

+ បង្ហាញថា បើ n មិនចែកដាច់នឹង 4 នោះ S ចែកដាច់នឹង 13

បើ n មិនចែកដាច់នឹង 4

គេបាន $n = 4k+1$, $4k+2$, $4k+3$,

$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

ចំពោះ $n = 4k+1$ នោះ $5^n = 5^{4k+1} = 5 \times 5^{4k} =$

$= 5 \times 625^k$

ដោយ $625^k \equiv 1 \pmod{13}$

$$5 \times 625^k \equiv 5 \pmod{13}$$
$$5^n \equiv 5 \pmod{13}$$
$$5^{2n} \equiv 25 \equiv -1 \pmod{13}$$
$$5^{3n} \equiv 125 \equiv 8 \pmod{13}$$
$$\Rightarrow 1 + 5^n + 5^{2n} + 5^{3n} \equiv 1 + 5 - 1 + 8 \pmod{13}$$
$$S \equiv 0 \pmod{13}$$ (2ពិន្ទុ)

តាមរបៀបដូចគ្នាគេបាន៖

$n = 4k+2$ នោះ $S \equiv 0 \pmod{13}$ (1ពិន្ទុ)

$n = 4k+3$ នោះ $S \equiv 0 \pmod{13}$ (1ពិន្ទុ)

សរុប៖ បើ n មិនចែកដាច់នឹង 4 នោះ៖

S ចែកដាច់នឹង 13 (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន៖

S ចែកដាច់នឹង 13 លុះត្រាតែ n មិនចែកដាច់នឹង 4

(1ពិន្ទុ)

II (ពិន្ទុ 10) បង្ហាញថា $2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{15-3x} < 2\sqrt{19}$

ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ដែល $\frac{3}{2} \leq x \leq 5$

+ របៀបទី1 ៖ តាមវិសមភាព Cauchy Schwarz

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4| \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)}$$

គេបាន៖ $|2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{15-3x}| =$

$= |\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{15-3x}| \leq$

$\leq \sqrt{(1^2+1^2+1^2+1^2)(x+1+x+1+2x-3+15-3x)}$

$\Rightarrow 2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{15-3x} \leq 2\sqrt{x+14}$ (1) (½ពិន្ទុ) (½ពិន្ទុ)

+ ដែល $\frac{3}{2} \leq x \leq 5 \Rightarrow 2\sqrt{x+14} \leq 2\sqrt{19}$ (2) (½ពិន្ទុ)

តាម (1) និង (2) គេបាន

$2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{15-3x} \leq 2\sqrt{19}$ (½ពិន្ទុ)

+ ពិនិត្យករណី $x = 5$ គេបាន

$$2\sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{0} < 2\sqrt{19}$$
$$2\sqrt{6} + \sqrt{7} < 2\sqrt{19}$$
$$(2\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 < (2\sqrt{19})^2$$
$$4 \times 6 + 7 + 4\sqrt{42} < 4 \times 19$$

$4\sqrt{42} < 76 - 31$ នោះ $\sqrt{42} < \frac{45}{4}$ ពិត

សរុប៖

$$\boxed{2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{15-3x} < 2\sqrt{19}}$$

(½ពិន្ទុ)

\+ របៀបទី2

បង្ហាញថា: $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$

ចំពោះ: $\frac{3}{2}\le x\le 5$

ដោយ $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}$

$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}$

តាមរូបមន្ត:

$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+$
$+2bc+2bd+2cd$

គេបាន:

$A=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}\right)^2$

$=x+1+x+1+2x-3+15-3x+2(x+1)+$

$+2\sqrt{(x+1)(2x-3)}+2\sqrt{(x+1)(15-3x)}+$

$+2\sqrt{(x+1)(2x-3)}+2\sqrt{(x+1)(15-3x)}+$

$+2\sqrt{(2x-3)(15-3x)}$

$A=3x+16+4\sqrt{(x+1)(2x-3)}+4\sqrt{(x+1)(15-3x)}+$
$+2\sqrt{2x-3}\sqrt{15-3x}$ (2ពិន្ទុ)

តាមវិសមភាព Cauchy: $2\sqrt{a}\times\sqrt{b}\le a+b$

គេបាន: $4\sqrt{x+1}\times\sqrt{2x-3}\le 2(x+1+2x-3)$

$4\sqrt{x+1}\times\sqrt{2x-3}\le 6x-4$

$4\sqrt{x+1}\times\sqrt{15-3x}\le 2(x+1+15-3x)=-4x+32$

$2\sqrt{2x-3}\times\sqrt{15-3x}\le 2x-3+15-3x=-x+12$ (2ពិន្ទុ)

