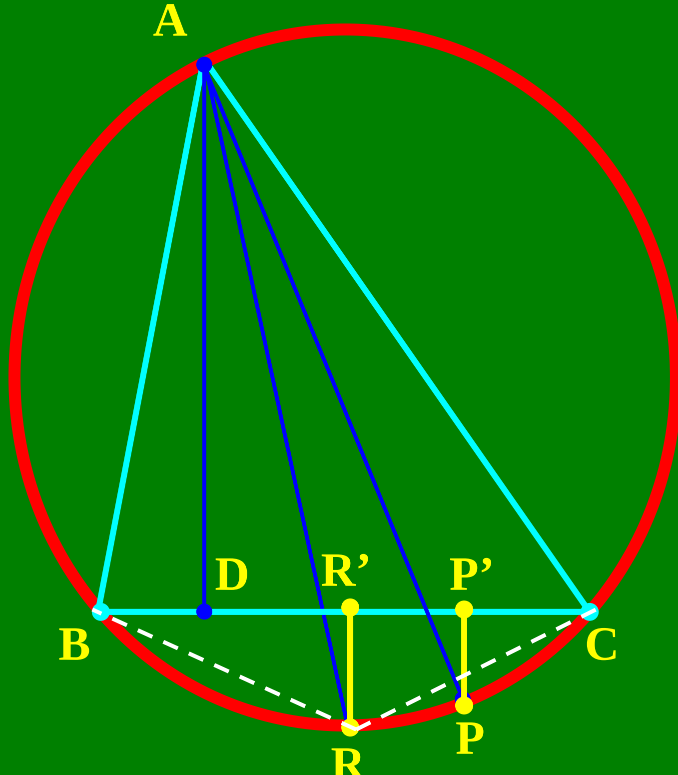
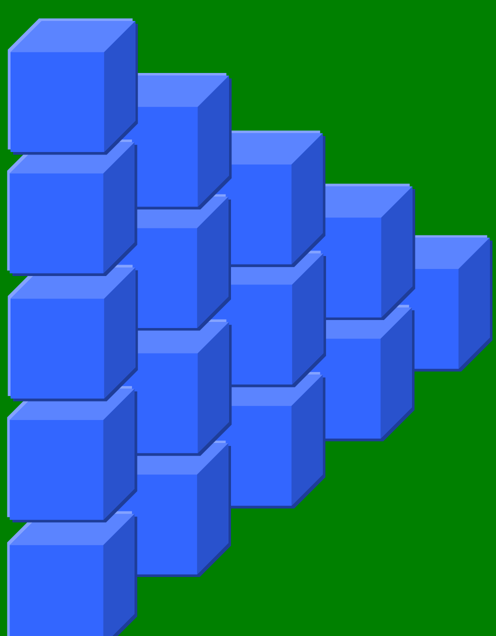
រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា





IMO 2009

អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក ឈឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី ឌុយ រីណា

លោក ធិត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក ឈឹម មិត្តសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា ឈី គុណ្ណាភា

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក ឈឹម ផល្លុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំនងទុកជាឯកសារ សម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាយកទៅសិក្សាស្រាវជ្រាវដោយខ្លួនឯង និង ម្យ៉ាងទៀតក្នុងគោលបំនងចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យានៅប្រទេសកម្ពុជាយើងឲ្យកាន់តែរីកចម្រើនថែមទៀតដើម្បីបង្កើនធនធានមនុស្សឲ្យមានកាន់តែច្រើនដើម្បីជួយអភិវឌ្ឍន៍ប្រទេសជាតិរបស់យើង ។

នៅក្នុងសៀវភៅនេះយើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវជ្រើសរើសយកលំហាត់ដែលធ្លាប់ចេញប្រឡងនៅជុំវិញពិភពលោក យកមកធ្វើដំណោះស្រាយ និងពន្យល់យ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឲ្យលោកអ្នកងាយយល់ឆាប់ចងចាំអំពីសិល្បៈនៃការដោះស្រាយទាំងអស់នេះ ។ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាត និងកំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីជួយកែលំអសៀវភៅនេះឲ្យបានកាន់តែសុក្រិត្រភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់នេះយើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពមាំមួន និង ទទួលជ័យជំនះគ្រប់ភារកិច្ច ។

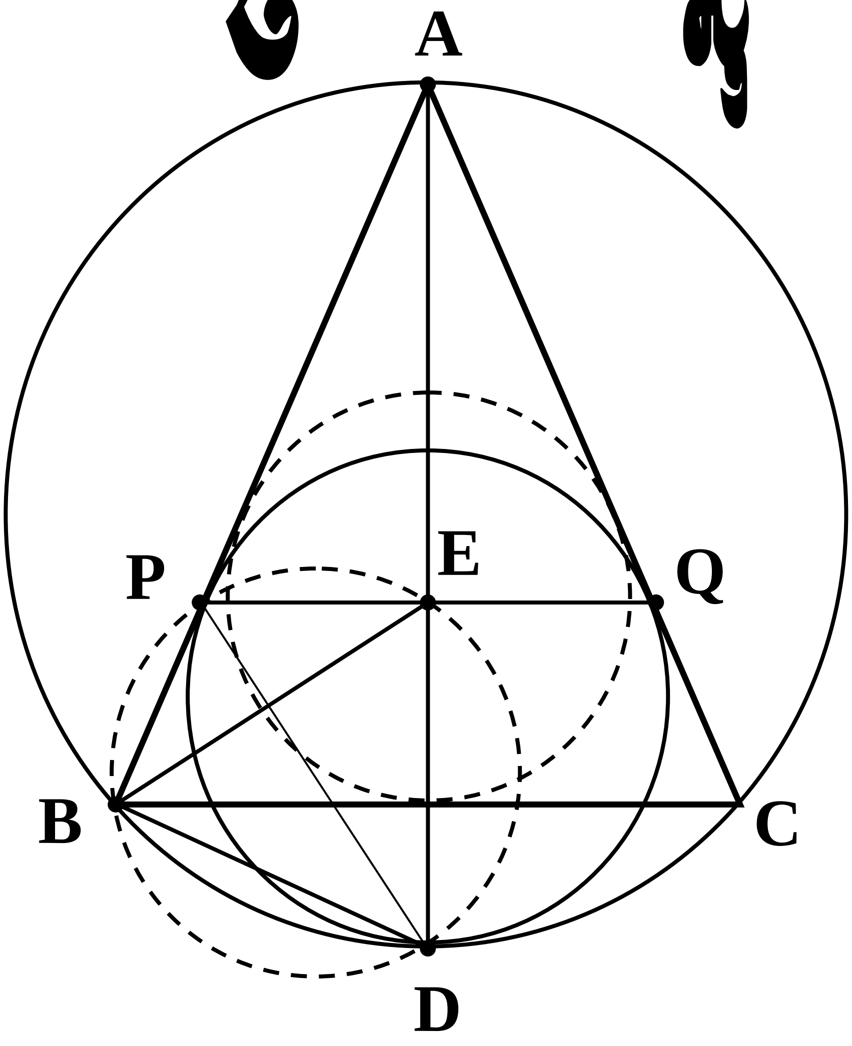
បាត់ដំបងថ្ងៃទី ៩ មីនា ២០១០

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 24

លឹម ផល្លុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

ធរណីមាត្រវិភាគក្នុងប្លង់



Problems and Solutions

ជំពូកទី១

រំលឹកទ្រឹស្តី និង រូបមន្តសំខាន់ៗ

១-ទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែង

ឧបមាថាគេមានត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់កំពូល A និងមានកំពស់ AH ។

គេមានទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗដូចខាងក្រោម

1/ $AB^2 = BH.BC$

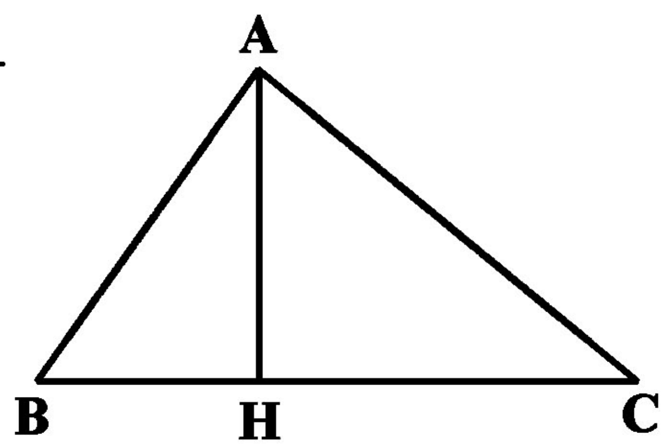
2/ $AC^2 = HC.BC$

3/ $AH^2 = BH.HC$

4/ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (ទ្រឹស្តីបទពីតាហ្គរ)

5/ $AH.BC = AB.AC$

6/ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

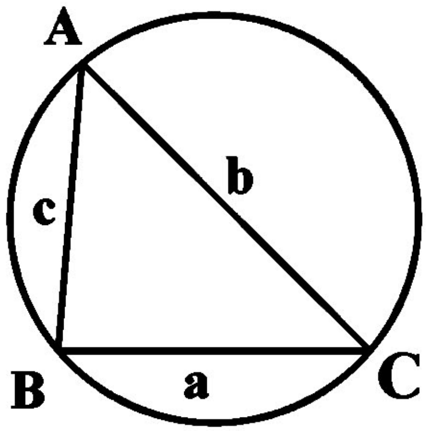


7/ $\sin\alpha = \frac{AB}{BC}$

8/ $\cos\alpha = \frac{AC}{BC}$

9/ $\tan\alpha = \frac{AB}{AC}$

២-ទ្រឹស្តីបទស៊ីនួស



ឧបមាថាគេមានត្រីកោណ ABC មួយចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ R ហើយមានជ្រុង $BC=a\ ;\ AC=b$ និង $AB=c$ ។

គេមានទំនាក់ទំនង $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

៣-ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនួស

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a\ ;\ AC=b$ និង $AB=c$ ។ គេមានទំនាក់ទំនង

1/ $a^2=b^2+c^2-2bccsoA$

2/ $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

3/ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

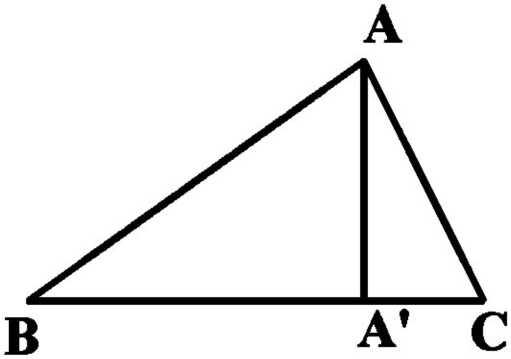
៤-រូបមន្តចំណោលកែង

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ។ គេមានទំនាក់ទំនង

1/ $a = b\cos C + c\cos B$

2/ $b = c\cos A + a\cos C$

3/ $c = a\cos B + b\cos A$



៥-ទ្រឹស្តីបទតង់ហ្សង់

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ។ គេមានទំនាក់ទំនង

1/ $$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

2/ $$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}$$

3/ $$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan\frac{C-A}{2}}{\tan\frac{C+A}{2}}$$

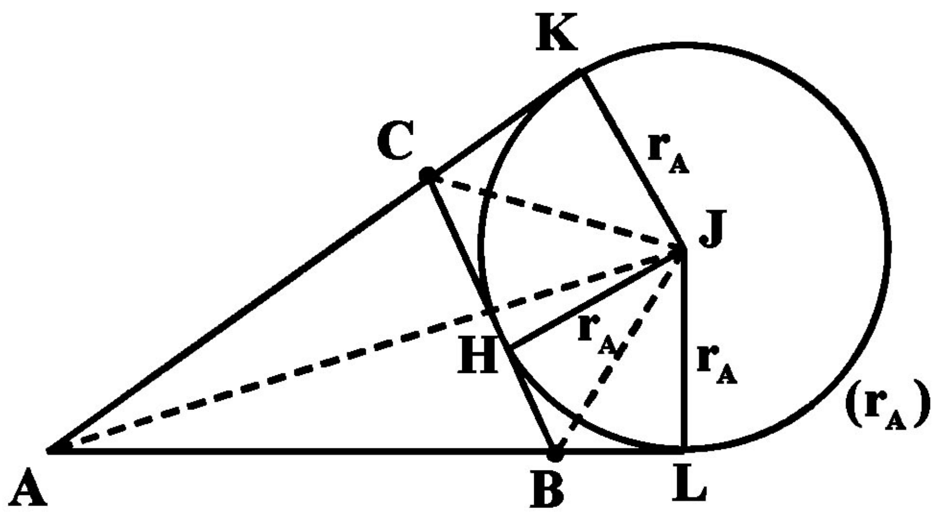
៦-កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំនៃត្រីកោណមួយ

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$

និង $AB = c$ ហើយ $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ។

តាង r_A , r_B , r_C ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A, B , C

នៃត្រីកោណ ABC ។គេមានទំនាក់ទំនង



$$1/\ r_A = p.\tan\frac{A}{2} = \frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}} = \frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$2/\ r_B = p.\tan\frac{B}{2} = \frac{p-a}{\tan\frac{C}{2}} = \frac{p-c}{\tan\frac{A}{2}}$$

$$3/\ r_C = p.\tan\frac{C}{2} = \frac{p-b}{\tan\frac{A}{2}} = \frac{p-a}{\tan\frac{B}{2}}$$

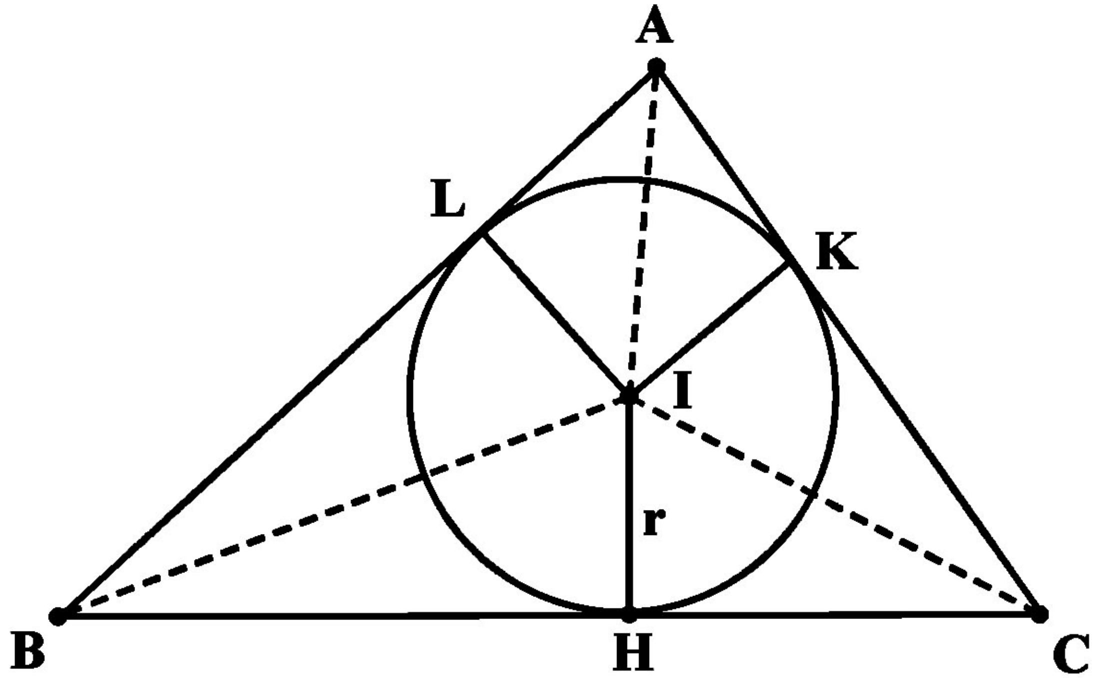
៧-កន្សោមកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណមួយ

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ហើយ $p = \frac{a+b+c}{2}$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។

គេមានទំនាក់ទំនង

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$



៨-រូបមន្តគណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$; $AC=b$ និង $AB=c$ ហើយ $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងក្រៅនៃត្រីកោណនេះ , តាង r_A , r_B , r_C ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ និង h_a, h_b, h_c ជាកពស់គូសពីកំពូល A, B, C នៃត្រីកោណ ។

1/ $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$

2/ $S=\frac{abc}{4R}=pr$

3/ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

4/ $S=\frac{1}{2}b.c\sin A=\frac{1}{2}c.a\sin B=\frac{1}{2}a.b\sin C$

5/ $S=p(p-a)\tan\frac{A}{2}=p(p-b)\tan\frac{B}{2}=p(p-c)\tan\frac{C}{2}$

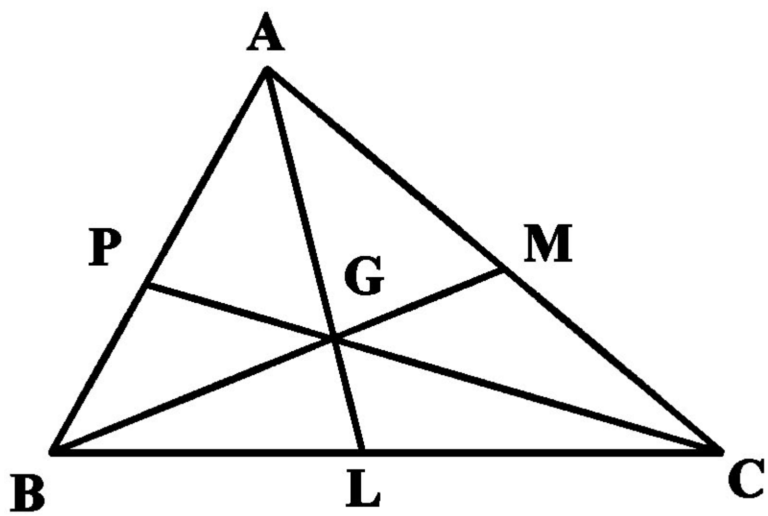
6/ $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$

