



BAC MATHS

2009/2010

Cours et 283 exercices

Elaboré par : ALI AKIR

*Donne des cours particuliers en mathématiques pour
tous les niveaux*

Plus d'informations : Contacter à

GSM : 24 96 24 30

Email : akir.cm@gmail.com

Site Web : <http://maths-akir.midiblogs.com/>



Maths aux lycées, Site éducatif

Téléchargement gratuit

Fiches de cours / Séries d'exercices / Devoirs à la maison / Devoirs de contrôle et de synthèse
Sujets de révision pour le baccalauréat / Plus : Forum de maths, pour répondre à vos questions.



ALI AKIP***GSM:24962430***ALI AKIP***GSM:24962430

LIMITES

Soient P et Q deux fonctions polynôme de degré n et m et du monôme de plus haut degré $a_n x^n$ et $b_m x^m$ respectivement alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x^4 + x - 1}{x^2 + 5x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty$

Limites trigonométries

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x} = 0$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \cdot \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos(x)}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos(x)}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1}{2}$

Théorème d'encadrement

Soit f, g et h trois fonctions telles que :

Si $\begin{cases} f(x) \leq h(x) \leq g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} g = l & (l \in \mathbb{R}) \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} h = l$ (x_0 fini ou infini)

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On a : $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ alors pour tout $x > 0$ $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

Alors on a : $\begin{cases} -x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x & \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions telles que

Si $\begin{cases} f(x) \geq g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$

Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g = -\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty$ (x_0 fini ou infini)

Exemple : Soit $f(x) = 2 + \cos(x)$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On a : $2 + \cos x \geq 2 + 1$ alors $2 + \cos x \geq 1$ ainsi $f(x) \geq x^2$

On a alors $\begin{cases} f(x) \geq x^2 & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Théorème ; fonction composé

Soit f et g deux fonctions telles que :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f = y$ et $\lim_{y \rightarrow y} g = z$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f = z$ (x_0, y et z finis ou infinis)

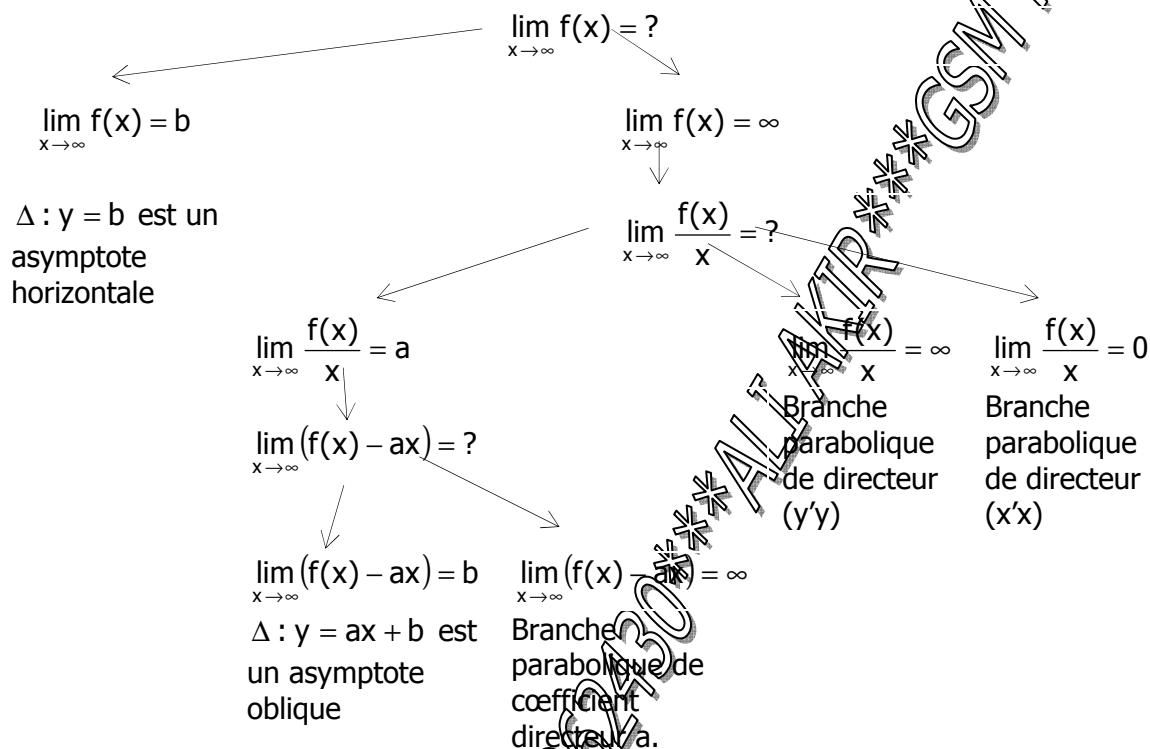
Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1+\pi x}{2x}\right)$

On peut écrire $h = g \circ f$ avec $f : x \mapsto \frac{1+\pi x}{2x}$ et $g \mapsto \sin(x)$ et $h(x) = \sin\left(\frac{1+\pi x}{2x}\right)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\pi x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = 1 \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$

ASYMPTOTE



FONCTION CONTINUE

Définition 1 :

Une fonction f est continue en un point a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Définition 2 :

Une fonction f est continue sur un intervalle I , si elle est définie sur cet intervalle et si : pour tout réel a de I $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

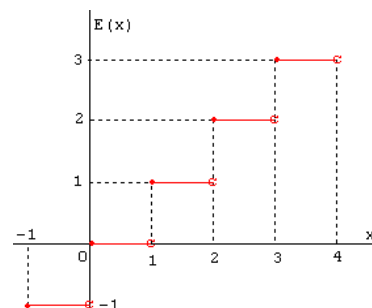
La fonction partie entière

*) La fonction Partie entière qui à tout réel x associe le plus grand entier relatif

inférieur à x , noté $E(x)$, est représentée ci-dessous.

Pour tout réel x , on a $E(x) \leq x < E(x) + 1$

par exemple : $E(2,2) = 2$ et $E(-2,2) = -3$



E est-elle continue en 2 ?

Pour $x \in [1, 2[$, $E(x) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} E(x) = 1$

Pour $x \in [2, 3[$, $E(x) = 2$ donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} E(x) = 2$

Ces limites étant différentes, la fonction E n'admet pas de limite en 2.
Donc E n'est pas continue en 2.

*) la fonction Partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle est continue sur tout intervalle du type $[n, n+1[$, où n est un entier relatif quelconque.

Théorème

- *) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- *) les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- *) les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition c'est à dire en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.
- *) Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Théorème :

- *) Soit f une fonction f définie sur un intervalle de type $[a, b[$ (b finie ou infini)
- Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b .
- Si la fonction f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b .
- *) Soit f une fonction f définie sur un intervalle de type $]a, b]$ (a finie ou infini)
- Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en a .
- Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en a .

Théorème de la valeur intermédiaire

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, alors pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet aux moins une solution $\alpha \in [a, b]$.

Corollaire 1 de TVI

Si f est continue sur $I = [a, b]$ et telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Et si de plus f est strictement monotone sur I alors il existe un unique réel $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Corollaire 2 de TVI

Si f est continue sur $I = [a, b]$ et ne s'annule pas alors elle garde un signe constante sur I

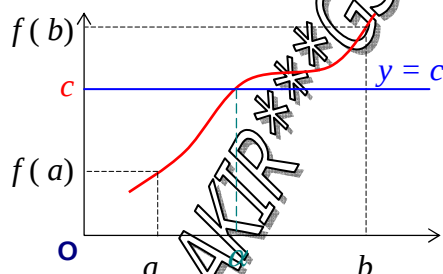
Exemple : $I = [1, 2]$ et $f(x) = x^3 + x - 3$

f est dérivable sur I et on a : $f'(x) = 3x^2 + 1$
 $f(1) = -1$ et $f(2) = 7$

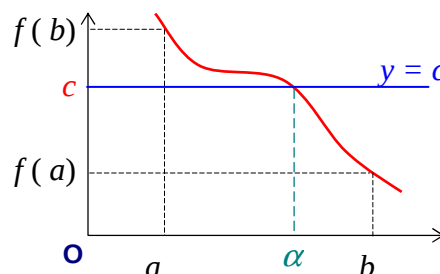
Alors on a : f est continue sur I , $f(1) \times f(2) < 0$ et f est strictement croissante sur I

Alors il existe un unique réel $x_0 \in]1, 2[$ tel que $f(x_0) = 0$.

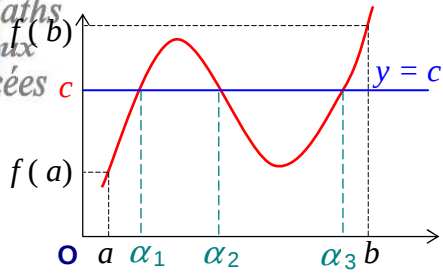
Illustrations graphiques



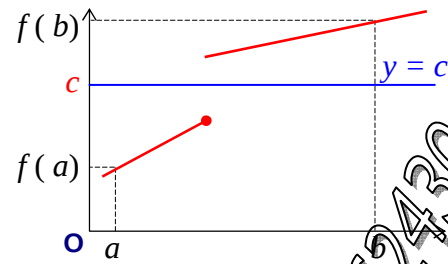
f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a; b]$.
L'équation $f(x) = c$ admet une solution unique.



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a; b]$.
L'équation $f(x) = c$ admet une solution unique.



f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle $[a; b]$.
L'équation $f(x) = c$ peut avoir plusieurs solutions



f n'est pas continue sur l'intervalle $[a; b]$.
L'équation $f(x) = c$ peut ne pas avoir de solutions.

ALI AKIP***GSM:24962430***ALI AKIP***GSM:24962430

EXERCICE N°1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2+3x}{1+x-x^2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x+x^2}{1+x-2x^2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x}-2x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x}-3x+1) ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-5}{\sqrt{x+2}-2} ; \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax^n - xa^n}{x-a}$$

$$((a,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} \left[\frac{1}{1-x} - (1+x+x^2+\dots+x^n) \right], n \in \mathbb{N}^* ; \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2\pi x-1}{3x-2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{x}-1}{x} ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}} ; \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2 \right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+\sin x}-2}{x}.$$

EXERCICE N°2

Calculer les limites suivantes quand elles existent :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan(x)}{\cos(2x)} ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(x)-1}{4\sin^2(x)-3} ; \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{\tan x} \right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}} ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x - 1) \left(1 - \tan \frac{x}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x + \cos^2 x}{\sin x + \cos^2 x - 1} ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \tan x ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2(1-\cos x)} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) ; \lim_{x \rightarrow a} (a^2 - x^2) \tan \frac{\pi x}{2a}$$

EXERCICE N°3

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x + \sin x}{x-1}$.

Montrer que , pour tout $x \geq 2$, $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x-1}$. En déduire la limite de f en $+\infty$

EXERCICE N°4

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1-\cos x}$.

1°)) Montrer que , pour tout réel x , $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.

b) En déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(2-\cos x)}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{2-\cos x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2(2-\cos x)}$

EXERCICE N°5

Soit la fonction $f : x \mapsto 3x + 2 \sin x$

1°) a-Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $3x-2 \leq f(x) \leq 3x+2$

b-En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2°) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a- Montrer que g est continue en 0.

b- Montrer que pour tout $x \in \left] \frac{2}{3}, +\infty \right[$: $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Interprète géométriquement le résultat.

EXERCICE N°6

Soit la fonction φ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

1°) Montrer que, pour $x > 1$, $\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \varphi(x) \leq \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

2°) En déduire la limite de φ en $+\infty$.

EXERCICE N°7

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-x + \cos x}{2x + 1}$

1°) Démontrer que pour tout $x > -\frac{1}{2}$ on a : $\frac{-x - 1}{2x + 1} \leq f(x) \leq \frac{-x + 1}{2x + 1}$

2°) En déduire la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE N°8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Calculer $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement

EXERCICE N°8

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{x^n}{\sqrt{1 + x^2}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier suivant n $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter graphiquement

EXERCICE N°9

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{m\sqrt{x^2 + 3} - 2m}{x^2 - 1} & \text{si } |x| \neq 1 \\ 2x^3 + px - 1 & \text{si } |x| = 1 \end{cases}$

Déterminer m et p pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°10

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - |x|} - ax & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[\\ \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x} & \text{si } x \in]-1, 0[\cup]0, 1[\end{cases}$

1°) Etudier la continuité de f en 0.

2°) Etudier suivant a la continuité de f en 1 et -1.

3°) Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°11

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^3 - 7x^2 + x + 5}$ si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ et $f(1) = a$.

1°) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2°) Déterminer le réel a pour que f soit continue en 1.

EXERCICE N°12

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x - \sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{(x - 1)^2}$

1°) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2°) Peut-on parler de limite en 0 pour f ? Justifier.

3°) Déterminer le domaine de continuité D_c de f .

4°) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

EXERCICE N°13

Calculer les limites suivantes quand elles existent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} E\left(\frac{1}{x}\right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right) - x}{E\left(\frac{1}{x}\right) + x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E\left(\frac{x}{2010}\right)}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x E(x) + 3}{x^2 + \sin(x)} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sin x}{2 - \sin x} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)\sin x}{x^2 - 1} ; \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sin x} \right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} + 3}{x + \sqrt{x}}.$$

EXERCICE N°14

Répondre par Vrai ou Faux.

1°) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ et si, pour tout réel x , $f(x) > g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = +\infty$

2°) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et si $g(x) < 0$ pour tout x , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$

3°) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, alors soit $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, soit $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

EXERCICE N°15

On admet l'existence d'une limite réelle en 0 pour $f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^3}$.

1°) En transformant convenablement $f(2x)$, trouver la valeur de cette limite.

2°) Utiliser le résultat précédent pour déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) - \frac{x^2}{2}}{x^4}$

EXERCICE N°16

Calculer $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16\sqrt{x - \sqrt{x}} - 3\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}}{16(x - 4)^2}$

EXERCICE N°17

1°) Démontrer que l'équation : $x^3 + x^2 - 3 = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; 2[$

2°) Donner une valeur approchée par défaut de cette α à 10^{-1} près.

EXERCICE N°18

Démontrer que l'équation : $x^4 + x^3 + x + 1 = 0$ n'a pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°18

Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 4x + 7 = 0$ admet au moins une racine réelle. Plus généralement montrer que toute équation polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle. Qu'en est-il si le degré est pair ?

EXERCICE N°19

1°) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0, 1]$

2°) **Plus générale** Soit $f : [a, b] \rightarrow J \subset [a, b]$ une fonction continue. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[a, b]$

3°) Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et α, β des réels strictement positifs.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que : $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta)f(c)$

EXERCICE N°20

Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que $\forall x \neq y : |f(x) - f(y)| < k|x - y|$ avec $0 < k < 1$
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet alors toujours une et une seule solution sur $[a, b]$

EXERCICE N°21

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue en 0 et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(2x) = f(x)$.

EXERCICE N°22

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue en 0 et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(2x) = f(x) \cos x$.

ALI AKIP***GSM:24962430***ALI AKIP***GSM:24962430

Théorème

Soit a un réel fini ou infini

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, si et seulement si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = a$

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Théorème

Soit ℓ et ℓ' deux réels.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'

- S'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$: $u_n \geq 0$, alors $\ell \geq 0$
- S'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$: $u_n \leq 0$, alors $\ell \leq 0$
- S'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$: $m \leq u_n \leq M$, alors $m \leq \ell \leq M$
- S'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$: $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$

Convergence et divergence

- Si $\begin{cases} (u) \text{ est majorée} \\ (u) \text{ est croissante} \end{cases}$ alors (u) est convergente vers un réel ℓ et pour tout n de I : $u_n \leq \ell$

- Si $\begin{cases} (u) \text{ est min orée} \\ (u) \text{ est décroissante} \end{cases}$ alors (u) est convergente vers un réel ℓ et pour tout n de I : $u_n \geq \ell$

- Si $\begin{cases} (u) \text{ est croissante} \\ (u) \text{ est non majorée} \end{cases}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

- Si $\begin{cases} (u) \text{ est décroissante} \\ (u) \text{ est non min orée} \end{cases}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Calcul de limite

- Si $\begin{cases} (u) \text{ est convergente vers } \ell \\ f \text{ est continue en } \ell \end{cases}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$

- Si $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ (}\ell \text{ fini ou infini)} \\ \lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = e \end{cases}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = e$

Soit (u) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

- Si $\begin{cases} (u) \text{ est convergente vers } \ell \\ f \text{ est continue en } \ell \end{cases}$ alors $\ell = f(\ell)$

Suite adjacente

- Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & u_n \leq v_n \\ (u_n) \text{ est croissante} & \text{et} & (v_n) \text{ est décroissante} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases}$ alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite

même limite

Théorème d'encadrement



• Si $\left\{ \begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 : v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{array} \right.$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$

• Si $\left\{ \begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 : |u_n| \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{array} \right.$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

• Si $\left\{ \begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 : u_n \geq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty \end{array} \right.$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

• Si $\left\{ \begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 : u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{array} \right.$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$

Suite arithmétique – Suite géométrique

*** Suite arithmétique(s.a)***	*** Suite géométrique(s.g)***
$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qv_n$
$u_n = u_0 + nr$	$u_n = v_0 q^n$
$u_p = u_s + (p - s)r$	$u_p = v_s q^{p-s}$
$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0 \Rightarrow u$ non s.a	$\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0} \Rightarrow v$ non s.g
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$
$\sum_{k=0}^n x = \overbrace{x + x + \dots + x}^{n+1 \text{ fois } x} = (n+1)x$ $\sum_{k=0}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ $\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$	pour tout $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q^1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $\sum_{k=p}^n q^k = q^p + q^{p+1} + \dots + q^n = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$



EXERCICE N°1

Montrer que : pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$1^\circ) \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ fois}}} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ fois}}}$$

$$2^\circ) \text{En déduire que } \pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2^n \times \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ fois}} \right)$$

EXERCICE N°2

Soit $\alpha \in [-1, 1]$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1°) Soit pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{4n+1}$ et $v_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{4n-1}$. Calculer $f(u_n)$ et $f(v_n)$.

2°) Existe-t-il une valeur de α tel que f soit continue en 0 ?

EXERCICE N°2

Exprimer u_n en fonction de n .

1°) $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + n$

2°) $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

3°) $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_n - u_{n+1}$

4°) $u_0 = \frac{2}{5}$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $3(n+1)u_n = 2(n+2)u_{n-1}$

EXERCICE N°3

1°) Soit x un réel tel que $0 < x \leq 1$. Montrer que : pour tout k de $\mathbb{N}$: $(1+x)^k \leq 1+2^k x$

2°) Soit (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n = \frac{n^3}{3^n}$

(a) Etablir l'égalité suivante : pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3$

(b) En déduire que : pour tout $n \geq 16$: $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2}$

(c) Montrer que : pour tout $n \geq 16$: $x_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-16} x_{16}$. En déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

EXERCICE N°4

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$ et (u_n) la suite définie par :

$$u_1 = a+b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} = a+b - \frac{ab}{u_n}$$

1°) On suppose que $a < b$.

(a) Montrer que (u_n) est minorée par b .

(b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) en déduire qu'elle est convergente.

2°) Soit la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n = \frac{u_n - b}{u_n - a}$

(a) Montrer que v est une suite géométrique.

(b) En déduire u_n en fonction de n , a et b

(c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3°) On suppose que $a=b$.

(a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 en fonction de a .

(b) Exprimer alors u_n en fonction de n et a puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE N°5

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{p + (p-1)x}$, où p est un réel tel que $p > 1$

On considère la suite réelle u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$

1°)(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq p$

(b) Etudier la monotonie de u .

(c) En déduire que u est convergente.

2°)(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - p| \leq \frac{p-1}{p} |u_n - p|$

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - p| \leq p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$. En déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE N°6

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{3u_n + 9}{2u_n}$

1°) Montrer que $u_{n+1} - 3$ et $u_n - 3$ sont de signes contraires.

2°) En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}, u_{2p} \leq 3 \leq u_{2p+1}$.

3°) En déduire que si u est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

4°) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 2$

5°) (a) Montrer que : $\forall n \geq 2, |u_n - 3| \leq \frac{3}{4} |u_{n-1} - 3|$

(b) En déduire $\forall n \geq 2, |u_n - 3| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$

(a) Montrer que u est convergente et préciser sa limite.

EXERCICE N°7

On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = v_0 = 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

$u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n}$ et $v_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}$.

1°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n \leq 3$ et $0 \leq v_n \leq 3$.

2°) Soient a et b deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $a_n = u_n - 1$ et $b_n = v_n - 1$.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $|a_{n+1}| \leq |b_n|$ et $|b_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |a_n|$.

b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $|a_{n+2}| \leq \frac{1}{2} |a_n|$ et $|b_{n+2}| \leq \frac{1}{2} |b_n|$

c) En utilisant les résultats de b/, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $|a_{2p}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p$ et $|b_{2p}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$.

d) Étudier alors la convergence des suites (u_{2p}) et (v_{2p})

EXERCICE N°8

1°) Montrer que pour tout réel positif x on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2°) Montrer que pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3°) Soit x un réel positif fixé et $(u_n(x))$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{kx}{n^2}\right)$

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\frac{(n+1)x}{2n} - \frac{(n+1)^2 x^3}{24n^4} \leq u_n(x) \leq \frac{(n+1)x}{2n}$

(b) En déduire que $(u_n(x))$ est convergente et calculer sa limite.

4°) Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \sum_{k=1}^n \sin^3\left(\frac{k}{n^2}\right)$

(a) Montrer que pour tout réel x : $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$

(b) En déduire que : $v_n = \frac{3}{4} u_n(1) - \frac{1}{4} u_n(3)$

(c) Calculer alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

EXERCICE N°8

1°) Etudier les variations de la fonction g définie par : $g(x) = x^3 - 5x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

2°) En déduire que l'équation $x^3 - 5x - 1 = 0$ possède trois racines a, b, c , avec $a < b < c$. Donner des valeurs approchées de a, b, c à 10^{-1} près. (On trouve : $-2,2 ; -0,3 ; 2,3$.)

3°) On considère la suite u définie par son premier terme u_0 , et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^3 - 1).$$

a) Montrer que la suite u est monotone.

b) Si la suite u est convergente, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ?

c) Etudier la suite u dans les trois cas particuliers suivants : $u_0 = -3$; $u_0 = 0$; $u_0 = 3$.

EXERCICE N°10

1°) Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}$

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 < u_n < 1$

(b) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2°) Soit v la suite de terme général : $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $v_{n+1} = v_n^2$

(b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{3^{2^n}}$

(c) Déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et l'expression de u_n .

(d) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $p_n = v_0 \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_n$. Calculer p_n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{p_n}{v_{n+1}} \right)$

3°) Soit la suite s définie sur $\mathbb{N}^*$ par $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on : $0 < 1 - u_n < \frac{1}{1 + u_0^2} (1 - u_{n-1})$

(b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < 1 - u_n < \left(\frac{4}{5}\right)^n$

(c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$; $1 - \frac{5}{n} \left[1 - \left(\frac{5}{4}\right)^n\right] \leq s_n \leq 1$. En déduire alors $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

EXERCICE N°11

Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \end{cases}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$

1°) Pour quelle valeur de u_0 la suite u est constante.

2°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 0$

3°) On suppose dans la suite que : $u_0^2 - a \neq 0$

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \neq \sqrt{a}$

(b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{a})^2$

(c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n} (u_n + \sqrt{a})^2$

(d) Montrer que si u est convergente elle converge nécessairement vers $\sqrt{a}$

(e) Montrer que u est strictement décroissante et qu'elle converge et déterminer sa limite.

4°) Soit pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.

(a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n .

(b) En déduire v_n en fonction de n et v

(c) Calculer alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5°) On suppose que : $u_0 = \frac{3}{2}\sqrt{a}$

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > \sqrt{a}$

(b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{a})$

(c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqrt{a}$

(d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N°12

1°) Soit la fonction $f : x \rightarrow f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

(a) Etudier les variations de f .

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = x$.

(c) Montrer que si : $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ alors $1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$

2°) Soit la suite réelle u définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.
 (b) Étudier la monotonie de u .
 (c) Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

3°) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

- (a) Montrer que v est une suite géométrique.
 (b) En déduire l'expression de u_n .
 (c) Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4°) On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : n \leq s_n \leq 3n$

- (b) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{n^2}$

5°) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* : r_n = \frac{s_n}{n}$

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : ns_{n+1} - (n+1)s_n = nu_n^2 - s_n$
 (b) En déduire que (r_n) est suite croissante.
 (c) Montrer que (r_n) est une suite convergente et trouver sa limite ℓ .

6°) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > p$.

- (a) Montrer que : $(n-p)u_p^2 \leq s_n \leq nu_{n-1}^2$

- (b) En déduire que : $\frac{n-p}{n} \leq r_n \leq u_{n-1}^2$

- (c) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^* : u_p^2 \leq \ell \leq 3$. En déduire la valeur de ℓ .

EXERCICE N°13

On se donne deux réels a et b tels que $0 \leq b \leq a$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$u_0 = a, v_0 = b, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

1°) Établir une relation entre $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $u_n - v_n$.

2°) En déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n, a et b .

3°) En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n, n, a et b .

4°) Montrer que les suites u et v convergent vers une limite commune que l'on déterminera.

EXERCICE N°14

On définit des suites (u_n) et (v_n) par : $u_0, v_0 > 0$ et pour tout n de $\mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

$$\text{et } \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \right)$$

1°) Montrer que (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.

2°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N} : u_n \geq v_n$ et $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$

3°) En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite.

EXERCICE N°15

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = a & , & v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} & , & v_{n+1} = \sqrt{\frac{v_n(u_n + v_n)}{2}} \end{cases}$$

1°) Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite $\ell > 0$.

2°) On suppose que $a = b \cos \varphi$; $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Exprimer ℓ en fonction de b et φ .

EXERCICE N°16

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sqrt{n} \cdot \frac{C_{2n}^n}{4^n}$.

1°) Calculer u_1 et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2°) Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.

3°) Montrer qu'il existe $\ell \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ tel que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

4°) Montrer que $\forall x > 0 : \frac{1}{4(2x+1)} \leq \left(x + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{x(x+1)} \leq \frac{1}{8\sqrt{x(x+1)}}$

5°) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^* : \frac{u_k}{8\left(k + \frac{1}{2}\right)} - \frac{u_k}{8\left(k + \frac{3}{2}\right)} \leq u_k \leq \frac{u_k}{8k} - \frac{u_k}{8(k+1)}$.

6°) En cadrer $u_p - u_n$ (pour $p > n$), puis établir $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{u_n}{4(2n+1)} \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{8n}$

7°) En déduire la majoration suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \left| \ell - \left(1 + \frac{1}{8n} \right) u_n \right| \leq \frac{\ell}{16n^2}$.