គេទាញបាន:

$A\le 3x+16+6x-4-4x+32-x+12$

$A\le 4x+56$ នោះ $\sqrt{A}\le 2\sqrt{x+14}$ (1) (2ពិន្ទុ)

\- ករណី $\frac{3}{2}\le x<5$ នោះ $x+14<19$

$\sqrt{x+14}<\sqrt{19}$

$2\sqrt{x+14}<2\sqrt{19}$ (2)

តាម (1) និង (2) $\sqrt{A}<2\sqrt{19}$ (2ពិន្ទុ)

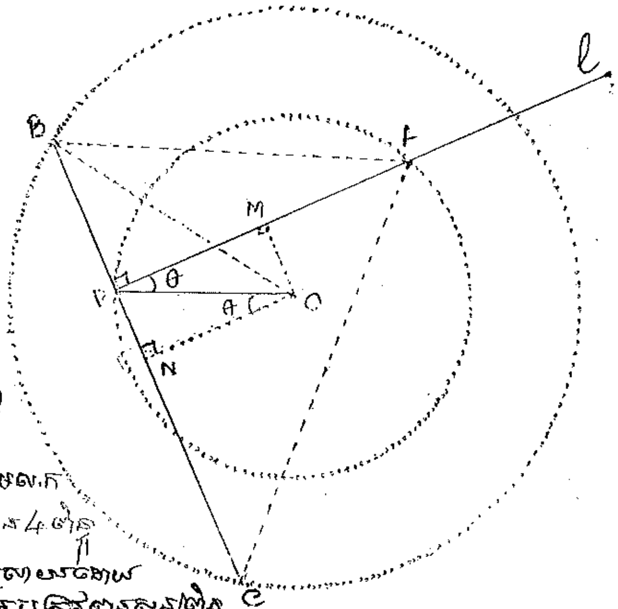
\- ករណី $x=5$ នោះ $\sqrt{A}=2\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{0}<2\sqrt{19}$

សរុប:

$$\boxed{2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}}$$

(2ពិន្ទុ)

III (20ពិន្ទុ) បង្ហាញថា S មានតម្លៃថេរ



រូបសង់

ត្រូវតាមលក្ខ.

ត្រូវបាន 4ពិន្ទុ

\- ខុស(ព)យកពេល

បូករូប ត្រូវបានមួយពិន្ទុ

តាង M, N ជាចំណោលកែងនៃ O លើ PA, BC។

គេបាន $S=BC^2+CA^2+AB^2$ (1)

\- រក BC^2

$BC^2=4BN^2$ (ព្រោះ N កណ្តាល BC) (2ពិន្ទុ)

ដោយ $BN^2=OB^2-ON^2=R^2-r^2\cos^2\theta$

ក្នុងត្រីកោណកែង OPN

$\Rightarrow BC^2=4(R^2-r^2\cos^2\theta)$ (2) (2ពិន្ទុ)

\- រក CA^2:

$CA^2=CP^2+PA^2=(CN+NP)^2+4PM^2$ (2ពិន្ទុ)

ដោយ $CN=BN=\sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta}$

$NP=r\sin\theta$ (ក្នុងត្រីកោណកែង OPN)

$PM=ON=r\cos\theta$ (OMPN ជាចតុកោណកែង) (2ពិន្ទុ)

$\Rightarrow CA^2=\left(\sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta}+r\sin\theta\right)^2+4r^2\cos^2\theta$ (3) (2ពិន្ទុ)

\- រក AB^2

$AB^2=BP^2+PA^2$ (ក្នុងត្រីកោណកែង PAB)

$=(BN-NP)^2+4PM^2$

$\Rightarrow AB^2=\left(\sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta}-r\sin\theta\right)^2+4r^2\cos^2\theta$ (4) (2ពិន្ទុ)

តាម (1), (2), (3) និង (4)

គេបាន $S=4R^2-4r^2\cos^2\theta+2(R^2-r^2\cos^2\theta)+2r^2\sin^2\theta+$
$+8r^2\cos^2\theta$ (2ពិន្ទុ)

$S=6R^2+2r^2\cos^2\theta+2r^2\sin^2\theta$

$=6R^2+2r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$=6R^2+2r^2$: ថេរ.