7/ $S=(p-a)r_A=(p-b)r_B=(p-c)r_C$

8/ $S=\sqrt{r\ .r_A.r_B.r_C}$

៩-ទ្រឹស្តីបទមេដ្យានក្នុងត្រីកោណ

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ។ $AL = m_a$; $AM = m_b$; $AN = m_c$ ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ ABC ។



គេមានទំនាក់ទំនង

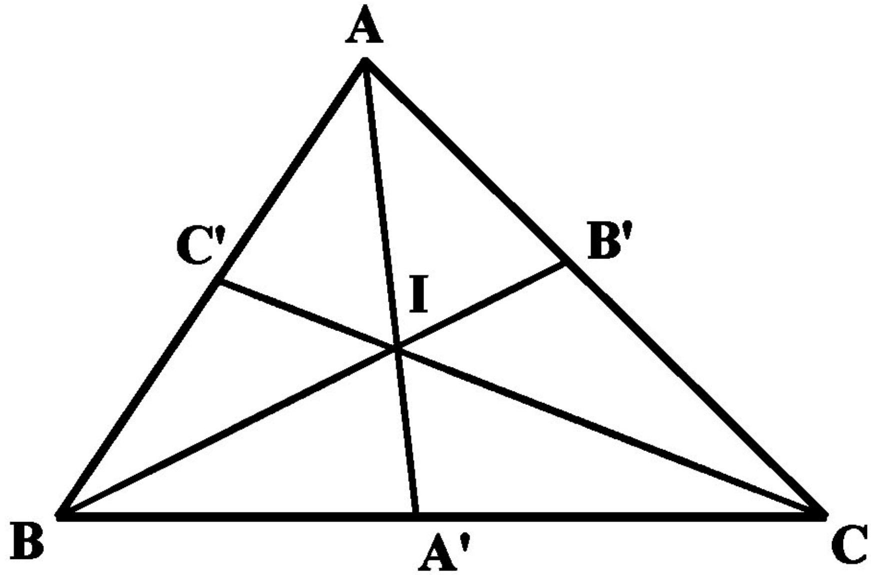
1/ $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

2/ $m_b^2 = \dfrac{c^2 + a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$

3/ $m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$

១០-ទ្រឹស្តីបទបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ និង $AB = c$ ។ $AA' = L_a$; $BB' = L_b$; $CC' = L_c$ ជាប្រវែងនៃបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A , B , C ។



គេមានទំនាក់ទំនង

1/ $L_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$

2/ $L_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$

3/ $L_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$

១១-កន្សោម $\cos\frac{A}{2}$; $\cos\frac{B}{2}$; $\cos\frac{C}{2}$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ ;\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

១២-កន្សោម $\sin\frac{A}{2};\sin\frac{B}{2};\sin\frac{C}{2}$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ ;\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

១៣-កន្សោម $\tan\frac{A}{2};\tan\frac{B}{2};\tan\frac{C}{2}$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\ ;\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

១៤-ទំនាក់ទំនងផ្សេងៗទៀតគួរកត់សំគាល់

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេមានទំនាក់ទំនងខាងក្រោម

1/ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2/ $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

3/ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

4/ $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

5/ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

6/ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

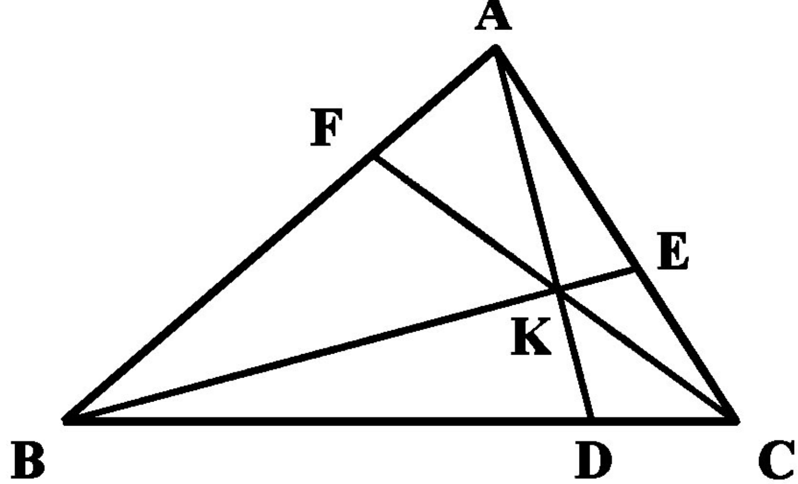
7/ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

8/ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

9/ $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

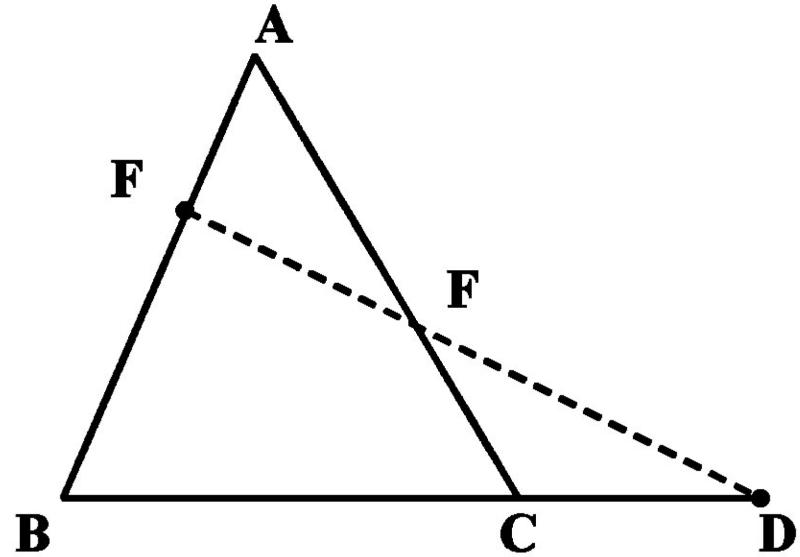
10/ $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

១៥-ទ្រឹស្តីបទ Ceva



ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ,បន្ទាត់បី AD ; BE; CF ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច K តែមួយលុះត្រាតែ $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$ ។

១៦-ទ្រឹស្តីបទ Menelaus



គេមានបីចំនុច F, D, E ស្ថិតនៅលើ AB, BC, AC នៃត្រីកោណ ABC ។ បីចំនុច F, D, E រត់ត្រង់គ្នា លុះត្រាតែ $\frac{AF}{BF}.\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{AE}=1$ ។

១៧-ទ្រឹស្តីបទឡៃបនិច

ក្នុងត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង a ; b ; c ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ហើយ G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC គេមាន $OG^2=R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$ ។

១៧-ទ្រឹស្តីបទ Stewart

បើ L ជាចំនុចនៅលើជ្រុង BC នៃត្រីកោណ ABC ដែល $AL=l\ ;\ BL=m\ ;\ LC=n$, a,b,c ជាជ្រុង នោះគេមាន $a(l^2+mn)=b^2m+c^2n$ ។

ជំពូកទី២

កម្រងលំហាត់ធរណីមាត្រ

1/ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយចូរបង្ហាញថា

ក/ $bc+ca+ab=p^2+r^2+4rR$

ខ/ $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR$

គ/ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$

2/គេឲ្យត្រីកោណសមង្ស័ ABC មួយមានជ្រុងស្មើ a ។ យក M ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ ហើយ D,E,F ជាចំណោលកែងនៃ M លើជ្រុង BC,CA,AB រៀងគ្នា ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក/ $\frac{1}{MD}+\frac{1}{ME}+\frac{1}{MF}\geq\frac{6\sqrt{3}}{a}$

ខ/ $\frac{1}{MD+ME}+\frac{1}{ME+MF}+\frac{1}{MF+MD}\geq\frac{3\sqrt{3}}{a}$

3/បើ h_a , h_b , h_c ជាប្រវែងកំពស់នៃត្រីកោណ ABC មួយចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត I កាំ r នោះចូរស្រាយថា

ក/ $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$

ខ/ ទាញថា $h_a+h_b+h_c\ge 9r$

4/ គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយមានកំពស់AD,BE និង CF ហើយ H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក/ $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\ge 9$

ខ/ $\frac{HD}{HA}+\frac{HE}{HB}+\frac{HF}{HC}\ge \frac{3}{2}$

5/ គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ហើយ L , M , N ជាចំនុចនៅលើ BC ; CA; AB រៀងគ្នា ។

តាង P , Q និង R ជាចំនុចប្រសព្វរវាង AL , BM និង CN ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណABC,

ចូរស្រាយថា $\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}\ge 9$?

(Korean 1995)

6/ ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB=AC$ ។

រង្វង់មួយប៉ះខាងក្នុងទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រី

កោណABC ហើយប៉ះទៅនឹង AB នឹង AC
រៀងគ្នាត្រង់ P និង Q រៀងគ្នា ។
ស្រាយថាចំណុចកណ្តាលនៃ PQ គឺជាផ្ចិតរង្វង់
ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។

(IMO 1978)

7/ P ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។
PA កាត់ BC ត្រង់ D , PB កាត់ AC ត្រង់ E
និង PC កាត់ AB ត្រង់ F ។
ចូរបង្ហាញថាយ៉ាងតិចមានមួយនៃ $\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$
មានតម្លៃតូចជាង 2 និង យ៉ាងតិចមានមួយនៃ
$\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$ មានតម្លៃធំជាង 2 ។

(IMO 1961)

8/ គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

បន្ទាត់ពុះមុំ A , B , C កាត់ជ្រុង $[BC] , [AC] , [AB]$ រៀងគ្នា

ត្រង់ A' , B' , C' ។

ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{\sin(\frac{B-C}{2})}{AA'}+\frac{\sin(\frac{C-A}{2})}{BB'}+\frac{\sin(\frac{A-B}{2})}{CC'}=0$$

9/ P ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។

D , E , F ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ P ទៅលើ

បន្ទាត់ BC , CA, AB រៀងគ្នា ។

ចូរកំនត់គ្រប់ចំនុច P ដោយដឹងថា

$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

(IMO1981)

10/ គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A។ គេយក $E\in[AC]$ និង $F\in[AB]$ ដែល $\angle AEF=\angle ABC$ និង $\angle AFE=\angle ACB$។ គេពាង E' និង F' រៀងគ្នាជាជើងចំណោលកែងនៃ E និង F លើជ្រុង $[BC]$ ។

ចូរស្រាយថា $E'E+EF+FF'\leq BC$?

11/ចំណុច M មួយជ្រើសរើសនៅលើជ្រុង AC នៃត្រីកោណ ABC , ដោយដឹងថាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABM និង BMC ស្មើគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $BM^2=X.\cot\dfrac{B}{2}$ ។

ដែល X ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC ។

(IMO Longlists 1988)

12/ ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$$

ដែល r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

13/ គេយកចំនុច K ; L ; M រៀងគ្នានៅលើ
ជ្រុង BC ; CA ; AB ។
ចូរបង្ហាញថាយ៉ាងតិចមានមួយនៃត្រីកោណ
AML, BKM ,CLK មានផ្ទៃក្រឡាតូចជាង
ឬស្មើ $\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ ABC ។

(IMO 1966)

14/ កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង
នៃត្រីកោណសមបាតមួយស្មើរៀងគ្នា R និង r ។
ចូរស្រាយថាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ពីរនេះគឺ
$d=\sqrt{R(R-2r)}$ ។ (IMO 1962)

15/ គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារិកក្នុង និងចារិកក្រៅ
នៃត្រីកោណ ABCមួយ ។
ក.ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$
ខ.ចូរស្រាយថា $R\geq 2r$ ។

16/ គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin B \sin C \cos A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

17/ គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a , b , c ។

កំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា ៖

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

18/ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

ឧបមាថា M ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ ហើយគេតាង x ,y

និង z ជាចំងាយរៀងគ្នាពីចំនុច M ទៅជ្រុង BC , AC និង AB

នៃត្រីកោណ ។ ចូរគណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ $T = x^2 + y^2 + z^2$

ជាអនុគមន៍នៃ a,b,c ។

19/ គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំនៃរង្វង់ចារិកក្នុង និង

ចារិកក្រៅរបស់ត្រីកោណកែង ABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $R \geq (1+\sqrt{2})\, r$?

20/ គេឲ្យ a, b, c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមានផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹង S ។ ចូរស្រាយថា $a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}\,S$?

21/ គេយក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែល

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនុច X ចូរស្រាយថា ៖

$$a.XA^2 + b.XB^2 + c.XC^2 = (a+b+c)XI^2 + abc$$

22/ គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារិកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ d ជាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅរបស់ត្រីកោណនោះគេបាន ៖

$d^2 = R(R-2r)$?

23/ គេយក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែលមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{IA^2}{bc} + \dfrac{IB^2}{ca} + \dfrac{IC^2}{ab} = 1$ ។

24/ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$ ។

25/ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

26/ គេឱ្យ A ; B ; C ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$

27/ គេឱ្យ A ; B ; C ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\ge(1+\sqrt{3})^3$

28/ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក.បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

ខ.បង្ហាញថា $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

គ.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

29/ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង p ជាកន្លះបរិមាត្រ និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$

ខ. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

30/ ចូរបង្ហាញថានៅក្នុងគ្រប់ត្រីកោណគេមានទំនាក់ទំនង :

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{abc}{2R^2}$$

ដែល a ; b ; c ជាជ្រុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

31/ គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

ខ. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$

32/ គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}.\tan\frac{C}{2}$$

33/ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច និង ជ្រុង a ; b ; c និងផ្ទៃក្រឡា K ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

34/ គេឱ្យ a ; b ; c ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមាន បរិមាត្រស្មើ 2 ។

ចូរស្រាយថា $\frac{3}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<2$

35/ ក្នុងត្រីកោណ ABC កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle BCA$ ប្រសព្វរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណនេះត្រង់ R ហើយកន្លះបន្ទាត់ពុះនេះកាត់មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង BC ត្រង់ P និងកាត់មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង AC ត្រង់ Q ។ ចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ BC គឺ K និងចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AC គឺ L ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ RPK និង ត្រីកោណ RQL មានក្រឡាផ្ទៃស្មើគ្នា។

(IMO 2007)

36/ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

គេតាង I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ

A , B , C កាត់ជ្រុងឈមរៀងគ្នាត្រង់ A' , B' , C'

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$ ។

(IMO 1991)

37/ គេត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC ។

ក. ស្រាយថា $IA.IB.IC = 4Rr^2$

ខ. ស្រាយថា $IA^2 + IB^2 + IC^2 = r^2 + p^2 - 8Rr$

គ. ស្រាយថា $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$

38/ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a ; AC = b \; ; AB = c$

តាង $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង

និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម :

ក. $bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr$

ខ. $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$

គ. $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{r}{p}$

ឃ. $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{4R + r}{p}$

ង. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$

39/ គេឱ្យត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង និង មុំផ្ទៀងផ្ទាត់

$$c^2 = 4ab\cos A\cos B$$ ។

ចូរស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

(Pi Mu Epsilon Journal -Fall 1992)

40/ គេឱ្យការេ ABCD មួយ ។

E និង F ជាពីរចំនុចស្ថិតនៅលើជ្រុងរៀងគ្នា AB និង AD ។

តាង P ជាចំនុចប្រសព្វរវាង EF និង AC ។

ចូរស្រាយថា :

ក. $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF} = \frac{\sqrt{2}}{AP}$ ខ. $AP^2 \le \frac{AE.AF}{2}$

(RMC 2000)

40/ គេឱ្យ AD ជាកន្ទះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A នៃត្រីកោណ ABC មួយ ។

M និង N ជាពីរចំនុចនៅលើជ្រុង AB និង AC រៀងគ្នាដែលមុំ

$\angle MDA = \angle B$ និងមុំ $\angle NDA = \angle C$ ។

តាង P ជាប្រសព្វរវាង MN និង AD ។

ចូរស្រាយថា $AD^3 = AB.AC.AP$ ។

(RMC 1999)

41/ គេតាង r, R និង p រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និងជាកន្លះបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថាជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណនេះជាឬសរបស់សមីការ ៖

$$x^3 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4rR)x - 4prR = 0$$

42/ ត្រីកោណមួយមានកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅរៀងគ្នា r និង R ។

ចូរស្រាយថា $R \geq 2r$ ។

(Indian Mathematical Olympiad 1988)

43/គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយហើយតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

(IMO Long lists 1988)

44/ ប្រវែងជ្រុងរបស់ឆកោណ ABCDEF មួយផ្ទៀងផ្ទាត់ $AB = BC$; $CD = DE$; $EF = FA$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{3}{2}$?

(Shortlist IMO.1997)

45/ គេតាង a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណABC ហើយតាង r និងRជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $a+b+c\ge 2\sqrt{3r(r+4R)}$ ។

46/ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក.បង្ហាញថា $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

ខ.បង្ហាញថា $\cos A \cos B \cos C \le \frac{1}{8}$

គ.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

47/ គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែល $AB = AC$ ។ បន្ទាត់ពុះមុំ $\angle CAB$ និង $\angle ABC$ ជួបជ្រុង BC និង CA ត្រង់ D និង E រៀងគ្នា។ យក K ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ADC ។ សន្មត់ថា $\angle BEK = 45^\circ$ ។ ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃអាចរបស់មុំ $\angle CAB$?