8°) Comment suffit-il de choisir n pour que $\left(1 + \frac{1}{8n} \right) u_n$ soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près ?

EXERCICE N°17

Prouver que la suite de terme générale $u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

EXERCICE N°18

On considère la suite de terme générale $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1°) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \geq 1}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont des suites adjacentes.

2°) Déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

EXERCICE N°19

On considère la suite de terme générale $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!}$.

1°) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n \geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ sont des suites adjacentes.

2°) Déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

EXERCICE N°20

Soient les deux réels a et b , tels que $0 < a < b$, et les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n v_n (u_n + v_n)}{u_n^2 + v_n^2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

- 1°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n > u_n$.
- 2°) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
- 3°) Dédurre que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- 4°) Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son terme général $w_n = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ est constante.
- 5°) Dédurre la valeur des limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de a et b .

EXERCICE N°21

- 1°) Pour tout entier naturel n , on note $F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3 .
- 2°) Démontrer par récurrence que pour tout $n > 1$, on a : $F_0 \times F_1 \times \dots \times F_{n-1} = F_n - 2$.
- 3°) Montrer que la suite (F_n) est croissante et non majorée. Quelle est sa limite ?

EXERCICE N°22

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse

Soient ℓ , k et q des réels tel que $0 < k < 1$ et $0 < x < 1$

- 1°) Si $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$ alors u est convergente.
- 2°) Si $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$ alors s est convergente tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$
- 3°) Si $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+2} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$ alors u est convergente.
- 4°) Si $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k |u_{n+1} - u_n|$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$
- 5°) Si $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell| + x^n$ alors u est convergente.
- 6°) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante alors $(u - v)_n$ est décroissante.
- 7°) Soient u et v deux suites réelles tel que
Si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n^2 + u_n \times v_n + v_n^2) = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$
- 8°) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel ℓ tel que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$ ou encore

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Le réel ℓ , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f en a , il est noté $f'(a)$.

(*) Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une tangente T d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Le vecteur directeur de cette tangente : est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^3$. Montrer que f est dérivable en a où a est réel quelconque.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = 3a^2$$

alors f est dérivable en a et on a : $f'(a) = 3a^2$

Définition 2

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : $]a-h, a[$ ($h > 0$)

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un nombre réel ℓ' tel que : $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell'$

$$\text{ou encore } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell'$$

Le réel ℓ' , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a , il est noté $f'_g(a)$.

Définition 3

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : $[a, a+h[$ ($h > 0$)

On dit que f est dérivable à droite en a s'il existe un nombre réel ℓ'' tel que : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell''$

$$\text{ou encore } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell''$$

Le réel ℓ'' , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à droite en a , il est noté $f'_d(a)$.

Conséquences :

1°) f est dérivable en a si et seulement si $f'_g(a) = f'_d(a)$ nombre fini

2°) Si f est dérivable à droite de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une demi tangente T_d d'équation : $T_d : y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ et $x \geq a$

3°) Si f est dérivable à gauche de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une demi tangente T_g d'équation : $T_g : y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ et $x \leq a$

Interprétation graphiques : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ ou encore $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$

Si :

Interprétation graphique :

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	C_f admet en point $M(a, f(a))$ un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x = a$ et $y \geq f(a)$
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	alors C_f admet en point $M(a, f(a))$ un demi tangente verticale dirigé vers le bas d'équation : $x = a$ et $y \leq f(a)$

Exemple :

Etudier la dérivabilité de f à droite de point d'abscisse $x = 0$ et interpréter le résultat tel que : $f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

alors la courbe C_f admet en point $M(0,0)$ un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x = 0$ et $y \geq 0$

Approximation affine :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a

Si f est dérivable en a , alors : $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$

On dit que $f(a) + f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$, pour h voisin de zéro.

Exemple :

Trouver une valeur approchée de $(3.98)^3$

$$\text{Soit } f : x \mapsto x^3, a = 4 \text{ et } h = -0.02 \text{ alors } f(4 - 0.02) \approx f(4) - \frac{2f'(4)}{100} \text{ alors } (3.98)^3 \approx 63,04$$

(le calculatrice donne : 63,044792)

Fonction composée

Si f est dérivable sur un intervalle I et g dérivable sur un intervalle $J \subset f(I)$ alors $g \circ f$ est dérivable

sur I et on a pour tout x de I : $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x)$

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ et vérifiant $f(a) = f(b)$.

Si f est dérivable sur $]a,b[$ alors il existe au moins un élément x_0 de $]a,b[$ tel que : $f'(x_0) = 0$.

Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Alors il existe au moins un élément x_0 de $]a,b[$ tel que : $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Sens de variation

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

Si $f'(x) \geq 0$ sur $]a,b[$ alors f est croissante sur $[a,b]$

Si $f'(x) > 0$ sur $]a,b[$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$

Si $f'(x) \leq 0$ sur $]a,b[$ alors f est décroissante sur $[a,b]$

Si $f'(x) < 0$ sur $]a,b[$ alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$

Si $f'(x) = 0$ sur $]a,b[$ alors f est constante sur $[a,b]$

Inégalités des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Si : existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout x de $]a,b[$

$$\text{On a alors : } m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

Si pour tout x de $]a,b[$: $|f'(x)| \leq k$ alors $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

Point d'inflexion

Soit x_0 un réel et f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0 .
Si f'' s'annule en x_0 , en changeant de signe, alors le point $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.

Tableau de dérivé :

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de définition de f'
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} - \left\{ k \frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$f'(x) = a \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(ax+b)$	$f'(x) = a(1 + \tan^2(ax+b))$	$\mathbb{R} - \left\{ k \frac{\frac{\pi}{2} - b}{a} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Opérations sur les dérivées

Lorsque u et v sont des fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Dérivée	Conditions
$u + v$	$u' + v'$	
$k.u$ ($k = \text{constante}$)	$k.u'$	
$u.v$	$u'.v + u.v'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I
u^n ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$n.u'.u^{n-1}$	$u > 0$ sur I si $n \leq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I
$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$	

EXERCICE N°1

On définit la fonction f de période 1 en donnant sur $[0,1[$: $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$.
 f -est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE N°2

Comparer, sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0.9 \tan x$ et $\tan(0.9x)$

EXERCICE N°3

Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, il existe un réel $c \in]p, p+1[$ tel que : $\cos(p+1) = \cos p - \sin c$

EXERCICE N°4

Montrer que :

1°) Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

2°) Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $x \leq \tan x \leq \frac{4}{\pi}x$

3°) Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x$

4°) Pour tout x de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $\frac{\pi}{2} - 2x \leq \cot \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{4} - x$

5°) Pour tout $x > 0$: $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6°) Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$

Indication: $f : \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sin(x)$

EXERCICE N°5

Montrer que : pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $2 \sin x + \tan x \geq 3x$

EXERCICE N°6

Soit $a > 0$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

On considère la fonction polynôme P_n définie par la relation: $P_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - a$.

1°) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution positive et une seule, que l'on notera x_n .
 Montrer que $x_n < a$.

2°) Etudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est monotone.

3°) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

Prouver que $0 \leq \ell \leq 1$.

4°) Montrer que pour tout nombre entier naturel non nul n le nombre x_n est solution de l'équation:

$x^{n+1} - (a+1)x + a = 0$. En déduire que: $\ell = \frac{a}{a+1}$.

EXERCICE N°7

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$\forall x \in \mathbb{R}^+ : f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$

1) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n .

b) Calculer u_1 et u_2 .

c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n \in \left] 0, \frac{2}{3} \right[$

2) a) Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n) .

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3) a) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Donner enfin la valeur de ℓ .

EXERCICE N°8

Soit f une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ (ie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$)

Telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x) = a_n f(x + b_n)$

1°) Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique.

2°) Calculer a_n et b_n en fonction de n , a_1 et b_1 .

3°) Trouver un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses ci-dessus.

EXERCICE N°9 : Soient f et g deux fonctions continues sur un fermé $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, telles que : $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$. ($a < b$)

1°) Montrer que qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que : $f(x_0) = g(x_0)$.

2°) Montrer que qu'il existe $x_1 \in]a, b[$ tel que : $f'(x_1) = g'(x_1)$.

EXERCICE N°10

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, ($a < b$).

On suppose que $\forall x \in]a, b[: g'(x) \neq 0$.

1°) Montrer que l'on a : $g(a) \neq g(b)$.

2°) Soit la fonction h définie sur $[a, b]$ par : $h(x) = f(x) - f(a) - \omega(g(x) - g(a))$ où $\omega \in \mathbb{R}$

Calculer ω pour que l'on ait $h(b) = 0$.

3°) La valeur de ω étant celle de 2°), prouver que : $\exists c \in]a, b[/ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

4°) En déduire que : Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.

5°) Appliquer le résultat pour calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

EXERCICE N°11

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que : si f est paire alors $\exists a \in \mathbb{R} / f'(a) = 0$

2°) Montrer que : si f est impaire alors $\exists b \in \mathbb{R} / f''(b) = 0$.

EXERCICE N°12

On donne un réel $t > 0$ soit la fonction $f_n : x \mapsto x^n - t(1 - x)$

1°) Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation : $f_n(x) = 0$ admet une solution et une seule comprise entre 0 et 1. Soit u_n cette racine.

2°) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f_{n+1}(u_n) = -t(1 - u_n)^2$

3°) En déduire que (u_n) est croissante.

4°) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Théorème :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I . On a alors les propriétés suivantes :

(*) la fonction f est une bijection de I sur $f(I)$

(*) La fonction f^{-1} est une bijection de $f(I)$ sur I et on a : $(x \in I, y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in f(I), x = f^{-1}(y))$

(*) La fonction f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et a la même sens de variations que f .

(*) Les courbes représentatives de f et f^{-1} , dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère ($y = x$)

Si est du plus f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur $f(I)$

Si est du plus f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I alors : $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ pour tout x de I

de $f(I)$

Exemple : Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$.

Montrer que f réalise une bijection de $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$ sur un intervalle J qu l'on précisera.

Correction

Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

On a $\forall x \in I : f'(x) = \frac{-1}{(2x-1)^2} < 0$ alors f est strictement décroissante et continue sur I alors f réalise

une bijection de I sur $J = f(I) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow (-0,5)^+} f(x)[=]\frac{1}{2}, +\infty[$

Pour tout $x \in J : y = f^{-1}(x)$ équivaut à $x = f(y)$ et $y \in I$

équivaut à $x = \frac{y+1}{2y-1}$ et $y \in I$ équivaut à : $2xy + x = y + 1$ et $y \in I$ équivaut à $y = \frac{1-x}{2x-1}$ et $y \in I$

alors pour tout x de $J : f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x-1}$

Théorème

La fonction réciproque de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x^n$ ($n \geq 2$) est appelée fonction racine $n^{\text{ième}}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, le réel $f^{-1}(x)$ est noté $\sqrt[n]{x}$. (lire racine $n^{\text{ième}}$ de x)

$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

(*) f^{-1} est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$

(*) Pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$, on a : $x^n = x$ et $(\sqrt[n]{x})^n = x$

(*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

(*) $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa fonction dérivée est : $x \mapsto \frac{1}{n(\sqrt[n]{x}^{n-1})}$

Exemple : Soit $f(x) = x^2 - 2$

1°) Montrer que f est continue sur l'intervalle $I = [2, +\infty[$

2°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3°) Montrer que f est strictement croissante sur I .

Correction :

1°) La fonction : $g : x \mapsto x - 2$ est continue et positif sur I

La fonction : $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \supset g(I)$

Alors la fonction f est continue sur I car f est comme composée de fonction continues.

2°) on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ donc d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3°) Soit a et b deux élément de I tel que $a < b$.

On a : $a < b \Rightarrow a-2 < b-2 \Rightarrow \sqrt[n]{a-2} < \sqrt[n]{b-2} \Rightarrow f(a) < f(b)$. Alors est strictement croissante sur I .

Résolution d'équation : $x^n = a$

Soit a un réel et n un entier supérieur ou égale à 2.

Si n est impair et $a \geq 0$, l'équation $x^n = a$ admet une unique solution : $\sqrt[n]{a}$

Si n est impair et $a < 0$, l'équation $x^n = a$ admet une unique solution : $-\sqrt[n]{-a}$

Si n est pair et $a \geq 0$, l'équation $x^n = a$ admet comme solutions : $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$

Si n est pair et $a < 0$, l'équation $x^n = a$ n'admet aucune solution.

Théorème

Pour x et $y \in \mathbb{R}_+$, n et p deux entiers vérifiant : $n \geq 2$ et $p \geq 2$ on a

$$\sqrt[n]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p ; \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x} ; \sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x} ; \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} ; \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (y > 0)$$

Théorème

Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier $n \geq 2$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$

Et on a , $f'(x) = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$ pour tout x de I tel que $u(x) \neq 0$



BAC MATHS

2009/2010

Cours et 283 exercices

Elaboré par : ALI AKIR

*Donne des cours particuliers en mathématiques pour
tous les niveaux*

Plus d'informations : Contacter à

GSM : 24 96 24 30

Email : akir.cm@gmail.com

Site Web : <http://maths-akir.midiblogs.com/>



Maths aux lycées, Site éducatif

Téléchargement gratuit

Fiches de cours / Séries d'exercices / Devoirs à la maison / Devoirs de contrôle et de synthèse
Sujets de révision pour le baccalauréat / Plus : Forum de maths, pour répondre à vos questions.



EXERCICE N°1

On pose pour a réel strictement positif la fonction f_a définie sur $[0, a]$ par :

$$\text{Pour tout } x \in [0, a], f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}.$$

1°) Montrer que f_a réalise une bijection de $[0, a]$ sur $[0, \frac{1}{a}]$. On note f_a^{-1} sa bijection réciproque.

2°) Donner le tableau des variations de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.

3°) Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x + 1$

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$

2°) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°) Sur quel ensemble f^{-1} est-elle continue ?

4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

5°) Montrer que l'équation $f(x) = x + 2$ admet une solution unique $\alpha \in \left] \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right[$

EXERCICE N°3

Soit $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

1°) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2°) Etudier la dérivabilité de f sur D_f .

3°) Montrer que f est une bijection de $[0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera

4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

EXERCICE N°4

Soit $f : x \mapsto f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1°) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

2°) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera

3°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

4°) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(1)$.

EXERCICE N°5

On considère la fonction f définie sur $[-1, 1] - \{0\}$ par : $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

On note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathbb{R}$.

Partir A

1°) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et interpréter les résultats obtenus

2°) Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse $x=1$ et interpréter le résultat obtenu.

3°) Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse $x=-1$ et interpréter le résultat obtenu.

4°) Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[- \{0\} : f'(x) = \frac{-1}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$

5°) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

6°) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

7°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

8°) Représenter dans le même repère R la courbe C et C' de f^{-1} .

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f(\cos x)$

1°) Montrer que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = 1 + \tan(x)$

2°) Etudier le sens de variation de la fonction g .

3°) Montrer que l'équation : $g(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et vérifier que :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

5°) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle K que l'on précisera

6°) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et $\forall x \in K : (g^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1°) Montrer que f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

2°) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat obtenu.

3°) Dresser le tableau de variation de f .

4°) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5°) Montrer que pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \frac{1 + x^2}{2x}$

6°) On désigne par C et C' les courbes respectives de f et f^{-1} dans même repère orthonormé. Montrer que la droite $D : y = 2x$ est une asymptote oblique à C .

7°) Tracer C et C' .

8°) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$

a) Montrer que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}$

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle K que l'on précisera.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et pour tout x de K : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1 + x^2}$

EXERCICE N°7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \begin{cases} x^3 + 12x + 1 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \sqrt{1 + x^2} - x & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$

1°) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2°) Etudier la continuité de f sur D_f

3°) Etudier la dérivabilité de f en 0.

4°) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .

5°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 0]$ une solution unique α .

Vérifier que $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

6°) Soit g la restriction de f sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g .

i) Etudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur J
ii) Expliciter $g^{-1}(x)$; pour tout x de J .

EXERCICE N°8

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \frac{1}{2} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0 \end{cases}$

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur sa domaine de définition.

2°) Soit g la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

a- Montrer que g est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1} , puis expliciter $(g^{-1})'(x)$.

3°) a- Montrer que l'équation $g(x) + x = 0$ admet une solution unique dans $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

b- En déduire que le point $I(-\alpha, \alpha) \in (\zeta g^{-1}) \cap D$ où (ζg^{-1}) est la courbe représentative de g^{-1} dans un repère orthonormé et D est la droite dont une équation cartésienne est : $y = -x$.

EXERCICE N°9

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \tan x$.

1°) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit h la fonction réciproque de f . Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3°) Soit φ la fonction définie sur $[0, 1[$ par : $\varphi(x) = h\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a- Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.

b- En déduire que : $\forall x \in [0, 1[, \varphi(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x) + h(x)$.

4°) Soit g la fonction définie sur $[0, 1[$ par : $g(x) = h\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - (1+2x)h(x)$.

a- Montrer que g est deux fois dérivable sur $[0, 1[$ et calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b- Etudier les variations de g sur $[0, 1[$ puis en déduire celles de g .

c- En déduire qu'il existe un unique réel $c \in]0, 1[$ tel que $c = \tan \frac{\pi}{8c}$.

5°) a- Montrer que l'équation $h(2-x) = 2h(x)$ admet au moins une solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

b- Montrer que α vérifie $\alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$.

EXERCICE N°10

Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

1°) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f .

3°) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, définir ce prolongement.

EXERCICE N°11

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \sqrt[3]{2 \cos x - 1}$

- 1°) Etudier la dérivabilité de f sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
- 2°) Montrer que f est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ sur $[0, 1]$.
- 3°) Soit f^{-1} la réciproque de f , calculer $(f^{-1})'(\sqrt[3]{\sqrt{3}-1})$
- 4°) Préciser le domaine K de la dérivabilité de f^{-1} .
- 5°) Déterminer l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour tout x de K .

EXERCICE N°12

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$.

- 1°) Soit $x \in]0, +\infty[$. Montrer que pour tout $\beta \in [x, x+1]$ on a : $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 1 \leq f'(\beta) \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 1$
- 2°) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} + 1 \leq f'(x) \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 1$
- 3°) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$

EXERCICE N°13

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ x + \sqrt{2x-1} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

- 1°) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$
- 2°) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
- 3°) Etablir que : $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{\frac{x}{2}} & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ x+1-\sqrt{2x-1} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

EXERCICE N°14

Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

- 1°) Etudier les variations de f
- 2°) Montrer que f est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on déterminera.
- 3°) On désigne par g la fonction réciproque de f . Calculer : $g(1)$, $g(\sqrt{2})$ et $g(2)$.
- 4°) Montrer que g est dérivable sur I et que : $\forall x \in I : g'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$
- 5°) Soit h la fonction numérique définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = f(x) + \frac{1}{4}$

Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique x_0 telle que : $\frac{\pi}{3} < x_0 < \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE N°13

Partie I : On considère la fonction g définie sur $[0,1[$ par : $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{1-x^2}}$.

1°) Montrer que g n'est pas dérivable à droite en 0.

2°) Étudier les variations de g et en déduire que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I que l'on déterminera.

3°) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in I$

4°) Vérifier que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[: g\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\tan x}$.

Partie II : On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = 2\sqrt{\tan x} - 1$

1°) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2°) Dresser le tableau de variations de f et en déduire que f est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

3°) Montrer que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[: f'(x) > 1$.

4°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ une solution unique α et vérifier que

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$$

5°) En déduire le signe de : $f(x) - x$

6°) On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{\pi}{4} \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N} : u_n \geq \alpha$

b- Montrer que la suite u est décroissante.

c- En déduire que u est convergente et donner sa limite.

Partie III : On considère la fonction φ définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \sqrt{\tan x}$

1°) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J' que l'on déterminera.

2°) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$ on a : $(\varphi^{-1})'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

3°) Calculer $\varphi^{-1}(1)$ et montrer que pour tout x de $]0, +\infty[: \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE N°14

Partie I : Soit la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par : $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1°) Étudier les variations de f .

2°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $] -1, 1[$ une solution unique α et que $\alpha > \frac{4}{5}$

3°) En déduire le signe de $f(x) - x$.

4°) Montrer que f réalise une bijection de $] -1, 1[$ sur $\mathbb{R}$.

5°) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$

Partie II : Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 \in [0, \alpha] \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

1°) a- Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$.

b- Montrer que la suite u est croissante.

c- En déduire que u est convergente et calculer sa limite.

2°) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a : $\left| (f^{-1})'(x) \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$.

4°) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n |u_0 - \alpha|$. Retrouver $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Partie III : Soit la fonction h définie sur $] -1, 1[$ par : $h(x) = f\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$.

1°) Montrer que pour tout x de $] -1, 1[$: $h(x) = -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

2°) Montrer que h établit une bijection de $] -1, 1[$ sur $\mathbb{R}$.

3°) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi(1 + (x+1)^2)}$.

4°) Soit pour tout x de $\mathbb{R}^*$ la fonction H tel que : $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)$.

a- Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $H'(x)$.

b- Calculer $H\left(\frac{1}{2}\right)$ et $H\left(-\frac{1}{2}\right)$. En déduire que :
$$\begin{cases} H(x) = 1 & \text{si } x > 0 \\ H(x) = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

5°) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $v_n = \sum_{k=1}^n \left(h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right) \right)$ et $w_n = \frac{v_n}{n}$.

a- Donner la valeur de $H\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^* : h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$

b- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^* : v_n = -1 + h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$. En déduire que la suite w est convergente et donner sa limite.

Primitives

On note par I : un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I

Définition :

Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que : pour tout x de I on a : $F'(x) = f(x)$

Théorème 1

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I

Théorème 2

Soit f une fonction continue sur I , alors f admet une infinité de primitives sur I et si F est l'une d'entre elles, toute autre primitive G de f sur I est définie par : $G(x) = F(x) + \text{constante}$

Théorème 3

Soit f une fonction continue sur I . x_0 est un réel donné de I et y_0 est un réel donné.

Alors il existe une primitive G de f sur I et une seule telle que $G(x_0) = y_0$

Théorème 4

F et G sont des primitives respectives de f et g sur I , alors : $aF + bG$ est une primitive de $af + bg$ sur I

Primitives des fonctions usuelles

F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I et a, b, ω des réels avec $\omega \neq 0$

f	I	F
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$	$x \mapsto \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \sin(\omega x + \phi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \phi) + c$
$x \mapsto \cos(\omega x + \phi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \phi) + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$x \mapsto \tan x + c$

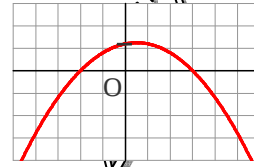
Calcul de primitives

F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I et u et v deux fonctions dérivables sur I .

EXERCICE N°1

La parabole ci-contre est la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré f dans un repère orthogonal.

($\|i\| = 1$; $\|j\| = 5$)



Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une courbe ne représente pas une primitive de la fonction f . Laquelle ? (justifier la réponse)

Figure 1

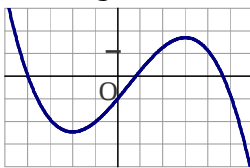


Figure 2

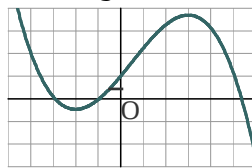
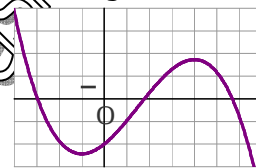


Figure 3



EXERCICE N°2

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I .

1°) $f : x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; $I = \mathbb{R}$

2°) $f : x \mapsto (2x+1)(x^2+x+1)$; $I = \mathbb{R}$

3°) $f : x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

4°) $f : x \mapsto (2x+1)\sin(x^2+x+1)$; $I = \mathbb{R}$

5°) $f : x \mapsto \sin x + x \cos x$; $I = \mathbb{R}$

6°) $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $I =]-1, 1[$

7°) $f : x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$; $I =]0, \pi[$

8°) $f : x \mapsto \cos x \cdot \cos 2x$; $I = \mathbb{R}$

9°) $f : x \mapsto \frac{x \cos x + \sin x}{x^2}$; $I =]0, +\infty[$

10°) $f : x \mapsto \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; $I =]-2, 0[$

EXERCICE N°3

1°) Déterminer trois réels a , b et c tels que : $x^2 = a.(x-1)^2 + b.(x-1) + c$.

2°) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2(x-1)^{2009}$

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \cdot \cos x$.

1°) Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x \cdot \sin x$.

2°) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = a \cos x + b \cos^3 x$ où a et b deux réels.

1°) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

2°) Comparer $f(x)$ et $f''(x)$ En déduire les primitives de f dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{8x}{(x^2 - 4)^2}$

1°) Prouver qu'il existe deux réels a et b telles que : pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$: on ait :

$$f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}$$

2°) Déduire les primitives sur $] -2, 2[$ de f .

EXERCICE N°7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty ; 2[$ par : $f(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

1°) Déterminer les réels a et b , tels que pour tout réel x de l'intervalle $I =]-\infty ; 2[$: $f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$

2°) En déduire la primitive de f sur l'intervalle $I =]-\infty ; 2[$ qui s'annule en $x = 1$.

EXERCICE N°8

1°) Déterminer une primitive sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\cos^3 x}$

2°) On considère la fonction G , définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $G(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, et que : $G'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$

3°) En déduire une primitive, sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x}$

EXERCICE N°9

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{(3-2x)^2}{4} - \frac{3(3-2x)}{2} + (x+1)\sqrt{3-2x}$

1°) Montrer que : $x^2 = \frac{(3-2x)^2}{4} - \frac{3(3-2x)}{2}$

2°) Déterminer alors la primitive de f dans $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ qui s'annule en 1

EXERCICE N°10

1°) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On notera alors F la primitive de f venant $F(0)=0$.

2°) Étudier la parité de F et préciser le sens de variations de F sur $\mathbb{R}$.

3°) Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$

4°) En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout $x > 0$, on ait : $F(x) = c - F\left(\frac{1}{x}\right)$

5°) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = c$

6°) On pose, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan x$.

a- Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto F \circ g(x) - x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et calculer $\varphi'(x)$.

b- En déduire que, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $F \circ g(x) = x$.

c- Déterminer alors $F(1)$, $F(\sqrt{3})$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

d- Montrer que $c = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE N°11

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$.

1°) a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

2°) Soit F la primitive de f sur $[0 ; +\infty[$ telle que $F(0) = 0$. On ne cherchera pas à exprimer $F(x)$.

a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur $[0 ; +\infty[$?

b) Quelles sont les variations de F sur $[0 ; +\infty[$?

3°) On définit sur $[0 ; +\infty[$ les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$ et $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$.

a) Etudier, sur $[0 ; +\infty[$, les variations de H et K .

b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

c) En déduire la limite de F en $+\infty$.