សរុប: $\boxed{S \text{ មានតម្លៃថេរ}}$ (2ពិន្ទុ)

(ទំព័រទី2)

IV (ពិន្ទុ 15)

ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $(4a^2-1)^2$ ចែកដាច់នឹង $(4ab-1)$ នោះ $a=b$

តាមសម្មតិកម្ម

$(4ab-1) \mid (4a^2-1)^2$

$(4ab-1) \mid [(4a^2-1)^2-2(4a^2-1)(4ab-1)+(4ab-1)^2]$

$(4ab-1) \mid [(4a^2-1)-(4ab-1)]^2$

$(4ab-1) \mid [4a(a-b)]^2$

$(4ab-1) \mid (4a)^2(a-b)^2$ (2ពិន្ទុ)

$GCD(4ab-1, 4a)=1$

$\Rightarrow (4ab-1) \mid (a-b)^2$ (2ពិន្ទុ)

តាង $S=\{(a,b)\in \mathbb{N}^2$ ដែល $(4ab-1) \mid (4a^2-1)^2$ និង $a\neq b\}$

- បើ $S=\emptyset$ នោះគ្មានគូ (a,b) ដែល $(4ab-1) \mid (4a^2-1)^2$ និង $a\neq b$ មានន័យថា $a=b$ (2ពិន្ទុ)
- បើ $S\neq\emptyset$ នោះមានគូ $(a_0,b_0)\in S$ ដែលផលបូកវាតូចបំផុត (សន្មត $a_0>b_0$)

តាង $n=\dfrac{(a_0-b_0)^2}{4a_0b_0-1}$, $n=0,1,2,\dots$

ពិនិត្យសមីការ $n=\dfrac{(x-b_0)^2}{4xb_0-1}$ (E)

(E) $\Leftrightarrow (x-b_0)^2=n(4xb_0-1)$

$x^2-2xb_0+b_0^2=4nxb_0-n$

$x^2-2b_0(2n+1)x+(b_0^2+n)=0$ (2ពិន្ទុ)

សមីការនេះមានចម្លើយមួយ $x_1=a_0$ និង ចម្លើយមួយទៀត x_2 ដែល $x_1+x_2=2b_0(2n+1)$

$x_2=2b(2n+1)-a_0$ ដែល $x_1,x_2\in\mathbb{N}$

$x_1x_2=b_0^2+n$

$x_2=\dfrac{b_0^2+n}{x_1}=\dfrac{b_0^2+n}{a_0}\neq b_0$

$\Rightarrow$ គូ $(x_2,b_0)\in S$ (2ពិន្ទុ)

ដោយគូ (a_0,b_0) មានផលបូកតូចបំផុត

យើងបាន: $x_2+b_0\geq a_0+b_0$

$x_2\geq a_0$

$a_0x_2\geq a_0^2$

$a_0x_2-b_0^2\geq a_0^2-b_0^2$

$b_0^2+n-b_0^2\geq a_0^2-b_0^2$ (ព្រោះ $x_2=\dfrac{b_0^2+n}{a_0}$)

$n\geq a_0^2-b_0^2$

$\dfrac{(a_0-b_0)^2}{4a_0b_0-1}\geq a_0^2-b_0^2$

$(a_0-b_0)^2\geq(a_0-b_0)(a_0+b_0)(4a_0b_0-1)$

$(a_0-b_0)\geq(a_0+b_0)(4a_0b_0-1)$ (1) (2ពិន្ទុ)

ដោយ $a_0,b_0\in\mathbb{N}\Rightarrow a_0b_0\geq 1$

$4a_0b_0\geq 4$

$4a_0b_0-1\geq 3>1$

$(a_0+b_0)(4a_0b_0-1)>(a_0+b_0)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន:

$(a_0-b_0)>(a_0+b_0)$ ក្លាយជាមិនពិត (2ពិន្ទុ)

ដូចនេះ: $S=\emptyset$

សរុប: $\boxed{\text{បើ } (4ab-1)\mid(4a^2-1)^2 \text{ នោះ } a=b}$ (1ពិន្ទុ)

V (10ពិន្ទុ) គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n

$S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+u_2+u_3+\dots+u_n$

$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

តាង $u_n=v_n+an+b$, $a,b\in\mathbb{R}$ (2ពិន្ទុ)

$u_{n+1}=v_{n+1}+a(n+1)+b$ (1)

$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1=\frac{2}{3}(v_n+an+b)+\frac{1}{3}n+1$

$u_{n+1}=\frac{2}{3}v_n+\frac{2}{3}an+\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}n+1$ (2) (2ពិន្ទុ)

តាម (1) និង (2):

$v_{n+1}+an+a+b=\frac{2}{3}v_n+\frac{2}{3}an+\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}n+1$

$v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n-\frac{a}{3}n+\frac{1}{3}n-\frac{1}{3}b-a+1$

$v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n+(\frac{1}{3}-\frac{a}{3})n+1-a-\frac{1}{3}b$