(IMO 2009)

ជំពូកទី៣

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយចូរបង្ហាញថា

ក/ $bc+ca+ab=p^2+r^2+4rR$

ខ/ $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR$

គ/ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$

ដំណោះស្រាយ

ក/ $bc+ca+ab=p^2+r^2+4rR$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេបាន

$S=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន

$p^2r^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$

$pr^2=p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc$

ដោយ $a+b+c=2p$

គេបាន $pr^2 = p^3 - 2p^3 + (ab+bc+ca)p - abc$

គេទាញ $ab+bc+ca = r^2 + p^2 + \frac{abc}{p}$

ដោយ $S = pr = \frac{abc}{4R} \Rightarrow \frac{abc}{p} = 4rR$

ដូចនេះ $bc+ca+ab = p^2 + r^2 + 4rR$ ។

ខ/ $a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8rR$

តាមសមភាព

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

គេទាញ $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

ដោយ $a+b+c = 2p$ និង $bc+ca+ab = p^2+r^2+4rR$

គេបាន $a^2+b^2+c^2 = 4p^2 - 2p^2 - 2r^2 - 8rR$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8rR$,

គ/ $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{4R+r}{p}$

តាមរូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណគេមាន

$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$

គេទាញ $\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \tan\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \tan\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}$

តាង $T=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$

$$=\frac{r}{p-a}+\frac{r}{p-b}+\frac{r}{p-c}$$

$$=\frac{r[(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)]}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{pr\left(3p^2-2(a+b+c)p+ab+bc+ac\right)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{S(3p^2-4p^2+p^2+r^2+4rR)}{S^2}$$

$$=\frac{r^2+4rR}{S}=\frac{r(r+4R)}{pr}=\frac{r+4R}{p}$$

ដូចនេះ: $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$ ។

លំហាត់ទី២

គេឲ្យត្រីកោណសមង្ស័ ABC មួយមានជ្រុងស្មើ a ។ យក M ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ ហើយ D,E,F ជាចំណោលកែងនៃ M លើជ្រុង BC,CA,AB រៀងគ្នា ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

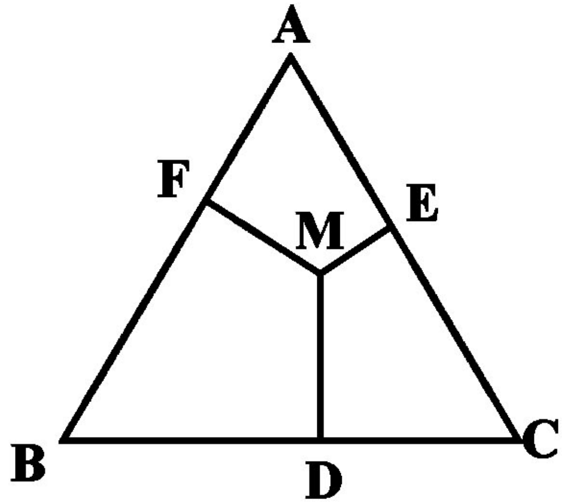
ក/ $\frac{1}{MD}+\frac{1}{ME}+\frac{1}{MF}\geq\frac{6\sqrt{3}}{a}$

ខ/ $\frac{1}{MD+ME}+\frac{1}{ME+MF}+\frac{1}{MF+MD}\geq\frac{3\sqrt{3}}{a}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក/ $\frac{1}{MD}+\frac{1}{ME}+\frac{1}{MF}\geq\frac{6\sqrt{3}}{a}$



យើងមាន $S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}$

$$\frac{1}{2}a^2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a.MD + \frac{1}{2}a.ME + \frac{1}{2}a.MF$$

គេទាញ $MD + ME + MF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (1)

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz in Engle form

$$\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} \geq \frac{(1+1+1)^2}{MD+ME+MF} = \frac{9}{MD+ME+MF} \quad (2)$$

យកទំនាក់ទំនង (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$$\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} \geq \frac{6\sqrt{3}}{a}$$ ។

ខ/ $\frac{1}{MD+ME} + \frac{1}{ME+MF} + \frac{1}{MF+MD} \geq \frac{3\sqrt{3}}{a}$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz in Engle form

$$\frac{1}{MD+ME} + \frac{1}{ME+MF} + \frac{1}{MF+MD} \geq \frac{9}{2(MD+ME+MF)} \quad (3)$$

យកទំនាក់ទំនង (1) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន

$$\frac{1}{MD+ME} + \frac{1}{ME+MF} + \frac{1}{MF+MD} \geq \frac{3\sqrt{3}}{a}$$ ។

លំហាត់ទី៣

បើ h_a , h_b , h_c ជាប្រវែងកំពស់នៃត្រីកោណ ABC មួយចារឹកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត I កាំ r នោះចូរស្រាយថា

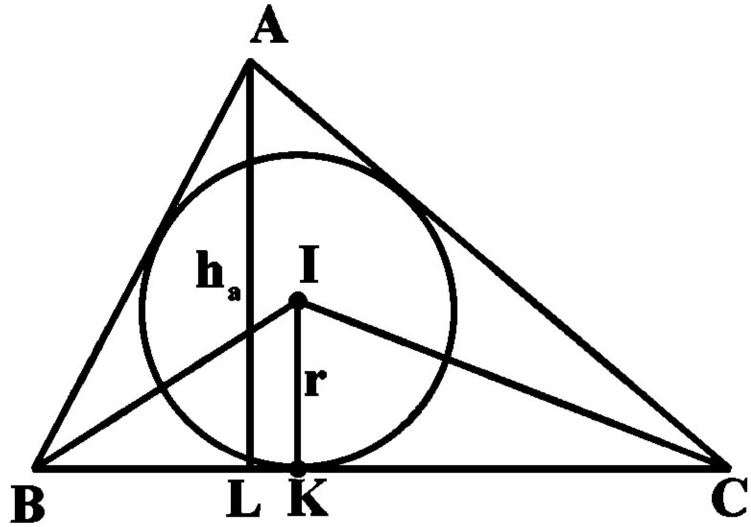
ក/ $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

ខ/ ទាញថា $h_a + h_b + h_c \geq 9r$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក/ $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$



យើងមាន $\frac{S_{IBC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}BC.r}{\frac{1}{2}BC.h_a}=\frac{r}{h_a}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{S_{ICA}}{S_{ABC}}=\frac{r}{h_b}$ (2) និង $\frac{S_{IAB}}{S_{ABC}}=\frac{r}{h_C}$ (3)

បូកសមភាព (1),(2),(3) គេបាន

$$\frac{S_{IBC}+S_{ICA}+S_{IAB}}{S_{ABC}}=\frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}$$

$$1=r\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

ដូចនេះ: $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$ ។

ខ/ ទាញថា $h_a+h_b+h_c\geq 9r$

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន

$h_a+h_b+h_c\geq 3\sqrt[3]{h_ah_bh_c}$ (4)

$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{h_ah_bh_c}}$ (5)

គុណ (4) និង (5) គេបាន

$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\geq 9\Rightarrow h_a+h_b+h_c\geq 9r$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយមានកំពស់AD,BE និង CF ហើយ H ជាអរត្តូសង់នៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

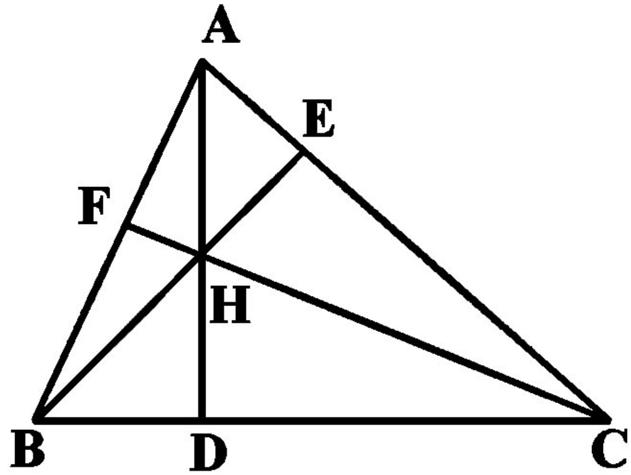
ក/ $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\geq 9$

ខ/ $\frac{HD}{HA}+\frac{HE}{HB}+\frac{HF}{HC}\geq \frac{3}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក/ $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\geq 9$



តាង$S ; S_1 ; S_2 ; S_3$ រៀងគ្នាជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ

$ABC ; HBC ; HAC ; HAB$ ។

យើងមាន $\frac{S_1}{S}=\frac{HD}{AD}$, $\frac{S_2}{S}=\frac{HE}{BE}$, $\frac{S_3}{S}=\frac{HF}{CF}$

គេបាន $\frac{S_1}{S}+\frac{S_2}{S}+\frac{S_3}{S}=\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}$

ឬ $\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=1 \quad (1)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}\geq 3\sqrt[3]{\frac{HD.HE.HF}{AD.BE.CF}} \quad (2)$$

$$\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\geq 3\sqrt[3]{\frac{AD.BE.CF}{HD.HE.HF}} \quad (3)$$

គុណវិសមភាព (2) និង (3)

$$\left(\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}\right)\left(\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\right)\geq 9 \quad (4)$$

យក (1) ជំនួសក្នុង (4) គេបាន

ដូចនេះ $\frac{AD}{HD}+\frac{BE}{HE}+\frac{CF}{HF}\geq 9$

ខ/ $\frac{HD}{HA}+\frac{HE}{HB}+\frac{HF}{HC}\geq\frac{3}{2}$

គេមាន $HA = AD - HD$

គេទាញ $\frac{HD}{HA}=\frac{HD}{AD-HD}=\frac{\frac{1}{2}HD.BC}{\frac{1}{2}AD.BC-\frac{1}{2}HD.BC}$

ឬ $\frac{HD}{HA}=\frac{S_1}{S-S_1}=\frac{S_1}{S_2+S_3}$ (i)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{HE}{HB}=\frac{S_2}{S_3+S_1}$ (ii) ; $\frac{HF}{HC}=\frac{S_3}{S_1+S_2}$ (iii)

បូកសមភាព (i),(ii),(iii) គេបាន

$$\frac{HD}{HA}+\frac{HE}{HB}+\frac{HF}{HC}=\frac{S_1}{S_2+S_3}+\frac{S_2}{S_3+S_1}+\frac{S_3}{S_1+S_2}$$

តាង $T=\frac{S_1}{S_2+S_3}+\frac{S_2}{S_1+S_1}+\frac{S_3}{S_1+S_2}$

គេបាន $T=\frac{{S_1}^2}{S_1S_2+S_1S_3}+\frac{{S_2}^2}{S_2S_3+S_1S_2}+\frac{{S_3}^2}{S_1S_3+S_2S_3}$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz in Engle form

គេទាញ $T\geq\frac{(S_1+S_2+S_3)^2}{2(S_1S_2+S_1S_3+S_2S_3)}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\frac{S_1^2+S_2^2}{2}+\frac{S_2^2+S_3^2}{2}+\frac{S_1^2+S_3^2}{2}\ge S_1S_2+S_2S_3+S_1S_3$$

ឬ $S_1^2+S_2^2+S_3^2\ge S_1S_2+S_2S_3+S_1S_3$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2(S_1S_2+S_2S_3+S_1S_3)$ គេបាន

$$(S_1+S_2+S_3)^2\ge 3(S_1S_2+S_2S_3+S_1S_3)$$

គេទាញបាន $T\ge\frac{(S_1+S_2+S_3)^2}{2(S_1S_2+S_1S_3+S_2S_3)}\ge\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\frac{HD}{HA}+\frac{HE}{HB}+\frac{HF}{HC}\ge\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ហើយ L , M , N ជាចំនុចនៅលើ BC ; CA; AB រៀងគ្នា ។

តាង P , Q និង R ជាចំនុចប្រសព្វរវាង AL , BM និង CN ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC,

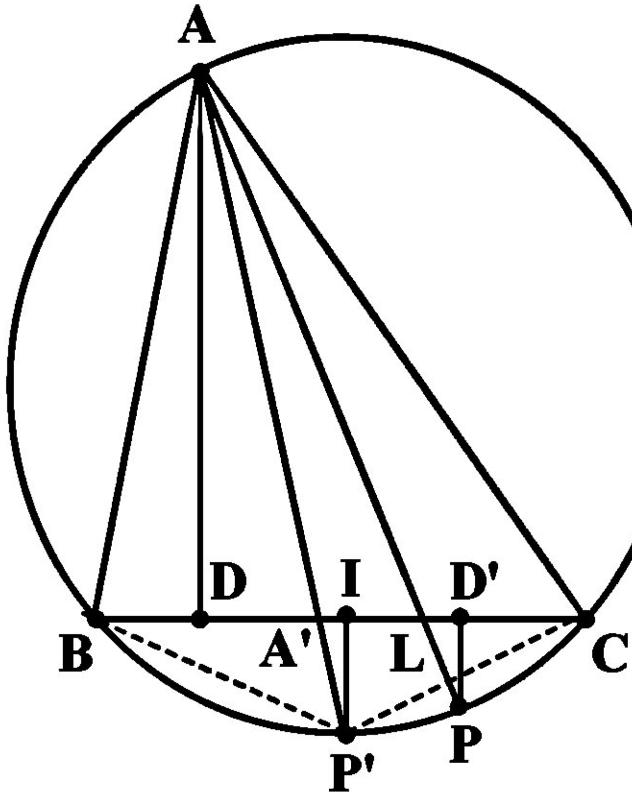
ចូរស្រាយថា $\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}\geq 9$?

(Korean 1995)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}\geq 9$

សង់កំពស់ AD នៃត្រីកោណ ABC , យក D' ជាចំណោលកែងនៃ P លើជ្រុង BC ។ P' ជាចំណុចកណ្តាលនៃធ្នូ BC ហើយ I ជាចំណោលកែងនៃ P' លើជ្រុង BC , A' ជាចំនុចប្រសព្វរវាង AP' ជាមួយនឹង BC ។



ក្នុងត្រីកោណកែង LAD និង LPD' ជាត្រីកោណ

ដូចគ្នាព្រោះគេមាន $\angle ALD = \angle PLD'$(មុំទល់កំពូល)

គេបានផលធៀប $\frac{AL}{LP} = \frac{AD}{D'P}$ ។

ដោយ $IP' \geq D'P$ នោះ $\frac{AL}{LP} \geq \frac{AD}{IP'}$ (1) ។

ត្រីកោណកែង AA'D ដូចគ្នានឹងត្រីកោណ P'A'I

ព្រោះមុំ $\angle AA'D = \angle IA'P'$ (មុំទល់កំពូល)

គេបានផលធៀបដំណូច $\frac{AD}{IP'} = \frac{AA'}{A'P'}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញ $\frac{AL}{LP} \geq \frac{AA'}{A'P'}$ (3)

យើងមាន $\angle BAP' = \angle CAP'$ (ព្រោះ P' ជាចំណុចកណ្តាលនៃធ្នូ BC)

គេបាន AP' ជាបន្ទាត់ពុះនៃមុំ $\angle BAC$,

ហើយ $\angle CBP' = \angle BCP' = \angle CAP' = \angle BAP'$

(មុំស្កាត់ធ្នូរួម BP' ; CP')

គេបាន BCP' ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល P' ។

យើងបាន $P'B = P'C$ ឬ $P'B^2 = P'C^2$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ ABP' និង ACP' គេបាន

$$P'B^2 = c^2 + P'A^2 - 2c.P'A\cos\frac{A}{2}$$

$$P'C^2 = b^2 + P'A^2 - 2b.P'A\cos\frac{A}{2}$$

គេបាន $c^2 + P'A^2 - 2c.P'A\cos\frac{A}{2} = b^2 + P'A^2 - 2b.P'A\cos\frac{A}{2}$

គេទាញ $P'A = \dfrac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}$ ។

តាមរូបមន្តកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A គេមាន

$$AA'=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

គេបាន $A'P'=P'A-AA'$

$$=\frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}-\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

$$=\frac{(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{A}{2}}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}$$

ដោយ $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$

ឬ $4bc\cos\frac{A}{2}=(b+c)^2-a^2$

គេទាញ $A'P'=\frac{a^2}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}$

តាម (3) គេបាន $\frac{AL}{LP}\geq\frac{\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}}{\frac{a^2}{2(b+c)\cos\frac{A}{2}}}=\frac{4bc\cos^2\frac{A}{2}}{a^2}$

ឬ $\frac{AL}{LP}\ge\frac{(b+c)^2-a^2}{a^2}=\frac{(b+c)^2}{a^2}-1$ (i)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{BM}{MQ}\ge\frac{(c+a)^2}{b^2}-1$ (ii)

និង $\frac{CN}{NR}\ge\frac{(a+b)^2}{c^2}-1$ (iii) ។

បូកវិសមភាព (i),(ii),(iii) គេបាន

$$\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}\ge\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2}+\frac{(a+b)^2}{c^2}-3$$

តាមវិសមភាព AM−GM គេមាន

$$\frac{(b+c)^2}{a^2}\ge\frac{4bc}{a^2}\ ;\ \frac{(c+a)^2}{b^2}\ge\frac{4ca}{b^2}\ ;\ \frac{(a+b)^2}{c^2}\ge\frac{4ab}{c^2}$$

គេបាន $\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2}+\frac{(a+b)^2}{c^2}\ge4\left(\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\right)$

ហើយ $\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\ge3\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}.\frac{ca}{b^2}.\frac{ab}{c^2}}=3$

នោះ $\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2}+\frac{(a+b)^2}{c^2}\ge12$