4°) a) Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique α sur $[0 ; +\infty[$.

b) Montrer que l'on peut préciser : $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.

ALI AKIR***GSM:24962430***ALI AKIR***GSM:24962430



BAC MATHS

2009/2010

Cours et 283 exercices

Elaboré par : ALI AKIR

*Donne des cours particuliers en mathématiques pour
tous les niveaux*

Plus d'informations : Contacter à

GSM : 24 96 24 30

Email : akir.cm@gmail.com

Site Web : <http://maths-akir.midiblogs.com/>



Maths aux lycées, Site éducatif

Téléchargement gratuit

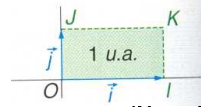
Fiches de cours / Séries d'exercices / Devoirs à la maison / Devoirs de contrôle et de synthèse
Sujets de révision pour le baccalauréat / Plus : Forum de maths, pour répondre à vos questions.



Notion d'intégrale d'une fonction

Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on définit les points I , J et K par $\vec{OI} = \vec{i}$, $\vec{OJ} = \vec{j}$ et $OIKJ$ rectangle.

L'aire du rectangle $OIKJ$ définit alors l'unité d'aire (u.a.).



Aire et intégrale d'une fonction positive

Définition

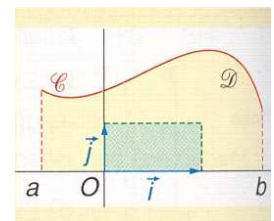
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ et C sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

L'intégrale de a à b de f est le réel noté $\int_a^b f(x)dx$, égal à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine D délimité par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarque

a et b sont les bornes de l'intégrale et x est une variable muette : elle n'intervient pas dans le résultat. On peut la remplacer par les lettres t ou u , ainsi :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$



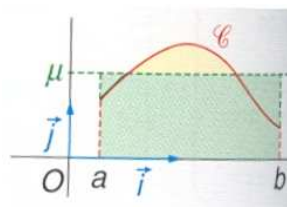
Valeur moyenne

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$. La valeur moyenne de f sur

$[a ; b]$ est le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ est donc le réel μ tel que le rectangle de dimensions μ et $b - a$ soit de même aire que le domaine D délimité par la courbe représentant f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$



Intégrale et primitive

Intégrale d'une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $[a ; b]$

Théorème :

Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $I = [a ; b]$. On note C , sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

On définit sur $[a ; b]$ la fonction $A : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ et on fixe x_0 dans $[a ; b]$

la fonction f est dérivable sur I et sa dérivée est f'

Primitive d'une fonction continue

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$

*) La fonction Φ définie sur $[a ; b]$ par $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est : L'unique primitive de f sur $[a ; b]$ qui s'annule en a

Remarques

• La fonction Φ , définie dans le théorème, est donc dérivable sur $[a ; b]$, de dérivée f .
Ce résultat montre que toute fonction continue sur $[a ; b]$ admet une, donc des primitives sur $[a ; b]$.
Plus généralement, toute fonction continue sur un intervalle I quelconque admet des primitives

• Soit F une primitive quelconque de f sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

*) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(J) \subset I$. Alors la fonction F définie sur J par $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $F'(x) = u'(x)f(u(x))$, pour tout x de J .

*) Soit I un intervalle centré en 0 et soit a un réel de I .

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$
- Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
- Si f périodique de période T alors $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a, b et c de I , on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel.

Pour tous réels a et b de I , on a :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{et} \quad \int_a^b (k.f)(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$$

Intégrales et inégalités

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b deux réels appartenant à I .

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur l'intervalle I , alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.	Si $a \leq b$ et $f \leq 0$ sur l'intervalle I , alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.
Si $a \geq b$ et $f \geq 0$ sur l'intervalle I , alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.	Si $a \geq b$ et $f \leq 0$ sur l'intervalle I , alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Conservation de l'ordre

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a ; b]$. Si $f \leq g$ sur $[a ; b]$, c'est-à-dire si, pour tout réel x de

$$[a ; b], f(x) \leq g(x) \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et a et b deux réels de I .

- Si $a \leq b$ et s'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$, pour tout réel x de $[a ; b]$

alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

➤ S'il existe un réel M positif tel que $|f| \leq M$ sur I , alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M |b-a|$

Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I . Pour tout

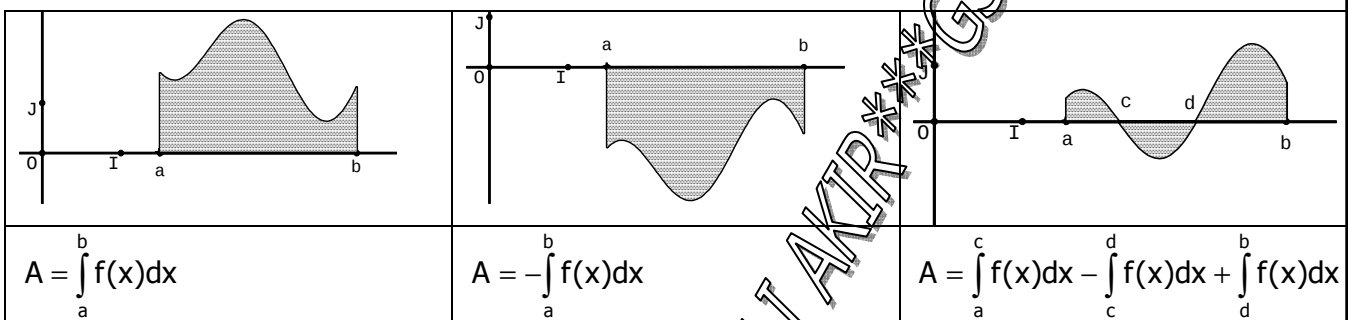
réels a et b de I , on a : $\int_a^b u'(x) \times v(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx$

Aire d'un domaine compris entre deux courbes

Théorème :

Soit f et g deux fonctions continues, a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

l'aire en u.a. du domaine limité par les courbes C_f et C_g sur $[a, b]$ est le réel $\int_a^b |g(t) - f(t)| dt$



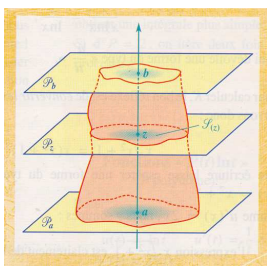
Volume d'un solide

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O, J, J, K) et l'unité de volume (u.v.) est le volume du cube construit sur (O, J, J, K) .

Théorème

On considère un solide (Σ) limité par les plans parallèles d'équations :

$$z = a \text{ et } z = b \quad (a \leq b)$$



$$z = a \text{ et } z = b \quad (a \leq b).$$

Pour tout z ($a \leq z \leq b$), on note

- P_z le plan perpendiculaire à (Oz) et de cote z ;
- S_z l'aire de la section du solide par le plan P_z .

Lorsque S est une fonction continue sur $[a, b]$, le volume V du solide est calculé (en u.v.) par :

$$V = \int_a^b S(z) dz$$

❖ Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $AB = \{M(x, y) / y = f(x) \text{ et } a \leq x \leq b\}$ autour de l'axe (O, i) est le réel :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

EXERCICE N°1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^4 |t-2| dt, \int_{-1}^2 (x-|x-1|) dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx, \int_{-1}^1 \frac{x^{2009}}{x^{14}+1} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt, \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin(t) dt, \int_0^1 t\sqrt{1-t} dt, \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x - \sin x}{x} dx,$$

$$\int_0^1 (2t+1) \sin \pi(t^2+t+1) dt$$

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^4 x$

1°) Exprimer $\sin^2 x$ ainsi que $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$.

2°) Exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos 2x$ et $\cos 4x$

3°) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x) dx$

EXERCICE N°3

1°) Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée f' est continue sur $[a, b]$.

Montrer que $\int_a^b x f'(x) dx + \int_a^b f(x) dx = b f(b) - a f(a)$

2°) Calculer $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx$ et en déduire $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4\sqrt{x} - x$ pour tout x de $[0, 4]$.

1°) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que vous calculez.

2°) Soit $a \in [0, 4]$, calculer les intégrales : $I(a) = \int_0^a f(x) dx$ et $J(a) = \int_0^{f(a)} f^{-1}(y) dy$

3°) Vérifier que $I(a) + J(a) = a f(a)$. Interprétez géométriquement cette dernière relation.

EXERCICE N°5

On considère l'intégrale : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

1°) Justifier l'existence de I_n et déterminez une relation de récurrence de I_n et I_{n-1} pour tout n de $\mathbb{N}$

2°) Calculer $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$ et I_1

3°) Calculer I_n en fonction de I_1

4°) En faisant un changement de variable et en utilisant la formule du binôme, donnez une autre expression de I_n .

EXERCICE N°6

Dans le plan P orienté par un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$.

Etudier f et construire sa courbe ζ_1 dans P .

2°) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $g(x) = \int_0^{2 \cos x} \sqrt{4-t^2} dt$.

a) Montrer que g est dérivable sur $[0, \pi]$ et que $g'(x) = -4 \sin^2 x$.

b) Calculer $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de x .

3°) On note par ζ_2 l'image de ζ_1 par la symétrie centrale de centre O et on pose $\zeta = \zeta_1 \cup \zeta_2$. Construire ζ_2 et donner une équation cartésienne de ζ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE N°7

La suite de Wallis définie par : $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$ où n est un entier naturel

1°) Calculer w_0 et w_1

2°) Montrer que la suite (w_n) est décroissante

3°) Montrer, pour tout entier naturel n : $w_n \geq 0$. En déduire que la suite (w_n) est convergente.

4°) Montrer que pour tout n de N : $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$

5°) Montrer que pour tout n de N : $w_{2n} = \frac{\pi \cdot C_{2n}^n}{2 \times 4^n}$ et $w_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

6°) Montrer pour tout entier naturel n, $0 < \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} \leq 1$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_{2n+1}}{w_{2n}} = 1$

7°) Etablir la formule de Wallis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

8°) Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante.

EXERCICE N°8

Soit $I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$.

1°) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $(2n+1)I_n = -2nI_{n-1}$.

2°) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

EXERCICE N°9

p et q étant deux nombres entiers positifs ou nuls, on pose : $B(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1°) Comparer $B(p, q)$ et $B(q, p)$.

2°) Etablir la relation : $B(p, q) = \frac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$ ($p \geq 1$).

3°) Calculer $B(0, n)$ pour tout n appartenant à N ; en déduire $B(p, q)$.

EXERCICE N°10

Pour n entier naturel non nul on définit la suite (S_n) par : $S_n = 1 + \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \dots + \frac{1}{n^{1/3}}$

1°) Justifier pour k entier naturel non nul l'encadrement : $\frac{1}{(k+1)^{1/3}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq \frac{1}{k^{1/3}}$

2°) En déduire l'encadrement : $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{dx}{x^{1/3}} + 1$.

3°) que peut-on dire de la suite (S_n) ?

4°) A l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) définie par :

$T_n = 1 + \frac{1}{2^{4/3}} + \frac{1}{3^{4/3}} + \dots + \frac{1}{n^{4/3}}$ est convergente.

EXERCICE N°11

On définit la suite u par : $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2}(t) dt$.

1°) a) Rappeler la valeur de la dérivée de la fonction tangente sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

b) Calculer alors u_0 .

2°) Montrer que la suite u est décroissante.

3°) Montrer que quel que soit n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+3}$.

4°) En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $\frac{1}{2(2n+3)} \leq u_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} 2nu_n$.

5°) On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$

b) En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N°12

On considère la fonction f définie par : $f(y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(xy)}{x} dx$.

1°) Justifier l'existence de f pour tout y de $\mathbb{R}$.

2°) Montrez, en utilisant la formule de la moyenne que, si a et b deux réels tels que $a < b$, il existe $c \in [a, b]$, tel que $\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos c$.

3°) Montrez les inégalités $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ et $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$, pour tout a et b de $\mathbb{R}$.

4°) Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On pose $A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(xy_0) dx$.

Montrer que $\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} - A \right) = 0$. En déduire que f est dérivable au point y_0 et exprimer $f'(y_0)$.

EXERCICE N°13

Soient f et g des fonctions continues sur $[a, b]$.

1°) a- Quel est le signe de $\int_a^b [f(t) + xg(t)]^2 dt$, où x désigne un nombre réel ?.

b- En déduire l'inégalité suivante, appelée de **Schwarz** : $\left[\int_a^b f(t)g(t) dt \right]^2 \leq \int_a^b [f(t)]^2 dt \times \int_a^b [g(t)]^2 dt$

2°) Démontrer que si f et g sont positives sur $[a, b]$ ($a < b$) et pour tout x de $[a, b]$: $f(x) \times g(x) \geq 1$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \geq (b - a)^2$$

EXERCICE N°14

Soient f et g des fonctions continues sur $[a, b]$. ($a < b$)

1°) Justifier, l'existence de deux réels m et M tel que, pour tout x de $[a, b]$: $m \leq f(x) \leq M$

2°) Démontrer que si $g(x)$ garde un signe constante sur $[a, b]$ alors $m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \leq M$

EXERCICE N°15

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$.

1°) Justifier, l'existence d'un réel M tel que, pour tout x de $[a, b]$: $|f(x)| \leq M$

Par la suite on suppose que $a < b$ et $M > 0$.

2°) Prouver que $\int_a^b |f(t)|^n dt \leq (b - a)M^n$.

3°) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b |f(t)|^n dt} \leq M$

4°) Démontrer que quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tel que, pour tout x de $[\alpha, \beta]$: $|f(x)| \geq M - \varepsilon$.

5°) En déduire que $\int_a^b |f(t)|^n dt \geq (M - \varepsilon)^n (\beta - \alpha)$

EXERCICE N°16

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(a) = \int_0^1 \sqrt{1-x^a} dx$.

1°) Prouver que , pur tout $x \in [0,1]$: $1-x^a \leq \sqrt{1-x^a} \leq 1 - \frac{1}{2}x^a$

2°) En déduire que : $\frac{a}{1+a} < f(a) < \frac{2a+1}{2a+2}$. Calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a)$

EXERCICE N°17

1°) Soit $C = \{(x, y) / y = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox) . Calculer le volume de S .

2°) Soit $C = \{(x, y) / xy = 1, 1 \leq 2x \leq 2\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox) .

Calculer le volume de S .

3°) Déterminer le volume du cylindre engendré par les rotations d'axe (Ox) du segment de droite : $y = R$ et $0 \leq x \leq h$ avec $h, R \in \mathbb{R}_+^*$

EXERCICE N°18

1°) Calculons le volume de S , définie par : $\begin{cases} |x| + |y| \leq 2 - \frac{2}{3}z \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$

2°) Calculons le volume de S , définie par : $\begin{cases} \sup(|x|, |y|) \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$

3°) Calculons le volume de S , définie par : $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

4°) Calculons le volume de S où S est une sphère de rayon R .

EXERCICE N°19

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et on pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$

1°) Vérifier que f est décroissante et positive

2°) Montrer que (s_n) est décroissante.

3°) Calculer $\int_1^n f(t)dt$, $n \geq 1$ et en déduire que $0 \leq \int_1^n f(t)dt \leq \frac{1}{2}$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_1^n f(t)dt \right)$.

4°) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$: $\int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt$

5°) En déduire que pour $n \geq 1$: $\int_2^{n+1} f(t)dt \leq s_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt$

6°) En déduire que (s_n) est convergente et donner un encadrement de sa valeur.

EXERCICE N°20

Soit f une fonction définie continue et croissante sur $[0, +\infty[$.

Soient pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^{1+\frac{1}{n}} f(x)dx$ et $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1°) Vérifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^1 f(x)dx$

2°) Montrer que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$ on a : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

3°) En déduire l'encadrement : $I_n + \frac{1}{n} \left[f(0) - f\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \leq s_n \leq I_n$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \int_0^1 f(x)dx$

4°) Application : On prend $f(x) = x^p$ où p un entier tel que $p \geq 2$.

Etablir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$

EXERCICE N°21

Pour tout entier naturel n , on définit les nombres x_n et y_n par : $x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt$, $y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$

1°) Calculer x_0 et x_1 .

2°) Montrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont décroissantes et qu'elles sont positives. On admettra que ces suites convergent.

3°) Montrer, à l'aide de deux intégrations par partie, que pour tout entier naturel n , on a :

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1), \text{ et } y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1),$$

En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \cos(1)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n = \sin(1)$

EXERCICE N°22

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On pose $s_n = 1 + e^{it} + \dots + e^{i(n-1)t}$, $t \in]0, \pi[$.

a) Donner en fonction de n et t , une autre expression de s_n

b) En déduire que :
$$\sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} \cos\left(\frac{n+1}{2}\right)t$$

c) En déduire que
$$\sum_{k=1}^n \cos kt = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos nt \, dt$.

a) Calculer $\int_0^\pi t \cos(nt) \, dt$

b) Calculer $\int_0^\pi t^2 \cos(nt) \, dt$

c) En déduire que $I_n = \frac{1}{n^2}$

3°) Montrer que :
$$\int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n \cos kt\right) \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

4°) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, ϕ une fonction dérivable sur $[0, \pi]$ et ϕ' sa dérivée, est continue sur $[0, \pi]$.

a) Intégrer, une fois, par parties $\int_0^\pi \phi(t) \sin(xt) \, dt$.

b) Montrer que :
$$\left| \int_0^\pi \phi'(t) \cos(xt) \, dt \right| \leq \int_0^\pi |\phi'(t)| \, dt$$

c) En déduire que
$$\left| \int_0^\pi \phi(t) \sin(xt) \, dt \right| \leq \frac{1}{x} \left[|\phi(0)| + |\phi(\pi)| + \int_0^\pi |\phi'(t)| \, dt \right]$$

d) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \phi(t) \sin(xt) \, dt = 0$

5°) Vérifier que pour $x \in [0, \pi]$:
$$1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

6°) On pose $\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2\pi} - t & \text{si } t \in]0, \pi] \\ \sin \frac{t}{2} & \text{si } t = 0 \\ -2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

- Montrer que φ est continue sur $[0, \pi]$
- On suppose que φ est dérivable sur $[0, \pi]$ et que sa dérivée φ' est continue sur $[0, \pi]$.
- En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$

ALI AKIP***GSM:24962430***ALI AKIP***GSM:24962430

Définition

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est définie sur $]0, +\infty[$, prend la valeur 0 en $x = 1$, est continue sur $]0, +\infty[$ et admet pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$

Soit a et b deux réels strictement positifs et $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

$\ln(a.b) = \ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln a$
$\ln(a_1.a_2...a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$	$\ln(a^n) = n \ln a$	$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

- $\ln x < 0$ si et seulement si $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$ si et seulement si $x = 1$
- $\ln x > 0$ si et seulement si $x \in]1 ; +\infty[$
- La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

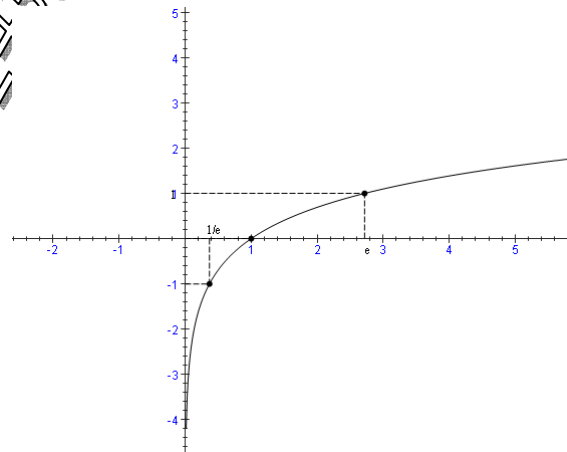
Soit n et m deux entiers naturels non nuls

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^m \ln^n x = 0$

Tableau de variations et courbe de $\ln$

la fonction $\ln$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ donc il existe un unique réel, noté e , vérifiant $\ln e = 1$.

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		+
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$



Dérivées et primitives

1°) Dérivée de $\ln u$

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$, notée $\ln u$, est dérivable sur I et on a : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

2°) Primitive de $\ln u$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I qui ne s'annule pas sur I

La primitive sur l'intervalle I de la fonction $\frac{u'}{u}$ est la fonction $\ln |u| + c$

3°) Primitive de $x \rightarrow \ln x$

La fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Fonction logarithme décimale :

C'est la fonction $\log$, définie $]0, +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$,

($\log 10 = 1, \log 10^x = x$)

ALI AKIP***GSM:24962430***ALI AKIP***GSM:24962430

EXERCICE N°1

1°) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x \ln(x) - x + 1$.

- Etudier le sens de variations de g
- En déduire le signe de g .

2°) On considère la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$

- Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 1 .
- Dresser le tableau de variation de f .
- Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité : 2cm)

EXERCICE N°2

1°) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{2}$

- Etudier les variations de f
- En déduire que pour tout $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)$

2°) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

- Etudier les variations de f
- En déduire que pour tout $x \geq 0$: $\ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

3°) Etudier la limite éventuelle en 0^+ de $\frac{\ln(1+x)}{x^2}$

EXERCICE N°3

Soit f définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = (1-x^2) \ln(x+1)$. Montrer que f est continue. Etudier la parité de f et montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[-1, 1]$.

EXERCICE N°4

Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ par $g(x) = \frac{x}{x-1}$ et prolongée par continuité en 0 et en 1 .

1°) Que valent $g(0)$, $g(1)$?

2°) Etudier la branche infinie de g .

EXERCICE N°5

Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. $g_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \ln^n\left(\frac{1}{x}\right)$

1°) Montrer g_n que est continue sur $]0, 1[$

2°) Montrer que g_n admet un prolongement par continuité f_n sur $[0, 1]$.

EXERCICE N°6

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $] -1, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

- Etudier le sens de variation des fonctions h_n .
- Calculer $h_n(0)$ puis en déduire le signe de h_n .
- Etude du cas particulier $n = 1$.
 - Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $] -1, +\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
 - En déduire les variations de la fonction f_1 sur $] -1, +\infty[$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

a. Justifier la dérivabilité de f_n sur $] -1, +\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

b. En déduire les variations de f_n sur $] -1, +\infty[$. On précisera les limites aux bornes.

EXERCICE N°7

I. On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1°) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$.

2°) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \ln(n) + 1$.

II. On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

2°) a) Pour tout entier k , exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2 .

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

3°) a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}$$

b) En utilisant la partie 1, établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE N°8

Soit $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in]1, +\infty[f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$.

1°) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

2°) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq 3$: $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ on note $S_n = \sum_{k=2}^n f(k)$.

3°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$: $S_n - \frac{1}{2 \cdot \ln(2)} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2} \ln(2)$$

c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))}$.

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ on note : $u_n = S_n - \ln(\ln(n+1))$ et $v_n = S_n - \ln(\ln(n))$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$: $0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$

b) En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près

EXERCICE N°9

On pose, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$.

1)a. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{p+1}$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 1 + \ln(n)$.

2°) On considère la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = x(1 + \ln(x)) \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que φ_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3°) Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n non nul, on pose : $\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt$.

a. Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ la fonction φ_n est parfaitement définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $\varphi_n(0)$?

b. Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^* : \varphi_n(x) = x^n (a_n + b_n \ln x)$.

On montrera que : $\forall n \in \mathbb{N}^* a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2}$ et $b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1}$.

5°) Calculer b_n .

6°) Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $c_n = n! a_n$.

a. Montrer que $c_n = 2 - u_n$.

b. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $|c_n| \leq 1 + \ln(n)$.

c. Conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

EXERCICE N°10

1°) Soit $x > -1$. Démontrer : $\ln(1+x) \leq x$.

2°) Soit k dans $]0, 1[$ et soit (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n} \ln(1+k^n)$.

a) Montrer que (u_n) est croissante.

b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)$ est majorée.

c) Montrer que (u_n) est convergente.

EXERCICE N°11

Soit u et v les deux suites définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$

Montrer que u et v sont deux suites adjacentes. On sera amené à étudier les VARIATIONS, puis le

SIGNE des fonctions f et g définies par : $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$; $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{1}{x+1}$.



BAC MATHS

2009/2010

Cours et 283 exercices

Elaboré par : ALI AKIR

*Donne des cours particuliers en mathématiques pour
tous les niveaux*

Plus d'informations : Contacter à

GSM : 24 96 24 30

Email : akir.cm@gmail.com

Site Web : <http://maths-akir.midiblogs.com/>



Maths aux lycées, Site éducatif

Téléchargement gratuit

Fiches de cours / Séries d'exercices / Devoirs à la maison / Devoirs de contrôle et de synthèse
Sujets de révision pour le baccalauréat / Plus : Forum de maths, pour répondre à vos questions.



Définition et propriétés

On appelle fonction exponentielle (noté e^x) la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

*) Pour tout réel x et pour tout réel $y > 0$, : $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

*) Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$

*) Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$

*) Pour tout réel x : $e^x > 0$

*) Pour tout réel x : $(e^x)' = e^x$

Soit deux réels a et b

$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$	Pour tout entier n : $e^{na} = (e^a)^n$
Pour tout entier $q \geq 2$: $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$			Pour tout entier $q \geq 2$ et tout entier p : $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$

Les limites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\forall m, n \in \mathbb{N}^* : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{nx}}{x^m} = +\infty$	$\forall m, n \in \mathbb{N}^* : \lim_{x \rightarrow -\infty} x^m e^{nx} = 0$

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

*) La fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$, $x \in I$

*) Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Puissances

Soit un réel $a > 0$. Pour tout réel b , on pose $a^b = e^{b \ln(a)}$

Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tous réels c et d :

$a^{c+d} = a^c \times a^d$	$(a^c)^d = a^{cd}$	$a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d}$	$a^c \times b^c = (ab)^c$	$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$
----------------------------	--------------------	-----------------------------	---------------------------	--

Définition et propriétés

Soit un réel $a > 0$.

*) On appelle fonction exponentielle de base a la fonction $x \mapsto a^x$.

*) La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto (\ln a)a^x$

*) Si $a > 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

*) Si $0 < a < 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

Définition et propriétés

Soit r un rationnel

*) On appelle fonction puissance r la fonction $x \mapsto x^r = e^{r \ln(x)}$, $x > 0$

*) Si $r > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = 0$

*) Si $r < 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^r = +\infty$

*) La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto rx^{r-1}$



) Soit r un rationnel différent de -1 . les primitives sur $\mathbb{R}_+^$ de la fonction $x \mapsto x^r$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + k, k \in \mathbb{R}$.

Théorème

Soit r un rationnel strictement positif.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$
--	--	--

ALI AKIR***GSM:24962430***ALI AKIR***GSM:24962430



EXERCICE N°1

Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$ si $t > 0$ et $g(0) = 1$

1°) a) Établir que g est continue en 0.