បើ $(\frac{1}{3}-\frac{a}{3})n+1-a-\frac{1}{3}b=0$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q=\frac{2}{3}$ (2ពិន្ទុ)

គេបាន: $\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{a}{3} = 0 \\ 1 - a - \frac{1}{3}b = 0 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

$a = 1$ និង $b = 0$ នោះ $U_n = V_n + n$

$U_k = V_k + k$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n} (V_k + k)$ (2 ពិន្ទុ)

$S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k + \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} V_k + \frac{n(n+1)}{2}$

ដោយ $\sum_{k=0}^{n} V_k = \frac{V_0(1-q^{n+1})}{(1-q)}$ ដែល $V_0 = U_0 = 2$, $q = \frac{2}{3}$

$\sum_{k=0}^{n} V_k = \frac{2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}{1-\frac{2}{3}} = 6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{n(n+1)}{2}}$ (2 ពិន្ទុ)

+ របៀបទី2

ដោយ $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1$

$U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - \frac{2}{3}n + n + 1$ (2 ពិន្ទុ)

$U_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}(U_n - n)$ (2 ពិន្ទុ)

តាង $V_n = U_n - n$ នោះ $V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n$

$\Rightarrow (V_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានផលធៀបរួម $q = \frac{2}{3}$ (2 ពិន្ទុ)

$\Rightarrow U_k = V_k + k$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n} (V_k + k)$ (2 ពិន្ទុ)

$S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k + \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} V_k + \frac{n(n+1)}{2}$

ដោយ $\sum_{k=0}^{n} V_k = \frac{V_0(1-q^{n+1})}{(1-q)}$ ដែល $V_0 = U_0 = 2$, $q = \frac{2}{3}$

$\sum_{k=0}^{n} V_k = \frac{2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}{1-\frac{2}{3}} = 6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{n(n+1)}{2}}$ (2 ពិន្ទុ)

VI (ពិន្ទុ 10)

a. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេមាន:

$$U_n = \frac{n^2 + \sin n}{5n^3 + \cos(\pi n)}$$

. ករណី n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិគូ គេបាន:

$\cos(\pi n) = 1$

$\Rightarrow 5n^3 + \cos(\pi n) \neq 0$

$\Rightarrow (U_n)$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិគូ (2 ពិន្ទុ)

. ករណី n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស

គេបាន: $\cos(\pi n) = -1$

$n \geq 1 \Rightarrow 5n^3 \geq 5$

$\Rightarrow 5n^3 + \cos(\pi n) \neq 0$

$\Rightarrow (U_n)$ កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិសេស

ដូចនេះ $\boxed{(U_n) \text{ កំណត់ចំពោះគ្រប់ } n \in \mathbb{N}}$ (2 ពិន្ទុ)

b. គណនា $\lim_{n \to +\infty} U_n$

យើងមាន: $U_n = \frac{n^2 + \sin n}{5n^3 + \cos(\pi n)}$

$= \frac{n^2\left(1 + \frac{\sin n}{n^2}\right)}{n^3\left(5 + \frac{\cos(\pi n)}{n^3}\right)}$

$= \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{\sin n}{n^2}}{5 + \frac{\cos(\pi n)}{n^3}}$ (2 ពិន្ទុ)

ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន:

. $|\sin n| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow 0 \leq \left|\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n^2} = 0$ (2 ពិន្ទុ)

. $|\cos(\pi n)| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{\cos(\pi n)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$

$\Rightarrow 0 \leq \left|\lim_{n \to +\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^3}\right| \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^3} = 0$

. $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

គេបាន: $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0 \times \frac{1+0}{5+0} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 0}$ (2 ពិន្ទុ)

(ទំព័រទី4)

VII (២៥ពិន្ទុ) រកគ្រប់អនុគមន៍ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$f[x+f(x+y)]+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x)$$

ចំពោះគ្រប់ x និង y ជាចំនួនពិត (1)

• យក $y=1$ សមីការ(1) ក្លាយជា:

$$f[x+f(x+1)]+f(x)=x+f(x+1)+f(x), \forall x\in\mathbb{R}$$

$$f[x+f(x+1)]=x+f(x+1), \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad (2)$$

មានន័យថា $x+f(x+1)$ ជាចំណុចនឹងដែលប្រែប្រួលតាម f (២ពិន្ទុ)

• យក $x=0$ សមីការ (1) ក្លាយជា:

$$f[f(y)]+f(0)=f(y)+yf(0) \quad (3)$$

បើ y_0 ជាចំណុចនឹងដែលប្រែប្រួលតាម f

$\Rightarrow f(y_0)=y_0$ (២ពិន្ទុ)