គេទាញ $\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}\ge12-3=9$

ដូចនេះ $\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}\ge9$ ។

លំហាត់ទី៦

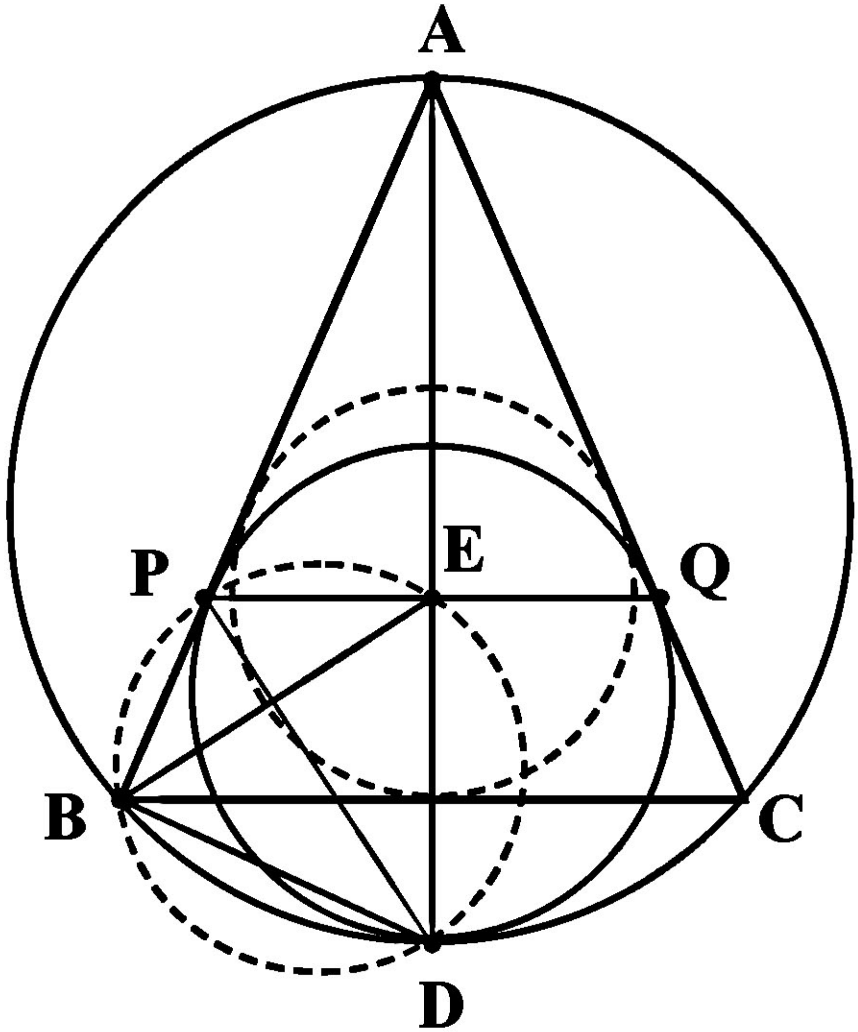
ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB = AC$ ។
រង្វង់មួយប៉ះខាងក្នុងទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណABC ហើយប៉ះទៅនឹង AB នឹង AC រៀងគ្នាត្រង់ P និង Q រៀងគ្នា ។
ស្រាយថាចំណុចកណ្តាលនៃ PQ គឺជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។

(IMO 1978)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាចំណុចកណ្តាលនៃ PQ គឺជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC

តាង E ជាចំនុចកណ្តាលនៃ PQ និង D ជាប្រសព្វរវាង AE នឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅΔABC ។



យើងមាន $\angle ABD = 90^{\circ}$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

គេបាន $\angle PBD + \angle PED = 180^{\circ}$

ដូចនេះ BPED ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់មាន

អង្កត់ផ្ចិត DP ។ គេបាន

$\angle PBE = \angle PDE = \dfrac{\angle PDQ}{2}$ (មុំស្កាត់ធ្នូរួម PE)

ម្យ៉ាងទៀត AP ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ដែលប៉ះ AB
ត្រង់ P នោះគេបាន $\angle APQ = \angle PDQ = \angle ABC$
គេទាញ $\angle PBE = \frac{\angle ABC}{2}$ នាំឲ្យ BE ជាកន្លះ
បន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle ABC$ ។
ដោយ E ជាប្រសព្វរវាងកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុង BE
និង AD នៃមុំ $\angle B$ និង $\angle A$ ដូចនេះវាជាផ្ចិត
រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។

<u>លំហាត់ទី៧</u>

P ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។

PA កាត់ BC ត្រង់ D , PB កាត់ AC ត្រង់ E

និង PC កាត់ AB ត្រង់ F ។

ចូរបង្ហាញថាយ៉ាងតិចមានមួយនៃ $\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$

មានតម្លៃតូចជាង 2 និង យ៉ាងតិចមានមួយនៃ

$\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$ មានតម្លៃធំជាង 2 ។

(IMO 1961)

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ការបង្ហាញ

តាង A' និង P' ជាចំណោលកែងនៃ A និង P

លើជ្រុង BC ។

ផលធៀបក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ PBC និង ABC

គឺ $\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}=\frac{PP'}{AA'}$ ។

ត្រីកោណកែង PP'D និង AA'D

មាន$\angle DPP' = \angle DAA'$ (មុំត្រូវគ្នា)

ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\frac{PP'}{AA'} = \frac{PD}{AD}$

ហេតុនេះ $\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \frac{PD}{AD} = \frac{PD}{AP+PD} = \frac{1}{1+\frac{AP}{PD}}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$\frac{S_{PCA}}{S_{ABC}} = \frac{1}{1+\frac{BP}{PE}}$ (2) ; $\frac{S_{PAB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{1+\frac{CP}{PF}}$ (3)

បូកទំនាក់ទំនង (1);(2);(3) គេបាន

$$1 = \frac{1}{1+\frac{AP}{PD}} + \frac{1}{1+\frac{BP}{PE}} + \frac{1}{1+\frac{CP}{PF}}$$

តាង $\frac{AP}{PD} = x$; $\frac{BP}{PE} = y$; $\frac{CP}{PF} = z$

គេបាន $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1$

យើងនឹងស្រាយថា x , y , z យ៉ាងតិចមានមួយ
តូចជាង 2 និង យ៉ាងតិចមានមួយធំជាង 2 ។

-ឧបមាថា $x \geq 2$ និង $y \geq 2$

គេបាន $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

ដោយ $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1$ នោះគេបាន

$1-\frac{1}{1+z} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow z \leq 2$ ។

ដូចនេះ x , y , z យ៉ាងតិចមានមួយតូចជាង 2 ។

-ឧបមាថា $x \leq 2$ និង $y \leq 2$

គេបាន $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \geq \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

ដោយ $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1$ នោះគេបាន

$1-\frac{1}{1+z} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow z \geq 2$ ។

ដូចនេះ x , y , z យ៉ាងតិចមានមួយធំជាង 2 ។

សរុបមកគេអាចសន្និដ្ឋានថាយ៉ាងតិចមានមួយនៃ $\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$ មានតម្លៃតូចជាង 2 និង យ៉ាងតិចមានមួយនៃ $\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$ មានតម្លៃធំជាង 2 ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

បន្ទាត់ពុះមុំ A , B , C កាត់ជ្រុង [BC] , [AC] , [AB] រៀងគ្នា

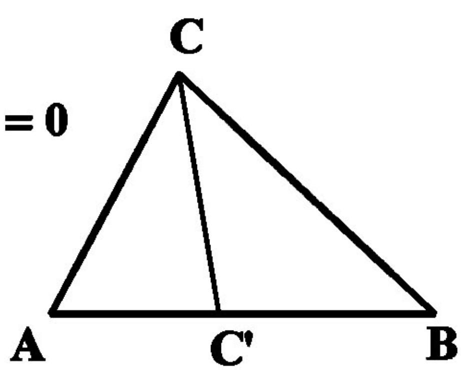
ត្រង់ A' , B' , C' ។

ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{\sin(\frac{B-C}{2})}{AA'}+\frac{\sin(\frac{C-A}{2})}{BB'}+\frac{\sin(\frac{A-B}{2})}{CC'}=0$$

ដំណោះស្រាយ

$$\frac{\sin(\frac{B-C}{2})}{AA'}+\frac{\sin(\frac{C-A}{2})}{BB'}+\frac{\sin(\frac{A-B}{2})}{CC'}=0$$



យើងមាន $S_{ABC}=S_{ACC'}+S_{CC'B}$

ដោយ $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$

$S_{ACC'}=\frac{1}{2}bCC'\sin\frac{C}{2}$ និង $S_{CC'B}=\frac{1}{2}aCC'\sin\frac{C}{2}$

គេបាន $\frac{1}{2}ab\,sibC=\frac{1}{2}b.CC'\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}a.CC'\sin\frac{C}{2}$

គេទាញ $CC' = \dfrac{ab\sin C}{(a+b)\sin\dfrac{C}{2}} = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{C}{2}$ (1)

គេមាន $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \dfrac{2\sin\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}}{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$

ដោយ $\cos\dfrac{A+B}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}\right) = \sin\dfrac{C}{2}$

គេបាន $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}$ នាំឲ្យ $\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{c}{a-b}.\sin(\dfrac{A-B}{2})$

តាម (1) គេបាន $CC' = \dfrac{2abc}{a^2-b^2}\sin(\dfrac{A-B}{2})$

គេទាញ $\dfrac{\sin(\dfrac{A-B}{2})}{CC'} = \dfrac{a^2-b^2}{2abc}$ ។

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{\sin(\dfrac{B-C}{2})}{AA'} = \dfrac{b^2-c^2}{2abc}$; $\dfrac{\sin(\dfrac{C-A}{2})}{BB'} = \dfrac{c^2-a^2}{2abc}$

ដូចនេះ $\dfrac{\sin(\dfrac{B-C}{2})}{AA'} + \dfrac{\sin(\dfrac{C-A}{2})}{BB'} + \dfrac{\sin(\dfrac{A-B}{2})}{CC'} = 0$ ។

លំហាត់ទី៩

P ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។

D , E , F ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ P ទៅលើ

បន្ទាត់ BC , CA, AB រៀងគ្នា ។

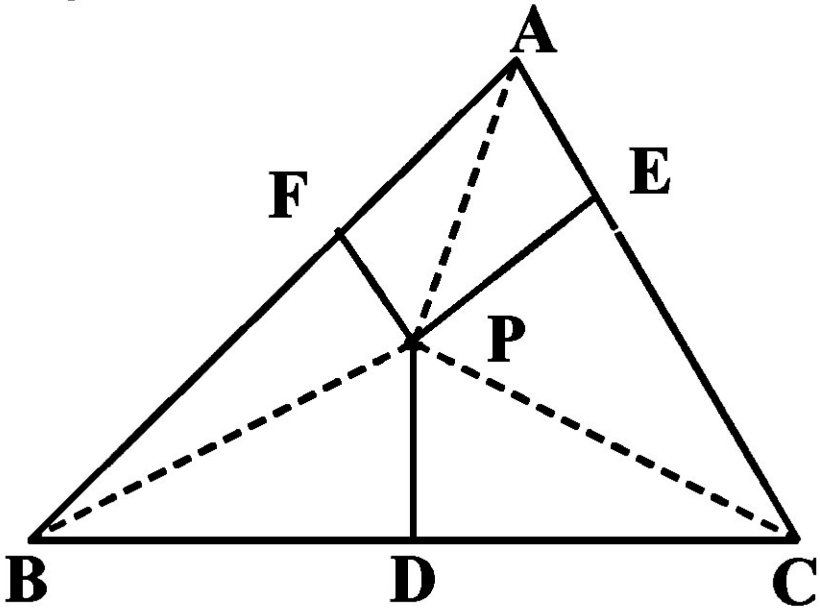
ចូរកំនត់គ្រប់ចំនុច P ដោយដឹងថា

$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

(IMO1981)

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់ចំនុច P



តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC

គេបាន $S = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$

$$S = \frac{1}{2}PD.BC + \frac{1}{2}PE.CA + \frac{1}{2}PF.AB$$

ឬ $PD.BC + PE.CA + PF.AB = 2S$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwartz

$$(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2})(b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}) \ge (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

យក $a_1 = \sqrt{\frac{BC}{PD}}$; $a_2 = \sqrt{\frac{CA}{PE}}$; $a_3 = \sqrt{\frac{AB}{PF}}$

និង $b_1 = \sqrt{BC.PD}$, $b_2 = \sqrt{CA.PE}$, $b_3 = \sqrt{AB.PF}$

គេបាន

$$\left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}\right)2S \ge (BC + CA + AB)^2$$

ឬ $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \ge \frac{(BC + CA + AB)^2}{2S}$ (*)

តម្លៃអប្បបរមានៃ $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$

គឺ $\frac{(BC + CA + AB)^2}{2S}$ ដែលត្រូវនឹងវិសមភាព(*)

ក្លាយជាសមភាពពេលគឺ $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

សមមូល $\frac{\sqrt{\frac{BC}{PD}}}{\sqrt{BC.PD}}=\frac{\sqrt{\frac{CA}{PE}}}{\sqrt{CA.PE}}=\frac{\sqrt{\frac{AB}{PF}}}{\sqrt{AB.PF}}$

ឬ $\frac{1}{PD}=\frac{1}{PE}=\frac{1}{PF}\Leftrightarrow PD=PE=PF$

ដូចនេះ: $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ មានតម្លៃអប្បបរមា មានតែករណីចំនុច P ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ ត្រីកោណ ABC ។

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A។ គេយក $E \in [AC]$

និង $F \in [AB]$ ដែល $\angle AEF = \angle ABC$និង$\angle AFE = \angle ACB$។

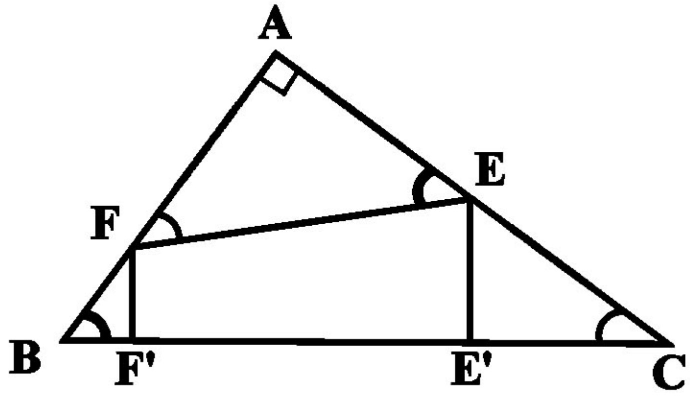
គេតាង E' និង F' រៀងគ្នាជាជើងចំណោលកែងនៃEនិង F

លើជ្រុង $[BC]$ ។

ចូរស្រាយថា $E'E + EF + FF' \le BC$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $E'E + EF + FF' \le BC$



តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

ត្រីកោណកែង ABC និង AFE មានមុំ $\angle AEF = \angle ABC$

វាជាត្រីកោណដូចគ្នា ។ គេបានផលធៀបដំនូច

$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}=k$ ដែល $k>0$ ជាងផ្លផលធៀបដំនូច ។

គេទាញ $AE=ck$, $AF=bk$, $EF=ak$ ។

ត្រីកោណកែង ABC និង $EE'C$ មានមុំ $\angle ACB$ រួមវាជា

ត្រីកោណដូចគ្នា ។ គេបាន $\frac{AB}{EE'}=\frac{BC}{EC}$ នាំឲ្យ $EE'=\frac{AB.EC}{BC}$

ដោយ $EC=AC-AE=b-ck$

គេបាន $EE'=\frac{c(b-ck)}{a}$ ។

ដូចគ្នាដែរគេទាញ $FF'=\frac{b(c-bk)}{a}$

គេបាន
$$E'E+EF+FF'=\frac{c(b-ck)}{a}+ak+\frac{b(c-bk)}{a}$$
$$=\frac{bc-c^2k+a^2k+bc-b^2k}{a}$$
$$=\frac{2bc+k(a^2-b^2-c^2)}{a}=\frac{2bc}{a}$$

ពីព្រោះក្នុងត្រីកោណកែង ABC គេមាន $a^2=b^2+c^2$ (ពីតាគ័រ)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a^2=b^2+c^2\geq 2bc$

គេទាញ $\frac{2bc}{a}\leq a=BC$ ។ដូចនេះ $E'E+EF+FF'\leq BC$ ។

លំហាត់ទី១១

ចំណុច M មួយជ្រើសរើសនៅលើជ្រុង AC នៃត្រីកោណ ABC , ដោយដឹងថាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABM និង BMC ស្មើគ្នា ។