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2°) a) Pour tout $t > 0$, calculer $g'(t)$.

b) Prouver que pour tout $t \geq 0$, $1 + t \leq e^t$.

c) En déduire le signe de g' et le sens de variation de g (on ne demande pas de construire la courbe représentative de g).

3°) On se propose d'étudier la dérivabilité de g en 0. À cet effet on introduit la fonction h définie sur

$$[0, +\infty[\text{ par } : h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$$

a) Calculer h' et h'' , ainsi que les valeurs de $h(0)$ et $h'(0)$.

b) Prouver que pour tout $t \geq 0$: $0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}$ (I)

pour cela, on établira d'abord que $0 \leq h''(t) \leq t$ et on en déduira un encadrement de h' et de h .

c) Déduire de la relation (I) un encadrement de $\frac{1 - e^{-t} - t}{t^2}$. Prouver finalement que g est dérivable en 0 et donner $g'(0)$.

4°) Construire la courbe représentative C de g , le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE N°2

Partie A.

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$ et on appelle C la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) Étudier les variations de f . Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x .

3°) Tracer la courbe C .

Partie B.

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $g(x) = \ln \left| e^{\frac{x}{2}} - e^x \right|$.

On note G la courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) Préciser les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.

2°) Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$. Dresser le tableau de variation de g .

3°) Démontrer que pour tout x réel strictement positif : $g(x) - x = \ln \left(1 - e^{-\frac{x}{2}} \right)$

Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe G . Étudier la position de la courbe G par rapport à D pour tout x réel strictement positif.

4°) Démontrer que pour tout x réel strictement négatif : $g(x) - \frac{x}{2} = \ln \left(1 - e^{\frac{x}{2}} \right)$

Montrer que la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe G.

Étudier la position de G par rapport à d pour tout x réel strictement négatif.

5°) Construire G, D et d dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On utilisera un graphique différent de celui de la partie A.)

EXERCICE N°3

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$

1°) Soit ϕ la fonction définie sur $[0;2]$ par : $\phi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$

a) Étudier les variations de ϕ sur $[0;2]$.

b) Montrer que, pour tout réel t dans $[0;2]$, on a : $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \phi(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$

c) Par intégration en déduire que : $\frac{3}{2} n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$

d) Montrer que, si (u_n) possède une limite ℓ , alors $3 \leq \ell$

2°) a) Calculer l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite ℓ .

EXERCICE N°4

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

1°) a) Étudier la parité de f.

b) Déterminer le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

c) Montrer que f admet 0 pour limite en $+\infty$ et $-\infty$.

2°) a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.

b) Étudier la variation de f. Préciser les points où f admet un extremum.

c) Calculer $f''(x)$ et déterminer son signe.

d) Construire C_f (on admettra que le maximum de f est sensiblement égal à 0,3).

EXERCICE N°5

On note, pour tout nombre réel a positif et pour tout entier naturel n : $u_n(a) = \int_0^1 x^n e^{a(1-x)} dx$

1°) Calculer $u_0(a)$.

2°) Soit a > 0 donné.

a) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $0 < u_n(a) < \frac{e^a}{a+1}$

b) Montrer que la suite $(u_n(a))$ est décroissante.

c) Déterminer la limite de $u_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

3°)

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}(a) = -1 + (n+1)u_n(a)$$

b) Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}} \left[e^a - \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right]$.

On considère la suite (U_n) définie par : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1°) Montrer que la fonction $f : t \mapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0, 1]$.

En déduire la valeur de U_1 .

2°) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$

3°) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n \geq 0$

4°) a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0, 1]$ et pour tout entier naturel non nul n : $(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$

b) En déduire que pour tout n non nul, $U_n \leq \frac{e}{n+1}$

5°) Déterminer la limite de la suite (U_n)

EXERCICE N°7

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; (unité graphique : 3 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln(e^x + e^{-x})$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan.

1°) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$, on a : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.

En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

d) Etudier la position relative de (C) et (Δ) .

2°) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

3°) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) .

Partie B

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$, on pose $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt$

1°) Soit n un entier naturel. Donner une interprétation géométrique de $F(n)$.

2°) Etudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3°) Démontrer que pour tout réel a strictement positif on a : $\frac{a}{a+1} \leq \ln(1+a) \leq a$.

4°) Soit x un réel strictement positif.

Déduire de la question 3°) $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}$.

5°) On admet que la limite de $F(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté I .

Etablir que : $\frac{1}{2} \ln 2 \leq I \leq \frac{1}{2}$.

6°) Pour tout entier naturel n , on pose : $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $\ln(1 + e^{-2(n+1)}) \leq U_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$

b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

7°) Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$.

a) Exprimer S_n à l'aide de F et n .

b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.

EXERCICE N°8

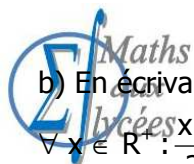
On considère la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

1°) a) Dresser le tableau de variation de f .

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

2°) a) Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt$$



b) En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

II. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

1°) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} u_n \in]0, 1]$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

2°) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{1}{2}$.

3°) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k^2$.

III.1°) On note ϕ la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par : $\phi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \phi'(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2°) On considère la fonction réelle g , définie par : $g(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+ : g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \phi(t) dt$.

a) Montrer que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{x}{4} \leq g(x) \leq 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{18}$.

c) En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0, puis donner $g'(0)$.

3°) a) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[: \int_1^x \phi(t) dt \leq \ln(x)$.

b) En déduire que g a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

4°) a) Pour tout réel x strictement positif, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme : $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

b) Montrer alors que : $xh'(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

c) Etudier la fonction, notée k , définie par : $\forall x \in \mathbb{R} : k(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

d) Donner le signe de k , puis les variations de h et enfin celles de g .

e) Dresser le tableau de variations de g , et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

EXERCICE N°9

I. On considère la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, dont le terme général est donné par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx$.

1°) Calculer u_0

2°) Justifier que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_1 .

3°) Montrer que (u) est positive.

4°) Montrer que (u) est décroissante.

5°) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

b) Calculer alors u_2 .

6°) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

II.1°) Soit pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction S_n , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$S_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} e^{x/2}}{e^{nx}(1+e^x)} \cdot \frac{1}{1+e^{-x}}$. Montrer que S_n est la somme de $(n-1)$ termes d'une suite géométrique.

2°) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ tel que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (1 - e^{-k})$



Une équation différentielle est une équation :

*) Dont l'inconnue est une fonction (généralement notée y ou z , ..)

*) Dans la quelle apparaît certaines des dérivées de y .

Soit a, b deux réels tels que $a \neq 0$

Type n°1 : $y' = ay$

Equation différentielle	Solutions de Equation différentielle	Solution qui prend la valeur y_0 en x_0
$y' = ay$	$x \mapsto ke^{ax}, k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$

Type n°2 : $y' = ay + b$

Equation différentielle	Solutions de Equation différentielle	Solution qui prend la valeur y_0 en x_0
$y' = ay + b$	$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}, k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

Type n°2 : $y'' + \omega^2 y = 0$

Equation différentielle	Solutions de Equation différentielle	Solution tel que $f(0) = x_0$ et $f'(0) = y_0$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$x \mapsto A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x), A, B \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{y_0}{\omega} \sin(\omega x) + x_0 \cos(\omega x)$

EXERCICE N°1

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y' = 2y + 2x$

1°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -2x - 1$

a) Vérifier que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g est solution de (E_2) : $y' = 2y$ sur $\mathbb{R}$.

2°) a) Déterminer les solutions g de l'équation différentielle (E_2) sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire les solutions f de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer la solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.

EXERCICE N°2

Soit l'équation différentielle : $y' + 2y = 4e^{1-2x}$ (E)

1°) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4xe^{-x}$ est une solution particulière de (E) .

2°) Résoudre l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$ (E_0)

3°) Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0) .

4°) En déduire toutes les solutions v de l'équation (E) .

5°) Déterminer la fonction v_0 , solution de (E) , qui prend la valeur $-2e$ en 0.

EXERCICE N°3

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x}$.

1°) Vérifier que la fonction f est une solution de (E) tel que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x).$$

2°) Montrer qu'une fonction ϕ est solution de (E) si, et seulement si, $\phi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

3°) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) .

EXERCICE N°4

On considère l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$.

1°) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2°) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = (ax + b)e^x$.

a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

b) Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si $u + v$ est solution de (1).

c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

EXERCICE N°5

Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = e^{-x}$.

EXERCICE N°6



On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = e^{2x}$ (E).

1°) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x e^{2x}$ est une solution de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ (E_0).

3°) Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).

4°) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

5°) Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE N°7

On se propose de trouver une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$

et vérifiant la propriété : pour tout $x > 0$, $x f'(x) - 3f(x) = 3 \ln x$ (E)

1°) Trouver toutes les fonctions polynômes P du troisième degré telles que, pour tout x réel, $x P'(x) - 3P(x) = 0$.

2°) Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$; soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 h(x)$.

a) Calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $h(x)$.

b) Montrer que f vérifie la propriété (E) si et seulement si, pour tout $x > 0$, $h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$.

c) On suppose que f vérifie la propriété (E).

Montrer que h est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x^3} \int_1^x \ln t dt$.

Déterminer $h(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

3°) Montrer qu'il existe une fonction f et une seule, solution du problème posé, et en donner l'expression.

EXERCICE N°8

On considère l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ (E)

1°) Déterminer le réel λ tel que la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = \lambda x^2 e^{-x}$ soit solution de l'équation (E).

2°) Démontrer que y , fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si et seulement si la fonction z définie par $z = y - y_0$ est solution de l'équation différentielle

(E_1) : $z'' + 2z' + z = 0$

3°) Soit la fonction $t = z' + z$. Montrer que $t' + t = 0$

4°) Résoudre alors l'équation différentielle (E_1).

5°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

5°) Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point de coordonnées $(-1, 0)$ et admet en ce point une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

EXERCICE N°8

On considère l'équation différentielle : $y'' - 5y' + 4y = 0$. (E)

1°) Soit la fonction $r = y' - 4y$. Montrer que $r' - r = 0$

2°) Résoudre alors l'équation différentielle (E)

3°) Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation

$y = -2x + 1$.

3°) On pose $u(x) = 2e^{-x} - e^{4x}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $u(x) \geq 0$.

4°) On considère la partie de la courbe d'équation $y = u(x)$ pour $-1 \leq x \leq 0$. En la faisant tourner autour de l'axe des abscisses, on délimite un solide dont le volume est mesuré en unités de volume

Calculer la valeur exacte de V .



EXERCICE N°9

Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance. La température $f(t)$ de la citerne vérifie l'équation différentielle $f' = a - bf$ avec $a = 2,088 \cdot 10^{-2}$ et $b = 2,32 \cdot 10^{-4}$ lorsque t est exprimé en secondes et $f(t)$ en $^{\circ}\text{C}$.

1°) a) Montrer que $y = f - 90$ est solution de l'équation différentielle $y' = -by$ (1)

b. Donner la solution générale de (1)

c. En déduire l'expression de $f(t)$ sachant que $f(0) = 20$.

2°) Au bout de combien de temps la température atteint-elle 80°C ?

EXERCICE N°10

1°) Résoudre l'équation différentielle $4y'' + 49y = 0$.

2°) a) Déterminer la solution f vérifiant $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ et $f(\pi) = 1$.

b) Déterminer deux réels r et θ strictement positifs et $\varphi \in]-\pi, \pi[$ tels que $f(x) = r \cos(\theta x + \varphi)$

EXERCICE N°11

Partie A

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y' = 2y + 4x$

1°) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -2x - 1$

c) Vérifier que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) sur $\mathbb{R}$.

d) Démontrer qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g est solution de :

$(E_2) : y' = 2y$ sur $\mathbb{R}$.

2°) a) Déterminer les solutions g de l'équation différentielle (E_2) sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire les solutions f de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

3°) Déterminer la solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-2x} - 1$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1°) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Démontrer que la droite d'équation $y = -2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote oblique.

2°) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation complet sur $\mathbb{R}$.

(On ne demande pas le tracé de la courbe (C_f))

EXERCICE N°12

Partie A

Soit l'équation différentielle : $y' + 2y = 4e^{1-2x}$ (E)

1°) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4xe^{1-2x}$ est une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$ (E_0)

3°) Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0) .

4°) En déduire toutes les solutions v de l'équation (E).

5°) Déterminer la fonction v_0 , solution de (E), qui prend la valeur $-2e$ en 0.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2(2x - 1)e^{1-2x}$.

1°) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire que la courbe C_f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ admet une asymptote horizontale.

2°) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation complet.



- 3°) Justifier que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} .
- 4°) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $3/2$.
- 5°) Déterminer une équation de la tangente au point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
- 6°) Tracer la courbe C_f et les tangentes déterminées précédemment.
(unité : 2 cm sur chaque axe).

Partie C

Soit $y = g(x)$ l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse a .

On note $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

- 1°) a) Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $f'(a)$.
b) Montrer que : $\varphi''(x) = f''(x)$.
2°) Résoudre $f''(x) = 0$.
3°) Dans cette question, on pose : $a = 3/2$.
a) Déterminer les variations de φ' et en déduire le signe de $\varphi'(x)$.
b) Déterminer les variations de φ et en déduire le signe de $\varphi(x)$.
c) Déterminer la position de C_f par rapport à sa tangente T .

EXERCICE N°13

1°) Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = x + \frac{1 - k e^x}{1 + k e^x}$.

a) Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :
(E) : $2y' = (y - x)^2 + 1$.

b) En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

2°) On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Sur l'annexe, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, la droite D' d'équation $y = x + 1$ et plusieurs courbes C_k correspondant à des valeurs particulières de k . Déterminer le réel k associé à la courbe C passant par le point O puis celui associé à la courbe C' passant par le point A de coordonnées $(1; 1)$.

3°) On remarque que, pour tout x réel, on a : $\frac{x}{1 + k e^x} = x - 1 + \frac{2}{1 + k e^x}$ (1) et $f_k(x) = x + 1 - \frac{2 k e^x}{1 + k e^x}$ (2).

En déduire pour tout k strictement positif :

- la position de la courbe C_k par rapport aux droites D et D' .
- les asymptotes de la courbe C_k .

EXERCICE N°14

Partie I : On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

1°) On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h , définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x) e^{-x}.$$

- a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel, $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.
- b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n) , sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?
- 2°) Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
- a) Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation : (F) : $y' + y = 0$.
- b) Résoudre (F).
- c) Déterminer la solution générale f de l'équation (E_n) .



d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

1°) On pose, pour tout x réel, $f_0(x) = e^{-x}$, $f_1(x) = x e^{-x}$.

a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b) Pour tout entier strictement positif n , on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la Partie I, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$.

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

2°) Pour tout entier naturel n , on pose: $I_n = \int_1^0 f_n(x) dx$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0; 1]$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$.

b) En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n) .

c) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = \frac{1}{k!} e^{-1}$.

d) Calculer I_0 et déduire que : $I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.



BAC MATHS

2009/2010

Cours et 283 exercices

Elaboré par : ALI AKIR

*Donne des cours particuliers en mathématiques pour
tous les niveaux*

Plus d'informations : Contacter à

GSM : 24 96 24 30

Email : akir.cm@gmail.com

Site Web : <http://maths-akir.midiblogs.com/>



Maths aux lycées, Site éducatif

Téléchargement gratuit

Fiches de cours / Séries d'exercices / Devoirs à la maison / Devoirs de contrôle et de synthèse
Sujets de révision pour le baccalauréat / Plus : Forum de maths, pour répondre à vos questions.



Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Propriétés : Soit M un point d'affixe $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

$a = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$	$b = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$	$ z = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$
$z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$	$ z = 0 \Leftrightarrow z = 0$	$z \times \bar{z} = z ^2, \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}, z \neq 0$
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z$	$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$	$AB = z_B - z_A $
$\operatorname{Aff}(\vec{AB}) = z_B - z_A$	$I = A * B \Leftrightarrow z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	$\operatorname{Aff}(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\operatorname{Aff}(\vec{u}) + b\operatorname{Aff}(\vec{v})$
$\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}[2\pi])$, $z \in \mathbb{C}^*$	$a \in \mathbb{R}_+ : z^2 = a \Leftrightarrow z = \sqrt{a} \text{ ou } z = -\sqrt{a}$ $a \in \mathbb{R}_- : z^2 = a \Leftrightarrow z = i\sqrt{ a } \text{ ou } z = -i\sqrt{ a }$	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier n on a :

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$	$\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$	$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
$\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\bar{z}}, (z \neq 0)$	$\left(\frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{(\bar{z})^n}, (z \neq 0)$	$\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, (z' \neq 0)$

$ zz' = z \times z' $	$ z^n = z ^n$	$z\bar{z} = z ^2$
$\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }, (z \neq 0)$	$\left \frac{1}{z^n}\right = \frac{1}{ z ^n}, (z \neq 0)$	$ z + z' \leq z + z' $

Forme cartésien – Forme trigonométriques

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

Forme cartésien
 $z = a + ib$

Forme trigonométriques
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta), r > 0$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{r}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls d'écriture trigonométriques :

$$z = [r, \theta] = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ et } z' = [r', \theta'] = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

$\bar{z} = [r, -\theta]$	$-\bar{z} = [r, \pi + \theta]$	$kz = [kr, \theta], k > 0$	$kz = [-kr, \pi + \theta], k < 0$
$zz' = [rr', \theta + \theta']$	$\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$	$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$	$z^n = [r^n, n\theta], n \in \mathbb{Z}$

Forme exponentielle

Pour tout réel θ , on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos \theta + i \sin \theta$.

$e^{i0} = 1$	$e^{i\pi} = -1$	$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$
--------------	-----------------	--------------------------	----------------------------

$ e^{i\theta} = 1$	$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$	$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$	$-e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$
---------------------	-------------------------------------	---	------------------------------------

$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$	$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$	$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$	$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$
--	--	--	--

Formule de Moivre

Pour tout réel φ et tout entier n , on a : $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$

Formule d'Euler

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Racines nièmes

Soit a un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = r e^{i\theta}$

L'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\theta+2k\pi}{n}}$,
 $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Conséquences :

Les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Théorème

Soit a un nombre complexe non nul d'argument φ . L'équation $z^2 = a$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions opposées :

$$z_1 = \sqrt{|a|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{|a|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

Ces solutions sont appelées racines carrées du nombre complexe a .

Théorème

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et complexes et a non nul) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-b + \sigma}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sigma}{2a} \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4ac \quad \text{et} \quad \sigma \text{ est une racine carrée de } \Delta$$

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$	$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$	$z_1 z_2 = \frac{c}{a}$
---------------------------------------	----------------------------	-------------------------

A retenir : Soit $z^2 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, avec $z = x + iy$ alors on a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Theoreme

Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0$, $n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$.

Si z_0 est un zéro de P , alors $P(z) = (z - z_0)g(z)$, où $g(z)$ est de la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_0$, avec $b_0, b_1, \dots, b_{n-2}$ complexes.

ALI AKIR***GSM:24962430***ALI AKIR***GSM:24962430

EXERCICE N°1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. On pose : $z_1 = \frac{a+ib}{a-ib}$ et $z_2 = \frac{a-ib}{a+ib}$

Montrer que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

EXERCICE N°2

Soit a, b et c trois nombres complexes de modules sont égaux à 1 et tel que : $a + b + c = 0$

1. Calculer $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

EXERCICE N°3

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Soit $Z = \frac{z+1}{z-i}$ avec $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$

1°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que $|Z| = 1$

2°) En déduire l'ensemble des points M , images de z , tels que $\left| \frac{z+1}{z-i} \right| = 1$

3°) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .

4°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit un réel.

5°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit imaginaire pur.

6°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

EXERCICE N°4

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $z^3 = 1$. (On note par j la racine de partie imaginaire positive.)

2°) Ecrire les racines de (E) sous formes trigonométriques.

3°) Calculer j^2 et $1 + j + j^2$.

4°) Montrer que : $(a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + c + bj^2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

(avec a, b et c des nombres complexes)

5°) On considère les points A, B, C d'affixes respectifs a, b et c .

Montrer que les relations : $\begin{cases} a + bj + cj^2 = 0 \\ b + c + a^2 = 0 \\ c + a + bj^2 = 0 \end{cases}$ sont équivalentes et sont conditions nécessaires et

suffisantes pour que le triangle ABC soit équilatéral.

EXERCICE N°5

Soit dans le plan complexe, les points $A(3)$, $B(-3)$ et $M(z)$ tels que : (*) : $\frac{MB}{MA} = 2$

1°) Montrer que (*) $\Leftrightarrow (z-5)(\bar{z}-5) = 16$.

2°) En déduire l'ensemble des points M .

EXERCICE N°6

Soit z un nombre complexe. Soit $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ où a, b et c des nombres complexes.

z_1, z_2 et z_3 sont les racines de l'équation $P(z) = 0$

1°) Montrer que $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ et $c = -z_1z_2z_3$

2°) Application 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ xy + yz + zx = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

3°) Applications 2 :

Déterminer les nombres complexes de modules inférieurs à 1 et vérifiant les égalités :

$$xyz = x + y + z = 1.$$

EXERCICE N°7

Soit : $z = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$

1°) Soit $z' = (1+i)z$. Ecrire z' sous la forme cartésienne puis sous la forme trigonométrique

2°) En déduire z sous leurs formes trigonométriques.

3°) En déduire alors la valeurs de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$

EXERCICE N°8

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$.

1°) Ecrire z sous forme trigonométrique puis exponentielle.

$$z_1 = \sin \theta + i \cos \theta, \quad z_2 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta, \quad z_3 = \frac{\sin \theta + i \cos \theta}{1 + \cos \theta + i \sin \theta}$$

2°) Déterminer l'ensemble des points $M_i(z_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ lorsque θ décrit $[0, \pi[$.

EXERCICE N°9

On donne dans le plan complexe trois points M , N et P d'affixes respectives

z , z^2 et z^3 . Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels le triangle MNP est rectangle en M .

EXERCICE N°10

On donne le nombre complexe $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

1°) Exprimer z^2 sous forme algébrique

2°) Exprimer z^2 sous forme exponentielle.

3°) En déduire z sous forme exponentielle.

EXERCICE N°12

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que : $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$ et

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$$

EXERCICE N°13

Soit a et b deux nombres réels, on considère les nombres complexes z et z' de module 1 et d'arguments respectifs a et b .

1°) Montrer, en utilisant la forme exponentielle de z et z' , que $\frac{(z + z')^2}{zz'}$ est un réel positif ou nul.

2°) En déduire que $2 \arg(z + z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$.

3°) On appelle M et M' les images de z et z' dans le plan muni d'un repère orthonormé direct de centre O et N le point tel que $OMNM'$ soit un parallélogramme. Interpréter géométriquement l'égalité précédente à l'aide de ces points.

EXERCICE N°14

Résoudre dans $\mathbb{C}$

1°) $z^2 - 2z \cos \varphi + 1 = 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$; 2°) $(z - 1)^6 = (z - 1)^3 + 1$;

3°) $(1-i)z^2 - (5+i)z + 6 + 4i = 0$; 3°) $z^5 = \frac{8(1+i)}{\sqrt{3}-i}$; 4°) $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \frac{1+ia}{1-ia}$ où $a \in \mathbb{R}$.

EXERCICE N°15

On considère l'équation (E) : $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0$.

1°) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure.

2°) Résoudre alors (E) dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE N°16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 + (2-3i)z^2 - (7+i)z + 17i - 2 = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

EXERCICE N°17

On considère l'équation (E) : $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$.

1°) Vérifier que (E) est équivalente au système :
$$\begin{cases} Z = z + \frac{1}{z} \\ Z^2 - 2Z - 3 = 0 \end{cases}$$

2°) En déduire la résolution de (E) dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE N°18

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère la suite de points M_n du plan d'affixes respectives non nulles z_n définies par :

$$z_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n : z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n.$$

1°) Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.

2°) Calculer z_1, z_2, z_3 et vérifier que z_3 est réel.

Placer dans le plan P les points M_0, M_1, M_2 et M_3 .

3°) Montrer que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et comparer les longueurs OM_{n+1} et M_nM_{n+1} .

EXERCICE N°19

Soit $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et (E_φ) l'équation : $z^2 - (3\cos\varphi + 1 + i\cos\varphi)z + 2\cos\varphi(\cos\varphi + 1 + i\cos\varphi) = 0$

1°) Montrer que l'équation (E_φ) admet une solution réelle z_1 que l'on calculera et en déduire l'autre solution z_2 .

2°) Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs z_1 et z_2 .

(a) Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque φ décrit l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(b) Montrer que $2M_1M_2^2 = 1 + (2\cos\varphi - 1)^2$.

(c) Pour quelle valeur de φ la distance entre M_1 et M_2 est maximale.

(a) Déterminer le réel m tel que OAB soit isocèle.

EXERCICE N°20

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le quadrilatère $ABCD$ tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \alpha [2\pi]$, $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = \beta [2\pi]$, $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$.

On construit les triangles équilatéraux DCP , DAQ , BAM et BCN tels que : $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$,

$$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DQ}) = \frac{\pi}{3} [2\pi], (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ et } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D , m, n, p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q .

1°) Démontrer les relations suivantes : $m = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - b) + b$, $n = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b) + b$, $p = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - d) + d$,

$$q = e^{i\frac{\pi}{3}}(a - d) + d.$$

2°) En utilisant les relations précédentes :

a) Démontrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

b) Démontrer que l'on a : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{QP}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$, $AC = QP$ et $(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$, et $NP = BD$.

3°) Démontrer que $MNPQ$ est un carré si, et seulement si, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ vérifient $AC = BD$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{6} + k\pi$ où k est un entier relatif.

EXERCICE N°21

z et z' sont deux nombres complexes donnés non nuls.

Montrer que $|z + z'| = |z| + |z'|$ si, et seulement si, $\arg z = \arg z' + 2k\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

EXERCICE N°22

Soit un triangle ABC , on note O le centre de son cercle circonscrit.

Dans un repère orthonormal de centre O , on note a, b et c les affixes des points A, B et C .

Soit H le point d'affixe $h = a + b + c$.

1°) Démontrer que $|a| = |b| = |c|$.

2°) a) Soit $w = \overline{bc} - b\overline{c}$. Calculer $w + \overline{w}$. En déduire que w est un imaginaire pur.

b) Démontrer, à l'aide du a), que les nombres $(b + \overline{cb} - \overline{c})$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont des imaginaires purs.

3°) a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b) En utilisant les résultats précédents, démontrer que (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC .

c) Expliquer, sans calculs supplémentaires, pourquoi H est l'orthocentre du triangle ABC .

EXERCICE N°23

Soit f l'application qui, à tout nombre complexe z différent de i associe z' tel que :

$$z' = f(z) = i + \frac{2}{\overline{z} + i}$$

On note T l'application du plan complexe privé du point A d'affixe i , dans le plan complexe, définie par :

$M' = T(M)$, M et M' étant les points d'affixes respectives z et z' .