• យក $y=y_0$ តាម(3) គេបាន:

$$f[f(y_0)]+f(0)=f(y_0)+y_0f(0)$$

$$f(y_0)+f(0)=f(y_0)+y_0f(0)$$

$$f(0)=y_0f(0) \quad (4)$$ (២ពិន្ទុ)

+ ករណី $f(0)\neq 0$ តាម(4) គេបាន $y_0=1$

តាម(2) គេបាន $x+f(x+1)=1 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$$f(x+1)=1-x, \ \forall x\in\mathbb{R}$$

តាង $U=x+1$ នោះ $x=U-1$

គេបាន $f(U)=1-(U-1)=2-U$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=2-x}$ (២ពិន្ទុ)

+ ករណី $f(0)=0$

• យក $y=0$ នោះ (1) ក្លាយជា:

$$f[x+f(x)]+f(0)=x+f(x)+0f(x)$$

$$f[x+f(x)]=x+f(x)$$

• ជំនួស x ដោយ $x+1$ គេបាន:

$$f[x+1+f(x+1)]=x+1+f(x+1) \quad (5)$$ (២ពិន្ទុ)

• យក $x=1$ តាម(1) គេបាន

$$f[1+f(y+1)]+f(y)=1+f(y+1)+yf(1) \quad (6)$$

• យក $x=-1$ ជំនួសក្នុងសមភាព (2): (ទំព័រទី5)

$$f[x+f(x+1)]=x+f(x+1)$$

គេបាន $f[-1+f(0)]=-1+f(0)$

$f(-1)=-1$ (ព្រោះ $f(0)=0$) (២ពិន្ទុ)

• យក $y=-1$ ជំនួសក្នុង(6) គេបាន:

$$f[1+f(0)]+f(-1)=1+f(0)-f(1)$$

$$f(1)-1=1-f(1)$$

$$2f(1)=2$$

$$f(1)=1$$ (២ពិន្ទុ)

$\Rightarrow$ (6) ក្លាយជា:

$$f[1+f(y+1)]+f(y)=1+f(y+1)+y \quad (7)$$

បើ y_0 ជាចំណុចនឹងដែលប្រែប្រួលតាម f នោះគេបាន:

$$f(1+f(y_0+1))+f(y_0)=1+f(y_0+1)+y_0$$

$f[1+f(y_0+1)]=1+f(y_0+1)$ (ព្រោះ $f(y_0)=y_0$)

$\Rightarrow 1+f(y_0+1)$ ជាចំណុចនឹងដែលប្រែប្រួលតាម f

$\Rightarrow y_0+1$ ជាចំណុចនឹងដែលប្រែប្រួលតាម f

$\Rightarrow y_0+2$ ជាចំណុចនឹងដែលប្រែប្រួលតាម f (២ពិន្ទុ)

តាម (2) និង (5) គេបាន:

$$f[x+f(x+1)]=x+f(x+1)$$

$$f[x+f(x+1)+1]=x+f(x+1)+1$$

តាមលំនាំនេះ គេបាន:

$$f[x+f(x+1)+2]=x+f(x+1)+2 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad (8)$$

$\Rightarrow x+f(x+1)+2$ ជាចំណុចនឹងដែលប្រែប្រួលតាម f (២ពិន្ទុ)

• ជំនួស x ដោយ $x-2$ ក្នុង(8) គេបាន:

$$f[x-2+f(x-2+1)+2]=x-2+f(x-2+1)+2$$

$$f[x+f(x-1)]=x+f(x-1) \quad (9)$$ (២ពិន្ទុ)

• យក $y=-1$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$$f[x+f(x-1)]+f(-x)=x+f(x-1)-f(x) \quad (10)$$

តាម (9) និង (10)

$$x+f(x-1)+f(-x)=x+f(x-1)-f(x)$$

$$f(-x)=-f(x), \ \forall x\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ ជាអនុគមន៍សេស ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ (2 ពិន្ទុ)

- ជំនួស x ដោយ -1 ហើយ y ដោយ $-y$ ក្នុង (I) គេបាន $f[-1+f(-1-y)]+f(y)=-1-f(1+y)+y$ (II)

បូក (I) និង (II) អង្គនិងអង្គ $2f(y) = 2y$, $\forall y \in \mathbb{R}$

$f(y) = y$, $\forall y \in \mathbb{R}$ (2 ពិន្ទុ)

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = x \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{R}}$ (1 ពិន្ទុ)

បានឃើញ និង ឯកភាព

25/4/2019