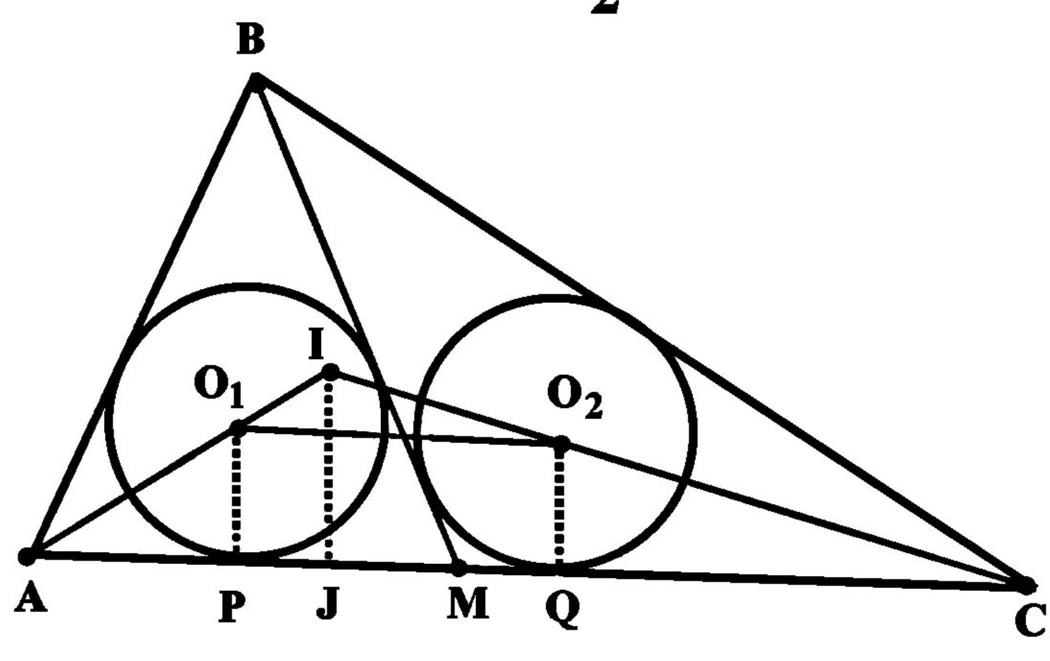
ចូរបង្ហាញថា $BM^2 = X.\cot\frac{B}{2}$ ។

ដែល X ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC ។

(IMO Longlists 1988)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $BM^2 = X.\cot\frac{B}{2}$



តាង $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$

និង $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ ។

យក I ; O_1 ;O_2 ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ

ABC ; ABM ; BMC ហើយ J , P , Q

ជាចំណោលកែងនៃ I ; O_1 ;O_2 លើ AC ។

តាង $IJ = r$ និង $O_1P = O_2Q = r_1$ ជាកាំរង្វង់

ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ; ABM ; BMC ,

ហើយ p_1 ;p_2 ជាកន្លះបរិមាត្រត្រីកោណ

ABM;BMC ។

យើងមាន $S_{ABC} = S_{AMB} + S_{BMC}$

គេបាន $pr = p_1r_1 + p_2r_1$ ឬ $\frac{r_1}{r} = \frac{p}{p_1+p_2}$

គេមាន

$$p_1 + p_2 = \frac{(AB+AM+BM)+(BM+MC+BC)}{2}$$

$$p_1 + p_2 = \frac{AB + BC + AC + 2BM}{2}$$

$$p_1 = \frac{a + b + c + 2BM}{2} = p + BM$$

គេទាញ $\frac{r_1}{r} = \frac{p}{p + BM}$ (1)

ត្រីកោណ AO_1P និង AIJ ជាត្រីកោណកែង

ដូចគ្នា ។គេបាន $\frac{AP}{AJ} = \frac{O_1P}{IJ} = \frac{r_1}{r}$ (2)

ត្រីកោណ CO_2Q និង CIJ ជាត្រីកោណកែង

ដូចគ្នា ។ គេបាន $\frac{CQ}{CJ} = \frac{O_2Q}{IJ} = \frac{r_1}{r}$ (3)

តាម (2) និង (3) គេបាន $\frac{r_1}{r} = \frac{AP}{AJ} = \frac{CQ}{CJ}$

$AP = p_1 - BM$; $AJ = p - a$;

$CQ = p_2 - BM$; $CJ = p - c$

គេបាន

$$\frac{r_1}{r} = \frac{p_1 - BM}{p - a} = \frac{p_2 - BM}{p - c}$$

$$= \frac{p_1 + p_2 - 2BM}{2p - (a + c)} = \frac{p - BM}{b} \quad (4)$$

តាម (1) និង (4) គេទាញបាន

$$\frac{p}{p+BM}=\frac{p-BM}{b}$$

នាំឲ្យ $pb=p^2-BM^2 \Rightarrow BM^2=p(p-b)$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង

$$S_{ABC}=X=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

និងរូបមន្ត $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$

$$BM^2=p(p-b)$$

$$BM^2=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\times\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}}$$

$$BM^2=X.\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}=X.\cot\frac{B}{2}$$

ដូចនេះ $BM^2=X.\cot\frac{B}{2}$ ។

លំហាត់ទី១២

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$$

ដែល r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$ (1)

តាង $BC=a\ ,\ AC=b\ ,\ AB=c$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន ៖

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

នោះ $a^2=b^2+c^2-2bc(1-2\sin^2\frac{A}{2})$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

តាង $p=\frac{a+b+c}{2}$ (កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ)

គេបាន $a+b-c=2(p-c)$ និង $a-b+c=2(p-b)$

គេបាន $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

នាំឲ្យ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ។ ដូចគ្នាដែរគេទាញ ៖

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\ ;\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

គេមាន $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}$

គេទាញ $abc=4R.S$ និង $(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=r.S$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r.S}{4R.S}=\frac{r}{4R}$ ។

វិសមភាព (1) សមមូលទៅនឹង ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 4\sqrt{\frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}}\ge 2\qquad(2)$$

ដោយ $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{a^2bc}}=\frac{p-a}{a}\sin\frac{A}{2}$

គេទាញ $\dfrac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\dfrac{p-a}{a}$ ។ ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន ៖

$\dfrac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\dfrac{p-b}{b}$ និង $\dfrac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{p-c}{c}$

វិសមភាព (2) សមមូលទៅនឹង ៖

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}}+\sqrt{\frac{p-b}{b}}+\sqrt{\frac{p-c}{c}}\ge 2$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$p=(p-a)+a\ge 2\sqrt{(p-a)a}$ នាំឲ្យ $\sqrt{\dfrac{p-a}{a}}\ge\dfrac{2(p-a)}{p}$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{\dfrac{p-b}{b}}\ge\dfrac{2(p-b)}{p}$ និង $\sqrt{\dfrac{p-c}{c}}\ge\dfrac{2(p-c)}{p}$

គេបាន

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}}+\sqrt{\frac{p-b}{b}}+\sqrt{\frac{p-c}{c}}\ge 2\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{p}$$

$\sqrt{\dfrac{p-a}{a}}+\sqrt{\dfrac{p-b}{b}}+\sqrt{\dfrac{p-c}{c}}\ge 2$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 4\sqrt{\dfrac{R}{r}}$ ។

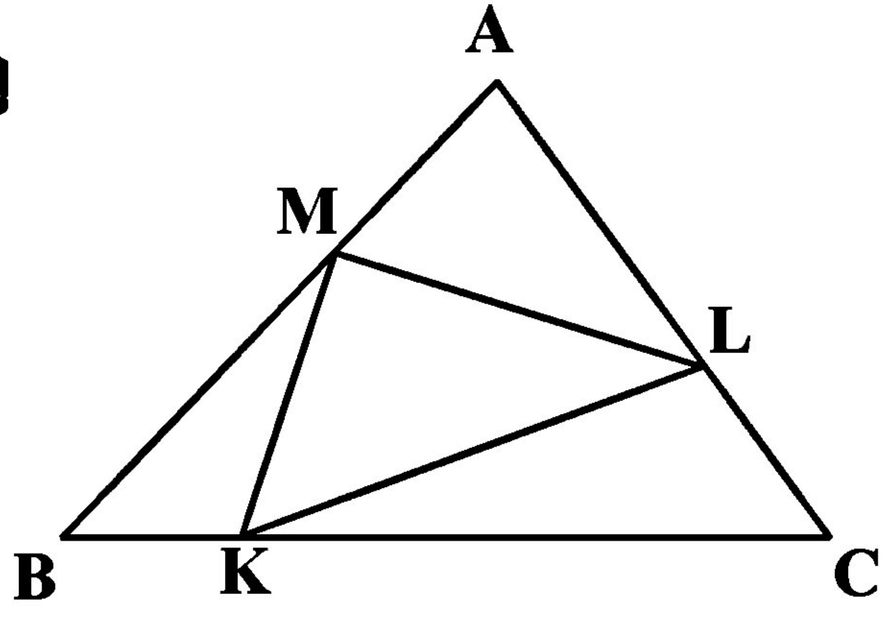
លំហាត់ទី១៣

គេយកចំនុច K ; L ; M រៀងគ្នានៅលើ
ជ្រុង BC ; CA ; AB ។
ចូរបង្ហាញថាយ៉ាងតិចមានមួយនៃត្រីកោណ
AML, BKM ,CLK មានផ្ទៃក្រឡាតូចជាង
ឬស្មើ $\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ ABC ។

(IMO 1966)

ដំណោះស្រាយ

.ការបង្ហាញ



តាង S_1 ; S_2 ; S_3 រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រឡារបស់

ត្រីកោណAML, BKM ,CLK និង S ជាផ្ទៃ

ក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC ។

ឧបមាថា $S_1 > \frac{1}{4}S$ ដោយ $\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}AM.AL\sin A \\ S = \frac{1}{2}AB.AC\sin A \end{cases}$

គេបាន $\frac{1}{2}AM.AL\sin A > \frac{1}{8}AB.AC\sin A$

$$4AM.AL > AB.AC$$

$$4AM.AL > (AM + ML)(AL + LC)$$

$$4AM.AL > AM.AL + AM.LC + ML.AL + ML.LC$$

$$3AM.AL > AM.LC + ML.AL + ML.LC$$

$$3 > \frac{LC}{AL} + \frac{ML}{AM} + \frac{AM.AL}{ML.LC}$$

តាង $x = \frac{BK}{CK}$; $y = \frac{CL}{AL}$; $z = \frac{AM}{BM}$

គេបាន $3>y+\frac{1}{z}+\frac{y}{z}$ (1)

ឧបមាថា $S_2>\frac{1}{4}S$ និង $S_3>\frac{1}{4}S$ ហើយស្រាយ

ដូចគ្នាដែរគេបាន $3>x+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}$ (2)

និង $3>z+\frac{1}{x}+\frac{z}{x}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) & (3) គេបាន

$$9>(x+y+z)+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})+(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x})$$

តាមវិសមភាព AM – GM គេមាន

$$(x+y+z)+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})+(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x})\geq 9$$

ហេតុនេះការឧបមាខាងលើមិនពិត ។

ដូចនេះ យ៉ាងតិចមានមួយនៃត្រីកោណ AML, BKM ,CLK មានផ្ទៃក្រឡាតូចជាង ឬស្មើ $\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ ABC ។

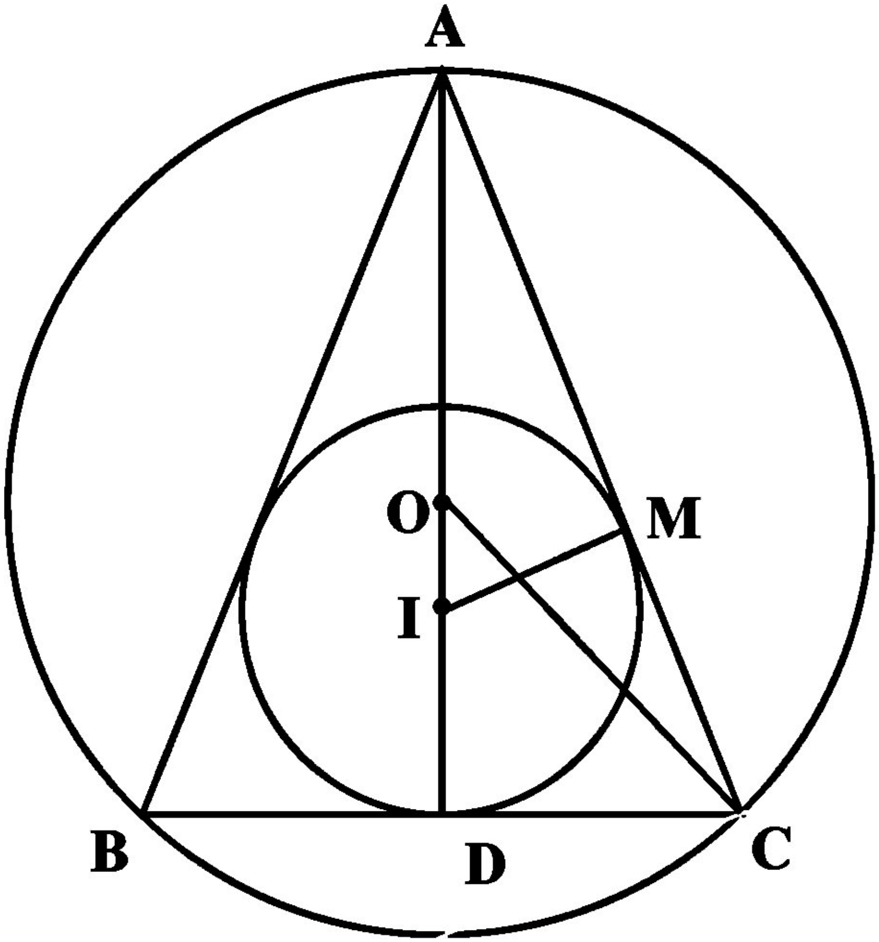
លំហាត់ទី១៤

កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង
នៃត្រីកោណសមបាតមួយស្មើរៀងគ្នា R និង r ។
ចូរស្រាយថាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ពីរនេះគឺ
$d=\sqrt{R(R-2r)}$ ។

(IMO 1962)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ពីរនេះគឺ
$d=\sqrt{R(R-2r)}$
យក ΔABC មួយដែល $AB=AC$ ។
O និង I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង ចារឹកក្នុង
នៃត្រីកោណ ABC ។
យក E ជាប្រសព្វរវាងកំពស់ AD នៃត្រីកោណ
ជាមួយនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ និង M ជា
ចំណោលកែងនៃ I លើជ្រុង AC ។



តាង $\alpha = \angle DAC$ គេបាន $\angle DOC = 2\alpha$

ក្នុងត្រីកោណកែង AIM គេបាន $\sin\alpha = \dfrac{IM}{IA}$

តែ $IM = r$, $IA = IO + OA = d + R$

គេទាញ $\sin\alpha = \dfrac{r}{d+R}$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង ODCគេមាន $\cos 2\alpha = \dfrac{OD}{OC}$

ដោយ $OC = R$, $OD = OI + ID = d + r$

គេទាញ $\cos 2\alpha = \dfrac{d+r}{R}$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

គេបាន $\dfrac{d+r}{R} = 1 - \dfrac{2r^2}{(d+R)^2}$

ឬ $(d+r)(d+R)^2 = R(d+R)^2 - 2r^2R$

$\left[(d+r+R) - R\right](d+R)^2 - R(d+R)^2 + 2r^2R = 0$

$(d+r+R)(d+R)^2 - 2R(d+R)^2 + 2r^2R = 0$

$(d+r+R)(d+R)^2 - 2R[(d+R)^2 - r^2] = 0$

$(d+r+R)\left[(d+R)^2 - 2R(d+R-r)\right] = 0$

$(d+r+R)[d^2 - R(R-2r)] = 0$

ដោយ $OI < OA$ នោះ $d \neq -(r+R)$

ដូចនេះ $d = \sqrt{r(R-2r)}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារិកក្នុង និងចារិកក្រៅ នៃត្រីកោណ ABCមួយ ។

ក.ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

ខ.ចូរស្រាយថា $R\geq 2r$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=1-2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ដោយគេមាន $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$, $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

គេទាញ៖

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$=1+\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p\,.\,\frac{abc}{4R}\times R}$$

$$=1+\frac{S^2}{p\,S.R}$$

$$=1+\frac{S}{p.\,R}=1+\frac{p.r}{p.R}=1+\frac{r}{R}$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$ ។

ខ.ស្រាយថា $R\geq 2\,r$

តាមវិសមភាព $AM-GM$: $\alpha+\beta\ \geq\ 2\,\alpha.\beta$

គេបាន $(p-a)+(p-b)\geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$

$$2p-a-b\geq 2\sqrt{(p-a)(p-c)}$$

$$c\ \geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$$

គេទាញ $\dfrac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c} \le \dfrac{1}{2}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a} \le \dfrac{1}{2}$ (2)

និង $\dfrac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{b} \le \dfrac{1}{2}$ (3)

គុណទំនាក់ទំនង (1) , (2) ,(3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \le \frac{1}{8}$$

គេទាញ $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$

ដោយ $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

គេបាន $\cos A + \cos B + \cos C \le 1 + 4\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{3}{2}$

តែ $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$

គេទាញ $1 + \dfrac{r}{R} \le \dfrac{3}{2}$ ឬ $R \ge 2r$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin B \sin C \cos A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

ដំណោះស្រាយ

ពាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

គេទាញ $a = 2R\sin A , b = 2R\sin B , c = 2R\sin C$

ដោយ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

គេទាញបាន ៖

$$4R^2 \sin^2 A = 4R^2 (\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A)$$

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A \quad (1)$$

តែ $\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin B \sin C \cos A \quad (2)$

យកសមីការ (2) ជួសនៅក្នុង (1) គេទាញ $\sin^2 A = 1$

នាំឲ្យ $A = 90^0$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែង ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a , b , c ។

កំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា ៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

ដំណោះស្រាយ

ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន ៖

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ នាំឲ្យ $\frac{\cos A}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$ (1)

ដូចគ្នាដែរគេទាញ $\frac{\cos B}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}$ (2)

និង $\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$ (3)

បូកទំនាក់ទំនង (1) , (2) ,(3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

ដោយ $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

គេទាញបាន ៖

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{bc+ca+ab}{2abc}$$

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$$

$$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ac$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

គេទាញបានសមភាព $a=b=c$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

ឧបមាថា M ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ ហើយគេតាង x , y

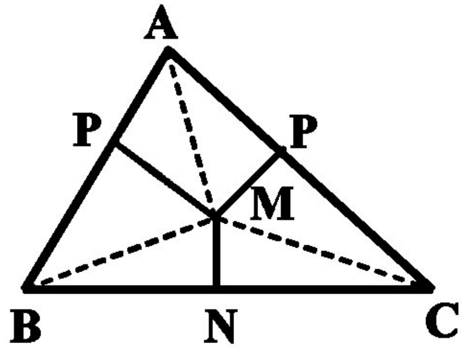
និង z ជាចំងាយរៀងគ្នាពីចំនុច M ទៅជ្រុង BC , AC និង AB