1°) a) Calculer $f(1)$ et $f(2 + i)$.

b) Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

2°) a) Calculer : $\arg[(z' - i)(\overline{z} + i)]$

b) Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

3°) a) Exprimer l'affixe z'' de $M'' = (ToT)(M)$ en fonction de l'affixe z de M .

b) Que peut-on dire de ToT ?

4°) On appelle (J) l'ensemble des points du plan invariants par T .

a) Démontrer que M appartient à (J) si et seulement si $AM = \sqrt{2}$

b) Caractériser géométriquement (J) .

5°) Dans cette question, on suppose que $z = 1 + i + e^{i\theta}$, où θ est un nombre réel ; on notera B le point d'affixe $1 + i$.

a) Quelle est la courbe (Γ) décrite par le point M , d'affixe z , lorsque θ décrit $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

b) Montrer que : $z' - i = 1 + i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ avec $z' = f(z)$.

c) A quelle courbe (L) appartient le point M' d'affixe z' ?

d) En déduire $T(\Gamma)$, image de (Γ) par T . Construire (Γ) et $T(\Gamma)$ dans un repère orthonormal.

EXERCICE N°24

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les applications : $f : C - \{-i\} \rightarrow C - \{-i\}$; $z \mapsto f(z) = \frac{z-1}{i(z+i)}$

et $F : \wp - \{B\} \rightarrow \wp - \{B\}$; $M(z) \mapsto F(M) = M'(z' = f(z))$ où B est le point d'affixe $-i$.

1°) Montrer que f est involutive (c-a-d $f \circ f = \text{Id}_{C - \{-i\}}$) et en déduire que F est bijective.

2°)(a) Vérifier que $\forall z \in C \setminus \{-i\}$, $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$.

(b) En déduire que $\forall M \in P \setminus \{B\}$, $\begin{cases} BM \times BM' = \sqrt{2} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$

3°) Déterminer les images par F de la droite $(D) : y = x - 1$ et du cercle (C) de centre B et de rayon 1.

EXERCICE N°25

Pour tout nombre complexe z on pose : $f(z) = z^3 + 2(1-i\sqrt{3})z^2 + 4(1-i\sqrt{3})z + 8i$

1°) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2°) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$.

On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, tel que $\text{Im}(z_1) < 0$.

3°) On pose $\omega = \frac{z_1}{z_0}$. Donner la forme trigonométrique de ω .

4°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout nombre complexe z non nul on associe les points M , M_1 et M_2 d'affixe respectives z , ωz et $\omega^2 z$.

Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

EXERCICE N°26

Le plan complexe $\wp$ étant rapporté à un repère orthonormé direct, on considère l'application :

$s : \wp \rightarrow \wp$, $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = (2+i)z + 1 - 3i$.

1°) Vérifier que $A(0, -1)$ est l'unique point invariant par s .

2°) Montrer que s est bijective et expliciter son application réciproque notée s^{-1} .

3°) Prouver que pour tout $M \in \wp - \{A\}$, d'image M' par s on a : $AM' = \sqrt{5}AM$.

4°) Montrer que pour tous points deux à deux distincts $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ et $M_3(z_3)$ d'images

respectives $M_1'(z_1')$, $M_2'(z_2')$ et $M_3'(z_3')$ par s on a : $(\overrightarrow{M_1'M_2'}, \overrightarrow{M_1'M_3'}) \equiv (\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) [2\pi]$.

5°) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que : $\text{Arg}(z') \equiv 0 [2\pi]$.

6°) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que : $(z')^3 = 1$. (utiliser 2)

EXERCICE N°27

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Montrer que $\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$

EXERCICE N°28

On considère un cercle de centre O et trois points A , B et C de ce cercle. On désigne par A' , B' et C' les images respectives des points A , B et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soient U , V , W les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$. Démontrer que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.

EXERCICE N°29

1°)(a) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$

(b) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation : $z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0$ où n est un entier naturel non nul.

2°) Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1$

(a) Justifier la factorisation suivante de P_α :

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)z + 1 \right) \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{n}\right)z + 1 \right) \dots \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{n}\right)z + 1 \right)$$

(b) Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire que $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right) \sin^2\left(\frac{\alpha + 2\pi}{2n}\right) \dots \sin^2\left(\frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{2n}\right) = \frac{\sin^2(\alpha/2)}{4^{n-1}}$

3°) Pour tout α appartenant à $]0, \pi[$, et pour tout entier naturel $n \geq 2$ on pose :

$$H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right) \sin\left(\frac{\alpha + 2\pi}{2n}\right) \dots \sin\left(\frac{\alpha + 2(n-1)\pi}{2n}\right)$$

(a) Montrer que, pour tout α non nul on a : $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2n)}$

(b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0?

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on a :

$$H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \dots \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

On va travailler dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

ISOMETRIE

Une isométrie f du plan est une transformation du plan qui conserve les distances, c'est-à-dire que : pour tous les points M et N du plan, si M' et N' désignent leurs images par f , on aura $MN = M'N'$.

- Les isométries transforment respectivement un segment, une demi-droite, une droite, un cercle en un segment, une demi-droite, une droite, un cercle.
- Plus précisément, f désignant une isométrie :
- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$; ces deux segments ont la même longueur ;
- L'image de la droite (AB) est la droite $(f(A)f(B))$;
- L'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre $f(A)$ et de rayon r .
- Les isométries conservent le parallélisme parce que les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- Les isométries conservent la perpendicularité
- Les isométries conservent les milieux
- Plus généralement les isométries conservent les barycentres.
- Les isométries conservent les angles
- Les isométries qui conservent l'orientation des angles s'appellent des déplacements.
- Les isométries qui renversent l'orientation des angles s'appellent des antidéplacements
- La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement, ou d'un antidéplacement et d'un déplacement est un antidéplacement.
- Il existe dans le plan quatre sortes d'isométries : les translations, les rotations, les symétries axiales et les symétries glissées.
- Les translations et les rotations sont des déplacements, les symétries axiales et les symétries glissées sont des antidéplacements.

Voici les définitions correspondantes :

Translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

- La réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$: $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$.
- La composée de deux translations est une translation : $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.
- La translation de vecteur $\vec{0}$ est l'identité : $t_{\vec{0}} = \text{id}$.
- Une translation autre que id n'a pas de point fixe.

Rotation

Soit Ω un point du plan et α un angle orienté. La rotation de centre Ω et d'angle α , notée $r_{\Omega, \alpha}$, est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $M' = M$ si $M = \Omega$ et tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha [2\pi]$ sinon.

- Si $\alpha = 0 [2\pi]$, $r_{\Omega, \alpha}$ est l'identité.
- Si $\alpha \neq 0 [2\pi]$, $r_{\Omega, \alpha}$ n'a que Ω comme point fixe.
- Si $\alpha = \pi [2\pi]$, $r_{\Omega, \alpha}$ est la symétrie centrale de centre Ω , notée s_{Ω} .

• La réciproque de la rotation de centre Ω et d'angle α est la rotation de centre Ω et d'angle $-\alpha$: $r_{\Omega; \alpha}^{-1} = r_{\Omega; -\alpha}$.

• Il est facile de composer deux rotations de même centre : $r_{\Omega; \alpha} \circ r_{\Omega; \beta} = r_{\Omega; \alpha+\beta} = r_{\Omega; \beta} \circ r_{\Omega; \alpha}$.

En particulier $s_{\Omega} \circ s_{\Omega} = \text{id}$: $s_{\Omega}^{-1} = s_{\Omega}$.

Propriété

Si A et B sont deux points distincts du plan, et A' et B' leurs images respectives par $r_{\Omega; \alpha}$, on aura : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \alpha[2\pi]$.

Symétrie orthogonale

Soit Δ une droite du plan. La symétrie axiale d'axe Δ , notée s_{Δ} , est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $M' = M$ si $M \in \Delta$ et tel que Δ soit la médiatrice de $[MM']$ si $M \notin \Delta$.

A la place de « symétrie orthogonale », on peut aussi dire « réflexion » ou « symétrie axiale ».

La réciproque de la symétrie axiale d'axe Δ est elle-même : $s_{\Delta}^{-1} = s_{\Delta}$, $s_{\Delta} \circ s_{\Delta} = \text{id}$.

Les points fixes de s_{Δ} sont les points de Δ .

Symétrie glissante

Soit Δ une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ . La symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$, notée $s_{\Delta; \vec{u}}$, est la transformation $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$.

• $s_{\Delta; \vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta} = s_{\Delta} \circ t_{-\vec{u}}$.

• $s_{\Delta; \vec{u}} \circ s_{\Delta; \vec{u}} = t_{2\vec{u}}$.

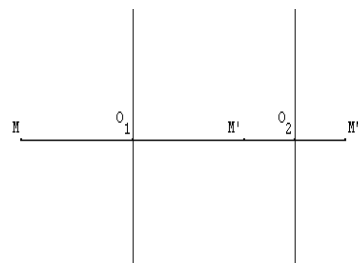
• Une symétrie glissée n'a pas de point fixe.

• La réciproque de la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$ est la symétrie glissée d'axe Δ et de vecteur $-\vec{u}$.

Composée de deux symétries axiales

Soient D_1 et D_2 deux droites du plan.

s_1 et s_2 les symétries axiales d'axes respectifs D_1 et D_2 .



Cas où les droites D_1 et D_2 sont parallèles

La composée $s_2 \circ s_1$ de deux symétries axiales d'axes D_1 et D_2 parallèles est une translation dont le vecteur est perpendiculaire à ces droites.

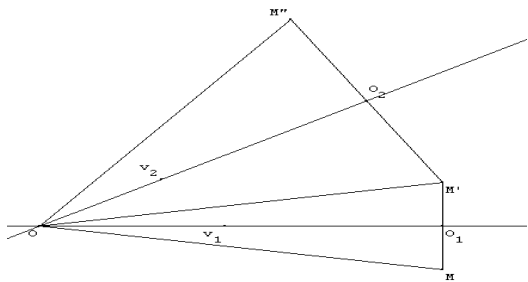
Si $\overrightarrow{O_1 O_2}$ est un vecteur perpendiculaire à D_1 et D_2 avec $O_1 \in D_1$ et $O_2 \in D_2$, le vecteur de cette translation est $2\overrightarrow{O_1 O_2}$.

Remarques

1°) Sauf dans le cas où D_1 et D_2 sont confondues et où $s_2 \circ s_1 = s_1 \circ s_2 = \text{id}$, s_1 et s_2 ne commutent pas : $s_2 \circ s_1$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O_1 O_2}$ et $s_1 \circ s_2$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O_2 O_1}$.

2°) Toute translation peut donc être décomposée, d'une infinité de manières différentes possibles, comme la composée de deux symétries axiales d'axes parallèles entre eux et perpendiculaires au vecteur de la translation.

Cas où les droites D_1 et D_2 sont sécantes



La composée $s_2 \circ s_1$ de deux symétries axiales d'axes D_1 et D_2 sécantes en O est une rotation de centre O .

Si $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et de D_2 , l'angle de cette rotation est $2(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2)$.

Remarques

1°) L'angle $2(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2)$ dépend des droites D_1 et D_2 mais pas des vecteurs directeurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ choisis sur ces droites.

Si par exemple on remplace $\vec{v}_1$ par $-\vec{v}_1$, on a :

$$2(-\vec{v}_1 ; \vec{v}_2) = 2(-\vec{v}_1 ; \vec{v}_1) + 2(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2) = 2(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2) \quad \text{car } (-\vec{v}_1 ; \vec{v}_1) = \pi \quad [2\pi].$$

2°) Sauf dans le cas où D_1 et D_2 sont perpendiculaires et où $s_2 \circ s_1 = s_1 \circ s_2 = s_\Omega$ (symétrie centrale de centre O , s_1 et s_2 ne commutent pas : $s_2 \circ s_1$ est une rotation d'angle $2(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2)$ et $s_1 \circ s_2$ est une rotation d'angle $2(\vec{v}_2 ; \vec{v}_1)$).

3°) Toute rotation peut donc être décomposée, d'une infinité de manières différentes possibles, comme la composée de deux symétries axiales d'axes sécants au centre de cette rotation.

4°) On verra que toute isométrie du plan peut être obtenue en composant une, deux ou trois symétries axiales.

Isométries fixant un point

Théorème 1

Soit f une isométrie et O un point du plan.

L'isométrie f se décompose d'une manière unique sous la forme $f = \text{tog}$, où t désigne une translation et g désigne une isométrie laissant O fixe.

Théorème 2

1) Une isométrie fixant trois points A , B et C non alignés est l'identité.

2) Une isométrie distincte de l'identité fixant au moins deux points distincts A et B est la symétrie axiale d'axe (AB) .

3) Une isométrie ne fixant que le point A est une rotation de centre A et d'angle non nul.

Récapitulations :

Nombre de points fixes	zéro	Un seul	Au moins deux, jamais trois non alignés	Trois non alignés
Nature de l'isométrie	Translation ou glissement	rotation	symétrie	L'identité du plan
Décomposition	2 ou 3 symétries	2 symétries	1 symétrie	2 symétries

Déplacements – antidéplacements

- On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les mesures des angles orientés.
- On appelle antidéplacement toute isométrie qui change les mesures des angles orientés en leurs opposées.
- Une isométrie est un déplacement, si et seulement si, elle est la composée n symétries orthogonales avec n est un entier naturel pair.
- Une isométrie est un antidéplacement, si et seulement si, elle est composée n symétries orthogonales avec n est un entier naturel impair

Classification des isométries.

Identité	déplacement
Rotation	déplacement
Translation	déplacement
Symétrie orthogonale	antidéplacement
Symétrie glissante	antidéplacement

- La composée de deux déplacements est déplacement
- La composée de deux antidéplacements est déplacement
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est antidéplacement
- La composée d'un antidéplacement et d'un déplacement est antidéplacement

On note par Is^+ l'ensemble des déplacements et par Is^- l'ensemble des antidéplacements

- Deux déplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.
- Deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.
- Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$
 - Il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$
 - Il existe un unique antidéplacement g tel que $g(A) = C$ et $g(B) = D$

• Angle d'un déplacement

Soit $f \in Is^+$. A, B, C et D quatre points tels que $AB \neq 0$ tel que $\begin{cases} f(A) = C \\ f(B) = D \end{cases}$

On désigne par θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, On dit que f est un déplacement d'angle θ

DEPLACEMENTS

Écriture complexe des translations

La translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ associe, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = z + z_{\vec{u}}$, où $z_{\vec{u}}$ désigne l'affixe de $\vec{u}$.

Écriture complexe des rotations

La rotation $r_{\Omega, \alpha}$ de centre Ω et d'angle α , est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{i\alpha}(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$.



Pour résumer, on voit que les translations et les rotations du plan ont une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$.

Dans la cas de la translation : $a = 1$ et $b = z_u$.

Dans la cas de la rotation : $a = e^{i\alpha}$ et $b = z_\Omega(1 - e^{i\alpha})$.

Réciproquement, si une transformation du plan a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$, est une translation ou une rotation.

Composée de deux rotations : $f = r_{\Omega, \alpha} \circ r_{\Omega', \beta}$

Si $\alpha + \beta = 0 \pmod{2\pi}$, alors f est une translation.

Si $\alpha + \beta \neq 0 \pmod{2\pi}$, alors f est une rotation d'angle $\alpha + \beta$.

ALI AKIR***GSM:24962430***ALI AKIR***GSM:24962430



EXERCICE N°1

Soit ABC un triangle quelconque du plan, on construit, extérieurement à ABC, les triangles équilatéraux AB'C, ABC' et A'BC.

1°) Montrer que $AA' = BB' = CC'$.

2°) Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

EXERCICE N°2

ABCD est un rectangle non carré de centre O du plan orienté. On note par Δ_1 la médiatrice de [AB] et Δ_2 la médiatrice de [AD]. S_1 et S_2 les symétries orthogonales d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 .

1°) Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le rectangle ABCD. Montrer que $f(O) = O$.

2°) Déterminer alors toutes les isométries de plan qui laissent globalement invariant le rectangle ABCD.

EXERCICE N°3

On considère un triangle équilatéral ABC direct de centre O.

1°) Déterminer les isométries, du plan, qui laissent le triangle ABC globalement invariant.

2°) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose : $A' = r(A)$, $B' = r(B)$ et $C' = r(C)$.

Soit f une isométrie qui transforme $\{A, B, C\}$ en $\{A', B', C'\}$. On pose $g = r^{-1} \circ f$

a- Montrer que g est une isométrie, du plan, qui laisse $\{A, B, C\}$ globalement invariant.

b- Déterminer alors toutes les isométries, du plan qui transforme $\{A, B, C\}$ en $\{A', B', C'\}$.

EXERCICE N°4

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre de gravité O et $D = S_{(BC)}(O)$ et $E = S_{(BA)}(O)$

1°) Montrer que A, B, C et D appartiennent au même cercle.

2°) Caractériser $S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$ et $S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$

3°) Déterminer les droites Δ et Δ' tel que : $R_{(O, \frac{2\pi}{3})} = S_{\Delta} \circ S_{(OA)}$ et $R_{(A, \frac{2\pi}{3})} = S_{(OA)} \circ S_{\Delta'}$.

EXERCICE N°5

Soit IAB et JAC deux triangles rectangles isocèles en I et en J, $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, $(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, K le milieu de [BC].

1°) On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$, r' la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer $r' \circ r(B)$

b) Caractériser $r' \circ r$.

2°) On appelle L l'image de I par $r' \circ r$. Que représente K pour le segment [IL] ?

En déduire la nature du triangle IJK

EXERCICE N°6

Soit ABC un triangle quelconque de sens direct.

On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles ARB, BPC et CQA isocèles rectangle respectivement en R, P et Q.

1°) Soit $I = A * B$ et r_P et r_Q deux rotations de centres et d'angles respectifs P, Q, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

a- Montrer que $r_P \circ r_Q = S_I$

b- En déduire que IPQ est un triangle rectangle isocèle.

3°) Soit $J = A * C$ et $K = B * C$ on pose $r_R = r_{\left(R, \frac{\pi}{2}\right)}$

a- Démontrer que $r_Q \circ r_R = S_K$ et $r_R \circ r_P = S_J$

b- En déduire que KOR et JPR sont des triangles rectangles isocèles.

4°) Démontrer que les droites (QB) ; (RC) et (AP) sont concourantes.

EXERCICE N°7

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB = AC$. On

désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre.

Soit E le milieu du segment [BC] et P le point de [AC] tel que $AB = CP$.

La droite (OE) coupe ζ en I et J, tels que J et A soient sur le même arc BC du cercle ζ .

1°) Faire une figure.

2°) Déterminer l'ensemble suivants :

$$a- \gamma = \left\{ M \in \wp / (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \right\}$$

$$b- \nu = \left\{ M \in \wp / (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ et } MB < MC \right\}$$

3°) a- Justifier qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Déterminer son angle.

b- Démontrer que le centre de R est un point de ζ que l'on précisera.

c- Quelle est la nature du triangle JAP ?

4°) Soit $f = R \circ S_B$. Déterminer $f(B)$.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette composée.

EXERCICE N°8

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD direct de centre I.

On note par : t la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$, R_D la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$, R_1 la

rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

On définit ainsi les transformations f , g_1 et g_2 par : $f = t \circ R_D$, $g_1 = R_1 \circ f$ et $g_2 = R_2 \circ f$

1°) a- Déterminer $f(D)$ et $f(A)$.

b- Démontrer que f est une rotation, dont on précisera la centre.

2°) a- Déterminer $g_1(D)$ et $g_2(D)$.

b- Montrer que $g_2 \circ g_1^{-1} = R_2 \circ f$

c- Soit $A_1 = g_1(A)$ et $A_2 = g_2(A)$. Montrer que $A = A_1 * A_2$

EXERCICE N°9

On considère un triangle équilatéral direct ABC. La médiatrice du segment [AB] recoupe le cercle circonscrit ζ au triangle ABC en D. La droite (BD) coupe (AC) en A'.

1°) Prouver que le triangle CBA' est rectangle en B et que la droite (AD) est la médiatrice du segment [CA'].

2°) Soit l'application $f = S_{(BD)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

a- Déterminer l'image de A par f .

b- Montrer que f est une translation dont on déterminera le vecteur.

EXERCICE N°10

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'application f qui à tout point $M(x ; y)$ associe le point $M'(x' ; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$$

- 1°) a) Exprimer $z' = x' + i.y'$ en fonction de $z = x + i.y$ ou de $\bar{z}$.
b) L'application f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ? Pourquoi ?
c) Quel est l'ensemble des points invariants par f ? Conclure.

- 2°) a) Démontrer que $f \circ f$ est une translation. On désigne par $2\vec{v}$ le vecteur de la translation.
b) Déterminer la droite D telle que $f = s \circ t = t \circ s$, t étant la translation de vecteur $\vec{v}$ et s la symétrie d'axe D .
c) Vérifier que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de D .

EXERCICE N°11

Soit ABC un triangle direct, rectangle en A . Soit l'application définie par $f = S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$

- 1°) Montrer que f est un antidéplacement.
2°) Montrer que f est une symétrie glissante.
3°) Donner la forme réduite de f .

EXERCICE N°12

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f_a de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -\bar{z} + 2a + 2i$ où m est paramètre complexe.

- 1°) Montrer que f_a est isométrie.
2°) Montrer que f_a est une antidéplacement.
2°) Déterminer l'ensemble des points fixes de f_a .
3°) Identifier alors f_a .

EXERCICE N°13

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC de sens direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ABDE$ et $ACFG$, ainsi que le parallélogramme $AGKE$.
On désigne par $M = B \times C$ et H le projeté orthogonal de A sur (BC) .

- 1°) a) Montrer qu'il existe un déplacement f dont on déterminera ses éléments caractéristiques transformant le triangle ABC en le triangle EKA .

b) Montrer que les points H, A, K sont alignés.

c) Montrer que les droites (AM) et (EG) sont perpendiculaires.

- 2°) a) Montrer que $FB = CK$.

b) Donner une mesure de l'angle $(\vec{FB}, \vec{CK})$.

- 3°) a) Montrer qu'il existe un déplacement g qui transformant le triangle ABC en le triangle EAK , dont on déterminera ses éléments caractéristiques.

b) Prouver que $DC = BK$ et donner une mesure de l'angle $(\vec{DC}, \vec{BK})$.

- 4°) Montrer que les droites (AK) , (BF) et (CD) sont concourantes.

EXERCICE N°14

Soit ABC un triangle tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$, O est le centre du cercle ζ circonscrit au triangle

ABC et I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ce triangle.

Les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites $[CA)$ et $[BA)$ et vérifiant $CP = BQ = BC$.

- 1°) a) Montrer que la droite (CI) est la médiatrice du segment $[PB]$ et que la droite (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$.

b) Montrer que $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{QB}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

2°) Soit f la rotation qui transforme C en Q et P en B .

a) Montrer que f a pour centre I et pour angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Montrer que $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

c) Montrer que les points I , P et Q sont alignés.

3°) On pose $O_1 = f(O)$ et $O_2 = f(O_1)$.

a) Montrer que $O = f(O_2)$

b) En déduire que le triangle OO_1O_2 est équilatéral et que la droite (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

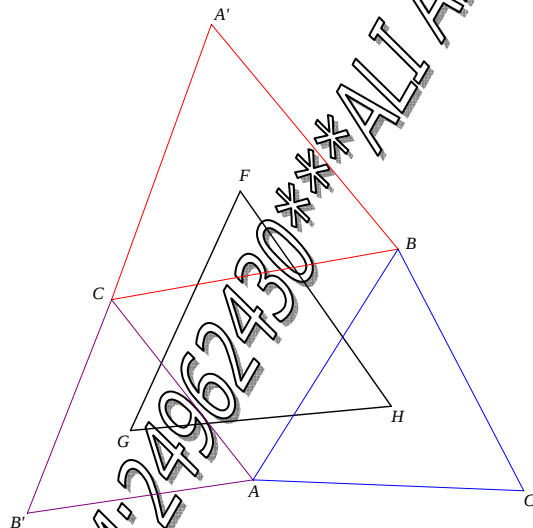
4°) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $g = f \circ r \circ f$.

a) Montrer que g est une translation. Vérifier que $g(O_2) = O_1$. En déduire le vecteur de translation.

b) Montrer que $r(B) = C$. En déduire que $g(P) = Q$.

c) Montrer alors que les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.

EXERCICE N°15 : LE THEOREME DE NAPOLEON 3



On considère un triangle ABC direct de centre de gravité O . On construit les triangles équilatéraux CBA' , ACB' et BAC' tels que les angles $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'B})$, $(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'C})$, $(\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'A})$ aient pour mesure $\frac{\pi}{3}$. On désigne par F , G et H les centres des triangles équilatéraux. Le but de l'exercice est de montrer de deux façons différentes que le triangle FGH est équilatéral direct.

1°) a) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer $R(C')$ et $R(C)$. En déduire que $CC' = BB'$ et que $(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

b) Montrer que $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3} \overrightarrow{C'C}$ et $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BB'}$.

c) Montrer que $OH = OG$ et $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OG}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

d) En déduire que FGH est équilatéral direct de centre O .

2°) On note R_1 , R_2 et R_3 les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de centres respectifs F, G et H.

- Quelle est l'image de B par $f = R_1 \circ R_2 \circ R_3$? Déterminer la nature de f .
- En déduire le centre et l'angle de la rotation $R = R_2 \circ R_3$.
- On note S la symétrie axiale d'axe (GH). Déterminer les axes des symétries S_2 et S_3 telles que $R_2 = S_2 \circ S$ et $R_3 = S \circ S_3$. Montrer que ces axes se coupent en F' tel que $F'GH$ soit équilatéral direct.
- Montrer que F' et F sont confondus et en déduire que FGH est équilatéral direct.

ALI AKIR***GSM:24962430***ALI AKIR***GSM:24962430



BAC MATHS

2009/2010

Cours et 283 exercices

Elaboré par : ALI AKIR

*Donne des cours particuliers en mathématiques pour
tous les niveaux*

Plus d'informations : Contacter à

GSM : 24 96 24 30

Email : akir.cm@gmail.com

Site Web : <http://maths-akir.midiblogs.com/>



Maths aux lycées, Site éducatif

Téléchargement gratuit

Fiches de cours / Séries d'exercices / Devoirs à la maison / Devoirs de contrôle et de synthèse
Sujets de révision pour le baccalauréat / Plus : Forum de maths, pour répondre à vos questions.



On va travailler dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

HOMOTHETIE

Définition

Soit Ω un point du plan et k un réel non nul. L'homothétie de centre Ω et de rapport k , notée $h_{\Omega;k}$ est la transformation qui, à tout point M du plan, associe le point M' tel que $\vec{\Omega M'} = k\vec{\Omega M}$.

Cas particuliers et premières propriétés

- Si $k = 1$, $h_{\Omega;k} = \text{id}$. Si $k \neq 1$, Ω est le seul point fixe de $h_{\Omega;k}$.
- Si $k = -1$, $h_{\Omega;k} = s_{\Omega}$. Les symétries centrales sont aussi les homothéties de rapport -1 .
- $h_{\Omega;k}$ est une bijection ; la bijection réciproque est $h_{\Omega;1/k}$.
- Si A et B sont deux points, et A' et B' leurs images par $h_{\Omega;k}$, on a $\vec{\Omega A'} = k\vec{\Omega A}$ et $\vec{\Omega B'} = k\vec{\Omega B}$, d'où par différence : $\vec{A'B'} = k\vec{AB}$ et donc $A'B' = |k| AB$.
- Une homothétie de rapport k multiplie donc les distances par $|k|$ et les aires par k^2 .
- Les seules homothéties qui sont des isométries sont l'identité ($k = 1$) et les symétries centrales ($k = -1$).
- Les homothéties transforment respectivement un segment, une demi-droite, une droite, un cercle en un segment, une demi-droite, une droite, un cercle.
- Plus précisément, en conservant les notations précédentes :
 - l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ et $A'B' = |k| AB$.
 - l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$ qui est parallèle à (AB) .
 - l'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' et de rayon $|k| r$.
- Les homothéties conservent le parallélisme, la perpendicularité, les milieux, les barycentres et les angles orientés (que leur rapport soit positif ou négatif).

Écriture complexe des homothéties

L'homothétie $h_{\Omega;k}$ de centre Ω et de rapport k est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = k(z - z_{\Omega}) + z_{\Omega}$.

La transformation d'écriture complexe $z' = az + b$, où a est un réel non nul et b un complexe est :

- l'identité si $a = 1$ et $b = 0$;
- une translation si $a = 1$ et $b \neq 0$;
- une homothétie de rapport a si $a \neq 1$.

Composée d'une homothétie et d'une translation

Soit f une homothétie de rapport k ($\neq 1$) d'écriture complexe $z' = kz + b_1$ et g une translation d'écriture complexe $z' = z + b_2$.

La transformation $g \circ f$ associe, à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe

$$z'' = (kz + b_1) + b_2 = kz + (b_1 + b_2).$$

$g \circ f$ est donc une homothétie de rapport k .

Composée d'une translation et d'une homothétie

Soit f une translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$ et g une homothétie de rapport k ($\neq 1$) d'écriture complexe $z' = kz + b_2$.

La transformation gof associe, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe

$$z' = k(z + b_1) + b_2 = kz + (kb_1 + b_2).$$

gof est donc une homothétie de rapport k .

Composée de deux homothéties

Soient f et g deux homothéties d'écritures complexes respectives $z' = k_1z + b_1$ et $z' = k_2z + b_2$, la transformation gof associe, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe

$$z'' = k_2(k_1z + b_1) + b_2 = k_1k_2z + (k_2b_1 + b_2).$$

C'est une transformation dont l'expression complexe est de la forme $z'' = Kz + B$ où K est un réel.

Si $K = k_1k_2 = 1$, gof est une translation.

Sinon gof est une homothétie de rapport $K = k_1k_2$.

Remarque : en général, $gof \neq fog$. Si gof et donc également fog sont des homothéties, on peut montrer que les centres de f , g , gof et fog sont alignés.

SIMILITUDES DIRECTES

• On dit qu'une similitude est directe si elle est la composée d'une homothétie et d'une déplacement.

• Soit A , B , C et D des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$:

Il existe une unique similitude directe f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$.

Forme réduite

Soit Ω un point du plan, α un angle orienté et k un réel strictement positif. La similitude directe de centre Ω , d'angle α et de rapport k , est la composée $r_{\Omega; \alpha} \circ h_{\Omega; k}$.

Cas particuliers et propriétés

• On a $r_{\Omega; \alpha} \circ h_{\Omega; k} = h_{\Omega; k} \circ r_{\Omega; \alpha}$.

Avec $k = 1$, on retrouve les rotations comme similitudes directes particulières.

On considère également les translations comme étant des similitudes directes particulières. Bien entendu les translations n'ont ni centre, ni angle, ni rapport mais sont définies par leur vecteur. Ainsi tous les déplacements sont considérés comme des similitudes directes.

Avec $\alpha = 0$, on retrouve les homothéties de rapport positif comme similitudes directes particulières.

Avec $\alpha = \pi$, on retrouve les homothéties de rapport négatif.

Ainsi tous les homothéties sont considérés comme des similitudes directes.

Remarque : une homothétie de centre Ω et de rapport k ($k < 0$) est considérée comme une similitude directe de centre Ω , d'angle π et de rapport $-k = |k|$. Il faut donc être prudent lorsque l'on parle du rapport d'une telle homothétie.

Les propriétés des similitudes directes découlent des propriétés des rotations et des homothéties.

• Une similitude directe de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2 .

• Les similitudes directes transforment respectivement un segment, une demi-droite, une droite, un cercle en un segment, une demi-droite, une droite, un cercle.

Plus précisément, avec les notations habituelles :

• l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ et $A'B' = kAB$.

• l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.

• l'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' et de rayon kr .

• Les similitudes directes conservent le parallélisme, la perpendicularité, les milieux, les barycentres et les angles orientés.

Écriture complexe des similitudes directes

La similitude directe de centre Ω , d'angle α et de rapport k est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = ke^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega$.

La transformation d'écriture complexe $z' = az + b$, où a est un complexe non nul et b un complexe est :

- l'identité si $a = 1$ et $b = 0$;
- une translation si $a = 1$ et $b \neq 0$;
- une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$ si $a \neq 1$.

SIMILITUDES INDIRECTES

• On dit qu'une similitude est indirecte si elle est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.

• Soit A, B, C et D des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$:

Il existe un unique similitude indirecte S tel que $S(A) = C$ et $S(B) = D$

Forme réduite

Soit Ω un point du plan, D une droite et k un réel strictement positif. La similitude indirecte de centre Ω , d'axe D et de rapport k , est la composée $S_D \circ h_{\Omega; k}$.

Cas particuliers et propriétés

• On a $S_D \circ h_{\Omega; k} = h_{\Omega; k} \circ S_D$.

Pour $k = 1$, on retrouve les symétries axiales comme similitudes indirectes particulières.

• $D = \{ M \in \mathbb{P} / \overrightarrow{\Omega S(M)} = k \overrightarrow{\Omega M} \}$

• $S \circ S = h_{\Omega; k^2}$

• Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D , alors $(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega S(M)}) \equiv -(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M}) [2\pi] \quad (k \neq 1)$

• Une similitude indirecte de rapport k multiplie les distances par k et les aires par k^2 .

• Les similitudes indirectes transforment respectivement un segment, une demi-droite, une droite, un cercle en un segment, une demi-droite, une droite, un cercle.

Plus précisément, avec les notations habituelles :

• l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ et $A'B' = kAB$.

• l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.

• l'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' et de rayon kr .

• Les similitudes indirectes conservent le parallélisme, la perpendicularité, les milieux, les barycentres

• Les similitudes indirectes changent les mesures des angles orientés en leurs opposés.

Écriture complexe des similitudes indirectes

La similitude indirecte de centre Ω , d'axe D et de rapport k est la transformation qui, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = ke^{i2\theta}(\bar{z} - \bar{z}_\Omega) + z_\Omega$ où θ désigne une mesure de l'angle $(\vec{e}_1; \vec{v})$.

La transformation d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, où a est un complexe non nul et b un complexe est :

• l'identité si $a = 1$ et $b = 0$;

• Symétrie axiale ou symétrie glissante si $|a| = 1$

• Similitude indirecte de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$ si $|a| \neq 1$

EXERCICE N°1

Dans le plan orienté, ABI est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Soit Ω le symétrique de B par rapport à (AI).

1°) Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en I.

- Montrer que Ω est le centre de cette rotation.
- Soit $C = R(B)$. Montrer que $I = A * C$.

2°) A tout point M de [AB] distinct de A et de B, on associe le point M' de [BC] tel que $AM = IM'$. Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral.

3°) Soit G le centre de gravité du triangle $\Omega MM'$ et S la similitude directe de centre Ω qui transforme M en G.

- Préciser le rapport et l'angle de cette similitude.
- Montrer que $S(B) = I$ et construire le point $A' = S(A)$.
- Montrer que les points I, G et A' sont alignés.

EXERCICE N°2

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. A et B deux points de coordonnées respectives (1,1) et (0,2)

1°) Soit g l'application définie par $g = t_{BO} \circ r_{\left(B, \frac{\pi}{2}\right)}$

- Déterminer $g(B)$ et $g(O)$
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g

2°) Soit S l'application définie par $S = g \circ h_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}$

- Déterminer $S(A)$, puis déterminer la nature de S.
- Soit OIAJ un carré de centre K ; déterminer $S(B)$; puis construire l'image du carré OIAJ par S.

EXERCICE N°3

Dans le plan orienté on considère le triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Soit H le

milieu de [BC], I le milieu de [AC] et Δ la médiatrice de [BC]. On désigne par S la similitude directe de centre A et qui envoie B en I.

Soit M un point quelconque du plan et M' son image par S.

1°) Déterminer l'angle et le rapport de S.

2°) Construire le point J antécédent de B par S.

3°) Soit le point N l'image du point M par la symétrie orthogonale d'axe Δ .

- Montrer que : $BM = BN$ si et seulement si $JM = 2CM$.
- Déduire alors l'ensemble des points M tels que $BM' = BN$.

EXERCICE N°4

On considère, dans le plan orienté, un triangle ABC rectangle en A tel que $AC = 2AB$ et

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par F le projeté orthogonal de A sur (BC), $I = S_{(AB)}(F)$ et $J = S_{(AC)}(F)$

1°) a) Montrer que : $(BI) \perp (AI)$ et $(CJ) \perp (AJ)$.

b) Caractériser l'application : $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$ et en déduire que $A = I * J$.



2°) Soit S la similitude direct qui transforme B en A et A en C .

- Déterminer le rapport et l'angle de S .
- Montrer que F est le centre de S .
- Montrer que : $S(I) = J$. En déduire que $CJ = IJ$.

3°) Soit σ la similitude indirect qui transforme I en F et F en J .

- Déterminer le rapport de σ
- Déterminer Ω le centre de σ . Montrer que $\overrightarrow{\Omega J} = 4\overrightarrow{\Omega I}$
- Soit E le point défini par $\overrightarrow{\Omega E} = 2\overrightarrow{\Omega I}$.

Montrer que l'axe (Δ) de σ est la médiatrice de $[EF]$

EXERCICE N°5

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AB = 2AC$.

Soit D et D' deux droites parallèles passant respectivement par B et C et ne contenant aucun des cotés du triangle ABC .

Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et D' .

La droite Δ coupe les droites D et D' respectivement en I et J .

1°) Soit S la similitude direct qui transforme A en B et C en A .

- Déterminer l'angle et le rapport de S .
- Soit Ω le centre de S . Montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

2°) a) Déterminer $S(D')$ et $S(\Delta)$.

b) En déduire $S(J)$

c) Montrer que le cercle de diamètre $[IJ]$ passe par Ω .

EXERCICE N°6 (Bac.M 2008p).

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), OAB est un triangle rectangle isocèle tel que $OA = OB$ et

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B .

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C .

1°) Montrer que f est rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2°) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD .

b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC) .

Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude f .

3°) Soit g la similitude indirecte de centre I , qui envoie A sur D .

a) Vérifier que g est de rapport 1 et d'axe (IC) . En déduire $g(O)$.

b) Déterminer les images de C et D par $g \circ f^{-1}$. En déduire la nature de $g \circ f^{-1}$.

4°) Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$.

a) Déterminer les images des points J et I' par $g \circ f^{-1}$.

b) Montrer que les droites (IJ) , $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.

EXERCICE N°7

Soit un triangle ABC non isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ à tout point M de la droite (AB) on

associe le point N de la droite (AC) tel que M et N soient dans un même demi-plan ouvert de bord (BC) et $BM = CN$.

1°) Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que pour tout point M de (AB) on a $r(M) = N$ et $r(B) = C$.



Préciser une mesure de son angle et construire son centre I.

2°) Soit $O = B^*C$ et $S_{(OI)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OI), h est l'homothétie de centre I et de rapport 2. On considère l'application $f = h \circ S_{(OI)} \circ r$

- Déterminer $f(B)$ et $f(I)$.
- Démontrer que f est une similitude indirecte dont on précisera l'axe, le centre et le rapport.
- Soit M' l'image de M par f . Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit la droite $(AB) \setminus \{A\}$ et le construire.
- Soit $H = M^*N$. Déterminer l'ensemble des points H lorsque M décrit la droite $(AB) \setminus \{A\}$.

EXERCICE N°8

Soit D une droite et O et M deux points symétriques par rapport à D et M' un point distinct de O et de M . On désigne par s la similitude indirecte de rapport $k \neq 1$ et de centre O envoyant M sur M' . Soit ζ un cercle de centre Ω passant par O et M et $\zeta' = s(\zeta)$.

1°) Construire le centre Ω' de ζ' .

2°) En déduire la construction de ζ' .

EXERCICE N°9

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' . Donner dans chacun des cas suivants, la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

- $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1 + 2i$
- $z' = -2z + 1 + 2i$
- $z' = (1+i)z + 1 + 2i$
- $z' = (1+i)\bar{z} + 1 + 2i$

EXERCICE N°10

Soit s la similitude directe du plan de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre M_0 d'affixe $z_0 = 1 - i$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1°) s a pour écriture complexe : $z' = \left(\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) (z - 1 + i) + 1 - i$.

2°) L'image par s de la droite D d'équation $x + y = \sqrt{2}$ est la droite D' d'équation $y = \sqrt{2}$.

3°) La réciproque s^{-1} de s a pour écriture complexe : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} z - 1$.

EXERCICE N°11

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle $ABCD$ tels que $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$; $(\vec{AB}, \vec{AD})$ est un angle droit direct; I désigne le milieu de $[AB]$.

Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

Partie A

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AD}$.

Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$, a et b étant des nombres complexes avec $a \neq 0$.

1°) Déterminer les nombres a et b pour que $S(D) = C$ et $S(C) = B$.

2°) Soit T la similitude directe qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$z' = -\frac{i\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$. Déterminer le rapport et l'angle de T .

3°) Montrer que la similitude T transforme B en I .

4°) En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

5°) Montrer que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

Partie B

Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1°) Vérifier que les points C et I appartiennent à (E).

2°) a) Démontrer que pour tout point M du plan $MD^2 - MB^2 = 2\vec{MJ} \cdot \vec{BD}$ où J est un point que l'on précisera.

b) Déterminer l'ensemble (E).

c) En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).

EXERCICE N°12

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$.

1°) Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i . En déterminer le rapport et l'angle.

2°) Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$

Calculer ΩM_0 et donner une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M_0})$.

3°) On considère la suite de points $(M_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n .

a) Placer les points Ω , M_0 , M_1 , M_2 , M_3 et M_4 .

b) Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n , l'égalité $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}} (z_0 - i)$

c) Pour tout entier naturel n , calculer ΩM_n puis déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

4°)

a) On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5 ; -3)$ est solution, résoudre (E).

b) Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\text{Im}(z) = 1$ et $\text{Re}(z) \geq 0$. Caractériser géométriquement Δ et le représenter.

c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

EXERCICE N°13

Soient s_1 , s_2 et s_3 les trois similitudes définies par :

♦ A tout point M d'affixe z , s_1 associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{-1+i}{2}z + \frac{3-i}{2}$

♦ s_2 est la similitude directe de centre O , de rapport 2 et d'angle π .

♦ A tout point $M(x ; y)$, s_3 associe le point M' de coordonnées : $\begin{cases} x' = -x + y - 1 \\ y' = -x - y + 2 \end{cases}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations :

$$f = s_1 \circ s_2 \text{ et } g = s_1 \circ s_3.$$

EXERCICE N°14

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 5 cm.

A, B, C désignent les points d'affixes respectives $1 - i$, i et -1 . On note g l'application qui à tout point M du plan, d'affixe z associe le point $g(M)$ d'affixe : $z' = \frac{1 - i + z + iz}{3}$

1°) a) Déterminer $g(B)$.

b) On note I le milieu de $[BC]$, prouver que les points O , A , I sont alignés, et placer les points O , A , B , C , I sur une figure.

2°) a) Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω le rapport et l'angle.

b) Prouver que les points A , B , Ω sont alignés.

3°) a) Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$. Montrer que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI) .

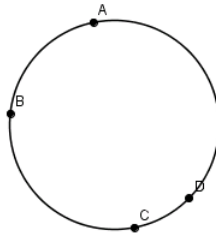
b) Soit O' l'image de O par g . Montrer que la droite (OO') est l'image par g de la droite (BO) .

c) En déduire que les points I , O , O' , A sont alignés.

4°) Montrer que les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre $[BO]$.

EXERCICE N°15 : Théorème de Ptolémée

Dans le plan orienté, on considère quatre points distincts A , B , C et D se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.



1°) Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme C en D . On désigne par E l'image du point B .

a) Montrer que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DE}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) [2\pi]$

b) Montrer que E est sur la droite (BD) . Marquer le point E sur la figure. On admettra que E est sur le segment $[BD]$.

c. Montrer que $AD \times BC = DE \times AC$.

2°) a) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) [2\pi]$ puis que $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$.

b) Soit S' la similitude directe de centre A qui transforme B en C . Montrer que D est l'image de E par cette similitude.

c) Prouver que $AB \times CD = AC \times BE$.

3°) Utiliser ce qui précède pour démontrer la relation : $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

Remarque : Cette relation est connue sous le nom de théorème de Ptolémée. Ptolémée était un mathématicien et astronome grec du II^{ème} siècle après J.-C. ; il utilisait cette relation pour calculer les longueurs des cordes d'arc de cercle, ancêtres de nos rapports trigonométriques.

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition (conique)

Soit F un point , D une droite ne contenant pas F et $e > 0$.

On appelle conique d'excentricité e , de foyer F et de directrice D l'ensemble

$$\zeta = \{M \in \mathcal{P} / MF = e.d(M,D)\} = \left\{M \in \mathcal{P} / \frac{MF}{MH} = e\right\} \text{ où H le projeté orthogonal de M sur la droite}$$

D.

- Si $e < 1$: on dit que ζ est une ellipse.
- Si $e = 1$: on dit que ζ est une parabole.
- Si $e > 1$: on dit que ζ est une hyperbole.

La droite Δ passe par F et perpendiculaire à la directrice s'appelle l'axe focal de conique.

Parabole

Dans le cas où les vecteurs $\overrightarrow{OF}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires, la courbe $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 = 2px$ est appelée parabole de sommet $O=F*K$, d'axe focal $(O; \vec{i})$ et de paramètre p. Elle admet un foyer F de coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et une directrice D d'équation $x = -\frac{p}{2}$. ($K = D \cap (xx')$)	Dans le cas où les vecteurs $\overrightarrow{OF}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires la courbe $\mathcal{P}$ d'équation : $x^2 = 2py$ est un parabole de sommet $O=F*K$, d'axe focal $(O; \vec{j})$ et de paramètre p. Elle admet un foyer F de coordonnées $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ et une directrice D d'équation $y = -\frac{p}{2}$. ($K = D \cap (yy')$)
Soit $M_0(x_0, y_0)$ une point de $\mathcal{P}$. L'équation de tangente T au point M_0 est : $y_0 y = p(x + x_0)$	Soit $M_0(x_0, y_0)$ une point de $\mathcal{P}$. L'équation de tangente T au point M_0 est : $x_0 x = p(y + y_0)$

Hyperbole

Soit $a > 0$ et $b > 0$.

La courbe H d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est appelée hyperbole de centre O d'axe focale $(O; \vec{i})$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$ avec $c^2 = a^2 + b^2$. Elle est constituée de deux composantes connexes H₁ et H₂ et admet deux couples foyer-directrices (F, D) et (F' , D'), avec F(c,0) , F'(-c,0) et D et D' d'équation cartésiennes $x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ et $x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}$	La courbe H d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole de centre O d'axe focale $(O; \vec{j})$ et foyer F(0,c), de directrice d'équation $y = \frac{b}{e} = \frac{b^2}{c}$ d'excentricité $e = \frac{c}{b}$ avec $c^2 = a^2 + b^2$. Elle est constituée de deux composantes connexes H₁ et H₂ et admet deux couples foyer-directrices (F, D) et (F' , D'), avec F(0,c) , F'(0,-c) et D et D' d'équation cartésiennes $y = \frac{b}{e} = \frac{b^2}{c}$ et $y = -\frac{b}{e} = -\frac{b^2}{c}$
--	---



Les points S et S' de coordonnées (a,0) et (-a,0) sont appelés sommets de l'hyperbole **H**, qui admet également deux asymptotes Δ et Δ'

d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ et $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

S et S' sont les barycentres respectifs des points (F,1) , (K,-e) et (F,1) et (K,-e) où K est le projeté orthogonale de F sur D.

Les points S et S' de coordonnées (0,b) et (0,-b) sont appelés sommets de l'hyperbole **H**, qui admet également deux asymptotes Δ et Δ'

d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ et $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

Soit $M_0(x_0, y_0)$ une point de **H**. L'équation de tangente T au point M_0 est : $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

Ellipse

Soit $a \geq b > 0$. Alors la courbe ξ d'équation

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est appelée ellipse d'axe focal

(O;i) de

demi grand axe a , de demi petit axe b et

d'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{c}{a} < 1$ avec

$a^2 = c^2 + b^2$

C'est une conique admettant deux couples foyer-directrices (F, D) et (F' , D'), avec F(c,0), F'(-c,0) , et D et D' d'équation

cartésiennes $x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$

et $x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}$.

Les points A(a,0) , B(0,b) C(-a,0) et D(0,-b) sont appelés les sommets de l'ellipse ξ . A et C sont les sommets principaux ils sont les barycentres respectifs des points (F,1) , (K,-e) et (F,1) et (K,-e) où K est le projeté orthogonale de F sur D.

Soit $b > a > 0$. Alors la courbe ξ d'équation

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ est appelée ellipse d'axe focal

(O;j) de

demi grand axe a , de demi petit axe b et

d'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{c}{b} < 1$ avec

$c^2 = b^2 - a^2$

C'est une conique admettant deux couples foyer-directrices (F, D) et (F' , D'), avec F(0,c) , F'(0,-c) , et D et D' d'équation cartésiennes

$x = \frac{b}{e} = \frac{b^2}{c}$ et $y = -\frac{b}{e} = -\frac{b^2}{c}$.

Les points A(a,0) , B(0,b) C(-a,0) et D(0,-b) sont appelés les sommets de l'ellipse ξ

B et D sont les sommets principaux ils sont les barycentres respectifs des points (F,1) , (K,-e) et (F,1) et (K,-e) où K est le projeté orthogonale de F sur D.

Soit $M_0(x_0, y_0)$ une point de ξ . L'équation de tangente T au point M_0 est : $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

Ensembles des points

L'ensemble des points M(x,y) du plan tels que : $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ est une

AB	Courbe
AB = 0	Parabole ou deux droites parallèles ou une droite ou le vide
AB < 0	Hyperbole ou deux droites sécantes.
AB > 0	Ellipse ou cercle ou un points ou le vide.



Pour tous les exercices le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, p un réel strictement positif.

EXERCICE N°1 (Définition de parabole)

Soit D la droite d'équation $x = \frac{p}{2}$ et F le point de coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$

Soit $\wp = \{M(x, y) / MF = MH\}$ où H est le projeté orthogonale de point M sur D .

Montrer que $M \in \wp$ équivaut à $y^2 = 2px$.

EXERCICE N°2

1°) Pour chacune des paraboles suivantes, déterminer son foyer, son sommet et une équation de sa directrice.

a) $y^2 = 4x$, b) $x^2 = 6x$, c) $y^2 = -8x$, d) $x^2 = -3y$

2°) Montrer que les courbes $\wp_1$, $\wp_2$ et $\wp_3$ d'équations respectives $x^2 = 5x - 1$, $x^2 - 4y + 2x - 1 = 0$

et $y^2 - x + y = 0$ sont des paraboles dont on déterminera les éléments caractéristiques.

3°) Vérifier que $A(2, 1) \in \wp_3$ et écrire l'équation de la tangente T à $\wp_3$ en point A .

4°) Déterminer les coordonnées de point $B \in \wp_3$ tel que la tangente à $\wp_3$ en point B est perpendiculaire à T .

EXERCICE N°3

Soit $\wp$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ ($p > 0$) de foyer F et de directrice D .

On considère une droite variable Δ passant par F coupe la parabole $\wp$ en M et M' .

1°) Déterminer l'ensemble des milieux de $[MM']$.

2°) Montrer que $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{2}{p}$

3°) On désigne par T et T' les tangentes à la parabole $\wp$ issues respectivement des points M et M' .

a- Montrer que T est perpendiculaire à T' .

b- Soit $\{A\} = T \cap T'$. Montrer que $A \in D$.

EXERCICE N°4

Soit $\wp$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ ($p > 0$) de foyer F et de directrice D .

Soient M et M' deux points de la parabole $\wp$ tel que le triangle MOM' est rectangle en O .

Montrer que les droites (MM') coupe l'axe focale de $\wp$ en un point fixe que l'on déterminera.

EXERCICE N°5

Soit $\wp$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ ($p > 0$) de foyer F et de directrice D .

1°) A quelle condition la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est-elle tangente à la parabole $\wp$.

2°) La tangente en un point M de parabole $\wp$ coupe l'axe de symétrie en un point A .

Montrer que la tangente au sommet de $\wp$ passe par $I = M \cdot A$.

3°) Soit T_1 et T_2 deux tangentes perpendiculaires à la parabole $\wp$.

Calculer en fonction de p : $d(O, T_1) \times d(F, T_2)$

($d(A, \Delta)$: la distance de point A à la droite Δ)

EXERCICE N°6

Soit H est l'orthocentre des triangles formés par trois tangentes à une parabole de directrice D .

Montrer que $H \in D$



EXERCICE N°7 (Définition d'hyperbole)

a, b et c trois réels strictement positifs tels que $c^2 = a^2 + b^2$. On donne le point $F(c, 0)$ et la droite D d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. Soit $H = \{M(x, y) / aMF = cMH\}$ où H est le projeté orthogonale de point M sur D .

1°) Montrer $M \in H$ équivaut à $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2°) Prouvé qu'il existe un second point F' et une droite D' tels que, avec les notations correspondantes $\frac{MF'}{MF} = \frac{MH'}{MH}$

3°) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$?