នៃត្រីកោណ ។ ចូរគណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ $T = x^2 + y^2 + z^2$

ជាអនុគមន៍នៃ a, b, c ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ $T = x^2 + y^2 + z^2$ ជាអនុគមន៍នៃ a, b, c



យើងតាង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC

យើងបាន $S = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{AMC}$

$$S=\frac{1}{2}MQ.AB+\frac{1}{2}MN.BC+\frac{1}{2}MP.AC$$

$$S=\frac{1}{2}cz+\frac{1}{2}by+\frac{1}{2}ax$$

គេទាញបាន $ax+by+cz=2S$

តាមវិសមភាពប៊ុនយ៉ាកូវស្គីយើងបាន ៖

$$ax+by+cz\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$2S\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{T}$$

គេទាញបាន $T\ge\dfrac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $T=x^2+y^2+z^2$

គឺ $T_{min}=\dfrac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$

ដែល $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ និង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំនៃរង្វង់ចារិកក្នុង និង ចារិកក្រៅ ប្រស់ត្រីកោណកែង ABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $R \geq (1+\sqrt{2})r$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $R \geq (1+\sqrt{2})r$

តាង $T = \cos A + \cos B + \cos C$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2})$$

$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2})$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

គេបាន $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (1)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ដោយ $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$

គេបាន $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc + 4bc\sin^2\frac{A}{2}$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$

យក $p = \frac{a+b+c}{2}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} a-b+c = 2(p-b) \\ a+b-c = 2(p-c) \end{cases}$

គេបាន $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{4(p-b)(p-c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

គេទាញ $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ដូចគ្នាដែរ $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$; $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$ (2)

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ៖

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr = \frac{abc}{4R}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} abc = 4RS \\ (p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p} = \frac{S.p.r}{p} = S.r \end{cases}$

តាម (2) អាចសរសេរ ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R} \quad (3)$$

យកទំនាក់ទំនង (3) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R} \quad (4)$$

ដោយ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះគេអាចជ្រើសរើសយក

$A=\frac{\pi}{2}$ហើយ $B=\frac{\pi}{2}-C$ ជួសក្នុងទំនាក់ទំនង (4) គេបាន ៖

$$\cos\frac{\pi}{2}+\cos(\frac{\pi}{2}-C)+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$\sin C+\cos C=1+\frac{r}{R} \quad (5)$$

តាមទំនាក់ទំនង $\sin C+\cos C=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+C)\le\sqrt{2}$

នោះតាម (5) គេបាន $1+\frac{r}{R}\le\sqrt{2}$

នាំឲ្យ $R\ge\frac{r}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)r$

ដូចនេះ $R\ge(1+\sqrt{2})r$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពកាលណា ៖

$\sin C+\cos C=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+C)=\sqrt{2}$ នាំឲ្យ $C=\frac{\pi}{4}$និង$B=\frac{\pi}{4}$

ពោលគឺត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

លំហាត់ទី២០

គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមានផ្ទៃក្រឡា ស្មើនឹង S ។ ចូរស្រាយថា $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}\,S$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}\,S$

គេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ នាំឲ្យ $\sin A=\frac{2S}{bc}$

ហើយ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

គេបាន $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

ដូចគ្នាដែរ $\cot B=\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$; $\cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

គេបាន $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

នាំឲ្យ $a^2+b^2+c^2=4S\,(\cot A+\cot B+\cot C)$ (1)

ជាបន្តទៅនេះយើងនឹងស្រាយថា $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$ ។

គេមាន $A+B+C=\pi$ នោះ $A=\pi-(B+C)$

គេបាន $\tan A=\tan\big(\pi-(B+C)\big)=-\tan(B+C)$

$$\tan A = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B.\tan C}$$

$$-\tan A + \tan B \tan C = \tan B + \tan C$$

គេទាញ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot A \cot B \cot C$ គេបានសមភាព

$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

ដោយប្រើវិសមភាព $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$

គេទាញបាន $(\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 3$

នាំឲ្យ $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$ (A , B , C ជាមុំស្រួច)

តាមទំនាក់ទំនង (1) គេទាញបាន ៖

$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\, S$ ជាវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី២១

គេយក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC = a\ , AC = b\ , AB = c$ ។

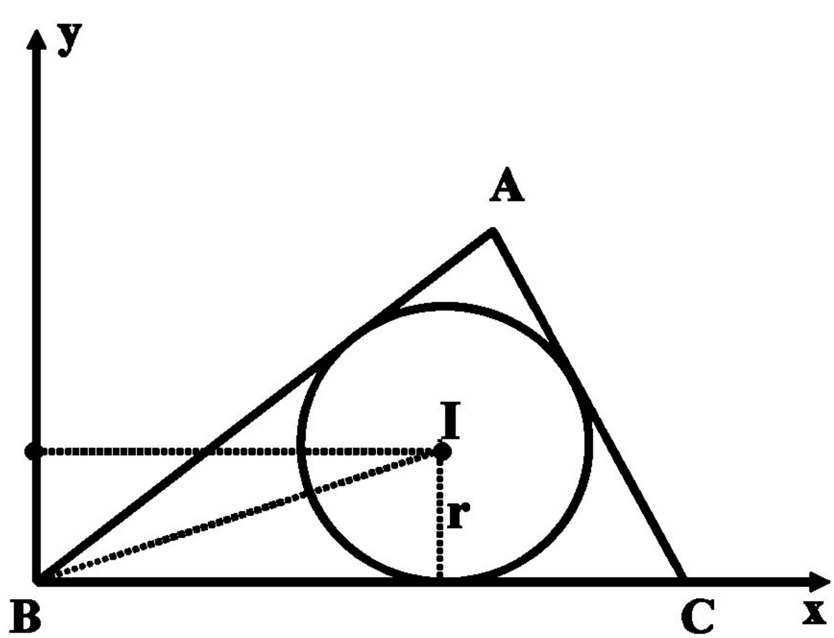
ចំពោះគ្រប់ចំនុច X ចូរស្រាយថា ៖

$$a.XA^2 + b.XB^2 + c.XC^2 = (a+b+c)XI^2 + abc$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ៖

$$a.XA^2 + b.XB^2 + c.XC^2 = (a+b+c)XI^2 + abc$$



ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ (Bxy) គេមាន ៖

$B(0;0)$; $C(a\,,0)$; $A(c\cos B\,;c\sin B)$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

នៃត្រីកោណ ABC នោះគេបាន $I(p-b\,;r)$ ។

បើ S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC នោះគេមាន ៖

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$$

នាំឲ្យ $r^2=\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$ ។

តាង $X(x_0;y_0)$ ជាចំនុចណាក៏ដោយនៃប្លង់ ។ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
M &= aXA^2+bXB^2+cXC^2\\
&= a[(x_0-c\cos B)^2+(y_0-c\sin B)^2]+b(x_0^{\,2}+y_0^{\,2})+\\
&\quad +c[(x_0-a)^2+y_0^{\,2}]\\
&= (a+b+c)(x_0^{\,2}+y_0^{\,2})-2acx_0(1+\cos B)-2acy_0\sin B+\\
&\quad +ac^2+a^2c\\
&= 2p(x_0^{\,2}+y_0^{\,2})-2acx_0\left(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)-4y_0S+a^2c+ac^2\\
&= 2p(x_0^{\,2}+y_0^{\,2})-x_0(2p)(2p-2b)-4y_0S+a^2c+ac^2\\
&= 2p(x_0^{\,2}+y_0^{\,2})-4px_0(p-b)-4y_0S+a^2c+ac^2
\end{aligned}$$

ហើយ $N=(a+b+c)XI^2+abc$

$$=2p\left[(x_0-(p-b))^2+(y_0-r)^2\right]+abc$$

$$=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4x_0p(p-b)-4y_0pr+2p(p-b)^2+$$
$$+2pr^2+abc$$

$$=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+2p(p-b)^2+$$
$$+2p\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}+abc$$

$$=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+2p(p-b)^2+$$
$$+2(p-a)(p-b)(p-c)+abc$$

យក $T=2p(p-b)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)+abc$

$$=2(p-b)[p^2-pb+p^2-(a+c)p+ac]+abc$$
$$=2(p-b)[2p^2-(a+b+c)p+ac]+abc$$
$$=2ac(p-b)+abc=ac(2p-2b+b)=ac(a+c)$$
$$=a^2c+ac^2$$

គេទាញ $N=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+a^2c+ac^2$

ដោយយកឡេម $M=N$ នាំឲ្យគេទាញបាន ៖

$a.XA^2+b.XB^2+c.XC^2=(a+b+c)XI^2+abc$ ។

(ទំនាក់ទំនងនេះហៅថារូបមន្តអឺលែ) ។

លំហាត់ទី២២

គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ d ជាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅរបស់ត្រីកោណនោះគេបាន ៖

$d^2 = R(R-2r)$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $d^2 = R(R-2r)$

តាង ABC ជាត្រីកោណដែល $BC = a\,,\, AC = b\,,\, AB = c$

ហើយ r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណនេះ ។ យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។ តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែយើងបាន ៖

$$a.OA^2 + b.OB^2 + c.OC^2 = (a+b+c)OI^2 + abc$$

ដោយ $OA = OB = OC = R$ និង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

គេបាន $2pR^2 = 2p.d^2 + abc$ នាំឲ្យ $d^2 = R^2 - \frac{abc}{2p}$

ដែល $d = OI$ ។

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡា $S = pr = \frac{abc}{4R}$ គេទាញ $\frac{abc}{2p} = 2rR$

ដូចនេះ $d^2 = R^2 - 2rR = R(R - 2r)$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេយក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែល
មានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។
ចូរស្រាយថា $\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែចំពោះគ្រប់ចំនុច X គេមាន

$$a.XA^2+b.XB^2+c.XC^2=(a+b+c)XI^2+abc$$

ដោយយក $X = I$ គេបាន $a.IA^2+b.IB^2+c.IC^2=abc$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង abc គេទទួលបាន ៖

$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwartz យើងបាន:

$$(\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C})^2\le 3(\cos A+\cos B+\cos C)\quad(1)$$

តាង $T=\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

ព្រោះ $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$ ។

ដោយ B និង C ជាមុំស្រួចនោះ $0<B<\frac{\pi}{2}$; $0<C<\frac{\pi}{2}$

គេទាញ $-\frac{\pi}{4}<\frac{B-C}{2}<\frac{\pi}{4}$ នាំឱ្យ $\cos\frac{B-C}{2}\le 1$

ហេតុនេះ $T \le 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2\sin\frac{A}{2})^2 \le \frac{3}{2}$

ឬ $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ (2)

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន៖

$(\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos C})^2 \le \frac{9}{2}$

ដូចនេះ $\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos C} \le \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R :កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ)

គេទាញ $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$ (I)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (II)

យក (I) ជួសក្នុង (II) គេបាន ៖

$$4R^2\sin^2 A = 4R^2\sin^2 B + 4R^2\sin^2 C - 8R^2\sin B\sin C\cos A$$

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$$

គេទាញ $\cos A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B \sin C}$

ហេតុនេះ $\cot A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B \sin C \sin A}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\cot B = \dfrac{\sin^2 C + \sin^2 A - \sin^2 B}{2\sin C \sin A \sin B}$ (2)

ហើយនឹង $\cot C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$ (3)

បូកទំនាក់ទំនង (1) ; (2) និង (3) គេទទួលបាន ៖

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C} \quad (4)$$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $A + B + C = \pi$ ឬ $A + B = \pi - C$

គេបាន $\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

គេទាញ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot A \cot B \cot C$ គេបាន ៖

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ ចំពោះគ្រប់ $x\,;\ y\,;z > 0$

គេមាន $\begin{cases} x^2+y^2 \ge 2xy \\ y^2+z^2 \ge 2yz \\ z^2+x^2 \ge 2zx \end{cases}$

គេបាន $2(x^2+y^2+z^2) \ge 2(xy+yz+zx)$

ឬ $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2xy+2yz+2zx$ គេបាន :

$(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$

ដោយយក $x=\cot A\ ;\ y=\cot B\ ;\ z=\cot C$

គេបាន $(\cot A+\cot B+\cot C)^2 \ge 3$

នាំឱ្យ $\cot A+\cot B+\cot C \ge \sqrt{3}$ (5)

តាមទំនាក់ទំនង (4) និង (5) គេបាន :

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C} \ge \sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$

លំហាត់ទី២៦

គេឱ្យ A ; B ; C ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

គេមាន $A+B+C=\pi$ នាំឱ្យ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ គេបាន ៖

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

ដោយ $0<A\,;B\,;C<\pi$ នោះ $0<\frac{A}{2};\frac{B}{2};\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$

គេបាន $\cot\frac{A}{2}>0\ ;\cot\frac{B}{2}>0\,;\cot\frac{C}{2}>0$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}$$

$$\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)^3\geq 27\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឱ្យ A ; B ; C ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{3})^3$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{3})^3$

ដោយ A ; B ; C ជាមុំស្រួចនោះ $\tan A>0;\tan B>0;\tan C>0$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គ្រប់ $x>0$; $y>0$; $z>0$ គេមាន៖

$$(1+x)(1+y)(1+z)=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$$

$$(1+x)(1+y)(1+z)\geq 1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}+xyz$$

$$(1+x)(1+y)(1+z)\geq(1+\sqrt[3]{xyz})^3$$

យក $x=\tan A$; $y=\tan B$; $z=\tan C$ គេបាន ៖

$$(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{\tan A\tan B\tan C})^3$$

គេមាន $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

គេទាញ $\tan A+\tan B+\tan B=\tan A\tan B\tan C$

$$x+y+z=xyz$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន :

$x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz}$

$xyz \ge 3\sqrt[3]{xyz}$

គេទាញ $xyz \ge 3\sqrt{3}$ ឬ $\tan A \tan B \tan C \ge 3\sqrt{3}$

គេបាន $(1 + \tan A)(1 + \tan B)(1 + \tan B) \ge (1 + \sqrt[3]{3\sqrt{3}})^3$

ដូចនេះ $(1 + \tan A)(1 + \tan B)(1 + \tan C) \ge (1 + \sqrt{3})^3$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក.បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le \frac{3}{2}$

ខ.បង្ហាញថា $\cos A\cos B\cos C\le \frac{1}{8}$

គ.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le \frac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le \frac{3}{2}$

គេមាន $A+B+C=\pi$

គេបាន $\cos(A+B)=\cos(\pi-C)$

ឬ $\cos A\cos B-\sin A\sin B=-\cos C$

ឬ $\cos C=\sin A\sin B-\cos A\cos B$

តាង $T=3-2(\cos A+\cos B+\cos C)$

$$=3-2(\cos A+\cos B+\sin A\sin B-\cos A\cos B)$$

$$=(\sin A-\sin B)^2+(\cos A+\cos B-1)^2\ge 0$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C\le \frac{3}{2}$

ខ.បង្ហាញថា $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$

ដោយ $A\,;B\,;C$ ជាមុំស្រួចនោះ $\cos A\,;\cos B\,;\cos C > 0$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន ៖

$$\cos A + \cos B + \cos C \ge 3\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\cos A\cos B\cos C \le \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3$$

ដោយ $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ (សម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $\cos A\cos B\cos C \le \left(\frac{\frac{3}{2}}{3}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ដូចនេះ $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$ ។

គ.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

គេមាន $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

និង $\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$ គេបាន ៖

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ (សម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង p ជាកន្លះបរិមាត្រ និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$

ខ. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$

តាង $BC=a\ ;\ AC=b\ ;\ AB=c$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស :

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ដោយ $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$

$a^2=b^2+c^2-2bc(2\cos^2\frac{A}{2}-1)$

គេទាញ $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$

$$=\frac{2p(2p-2a)}{4bc}=\frac{p(p-a)}{bc}$$

នាំឱ្យ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

ដូចគ្នាដែរ $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$ និង $\cos C=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

គេបាន $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}$

ដោយ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}$

គេបាន $\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}=\frac{1}{4R}$

ដូចនេះ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$ ។

៨. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos A\cos B\cos C$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

គេទាញ $\sin A=\frac{a}{2R}$; $\sin B=\frac{b}{2R}$; $\sin C=\frac{c}{2R}$

គេបាន $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{2p}{2R}=\frac{p}{R}$

ដោយ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$

ដូចនេះ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

លំហាត់ទី៣០

ចូរបង្ហាញថាក្នុងគ្រប់ត្រីកោណគេមានទំនាក់ទំនង :

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2}$$

ដែល a ; b ; c ជាជ្រុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2}$

តាង $T = a\cos A + b\cos B + c\cos C$

គេមាន $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$

គេបាន

$$\begin{aligned} T &= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \\ &= R[2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C] \\ &= R[2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C] \\ &= 2R\sin C\,[\cos(A-B) + \cos C] \\ &= 2R\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ &= 4R\sin A\sin B\sin C = 4R.\frac{abc}{8R^3} = \frac{abc}{2R^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2}$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

ខ. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

ក. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

តាមរូបមន្ត $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$ ។

ខ. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$

តាមវិសភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\geq 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}$$

$$1\geq 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}$$

គេទាញ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leq\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{9}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}.\tan\frac{C}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}.\tan\frac{C}{2}$

គេមាន $a=2R\sin A$; $b=2R\sin B$ (R កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ)

គេបាន $\frac{a-b}{a+b}=\frac{2R(\sin A-\sin B)}{2R(\sin A+\sin B)}$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}.\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}.\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}.\tan\frac{C}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច និង ជ្រុង a ; b ; c និងផ្ទៃក្រឡា K ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

គេមាន $K=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

តាង $T=\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}$

$$=\sqrt{a^2b^2\cos^2 C}+\sqrt{b^2c^2\cos^2 A}+\sqrt{c^2a^2\cos^2 B}$$

$$T=ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B$$

$$=ab\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+bc\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ca\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

ដូចនេះ $\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

លំហាត់ទី៣៤

គេឱ្យ a ; b ; c ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមាន

បរិមាត្រស្មើ 2 ។

ចូរស្រាយថា $\frac{3}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<2$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{3}{2}<a^2+b^2+c^2+2abc<2$

ដោយបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណនេះស្មើ 2 នោះជ្រុងទាំងបីa ; b ; c

របស់ត្រីកោណសុទ្ធតែតូចជាង 1 ។

យើងបាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A<\frac{1}{2}$

តាមរូបមន្តហេរុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ដោយ $p=1$

នោះ $S=\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<\frac{1}{2}$

គេទាញ $0<(1-a)(1-b)(1-c)<\frac{1}{4}$

ឬ $0<1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc<\frac{1}{4}$

ឬ $0<1-2+(ab+bc+ca)-abc<\frac{1}{4}$

ឬ $1 < (ab+bc+ca) - abc < \frac{5}{4}$

ឬ $2 < 2(ab+bc+ca) - 2abc < \frac{5}{2}$

គេមាន $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

គេទាញ ៖

$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = (a+b+c)^2 + 2abc - 2(ab+bc+ca)$

$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 4 - \left[2(ab+bc+ca) - 2abc\right]$

ដោយ $2 < 2(ab+bc+ca) - 2abc < \frac{5}{2}$

គេបាន $4 - \frac{5}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 4 - 2$

ដូចនេះ $\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$ ។

លំហាត់ទី៣៤

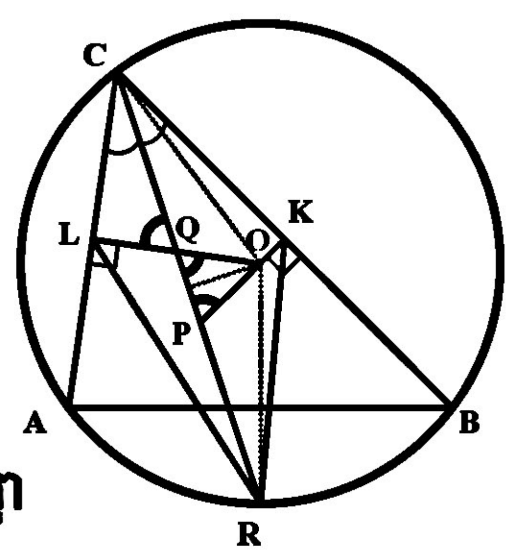
ក្នុងត្រីកោណ ABC កន្ទះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle BCA$ ប្រសព្វរង្វង់ចារឹកក្រៅ ត្រីកោណនេះត្រង់ R ហើយកន្ទះបន្ទាត់ពុះនេះកាត់មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង BC ត្រង់ P និងកាត់មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង AC ត្រង់ Q ។ ចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ BC គឺ K និងចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AC គឺ L ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ RPK និង ត្រីកោណ RQL មានក្រឡាផ្ទៃស្មើគ្នា។

(IMO 2007)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ RPK និង RQL មានក្រឡាផ្ទៃស្មើគ្នា ៖



តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ ត្រីកោណ ABC ។

យើងមាន CR ជាកន្ទះបន្ទាត់ពុះក្នុង នៃមុំ C នោះគេបាន $\angle PCK = \angle QCL$

នោះ CPK និង CQL ជាត្រីកោណកែងដូចគ្នា

គេបានផលធៀបជំនួច $\frac{CP}{CQ}=\frac{PK}{QL}$ (1)

ហើយមុំ $\angle CQL=\angle CPK=\angle OQP$ នោះ OPQ ជាត្រីកោណសមបាទ

កំពូល O គេទាញបាន $OP=OQ$ ។យក I ជាចំនុចកណ្ដាលនៃ PQ

នោះ (OI) ជាអក្ស័ឆ្លុះនៅក្នុងត្រីកោណOPQ ។

ម្យ៉ាងទៀត $OC=OR$ (កាំរង្វង់ ចារឹកក្រៅត្រីកោណ)

នោះ OCR ជាត្រីកោណសមបាទ ហើយ (OI) ជាអក្ស័ឆ្លុះ

នៅក្នុងត្រីកោណ ។

គេទាញបាន $CQ=PR$ និង $CP=QR$ ។

ធ្វើផលធៀបក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ RPK និង RQL គេបាន :

$$\frac{S_{RPK}}{S_{RQL}}=\frac{\frac{1}{2}PR.PK.\sin\angle RPK}{\frac{1}{2}QR.QL.\sin\angle RQL}=\frac{PR.PK}{QR.QL}\ (2)$$

(ព្រោះ $\angle RPK=\pi-\angle OPQ=\pi-\angle CQL=\angle RQL$)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន $\frac{S_{RPK}}{S_{RQL}}=\frac{PR.CP}{QR.CQ}$

ដោយ $CQ=PR$ និង $CP=QR$ នោះ $\frac{S_{RPK}}{S_{RQL}}=\frac{PR.QR}{QR.PR}=1$

ដូចនេះ $S_{RPK}=S_{RQL}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

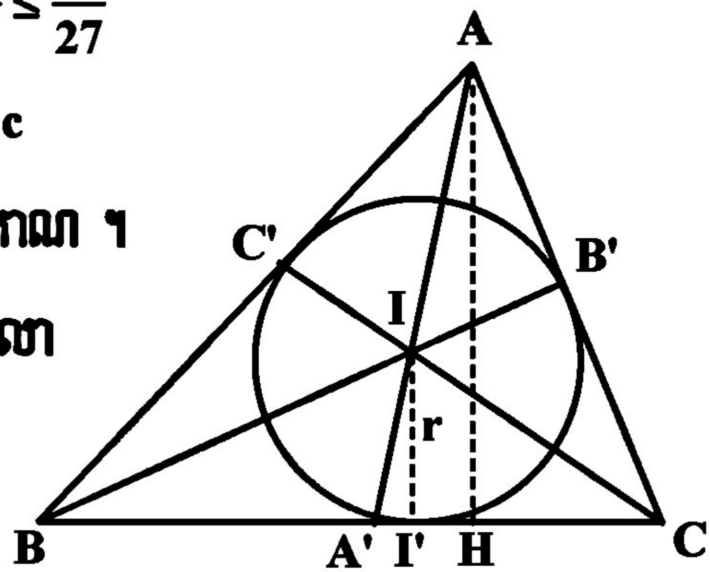
គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ គេតាង I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ កន្ទះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A , B , C កាត់ជ្រុងឈមរៀងគ្នាត្រង់ A' , B' , C'

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$ ។

(IMO 1991)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$



តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ។

តាង S និង T រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រឡា នៃត្រីកោណ ABC និង IBC

យើងមាន :

$S = \frac{1}{2}AH.BC$ និង $T = \frac{1}{2}II'.BC$

គេបាន $\frac{T}{S} = \frac{II'}{AH}$ (i)

ត្រីកោណកែង AA'H និង IA'I' មាន $\angle A'AH = \angle A'II'$ (មុំត្រូវគ្នា)

ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបាន $\frac{II'}{AH}=\frac{IA'}{AA'}=\frac{AA'-AI}{AA'}=1-\frac{AI}{AA'}$ (ii)

តាមទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន $\frac{T}{S}=1-\frac{AI}{AA'}$

ដោយ $T=\frac{1}{2}a.r$ និង $S=pr=\frac{a+b+c}{2}.r$

គេបាន $\frac{\frac{1}{2}ar}{\frac{a+b+c}{2}.r}=1-\frac{AI}{AA'}$

នាំឱ្យ $\frac{AI}{AA'}=1-\frac{a}{a+b+c}=\frac{b+c}{a+b+c}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{BI}{BB'}=\frac{c+a}{a+b+c}$ (2) និង $\frac{CI}{CC'}=\frac{a+b}{a+b+c}$ (3)

ធ្វើវិធីគុណទំនាក់ទំនង (1) , (2) និង (3) គេបាន :

$$\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \quad (4)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$2(a+b+c)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

គេទាញ $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

ហេតុនេះ $\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\leq\frac{8}{27}$ (*)

ម្យ៉ាងទៀតយើងសន្មតថា $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}>\dfrac{1}{4}$ ពិត

យើងបាន $4(a+b)(b+c)(c+a)>(a+b+c)^3$

ដោយ $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

នោះ $4(a+b)(b+c)(c+a)>a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$$(a+b)(b+c)(c+a)-a^3-b^3-c^3>0$$

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+4abc>0$$

ដោយ $a\,,\,b\,,\,c$ ជាជ្រុងត្រីកោណមួយនោះ $\begin{cases}a+b>c\\a+c>b\\b+c>a\end{cases}$

គេទាញ $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+4abc>0$ ពិត

ហេតុនេះ $\dfrac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}>\dfrac{1}{4}\ (**)$

តាម (*) និង (**) គេបាន $\dfrac{1}{4}<\dfrac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\le\dfrac{8}{27}$ ។

ដូចនេះ $\dfrac{1}{4}<\dfrac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\le\dfrac{8}{27}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a;AC=b\ ;AB=c$

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង

និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម ៖

ក. $bc+ca+ab=p^2+r^2+4Rr$

ខ. $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr$

គ. $\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{p}$

ឃ. $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{4R+r}{p}$

ង. $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{p}{r}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម ៖

ក. $bc+ca+ab=p^2+r^2+4Rr$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេបាន ៖

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$

$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$

$p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$

ដោយ $a+b+c=2p$ ហើយ $S=pr=\frac{abc}{4R}$ ឬ $abc=4pRr$

គេបាន $p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-4pRr=pr^2$

គេទាញ $ab+bc+ca=\frac{pr^2+p^3+4pRr}{p}=r^2+p^2+4Rr$

ដូចនេះ $bc+ca+ab=p^2+r^2+4Rr$

ខ. $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr$

គេមាន $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

ដោយ $bc+ca+ab=p^2+r^2+4Rr$ និង $a+b+c=2p$

គេបាន $a^2+b^2+c^2=4p^2-2(p^2+r^2+4Rr)$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr$

គ. $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស ៖

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(1 - 2\sin^2\frac{A}{2})$$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

$$= \frac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

នាំឲ្យ $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ម្យ៉ាងទៀត

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ដោយ $\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(2\cos^2\frac{A}{2} - 1)$$

គេទាញ $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$

$$= \frac{2p(2p-2a)}{4bc} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

នាំឲ្យ $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

គេបាន $\tan\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេទាញ :

$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$; $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

ធ្វើវិធីគុណគេបាន :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}$$

$$=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2}$$

$$=\frac{S}{p^2}=\frac{pr}{p^2}=\frac{r}{p}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$ ។

ឃ. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$

តាង $T=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$

ដោយគេមាន $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$; $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

នោះគេបាន :

$$T=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}+\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}+\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$=\frac{(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$=\frac{3p^2-(b+c+a+c+a+b)p+bc+ac+ab}{S}$$

$$T=\frac{3p^2-2(a+b+c)p+(ab+bc+ca)}{pr}$$

ដោយ $bc+ca+ab=p^2+r^2+4Rr$ និង $a+b+c=2p$

$$T=\frac{3p^2-4p^2+p^2+r^2+4Rr}{pr}=\frac{r+4R}{p}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$

ង. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{p}{r}$

គេមាន $A+B+C=\pi$ នាំឱ្យ $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

តាមរូបមន្ត $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ គេបាន ៖

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

ដោយ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$

ដូចនេះ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{p}{r}$

លំហាត់ទី៣៨

គេឱ្យត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង និង មុំផ្ទៀងផ្ទាត់

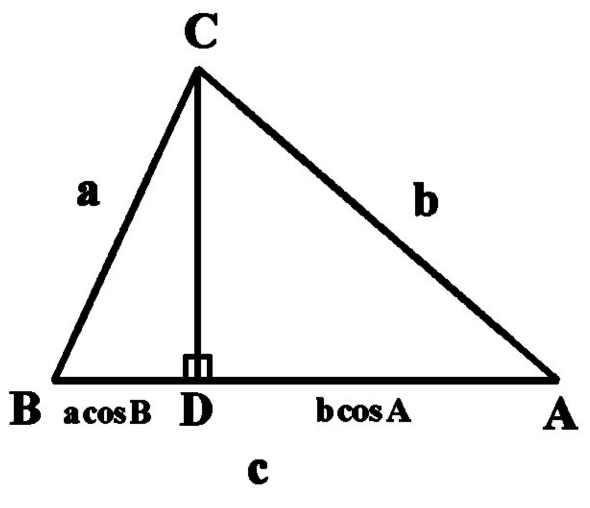
$c^2 = 4ab\cos A\cos B$ ។

ចូរស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

(Pi Mu Epsilon Journal -Fall 1992)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត



ក្នុងត្រីកោណកែង CBD និង CAD យើងមាន :

$\cos B = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BD}{a}$ នោះ $BD = a\cos B$

$\cos A = \dfrac{DA}{AC} = \dfrac{DA}{b}$ នោះ $DA = b\cos A$

យើងមាន $BA = BD + DA$ ឬ $c = a\cos B + b\cos A$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន

$c^2 = a^2\cos^2 B + 2ab\cos A\cos B + b^2\cos^2 A$

ដោយ $c^2 = 4ab\cos A\cos B$

គេទាញ $a^2\cos^2 B + 2ab\cos A\cos B + b^2\cos^2 A = 4ab\cos A\cos B$

$$a^2\cos^2 B - 2ab\cos A\cos B + b^2\cos^2 A = 0$$

$$(a\cos B - b\cos A)^2 = 0$$

$$a\cos B - b\cos A = 0$$

$$a\cos B = b\cos A$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

គេបាន $a = 2R\sin A$ និង $b = 2R\sin B$

ហេតុនេះ $2R\sin A\cos B = 2R\sin B\cos A$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\tan A = \tan B$$

នាំឱ្យ $A = B$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឱ្យការេ ABCD មួយ ។ E និង F ជាពីរចំនុចស្ថិតនៅលើជ្រុងរៀងគ្នា AB និង AD ។ តាង P ជាចំនុចប្រសព្វរវាង EF និង AC ។

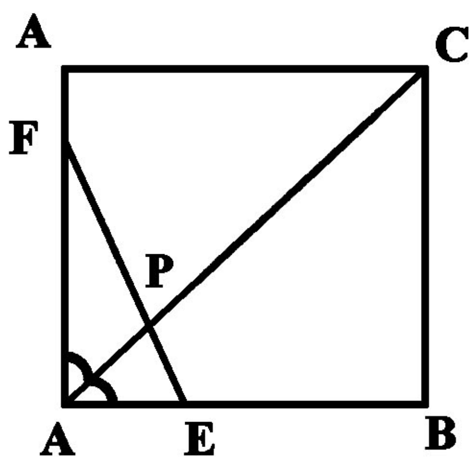
ចូរស្រាយថា :

ក. $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{AP}$ ខ. $AP^2 \le \frac{AE.AF}{2}$

(RMC 2000)

ដំណោះស្រាយ

ក. $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{AP}$



តាង S_{AEF} , S_{AEP} , S_{AFP} រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រលា

នៃត្រីកោណ AEF ; AEP ; AFP

យើងបាន $S_{AEF} = S_{AEP} + S_{AFP}$

$$\frac{1}{2}AE.AF = \frac{1}{2}AE.AP\sin 45^o + \frac{1}{2}AF.AP\sin 45^o$$

$$AE.AF = \frac{1}{\sqrt{2}}AE.AP + \frac{1}{\sqrt{2}}AF.AP$$

$$\sqrt{2}AE.AF = AE.AF.AP(\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF})$$

ដូចនេះ $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF} = \frac{\sqrt{2}}{AP}$ ។

ខ. $AP^2 \le \frac{AE.AF}{2}$

តាមវិសមភាព $HM - GM$ គេមាន $\frac{2}{\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}} \le \sqrt{AE.AF}$

ដោយ $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF} = \frac{\sqrt{2}}{AP}$ នោះ $\sqrt{2}AP \le \sqrt{AE.AF}$

លើកជាការេគេបាន $2AP^2 \le AE.AF$

ដូចនេះ $AP^2 \le \frac{AE.AF}{2}$ ។

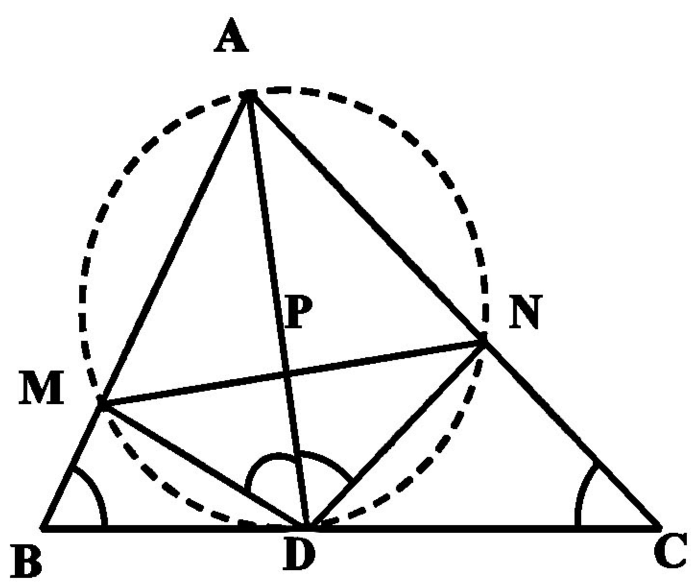
លំហាត់ទី៤០

គេឱ្យ AD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A នៃត្រីកោណ ABC មួយ ។
M និង N ជាពីរចំនុចនៅលើជ្រុង AB និង AC រៀងគ្នាដែលមុំ
$\angle MDA = \angle B$ និងមុំ $\angle NDA = \angle C$ ។
តាង P ជាប្រសព្វរវាង MN និង AD ។
ចូរស្រាយថា $AD^3 = AB.AC.AP$ ។

(RMC 1999)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $AD^3 = AB.AC.AP$



យើងមាន ΔABD ដូច ΔADM

គេបាន $\dfrac{AD}{AM} = \dfrac{AB}{AD}$

ឬ $AD^2 = AM.AB$ (1)

យើងមាន ΔACD ដូច ΔADN

គេបាន $\dfrac{AD}{AN} = \dfrac{AC}{AD}$

ឬ $AD^2 = AN.AC$ (2)

គុណទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន ៖

$AD^4 = AM.AN.AB.AC$ (3)

យើងមាន $\angle ADM + \angle ADN + \angle A = \angle B + \angle C + \angle A = 180^o$

នោះ AMDN ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។

គេបាន $\angle AMP = \angle ADN$ (មុំស្កាត់ដោយធ្នូរួម AN)

នោះត្រីកោណ ΔAMP ដូចត្រីកោណ ΔADN

គេបាន $\frac{AM}{AD} = \frac{AP}{AN}$ នាំឱ្យ $AM.AN = AD.AP$ (4)

យក (4) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន $AD^4 = AD.AP.AB.AC$

ដូចនេះ $AD^3 = AB.AC.AP$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេតាង r , R និង p រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និងជាកន្លះបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថាជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណនេះជាឫសរបស់សមីការ ៖

$$x^3 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4rR)x - 4prR = 0$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណជាឫសរបស់សមីការ ៖

$$x^3 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4rR)x - 4prR = 0$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសយើងមាន

$$a = 2R\sin A = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \quad (1)$$

ហើយ $p - a = r\tan\frac{A}{2} = \dfrac{r\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \quad (2)$

គុណទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន

$$(p-a)a = 4Rr\sin^2\frac{A}{2}$$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p-a)a}{4Rr}$ (3)

ចែកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន

$$\frac{a}{p-a} = \frac{4R\cos^2\frac{A}{2}}{r}$$

គេទាញ $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{ar}{4(p-a)R}$ (4)

បូកសមីការ (3) និង (4) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} = \frac{(p-a)a}{4Rr} + \frac{ar}{4(p-a)R}$$

$$1 = \frac{(p-a)^2 a + ar^2}{4rR(p-a)}$$

$$4rR(p-a) = p^2a - 2a^2p + a^3 + ar^2$$

$$4rRp - 4rRa = p^2a - 2a^2p - a^3 + ar^2$$

$$a^3 - 2pa^2 + (r^2 + p^2 + 4Rr)a - 4prR = 0$$

ដូចនេះជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណជាឫសសមីការ

$x^3 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4rR)x - 4prR = 0$ ។

លំហាត់ទី៤២

ត្រីកោណមួយមានកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅរៀងគ្នា r និង R ។

ចូរស្រាយថា $R \geq 2r$ ។

(Indian Mathematical Olympiad 1988)

ដំណោះស្រាយ

យកត្រីកោណ ABC មានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

តាង I និង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និងចារឹកក្រៅត្រីកោណ

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែចំពោះគ្រប់ចំនុច X នៃប្លង់គេមាន ៖

$$aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 = (a+b+c)XI^2 + abc$$

យក X នៅត្រង់ផ្ចិត O គេបាន ៖

$$a\,OA^2 + b\,OB^2 + c\,OC^2 = (a+b+c)OI^2 + abc$$

ដោយ $OA = OB = OC = R$ កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ

$$(a+b+c)R^2 = (a+b+c)OI^2 + abc$$

$OI^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c} = R^2 - \dfrac{abc}{2p}$ តែ $S = pr = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow \dfrac{abc}{2p} = 2rR$

គេបាន $OI^2 = R^2 - 2rR = R(R-2r) \Rightarrow OI = \sqrt{R(R-2r)}$

ដោយ $OI \geq 0$ ដូចនេះ $R \geq 2r$ ។

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយហើយតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

(IMO Long lists 1988)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

តាង a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABC

ហើយយក $p=\frac{a+b+c}{2}$

គេមាន $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

យើងបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=1+4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$=1+4\frac{\frac{S^2}{p}}{4RS}=1+\frac{S}{pR}$$

$$=1+\frac{pr}{pR}=1+\frac{r}{R}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$1-2\sin^2\frac{A}{2}+1-2\sin^2\frac{B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=1+\frac{r}{R}$$

$$3-2(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})=1+\frac{r}{R}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-\frac{r}{2R}\quad(1)$$

តាមវិសមភាព Jensen យើងមាន ៖

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le 3\sin(\frac{A+B+C}{6})=3\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4} \quad (2)$$

ដោយប្រើសមភាព

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$1-\frac{r}{2R}+2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2})\le\frac{9}{4}$$

ឬ $2(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2})\le\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}$

ដូចនេះ

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$ ។

លំហាត់ទី៤៤

ប្រវែងជ្រុងរបស់ឆកោណ ABCDEF មួយផ្ទៀងផ្ទាត់

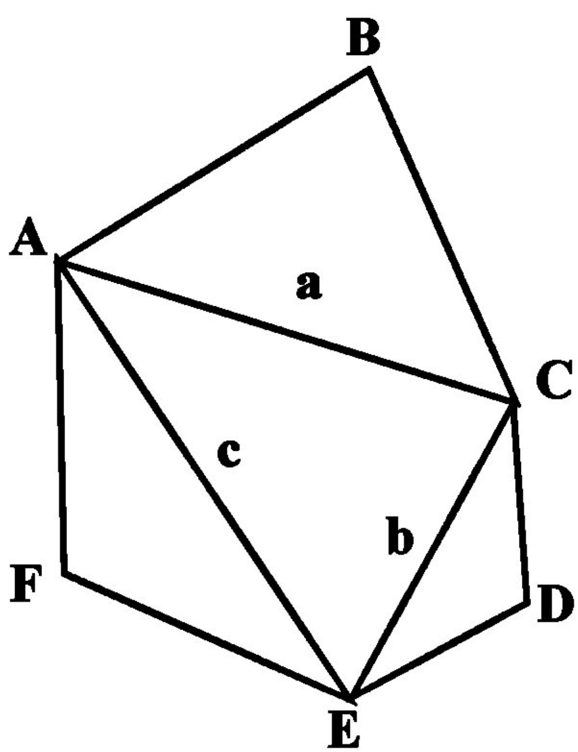
$AB = BC\ ;\ CD = DE\ ;\ EF = FA$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$?

(Shortlist IMO.1997)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$



តាង $AC=a$, $CE=b$ និង $EA=c$

តាមវិសមភាព Ptolemy អនុវត្តន៍ចំពោះចតុកោណ

$ACEF$ គេបាន $AE.FC \le FA.CE + AC.EF$

ដោយ $EF=FA$ យើងបាន $c.FC \le b.FA + a.FA$

គេទាញ $\frac{FA}{FC} \ge \frac{c}{a+b}$ (i)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{BC}{BE} \ge \frac{a}{b+c}$ (ii) ; $\frac{DE}{DA} \ge \frac{b}{c+a}$ (iii)

បូកវិសមភាព (i),(ii) & (iii) គេបាន

$$\frac{FA}{FC}+\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA} \ge \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

តាង $\begin{cases} b+c=m \\ c+a=n \\ a+b=p \end{cases}$

គេបាន $(b+c)+(c+a)+(a+b)=m+n+p$

នាំឲ្យ $a+b+c=\frac{m+n+p}{2}$

គេទាញ $\begin{cases} a = \dfrac{n+p-m}{2} \\ b = \dfrac{m-n+p}{2} \\ c = \dfrac{m+n-p}{2} \end{cases}$

គេបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{n+p-m}{2m}+\frac{m-n+p}{2n}+\frac{m+n-p}{2p}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{p}{m}+\frac{m}{p}\right)+\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)-3\right]$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\geq 2\ ;\ \frac{p}{m}+\frac{m}{p}\geq 2\ ;\ \frac{n}{p}+\frac{p}{n}\geq 2$$

គេបាន $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}(2+2+2-3)=\dfrac{3}{2}$

គេទាញ $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ: $\dfrac{BC}{BE}+\dfrac{DE}{DA}+\dfrac{FA}{FC}\geq\dfrac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៥

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$$

ដែល r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$ (1)

តាង $BC=a\ ,\ AC=b\ ,\ AB=c$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន ៖

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

នោះ $a^2=b^2+c^2-2bc(1-2\sin^2\frac{A}{2})$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

តាង $p=\frac{a+b+c}{2}$ (កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ)

គេបាន $a+b-c=2(p-c)$ និង $a-b+c=2(p-b)$

គេបាន $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

នាំឲ្យ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ។ ដូចគ្នាដែរគេទាញ ៖

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\ ;\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

គេមាន $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}$

គេទាញ $abc=4R.S$ និង $(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=r.S$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r.S}{4R.S}=\frac{r}{4R}$ ។

វិសមភាព (1) សមមូលទៅនឹង ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 4\sqrt{\frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}}\ge 2 \qquad (2)$$

ដោយ $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{a^2bc}}=\frac{p-a}{a}\sin\frac{A}{2}$

គេទាញ $\dfrac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\dfrac{p-a}{a}$ ។

ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន ៖

$\dfrac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\dfrac{p-b}{b}$ និង $\dfrac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{p-c}{c}$

វិសមភាព (2) សមមូលទៅនឹង ៖

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}}+\sqrt{\frac{p-b}{b}}+\sqrt{\frac{p-c}{c}}\ge 2$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$p=(p-a)+a\ge 2\sqrt{(p-a)a}$ នាំឲ្យ $\sqrt{\dfrac{p-a}{a}}\ge\dfrac{2(p-a)}{p}$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{\dfrac{p-b}{b}}\ge\dfrac{2(p-b)}{p}$ និង $\sqrt{\dfrac{p-c}{c}}\ge\dfrac{2(p-c)}{p}$

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}}+\sqrt{\frac{p-b}{b}}+\sqrt{\frac{p-c}{c}}\ge 2\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{p}$$

$\sqrt{\dfrac{p-a}{a}}+\sqrt{\dfrac{p-b}{b}}+\sqrt{\dfrac{p-c}{c}}\ge 2$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 4\sqrt{\dfrac{R}{r}}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេតាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABC ហើយតាង r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $a+b+c \geq 2\sqrt{3r(r+4R)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a+b+c \geq 2\sqrt{3r(r+4R)}$

គេមាន $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$

$$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 \geq 0$$

$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca) \geq 0$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2ab+2bc+2ca$ គេបាន ៖

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \quad (1)$$

តាង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$

គេបាន $p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$

$$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$$

$$p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$$

$$p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$$

$$-p^3+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$$

គេទាញ $ab+bc+ca=r^2+p^2+\dfrac{abc}{p}$

គេមាន $S=pr=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow\dfrac{abc}{p}=4rR$

គេបាន $ab+bc+ca=r^2+p^2+4rR\ \ (2)$

យកទំនាក់ទំនង (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$4p^2\geq 3(r^2+p^2+4rR)\Leftrightarrow p^2\geq 3r(r+4R)$$

$$\Leftrightarrow p\ \geq\sqrt{3r(r+4R)}$$

ដោយ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ នោះ $\dfrac{a+b+c}{2}\geq\sqrt{3r(r+4R)}$

ដូចនេះ $a+b+c\geq 2\sqrt{3r(r+4R)}$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក.បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le \frac{3}{2}$

ខ.បង្ហាញថា $\cos A\cos B\cos C\le \frac{1}{8}$

គ.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le \frac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le \frac{3}{2}$

គេមាន $A+B+C=\pi$

គេបាន $\cos(A+B)=\cos(\pi-C)$

ឬ $\cos A\cos B-\sin A\sin B=-\cos C$

ឬ $\cos C=\sin A\sin B-\cos A\cos B$

តាង $T=3-2(\cos A+\cos B+\cos C)$

$$=3-2(\cos A+\cos B+\sin A\sin B-\cos A\cos B)$$

$$=(\sin A-\sin B)^2+(\cos A+\cos B-1)^2\ge 0$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C\le \frac{3}{2}$

ខ.បង្ហាញថា $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$

ដោយ $A\ ;\ B\ ;\ C$ ជាមុំស្រួចនោះ $\cos A\ ;\ \cos B\ ;\ \cos C > 0$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន :

$$\cos A + \cos B + \cos C \ge 3\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\cos A\cos B\cos C \le \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3$$

ដោយ $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ (សម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $\cos A\cos B\cos C \le \left(\frac{\frac{3}{2}}{3}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ដូចនេះ $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$ ។

គ.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

គេមាន $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

និង $\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$ គេបាន :

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$
$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ (សម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ ។

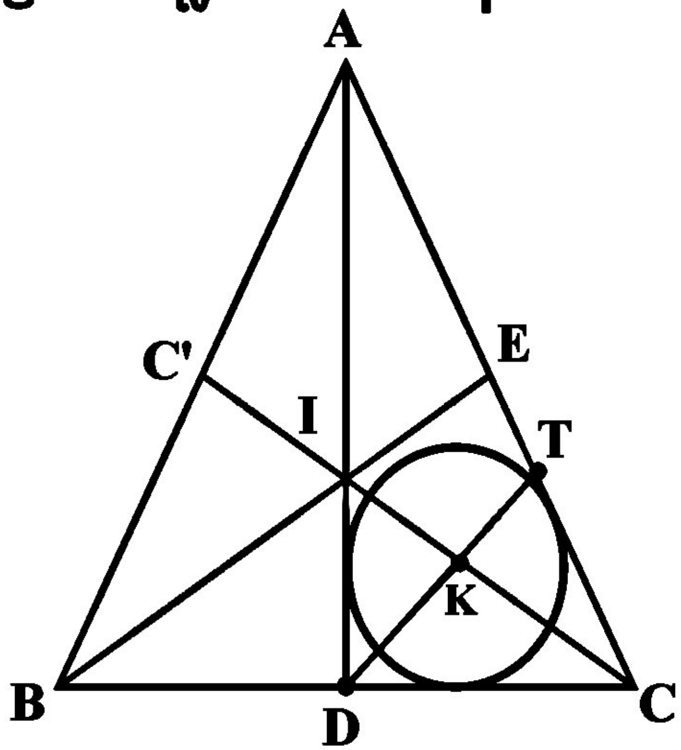
លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែល $AB = AC$ ។ បន្ទាត់ពុះមុំ $\angle CAB$ និង $\angle ABC$ ជួបជ្រុង BC និង CA ត្រង់ D និង E រៀងគ្នា។ យក K ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ADC ។ សន្មត់ថា $\angle BEK = 45^\circ$ ។ ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃអាចរបស់មុំ $\angle CAB$?

(IMO 2009)

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់តម្លៃអាចរបស់មុំ $\angle CAB$



តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយ T ជាប្រសព្វរវាង DK និង AC ។

យក $AB = AC = a$ និង $BC = 2$ មានន័យថា $CD = DB = 1$

ត្រីកោណកែង IEK និង CDT មាន $\angle IED = \angle EDC = 45^\circ$

វាជាត្រីកោណដូចគ្នានោះគេបាន $\dfrac{IE}{IK} = \dfrac{CD}{CT}$ ។

យើងមាន $\dfrac{IK}{ID} = \dfrac{IC}{ID+1} \Rightarrow \dfrac{1}{IK} = \dfrac{ID+1}{ID.IC}$

ហើយ $\dfrac{IE}{EC} = \dfrac{IB}{2} \Rightarrow IE = \dfrac{EC.IC}{2}$ ព្រោះ $IB = IC$

គេទាញ $\dfrac{IE}{IK} = (1+\dfrac{1}{ID}).\dfrac{EC}{2}$ ។

ក្នុងត្រីកោណ ABC មាន $\dfrac{EC}{BC} = \dfrac{EC}{2} = \dfrac{AC}{AB+BC} = \dfrac{a}{a+2}$

តែ $\dfrac{ID}{DC} = \dfrac{AD}{AC+DC} = \dfrac{AD}{a+1}$

នោះ $\dfrac{IE}{IK} = \dfrac{(AD+a+1)a}{AD(a+2)}$ ហើយ $\dfrac{CD}{CT} = \dfrac{AD}{AT} = \dfrac{1+AD}{a}$

គេបាន $\dfrac{(AD+a+1)a}{AD(a+2)} = \dfrac{1+AD}{a}$

នាំឲ្យ $AD.a^2 = a.AD - a + 2AD + a^2 - 2$

(ព្រោះ $AD^2 = a^2 - 1$)

គេទាញ $AD(a^2-a-2)=a^2-a-2$

ឬ $(AD-1)(a^2-a-2)=0$

គេបាន $AD=1$ ឬ $a^2-a-2=0 \Rightarrow a=2$

-ចំពោះ $AD=1$ គេទាញបាន $\angle A=90^\circ$

-ចំពោះ $a=2$ គេទាញបាន $\angle A=60^\circ$ ។

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
Tel : 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
www.mathtoday.wordpress.com