EXERCICE N°8

1°) Pour chacune des hyperboles suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets et une équation de chacune des directrices et son excentricité

a) $4x^2 - 36y^2 = 121$, c) $-9x^2 + 4y^2 = 196$; d) $2x^2 - 2y^2 =$

2°) Identifiés les ensembles des points $M(x, y)$ vérifiant :

a) $x = \frac{2}{\cos t}$ et $y = 3 \tan t$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

b) $x = 2\left(t + \frac{1}{t}\right)$ et $y = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$.

c) $x = \frac{1}{\cos 2t}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan 2t$, $t \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

EXERCICE N°9

1°) A quelle condition la droite d'équation $px + py + r = 0$ est-elle tangente à l'hyperbole H d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2°) Quel est l'ensemble des points par lesquelles passent deux tangentes à l'hyperbole H qui soient perpendiculaires?

3°) a) Soit P un point du plan de coordonnées (x, y) . Discuter le nombre de tangentes à l'hyperbole H passant par P .

b) Dans le cas où il existe deux tangentes, écrire l'équation de la droite qui les joint.

EXERCICE N°10

Soit l'hyperbole H d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ de foyer F associé à la directrice D et F' le foyer associé à la directrice D' de H . Soit T une tangente à H . Calculer en fonction de a et b : $d(F, T) \times d(F', T)$.

EXERCICE N°11 (Définition d'un ellipse)

a, b et c trois réels strictement positifs tels que $a^2 = b^2 + c^2$. On donne le point $F(0, c)$ et la droite D d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. Soit $\xi = \{M(x, y) / aMF = cMH\}$ où ξ est le projeté orthogonale de point M sur D .

1°) Montrer $M \in \xi$ équivaut à $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2°) Prouvé qu'il existe un second point F' et une droite D' tels que, avec les notations correspondantes $\frac{MF'}{MF} = \frac{MH'}{MH}$

3°) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$?

EXERCICE N°12

1°) Pour chacune des ellipse suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets et une équation de chacune des directrices et son excentricité



b) $4x^2 + 36y^2 = 121$, c) $9x^2 + 4y^2 = 196$; d) $2x^2 + 2y^2 = 1$
 2°) Identifier les ensembles des points $M(x,y)$ vérifiant :

a) $x = 5 \cos t$ et $y = 3 \sin t$, $t \in \mathbb{R}$.

b) $x = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$ et $y = \frac{e^t}{e^{2t} + 1}$, $t \in \mathbb{R}$.

EXERCICE N°13

Soit l'ellipse ξ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$.

Soit M un point de ξ d'abscisse x_0 .

1°) Définir ses foyers F et F' , ses sommets et une équation de chacune des directrices et son excentricité.

2°) Calculer MF et MF' et vérifier que $MF + MF' = 2a$.

3°) On considère une droite variable Δ passant par F coupe la l'ellipse ξ en M et M' .

Prouver que $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{2a}{b^2}$

4°) La droite (MF') recoupe ξ en N . Montrer que $\frac{FM}{FN} + \frac{F'M}{F'N} = \frac{4a^2 - b^2}{b^2}$

EXERCICE N°14

Déterminer la nature et les éléments de la courbe d'équation :

1°) $x^2 + 4y^2 + 2x = 1$

2°) $x^2 - 8y^2 + 2x - 16y = 1$

3°) $mx^2 + 4mx + (m - 1)y^2 + 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$

5°) $y^2 - 4y = 2x - \frac{x^2}{m}$, $m \in \mathbb{R}^*$

EXERCICE N°15

On considère deux points distincts donnés F et F' du plan orienté. On note O le milieu de $[FF']$ et Δ la médiatrice de ce segment. On pose $c = OF$. On note A et B les points de Δ tels que $OA = OB = c$.

On note s la symétrie centrale de centre F et r la rotation de centre F et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

Soit D et D' les droites symétriques de D par rapport à F et F' .

1°) a) On considère les points $P = r(A)$ et $Q = s(A)$. Prouver que $r(Q) = B$.

Déterminer la nature du quadrilatère $APQB$ et tracer ce quadrilatère sur la figure.

b) Déterminer les images respectives du segment $[AB]$ par s , par r et par $r \circ s$.

c) À tout point N du segment $[AB]$ on associe les points $H = s(N)$, $I = r(N)$ et $J = r(H) = (r \circ s)(N)$. Déterminer la nature du quadrilatère $NIHJ$ et tracer ce quadrilatère sur la figure.

2°) On note Γ le cercle de centre N et de rayon NI .

a) Montrer que, pour tout point M du plan, $MH^2 + MN^2 = 2(MF^2 + NF^2)$.

b) En déduire que Γ est l'ensemble des points M du plan vérifiant $MH^2 - 2MF^2 = 0$

3°) On note K la projection orthogonale de H sur Δ et on pose $\alpha = ON$ où $0 \leq \alpha \leq c$.

Exprimer NK en fonction de α , puis NF et NI en fonction de α et de c . En déduire que le cercle Γ coupe la droite (HK) en deux points M_1 et M_2 distincts ou confondus.

4°) Prouver que $\frac{M_1F}{M_1H} = \frac{1}{2}$.

En déduire que lorsque N parcourt le segment $[AB]$, les points M_1 et M_2 appartiennent à une ellipse E dont F est un foyer et dont on précisera l'excentricité et la directrice associée à F .

Placer les sommets de E et tracer cette ellipse.

EXERCICE N°16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par M, N, P trois points distincts de ce plan d'affixes respectives m, n, p .

1°) Démontrer que le triangle MNP est rectangle en N si et seulement si le complexe $i \frac{p-n}{m-n}$ est un réel non nul.

2°) Dans cette question, M, N, P sont d'affixes respectives z, z^2, z^4 .

a) Quelles conditions doit vérifier z pour que M, N, P soient distincts deux à deux ?

b) Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ du plan tels que le triangle MNP soit rectangle en N est une conique Γ d'équation $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$, privée de deux points que l'on précisera.

3°) Préciser la nature de Γ et déterminer ses éléments géométriques (sommets, foyers, excentricité, asymptotes).

4°) Représenter Γ et mettre en place sur la figure les sommets, les foyers et les asymptotes de Γ .

EXERCICE N°17

Soit ζ l'ensemble des points dont les coordonnées dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, vérifient : $13x^2 + 13y^2 - 24xy - 25 = 0$

1°) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Ecrire la forme complexe de r .

2°) Déterminer une équation de la courbe $r(\zeta)$. Préciser sa nature et ses éléments géométriques.

3°) En déduire la nature et les éléments géométriques de ζ .

EXERCICE N°18

Dans le plan complexe, on considère l'ensemble E des points M d'affixe z tels que

$$z^2 - (1+i)^2 = \bar{z}^2 - (1-i)^2$$

1°) Déterminer et construire E.

2°) Déterminer et construire l'ensemble F des points M tels que $[z - (1+i)][\bar{z} - (1-i)] = 8$

3°) Vérifier qu'il existe un point de $E \cap F$ où les deux courbes ont même tangente.

EXERCICE N°19

A tout point M du plan de coordonnées x, y on associe son affixe $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

On appelle ζ l'ensemble des point M de plan dont l'affixe z satisfait la relation

$$(*) : \left| \frac{z + i\bar{z}}{2} \right| = \left| z - \frac{1+i}{2} \right|$$

1°) Démontrer que ζ admet pour équation dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

2°) On pose $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j})$. Montrer que $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est un repère orthonormé et déterminer une équation de ζ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

3°) Quelle est la nature de ζ et quelles sont ses éléments caractéristiques?

4°) Que signifie géométriquement la relation (*). Construire ζ .

EXERCICE N°20

Dans le plan P orienté par un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe H d'équation : $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

1°) Montrer que H est une hyperbole, déterminer les sommets de H et ses asymptotes.

2°) a) Vérifier que le point $M_0(1 + 2\sqrt{2}, 1)$ est un point de H.

b) Donner une équation de la tangente (T) à H en M_0

3°) Soit θ un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$(E_\theta) : (\cos^2 \theta)z^2 - 2(\cos^2 \theta + 2 \cos \theta)z + 5 + 4 \cos \theta = 0$$

a) Résoudre l'équation (E_θ)

b) M' et M'' sont les images respectives des solutions z' et z'' .

Montrer que M' et M'' varient sur une branche B de l'hyperbole H .

ALI AKIR***GSM:24962430***ALI AKIR***GSM:24962430



BAC MATHS

2009/2010

Cours et 283 exercices

Elaboré par : ALI AKIR

*Donne des cours particuliers en mathématiques pour
tous les niveaux*

Plus d'informations : Contacter à

GSM : 24 96 24 30

Email : akir.cm@gmail.com

Site Web : <http://maths-akir.midiblogs.com/>



Maths aux lycées, Site éducatif

Téléchargement gratuit

Fiches de cours / Séries d'exercices / Devoirs à la maison / Devoirs de contrôle et de synthèse
Sujets de révision pour le baccalauréat / Plus : Forum de maths, pour répondre à vos questions.



Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Soit a un entier et d un entier non nul.

On dit que d est diviseur de a ou a est divisible par d , s'il existe un entier q tel que $a = dq$.

Notation : $d|a \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} / a = dq$.

• Si $d|a$ alors $-d|a$

Soit a, b deux entiers non nuls et c un entier.

• Si $a|b$ et $b|a$ alors $a = b$ ou $a = -b$.

• Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$

• Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|xb + yc$ pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$

Quotient et reste

Soit a et b deux entiers avec b non nul.

On appelle quotient de a par b l'entier q défini de la manière suivante :

• q est le plus grand entier inférieur ou égale à $\frac{a}{b}$ si $b > 0$

• q est le plus petit entier supérieur ou égale à $\frac{a}{b}$ si $b < 0$

• On appelle reste de a par b l'entier $r = a - bq$

$\exists (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$

• Le reste de tout entier n dans la division euclidienne par un entier non nul b est un élément de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, |b| - 1\}$

Congruence modulo n

Définition et notation:

Soit n un entier naturel non nul et a et b deux entiers.

*) On dit que a est congru à b modulo n (ou a et b sont congrus modulo n) si $a - b$ est un multiple de n . On note alors $a \equiv b \pmod{n}$ ou $a \equiv b[n]$

*) Pour tout entier a , il existe un unique entier $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que $a \equiv r[n]$. On dit que r est le reste modulo n de a .

Propriétés

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et $n \in \mathbb{N}^*$

$a \equiv b[n] \Leftrightarrow n|a - b$

$a \equiv b[n] \Leftrightarrow a \equiv r[n] \text{ et } b \equiv r[n]$

$a \equiv a[n]$

Si $a \equiv b[n]$ alors $b \equiv a[n]$

Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $a \equiv c[n]$

Si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $a + c \equiv b + d[n]$, $ac \equiv bd[n]$, $ha \equiv ha[n]$ ($h \in \mathbb{Z}$) et $a^k \equiv b^k[n]$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et a un entier naturel alors : $p|a^p - a$

Exemple : Montrer que, si $13|n^{13}$ alors $13|n$.

On a : 13 est un nombre premier alors $13|n^{13} - n$ et d'autre part on a : $13|n^{13}$ alors

$13|(n^{13} - (n^{13} - n))$

alors $13|n$

PGCD et PPCM

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

1°) Le plus grand entier qui divise à la fois a et b s'appelle le plus grand commun diviseur ou PGCD de a et b . On le note $a \wedge b$.

Formellement : $d = a \wedge b$ si et seulement si $\begin{cases} d|a \text{ et } d|b \\ \forall k \in D_a \cap D_b, k|d \end{cases}$

2°) La plus petit entier strictement positif qui est à la fois multiple de a et b s'appelle le plus petit commun multiple ou PPCM de a et b . On le note $a \vee b$

Formellement : $m = a \vee b$ si et seulement si $\begin{cases} a|m \text{ et } b|m \\ \forall n \in M_a \cap M_b, m|n \end{cases}$

3°) Deux entiers relatifs non nul a et b sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est égale à 1.

Propriétés

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> $a \wedge b > 0$ $a \wedge b = a \wedge b$ Si $b a$ alors $a \wedge b = b$ Si b ne divise pas a et si r est le reste modulo b de a alors $a \wedge b = b \wedge r$. $a \wedge b = b \wedge a$ Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$: $ka \wedge kb = k (a \wedge b)$ $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $c \in \mathbb{Z}^*$ | <ul style="list-style-type: none"> $a \vee b = a \vee b$ $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$ Si $b a$ alors $a \vee b = a$ Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$: $ka \vee kb = k (a \vee b)$ $a \vee b = b \vee a$ $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $c \in \mathbb{Z}^*$ |
|---|---|

Théorème

Soit a et b deux entiers non nuls. Alors il existe un unique couple d'entiers (a', b') tel que $a = (a \wedge b)a'$, $b = (a \wedge b)b'$ et $a' \wedge b' = 1$

Lemme de Gausse

Soit a , b et c trois entiers non nuls. Si $\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases}$ alors $a|c$

Théorème

Soit a et b deux entiers non nuls et n un entier.

Si $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a|n \\ b|n \end{cases}$ alors $ab|n$

Théorème (inverse modulo b)

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $b \geq 2$ et $a \wedge b = 1$.

Alors il existe un unique entier non nul $u \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ tel que $au \equiv 1[b]$.

On dit que u est inverse de a modulo b .

Identité de Bézout

Soit a et b deux entiers non nuls

*) $a \wedge b = 1$ si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$

*) Soit $d = a \wedge b$, alors il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$

Equations de la forme : $ax + by = c$.

Soit, a , b et c trois entiers et $d = a \wedge b$.

L'équation $ax + by = c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, si et seulement si d divise c .

EXERCICE N°1

- 1°) Quel est le reste de la division par 7 du nombre 32^{45}
- 2°) Quel est le reste de la division par 5 du nombre 24^{40}
- 3°) Déterminer le chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier 7^{77} .
- 4°) Déterminer le chiffre des dizaines de l'écriture décimale de l'entier 444^{444} .

EXERCICE N°2

p et q sont des entiers naturels.

- 1°) Démontrez que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.
- 2°) Déduisez en que pour que $2^n - 1$ soit premier, il faut que n soit premier.
- 3°) Prouvez à l'aide d'un contre exemple que la condition « n est premier » n'est pas suffisante pour que $2^n - 1$ soit premier.

EXERCICE N°3

Montrez que pour tout couple d'entiers relatifs (x, y), si $x^2 + y^2$ est divisible par 7 alors x et y sont aussi divisibles par 7.

EXERCICE N°4

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\begin{cases} n^2 \equiv 0[8] \text{ ou } n^2 \equiv 4[8] & \text{si } n \equiv 0[2] \\ n^2 \equiv 1[8] & \text{si } n \equiv 1[2] \end{cases}$$

EXERCICE N°5

- 1°) Quel est le reste de la division euclidienne de $3^{10} + 1$ par 10 ?
En déduire le reste de la division euclidienne de $7^{10} + 1$ par 10.
- 2°) Soit $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq 9$. Montrer que 10 divise $r^{10} + 1$ si, et seulement si, $r \in \{3, 7\}$.
- 3°) Déterminer l'ensemble des entiers naturels x tels que 10 divise $x^{10} + 1$.

EXERCICE N°6

On se propose de déterminer tous les couples d'entiers naturels (x, y) $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, solutions de l'équation :

$$(E) : 2^x - 3^y = 1$$

1°) Soit $k \in \mathbb{N}$.

- a) Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?
- b) Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k} + 1$ par 8, puis de $3^{2k+1} + 1$ par 8.

2°) Soit $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, un couple solution de l'équation (E). Montrer, à l'aide de 1°) que $x \leq 2$.

3°) En déduire tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, solutions de l'équation (E).

EXERCICE N°7

1°) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$: $5^{2^{n-2}} - 1 = 4(1 + 5^{2^1})(1 + 5^{2^2}) \dots (1 + 5^{2^{n-3}})$

2°) En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, 2^n divise $5^{2^{n-2}} - 1$ et 2^{n+1} ne divise pas $5^{2^{n-2}} - 1$.

EXERCICE N°8

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est divisible par 2^n .

EXERCICE N°9

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

1°) 5 divise $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$

2°) 9 divise $4^n - 1 - 3n$

EXERCICE N°10

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

5 divise $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ si et seulement si équivaut à 4 ne divise pas n .

EXERCICE N°11

1°) On considère l'équation (E) : $17x - 6y = 2$, où x et y sont des entiers.

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17x = 6y$.

b) Déterminer une solution particulière de (E).

c) En déduire tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation (E).

d) Montrer que le PGCD des couples solutions de (E) est 1 ou 2.

e) Déterminer les couples $(x; y)$ de $\mathbb{Z}^2$ solutions de (E) dont le PGCD est 2.

f) Déterminer le couple $(x_0; y_0)$ solution de (E) tel que : $x_0 \wedge y_0 = 2$ et $100 \leq y_0 \leq 150$

2°) Une bande de 17 pirates s'est emparé d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager équitablement et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais leur bateau fait naufrage et seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés : le partage laisserait alors 5 pièces d'or au cuisinier.

a) On note N le nombre de pièces d'or du butin, x le nombre de pièces de chaque pirate avant le naufrage et y le nombre de pièces d'or de chaque pirate après le naufrage. Exprimer N en fonction de x , puis en fonction de y .

b) Ecrire alors la relation liant x et y .

c) En utilisant les résultats de la question 1°c), déterminer la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates avec du civet de rat.

d) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $2x - 8y = 5$.

EXERCICE N°12

1°) On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$: $11n - 24m = 1$.

- Justifier, que cette équation admet au moins une solution.
- En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
- Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2°) a) Justifier que $10^p - 1$ divise $10^{pk} - 1$, $k, p \in \mathbb{N}$.

b) (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$.

c) En déduire l'existence de deux entiers N et M tels que : $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$.

d) Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e) Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

EXERCICE N°13 : (BAC 2008.P)

1°) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $2x - 8y = 5$.

Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$

2°) a) Soit n, x et y trois entiers tels que
$$\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$$

Montrer que (x, y) est une solutions de (E).

b) On considère le système (S)
$$\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$$
 où n est un entier.

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23[24]$

3°) a) Soit k un entier naturel.

Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.

EXERCICE N°14

1°) a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$.

b) En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$.

c) Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.

2°) On considère deux entiers naturels a et b . Pour tout entier n , on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

On décide de coder un message, en procédant comme suit :

A chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.

On ne connaît pas les entiers a et b , mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

a) Montrer que les entiers a et b sont tels que :

$$\begin{cases} 5a + b \equiv 10[26] \\ 19a + b \equiv 14[26] \end{cases}$$

b) En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

c) Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) , avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$ tels que

$$\begin{cases} 5a + b \equiv 10[26] \\ 19a + b \equiv 14[26] \end{cases}$$

3°) On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a) Coder le message « GAUSS ».

b) Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors

$$17(n - p) \equiv 0[26]$$

En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

4°) On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a) Soit n un entier naturel.

Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) + 9 - n$ par 26

b) En déduire un procédé de décodage.

c) En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

EXERCICE N°15 : SUITE DE FIBONNACCI

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

1°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: 2 divise f_n si et seulement si 3 divise n .

2°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: 3 divise f_n si et seulement si 4 divise n .

3°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: 4 divise f_n si et seulement si 6 divise n .

EXERCICE N°16 : NOMBRES DE MERSENNE

Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que :

1°) $(2^a - 1)$ divise $(2^{ab} - 1)$.

2°) $(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = (2^{a \wedge b} - 1)$

3°) Si $2^a - 1$ premier alors a premier.

EXERCICE N°17 : NOMBRES DE FERMAT

Partie A.

On appelle nombres de Fermat les nombres entiers $F_n = 2^{2^n} + 1$ où n est un entier naturel.

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: F_n divise $2^{F_n} - 2$

Partie B.

On se propose de démontrer que : " si le nombre $(2^n + 1)$ est premier, alors le nombre n est une puissance de 2. "

I. Soient b et p deux entiers naturels non nuls.

1°) Factoriser $b^{2p+1} - b$. En déduire que $b^{2p+1} - b$ et $b^{2p+1} + 1$ sont divisibles par $b + 1$.

2°) Démontrer que : quels que soient les entiers a, m, p non nuls, $a^{m(2p+1)} + 1$ est divisible par $a^m + 1$.

II. 1°) a) Soit n un entier naturel tel que le nombre $(2^n + 1)$ soit premier.

Démontrer par l'absurde que n ne peut pas avoir de diviseurs impairs autre que 1.

b) Conclure.

2°) a) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que F_n n'est pas un nombre premier.

b) Wacław Franciszek Sierpiński (1882 – 1970) a démontré que tout nombre de Fermat, non premier, admet un diviseur de la forme : $k \cdot 2^{n+1} + 1$, où k est un entier naturel non nul. Vérifier que cela correspond à l'exemple précédent.

EXERCICE N°18 : THEOREME DE WILSON

Soit p un entier naturel premier. On note E_p l'ensemble $\{1; 2; \dots; p-1\}$.

1°) Montrez que tout élément de E_p est premier avec p .

2°) Montrez que pour tout a de E_p , il existe b unique dans E_p tel que $ab \equiv 1[p]$.

3°) Déterminez les a éléments de E_p tels que $a^2 \equiv 1[p]$.

4°) Montrez que $(p-1)! \equiv p-1[p]$

5°) Déduisez-en que pour tout p entier naturel premier, $(p-1)! + 1$ est divisible par p .

EXERCICE N°19

Soient $a \in \mathbb{Z}$ impair et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Etablir : $a^{2^{n-2}} \equiv 1[2^n]$

EXERCICE N°20

Montrez que, pour tout b entier ≥ 3 , le nombre $x = 1 + b + 2b^2 + b^3 + b^4$ n'est pas un nombre premier.

EXERCICE N°21

Soit pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $s_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$

1°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $s_n = (2n+1) \sum_{k=1}^n \frac{(2n)!}{k(2n+1-k)}$

2°) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: s_n est un entier divisible par $2n+1$.

EXERCICE N°22

1°) Décomposer 319 en facteurs premiers.

2°) Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour les nombres : $3x + 5y$ et $x + 2y$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système d'inconnues a et b :
$$\begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases} \quad \text{où } m \text{ est le PPCM}$$

de a et b .

EXERCICE N°23

1°) a est un entier naturel. Montrez que $a^5 - a$ est divisible par 10.

2°) a et b sont des entiers naturels avec $a \geq b$. Démontrer que si $a^5 - b^5$ est divisible par 10 alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

EXERCICE N°24

Montrer que les entiers suivants sont composés :

1°) $n^4 - n^2 + 16$, $n \in \mathbb{Z}$

2°) $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$

3°) $2^{4n+2} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$

EXERCICE N°25

1°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $(n^2 + n) \wedge (2n + 1) = 1$

2°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $(n^3 + 2n) \wedge (n^4 + 3n^2 + 1) = 1$

3°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $(n^2 + 1) \wedge ((n + 1)^2 + 1) \in \{1, 5\}$

EXERCICE N°26

1°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}$: 42 divise $n^7 - n$

2°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}$: 2730 divise $n^{13} - n$

3°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}$: $2^{15} - 2^3$ divise $n^{15} - n^3$

EXERCICE N°27

Montrer que pour tout n de $\mathbb{Z}$: $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

EXERCICE N°28

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1° Démontrer que si $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2° On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a ; b)$ tels que :

$(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

a) Déterminer a lorsque $a = b$.

b) Vérifier que $(1 ; 1)$, $(2 ; 3)$ et $(5 ; 8)$ sont trois solutions particulières.

c) Montrer que si $(a ; b)$ est solution et si $a \neq b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3° a) Montrer que si $(x ; y)$ est une solution différente de $(1 ; 1)$ alors $(y - x ; x)$ et $(y ; y + x)$ sont aussi des solutions.

b) Dédire de 2° b) trois nouvelles solutions.

4° On considère la suite de nombres entiers strictement positifs (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n , $n > 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Démontrer que pour tout entier $n > 0$, $(a_n ; a_{n+1})$ est solution.

En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE N°29

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si $a \wedge b = 1$ alors $a^2 \wedge b^2 = 1$ ».

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{k=1}^n k^3$.

On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n , le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1} .

1°) Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $4S_n = n^2(n+1)^2$

2°) Supposons que n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

a) Démontrer que $S_{2k} \wedge S_{2k+1} = (2k+1)^2 \times (k^2 \wedge (k+1)^2)$.

b) Calculer alors $S_n \wedge S_{n+1}$.

3°) Supposons que n est impair.

Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.

a) Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.

b) Calculer alors $S_n \wedge S_{n+1}$.

4°) Dédire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n , que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE N°30

1°) Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \pmod{7}$.

2°) Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a) Montrer que : $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

b) On appelle ordre de $a \pmod{7}$, et on désigne par k , le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod{7}$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod{7}$.

En déduire que k divise 6.

Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c) Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

3°) A tout entier naturel n , on associe le nombre $A^n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.

Montrer que $A^{2006} \equiv 6 \pmod{7}$.

EXERCICE N°31

Partie A.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel n , 4^n est congru à 1 modulo 3.

2°) Prouver que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.

3°) Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17.

En déduire que, pour tout entier k , le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4°) Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?

5°) A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B.

Soit p un nombre premier différent de 2.

1° Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1 \pmod{p}$.

2° Soit $n > 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \pmod{p}$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que

$4^b \equiv 1 \pmod{p}$ et r le reste de la division euclidienne de n par b .

a) Démontrer que $4^r \equiv 1 \pmod{p}$. En déduire que $r = 0$.

b) Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b .

c) En déduire que b divise $p - 1$.

EXERCICE N°32

1°) Calculer le $(4^5 - 1) \wedge (4^6 - 1)$.

2°) (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.

Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

3°) a) Montrer que la suite (u_n) vérifie, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n est un entier naturel.

c) En déduire, pour tout entier naturel n , le $u_n \wedge u_{n+1}$.

4°) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

- a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0
- b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- c) Déterminer, pour tout entier naturel n , le $(4^n - 1) \wedge (4^{n+1} - 1)$.

ALI AKIR***GSM:24962430***ALI AKIR***GSM:24962430

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Produit scalaire dans l'espace.

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et les points O, M, N tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini comme suit :

♦ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

♦ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{AOB})$

Conséquence

1°) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA) .

$$2^\circ) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$3^\circ) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$4) \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Propriétés :

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et a et b deux réels.

$\vec{u}^2 = \ \vec{u}\ ^2$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v})$
$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$	$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$	$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 + \ \vec{u} - \vec{v}\ ^2 = 2(\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2)$	$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$	

Déterminant

Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$M(x, y, z) \rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$

On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base B , et on note $\det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$ le réel :

$$a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

Produit vectoriel dans l'espace.

Définition :

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs .

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le vecteur défini comme suite :

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors :

- $\vec{u} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$.
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base direct.
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin(\widehat{BAC})$

Conséquences et propriétés

$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$	$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	
$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC}) \vec{k}$ où $\vec{k}$ unitaire et normale au plan (ABC)	$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$	$a\vec{u} \wedge b\vec{v} = ab(\vec{u} \wedge \vec{v})$
$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$	$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$	
Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ c' & b' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & c \\ c' & a' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & b \\ b' & a' \end{vmatrix} \vec{k}$		

Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace.

L'aire du parallélogramme ABCD est égale à : $\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\ $	L'aire du triangle ABD est égale à : $\frac{1}{2} \ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\ $
Le volume d'un tétraèdre ABCD est égale à : $\frac{1}{6} \ (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}\ $	Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égale à : $\ (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}\ = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
La distance d'un point M de l'espace à la droite $\Delta(A, \vec{u})$ est le réel : $d(M, \Delta) = \frac{\ \overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\ }{\ \vec{u}\ } = \frac{\ \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\ }{\ \overrightarrow{AB}\ } \text{ avec } B \in \Delta$	

Translation

- *) $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
- *) $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$
- *) $f : \xi \rightarrow \xi' / f(M) = M'$ et $f(N) = N'$

f est une translation si et seulement si $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

- *) Toute translation de l'espace conserve la distance.
- *) Toute translation de l'espace conserve le produit scalaire.
- *) L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.
- *) L'image d'un plan par une translation est un plan qui lui est parallèle.
- *) Toutes translation conserve la parallélisme et l'orthogonalité.

*) Toutes translation conserve le milieu

*) L'image d'une sphère S par une translation est une sphère S' de même rayon et de centre l'image du centre.

*) Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Si $M'(x', y', z') = t_{\vec{u}}(M(x, y, z))$ alors $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$

Réciproquement : L'application qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que

$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$ est la translation de vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Homothétie

) $M' = h_{(I, k)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$, ($k \in \mathbb{R}^$)

*) $h^{-1}_{(I, k)} = h_{(I, \frac{1}{k})}$

*) $f : \xi \rightarrow \xi / f(M) = M'$ et $f(N) = N'$

f est une homothétie si et seulement si $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

*) L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

*) L'image d'un plan par une homothétie est un plan qui lui est parallèle.

*) Toutes homothétie conserve la parallélisme et l'orthogonalité.

*) Toutes homothétie conserve le milieu

*) L'image d'une sphère S du centre I et de rayon R par une homothétie est une sphère S' de centre I' image de I et de rayon $|k|R$.

*) Toutes homothétie conserve le contact.

) Soit $I(a, b, c)$ et $k \in \mathbb{R}^ - \{-1\}$

Si $M'(x', y', z') = h_{(I, k)}(M(x, y, z))$ alors $\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \\ z' = kz + (1-k)c \end{cases}$

Réciproquement : L'application qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que

$\begin{cases} x' = kx + \alpha \\ y' = ky + \beta \\ z' = kz + \gamma \end{cases}$ est une homothétie de centre $I\left(\frac{\alpha}{1-k}, \frac{\beta}{1-k}, \frac{\gamma}{1-k}\right)$ et de rapport k .

Rappel

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

Droite:

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires est une droite, appelé droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$D(A, \vec{u}) = \{M \in \mathbb{R}^3 / \exists \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}\}$

Représentation paramétrique : $D(A, \vec{u}) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$

Plan:

Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires:

L'ensemble des points M tels que $\vec{AM}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est un plan, appelé plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{ M \in \xi / \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \vec{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \}$

Représentation paramétrique : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \beta a' \\ y = y_0 + \lambda b + \beta b' \\ z = z_0 + \lambda c + \beta c' \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$

Equation cartésienne d'un plan et d'une droite

*) Plan : $P : ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

*) Droite : l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est une droite, si et seulement si, les triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels.

*) L'ensemble $\{ M \in \xi / \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \}$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

*) Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est le vecteur normale à P.

*) Le vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur de P si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

Position relatives

Soit $D(A, \vec{u})$, $D'(A', \vec{u}')$, $P : ax + by + cz + d = 0$ et $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

Leur vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$

*) $D \perp D'$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{u}'$

*) $D // D'$ si et seulement si $\vec{u} // \vec{u}'$

*) $P \perp P'$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{n}'$

*) $P // P'$ si et seulement si $\vec{n} // \vec{n}'$

*) $P \perp D$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{u}$

*) $P // D$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{u}$

Distance de A à P : $d(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

La sphère

Etant donné un point I de ξ et un réel R strictement positif. On appelle sphère de centre I et de rayon R, et on note $\zeta_{(I, R)}$ l'ensemble des points M de ξ tels que : $IM = R$.

Autre définition : Soit la sphère ζ de diamètre $[AB]$. $M \in \zeta \Leftrightarrow \vec{MA} \perp \vec{MB}$

Equation cartésienne d'un sphère : $\zeta_{(I(a, b, c), R)} : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$



Réciproquement :

Soit $E = \{M(x, y, z) \in \xi / x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0\}$

On pose $h = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} - d$

Si $h < 0$ alors $E = \emptyset$	Si $h = 0$ alors $E = \left\{ I\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right) \right\}$	Si $h > 0$ alors $E =$
----------------------------------	--	------------------------

Intersection d'une sphère et d'un plan.

Soit ξ une sphère de centre I et de rayon R . Soient P un plan, H le projeté orthogonal de I sur P et $d = (I, P)$.

Si $d > R$ alors $P \cap \xi = \emptyset$, on dit que P et ξ sont extérieurs.

Si $d = R$ alors $P \cap \xi = \{H\}$, on dit que P et ξ sont tangents.

Si $0 < d < R$ alors $P \cap \xi$ est le cercle de P de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$, on dit que P et ξ sont sécants.

ALI AKIR***GSM:24962430***ALI AKIR***GSM:24962430





BAC MATHS

2009/2010

Cours et 283 exercices

Elaboré par : ALI AKIR

*Donne des cours particuliers en mathématiques pour
tous les niveaux*

Plus d'informations : Contacter à

GSM : 24 96 24 30

Email : akir.cm@gmail.com

Site Web : <http://maths-akir.midiblogs.com/>



Maths aux lycées, Site éducatif

Téléchargement gratuit

Fiches de cours / Séries d'exercices / Devoirs à la maison / Devoirs de contrôle et de synthèse
Sujets de révision pour le baccalauréat / Plus : Forum de maths, pour répondre à vos questions.

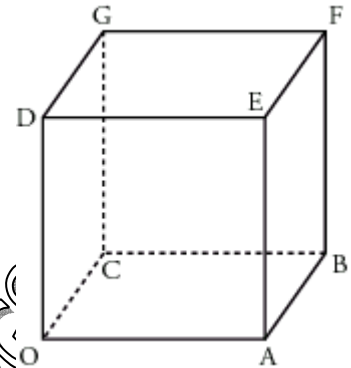


EXERCICE N°1

Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessous.
L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

On désigne par a un réel strictement positif.

L, M , et K sont les points définis par $\overrightarrow{OL} = a \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = a \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK} = a \overrightarrow{BF}$.



1°) a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.

b) En déduire l'aire du triangle DLM.

c) Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM) .

2°) On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM) .

a) Démontrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{OK}$.

Démontrer que $\lambda = \frac{a}{a^2 + 2}$. En déduire que H appartient au segment $[OK]$.

c) Déterminer les coordonnées de H .

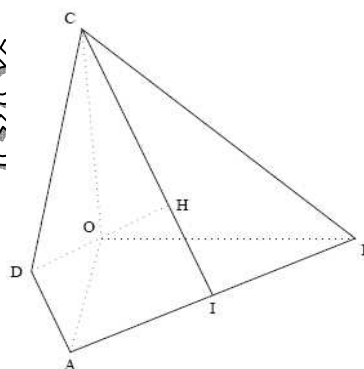
d) Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que $HK = \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2 + 2}}$.

EXERCICE N°2

Soient a un réel strictement positif et $OABC$ un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O ,
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC , H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC , et D le point de l'espace défini par :



1°) Quelle est la nature du triangle ABC ?

2°) Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC .

3°) Calcul de OH

a) Calculer le volume V du tétraèdre $OABC$ puis l'aire S du triangle ABC .

b) Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que $OH = a \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4°) Étude du tétraèdre ABCD.

L'espace est rapporté au repère orthonormal, $\left(O, \frac{1}{a} \overrightarrow{OA}, \frac{1}{b} \overrightarrow{OB}, \frac{1}{c} \overrightarrow{OC}\right)$

a) Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$

b) Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).

c) Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

EXERCICE N°3 (Bac.M 2008p).

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le tétraèdre ABCE tel que $A(1,0,2)$, $B(0,0,1)$, $C(0,-1,3)$ et $\vec{AE} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

1°) a) Vérifier que E a pour coordonnées $(0,2,3)$.

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE.

2°) a) Soit P le plan d'équation : $x - 2y - z + 5 = 0$. Montrer que P est parallèle au plan (ABC).

b) Soit K le point défini par $2\vec{KE} + \vec{KC} = \vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan P.

3°) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K.

a) Déterminer le rapport de h.

b) Le plan P coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J.

Calculer le volume du tétraèdre EIJK.

EXERCICE N°4 (Bac.Sc 2008p).

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(3,2,6)$, $B(1,2,4)$ et $C(4,2,5)$.

1°) a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

c) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

2°) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Montrer que $OH = \frac{4}{3}$.

3°) Soit S la sphère de centre O et passant par A.

a) Justifier que l'intersection de S avec le plan (ABC) est un cercle ζ de centre H.

b) Calculer le rayon du cercle ζ .

Système complet

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment un système complet d'évènements de Ω ssi :

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ et $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ avec $i \neq j$ on a : $A_i \cap A_j = \emptyset$

Exemple : $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{4, 5, 6\}$

A_1, A_2 et A_3 forment un système complet d'évènements de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Récapitulation :

Type de tirage	Successif avec remise	Successif sans remise	simultané
Ordre	L'ordre intervient	L'ordre intervient	L'ordre n'intervient pas
Un cas possible	un p-uplet avec possibilité de répétition	un p-uplet d'éléments distinct	une partie de p éléments
$\text{card} \Omega$	n^p	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Vocabulaire des probabilités

Expérience aléatoire. Eventualité

On lance un dé ou une pièce de monnaie, on tire une carte dans un jeu...

Seul le hasard intervient.

On parle alors d'expérience aléatoire.

Les différents résultats d'une expérience aléatoire s'appellent des éventualités.

L'ensemble des éventualités s'appelle l'univers, on le note souvent Ω .

Le nombre des éventualités de A s'appelle le cardinal de l'événement. On le note $\text{card}(A)$.

Exemple :

On lance un dé.

Il y a 6 éventualités : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Evénements

Un événement est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers.

On dit que cet événement est réalisé si l'une des éventualités qui le compose est réalisée.

Evénements particuliers :

L'événement certain contient toutes les éventualités. Il est égal à l'univers Ω .

L'événement impossible ne contient aucune éventualité. C'est l'ensemble vide $\emptyset$.

Un événement élémentaire est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité : $\{a\}$

Exemple :

On lance un dé.

L'événement certain est $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Les 6 événements élémentaires sont $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ et $\{6\}$.

L'événement « Obtenir un nombre impair » est $\{1; 3; 5\}$.

Il est composé de trois éventualités.

L'événement « Obtenir un nombre inférieur à 7 » est l'événement certain.

L'événement « Obtenir 8 » est l'événement impossible.

Soit A et B deux événements de Ω .



On dit que A est inclus dans B, et l'on note $A \subset B$, si toutes les éventualités de A appartiennent aussi à B.

L'événement $A \cap B$ est l'ensemble des éventualités communes à A et à B.

L'événement $A \cup B$ est l'ensemble des éventualités qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux.

Deux événements A et B sont dits incompatibles (ou disjoints) lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$

L'événement contraire de A est le complémentaire de A dans Ω ; on le note $\bar{A}$. (c'est l'événement qui contient toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A.

Des événements forment une partition d'un événement A, s'ils sont incompatibles deux à deux et si leur réunion est égale à A.

Probabilité

On considère un univers Ω lié à une expérience aléatoire, $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Définir une probabilité sur Ω , c'est associer à chaque éventualité x_i un réel positif p_i de sorte que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Propriétés :

- $0 \leq p(A) \leq 1$
- $p(\emptyset) = 0$ (la probabilité de l'événement impossible est nulle)
- $p(\Omega) = 1$ (la probabilité de l'événement certain est égale à 1).
- $p(A)$ est la somme des probabilités de tous les événements élémentaires qui forment A.
Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$, alors $p(A) = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + p(\{a_3\}) + \dots + p(\{a_k\})$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Si A et B sont incompatibles alors, $p(A \cap B) = 0$ on a donc : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- Quel que soit l'événement A, $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- Si A_1, A_2 et A_3 forment une partition de D, alors $p(D) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3)$. (Cette propriété se généralise à un nombre quelconque d'événements formant une partition de D.)

Equiprobabilité

Lorsque chaque événement élémentaire a la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que les événements élémentaires sont équiprobables.

Propriété :

Si l'on est dans une situation d'équiprobabilité, et que le nombre d'éléments de Ω est n,

La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$,

Pour tout événement A, $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas "favorables"}}{\text{nombre de cas "possibles"}}$

Exemple :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Chaque tirage est équiprobable.

La probabilité de tirer le roi de trèfle est $\frac{1}{52}$.

La probabilité de tirer un trèfle est de $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Probabilité conditionnelle

Exemple

Parmi les 80 filles qui étaient en classe :

36 sont aujourd'hui salariées ; 39 sont mères de famille ; 15 sont salariées et mères de famille.

On choisit au hasard une de ces 80 femmes.

Considérons les événements A : « la femme choisie est salariée » et B : « la femme choisie est mère de famille ».



1) Compléter le tableau suivant :

	B : mère de famille	$\bar{B}$: non mère de famille	Total
A : salariée	15	21	36
$\bar{A}$: non salariée		20	
Total	39	41	80

2) Calculer $P(A)$. rép. $(\frac{36}{80})$

3) Que représente l'événement $A \cap B$? Calculer la probabilité de cet événement. rép. $(\frac{15}{80})$

4) On interroge une salariée. Quelle est la probabilité que ce soit une mère de famille ? Vérifier que cette probabilité est égale à $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$. rép. $(\frac{15}{36})$

Remarque :

C'est la probabilité que la personne interrogée soit une mère de famille, sachant que l'on a interrogé une salariée.

Définition et propriété

Etant donné deux événements A et B avec $p(A) \neq 0$, on appelle « probabilité de B sachant A » et on note $p_A(B)$, la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est déjà réalisé.

On a alors $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Formule des probabilités composées :

on a donc aussi : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

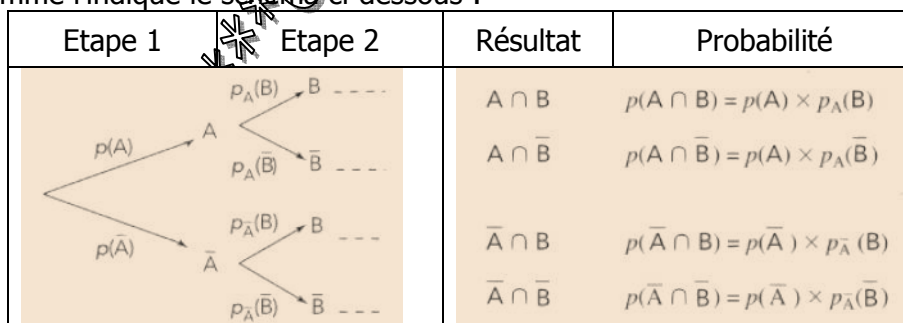
Exemple :

Dans l'exemple précédent, calculer la probabilité que la personne interrogée soit une salariée, sachant que l'on a interrogé une mère de famille. rép. $(\frac{15}{39})$.

Calculer $P_B(A)$. Que représente cette probabilité ? $P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{15}{39}$

Représentation à l'aide d'un arbre pondéré

On appelle arbre pondéré un arbre sur lequel on a placé les probabilités correspondant à chaque branche comme l'indique le schéma ci-dessous :



La probabilité d'un résultat est égale au produit des probabilités portées par les branches qui conduisent à ce résultat.

La somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Exemple :

Dans une forêt, 70% des arbres sont des chênes, les autres sont des hêtres. 40% des arbres ont une maladie et cette maladie touche un hêtre sur 3. On désigne par C l'événement « être un chêne » et par M « avoir la maladie ».

1) Compléter le tableau ci-contre en indiquant dans chaque case le pourcentage correspondant.

	C	$\bar{C}$	Total
M	30%	10%	40%
$\bar{M}$	40%	20%	60%
Total	70%	30%	100%

2) Faire un arbre pondéré et calculer les probabilités affectées à chaque branche.

$$P_C(M) = \frac{p(C \cap M)}{p(C)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$$

$$P_C(\bar{M}) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

Formule des probabilités totales

Si A est un événement de probabilité non nulle et $\bar{A}$ son événement contraire, alors les événements $B \cap A$ et $B \cap \bar{A}$ sont incompatibles et leur réunion est B :

$$P(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B).$$

A et $\bar{A}$ forment une partition de l'ensemble E. Ce cas particulier se généralise.

Soit les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ de probabilités non nulles constituant une partition de E.

La probabilité d'un événement de B de l'ensemble E peut se calculer par la formule :

$$p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \dots + p_{A_n}(B) \times p(A_n)$$

Exemple :

Dans une usine d'automobiles, trois chaînes « a », « b » et « c » fournissent respectivement 25%, 35% et 40% de la production de moteurs.

Certains de ces moteurs sont écartés comme defectueux, dans les proportions suivantes : 5% pour la chaîne « a », 4% pour la chaîne « b » et 1% pour la chaîne « c ».

On prend au hasard un moteur et on définit les événements suivants :

A : « le moteur est issu de la chaîne « a » »

B : « le moteur est issu de la chaîne « b » »

C : « le moteur est issu de la chaîne « c » »

D : « le moteur est defectueux »

Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

1) Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités et tracer un arbre pondéré illustrant la situation.

2) Calculer P(D).

3) Quelle est la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « a » sachant qu'il est defectueux ?

4) Calculer la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « c » sachant qu'il n'est pas defectueux ?

$$1) P(A) = 0,25 ; P(B) = 0,35 ; P(C) = 0,4 ; P_A(D) = 0,05 ; P_B(D) = 0,04 ; P_C(D) = 0,01.$$

$$2) P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = 0,0305$$

$$3) P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \times P_A(D)}{P(D)} = \frac{0,25 \times 0,05}{0,0305} \approx 0,4098$$

$$4) P_{\bar{D}}(C) = \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(C) \times P_C(\bar{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,4 \times 0,99}{1 - 0,0305} \approx 0,4085$$

Indépendance de deux événements

Définition et propriété

On dit que les événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre, donc si :

$$p_A(B) = p(B) \text{ et } p_B(A) = p(A).$$

On a alors : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Exemple :

Lancer une pièce, puis un dé, puis tirer au hasard dans une boîte ... ou les lancers successifs d'une pièce, d'un dé, ... la répétition du tirage d'une bille dans une boîte qui contient toujours le même nombre de billes, ... sont des expériences indépendantes :

La réalisation d'un résultat n'agit pas sur la probabilité du résultat suivant.

On admet alors le principe suivant :

Principe multiplicatif :

Dans le cas d'une succession d'expériences indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple :

On lance une pièce, puis un dé à 6 faces, puis une pièce, puis de nouveau une pièce puis un dé à 4 faces.

Si on a obtenu Face sur la première pièce, cela n'agit pas sur le résultat du lancer du dé à 6 faces, et ainsi de suite.

La probabilité d'obtenir la liste de résultats (F ; 2 ; P ; P ; 3) est alors : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{192}$

Variables aléatoires (aléa numériques)

Soit X une variable aléatoire.

On appelle loi de probabilité de X , l'application : $X(\Omega) \rightarrow [0,1]$
 $\{x_i \mapsto P(X = x_i)\}$

Soit $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\sum_{i=1}^n p(X = x_i) = 1$	$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$	$V(x) = E((X - E(X))^2)$ $V(x) = E(X^2) - (E(X))^2$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
$E(X + a) = E(X) + a$	$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$	$V(aX + b) = a^2 V(X)$	$\sigma(aX + b) = a \sigma(x)$

Fonction de répartition :

On appelle fonction de répartition de X, l'application définie de R dans [0,1] par $F : x \mapsto p(X \leq x)$

Schéma de Bernoulli, loi binomiale

Epreuve de Bernoulli

Définition :

Une expérience qui ne comporte que deux issues possibles (succès ou échec) est appelée **épreuve de Bernoulli**.

Exemples :

- Le jet d'une pièce de monnaie bien équilibrée constitue l'exemple le plus simple d'épreuve de Bernoulli : la probabilité du succès (« pile » par exemple) est 0,5 et celle de l'échec (« face » par conséquent) est également 0,5.
- Mais le jet d'un dé classique peut également constituer un exemple d'épreuve de Bernoulli, si l'on décide par exemple qu'un succès consiste à obtenir le 6 et que par

conséquent un échec consiste à ne pas obtenir le 6. La probabilité du succès est $\frac{1}{6}$ et celle de l'échec est $\frac{5}{6}$.

Remarque :

Si dans une épreuve de Bernoulli la probabilité du succès est p , la probabilité de l'échec est $1 - p$.

Schéma de Bernoulli

Définition :

On appelle **schéma de Bernoulli**, une expérience qui consiste à répéter **plusieurs fois et de manière indépendante** la même épreuve de Bernoulli.

Exemples :

- Si l'on jette trois fois la même pièce de monnaie, on est en présence d'un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.
- Une urne contient 3 boules noires et 5 blanches. Une expérience consiste à extraire trois boules de cette urne et à noter leur couleur.
 - Si le tirage des trois boules se fait **avec remise**, on est bien en présence d'un schéma de Bernoulli à 3 épreuves, la probabilité d'un succès (obtenir une boule blanche par exemple) étant $\frac{5}{8}$ et celle de l'échec (obtenir une boule noire) étant $\frac{3}{8}$.
 - Si par contre le tirage se fait **sans remise**, nous ne sommes plus en présence d'un schéma de Bernoulli puisque les épreuves ne sont plus indépendantes les unes des autres.

Loi binomiale

Définition :

On appelle **loi binomiale**, la loi de probabilité correspondant à un schéma de Bernoulli. Cette loi est souvent notée $B(n, p)$, la lettre B rappelant le mot « binomial », le nombre n étant le nombre d'épreuves et le nombre p étant la probabilité d'un succès lors d'une épreuve.

Remarque :

Un schéma de Bernoulli s'illustre par un arbre dans lequel :

- de chaque nœud partent deux branches ;
- toutes les branches menant à un succès portent la même probabilité p
- toutes les branches menant à un échec portent la même probabilité $1 - p$.

Soit p la probabilité de l'événement succès.

On considère la variable aléatoire X associant à cette expérience le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves.

Alors la loi de probabilité de X est donnée par : $p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$E(X) = np$	$V(X) = np(1 - p)$	$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$
-------------	--------------------	--------------------------------

Lois continues

Soit la fonction définie sur $[a, b]$ par $f(x) = \frac{1}{b - a}$ est appelée densité de la loi de probabilité

uniforme sur $[a, b]$.

On appelle probabilité uniforme sur $[a, b]$ l'application qui à tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$ associe le

réel $p([c, d]) = \int_c^d f(x) dx$

$p(\{c\}) = \int_c^c f(x)dx = 0$	$p([c, d]) = 1 - p([c, d])$	X suit une loi de probabilité uniforme p si $p(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$
----------------------------------	-----------------------------	---

Loi exponentielle

Soit $\lambda > 0$. La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ , l'application p qui :

- A tout intervalle $[c, d] \subset [0, +\infty[$ associe le réel $p([c, d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx$
- A tout intervalle $[c, \infty) \subset [0, +\infty[$ associe le réel $p([c, \infty)) = e^{-\lambda c}$

$p(\{c\}) = \int_c^c f(x)dx = 0$	$p([0, c]) = \int_0^c \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda c}$
$p([c, d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$	$p([c, +\infty)) = 1 - p([0, c]) = e^{-\lambda c}$

ALI AKIR***GSM:24962430***

EXERCICE N°1

Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. On effectue des tirages dans cette urne, chacune des 20 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

1°) On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir

a) 3 boules blanches et deux boules noires ?

b) des boules de couleurs différentes ?

2°) On tire successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir

a) 3 boules blanches et 2 boules noires, dans cet ordre ?

b) 3 boules blanches et 2 boules noires dans un ordre quelconque ?

3°) On tire successivement 3 boules en remettant la boule après chaque tirage si elle est blanche, en ne la remettant pas si elle est noire. Quelle est la probabilité de tirer

a) exactement une boule blanche ?

b) au moins une boule blanche?

EXERCICE N°2

Deux urnes U_1 et U_2 indiscernables contiennent respectivement

Urne U_1 : 3 boules rouges , 2 boules vertes.

Urne U_2 : 2 boules rouges , 1 boules vertes.

On choisit une urne au hasard et on tire un boule dans cette urne.

1°)Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2°)On suppose que la boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 .

EXERCICE N°3

Une urne contient 3 boules (a) et 2 boules (b)

On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne.

Quelle est la probabilité de tirer un jeton (b) en premier et jeton (a) en second ?

EXERCICE N°4

Une urne contient des jetons de 2 couleurs: Rouge et Noire, portant chacun un numéro.

On tire au hasard un jeton dans cette urne.

La probabilité pour que le jeton soit rouge est $\frac{1}{3}$.

La probabilité pour que le jeton porte un numéro pair est $\frac{4}{9}$.

La probabilité pour que le jeton soit rouge et porte un numéro pair est $\frac{1}{9}$.

1° Quelle est la probabilité que le jeton soit noir?

2° Quelle est la probabilité pour que le jeton porte un numéro impair?

3° Quelle est la probabilité pour que le jeton soit noir et porte un numéro impair?

4° Les événements " être noir" et "porter un numéro impair" sont-ils indépendants?

5° Si on sait que le jeton tiré est noir, alors quelle est la probabilité pour que ce jeton porte un numéro impair?

EXERCICE N°5

I. Une urne contient deux boules blanches et n boules noires, indiscernables au toucher.

Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note A_2 l'événement : " Le joueur a tiré deux boules blanches "

Déterminer n pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'événement A_2 soit égale à $\frac{1}{15}$.

II. Dans toute la suite du problème, on prend $n = 4$.

Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note :

A_0 : l'événement " Le joueur a tiré deux boules noires ".

A_1 : l'événement : " Le joueur a tiré une boule noire et une boule blanche ".

A_2 : l'événement : " Le joueur a tiré deux boules blanches ".

1°) Calculer la probabilité des événements A_0 et A_1 .



2°) Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et perd deux points pour chaque boule noire tirée.

Calculer la probabilité que le joueur soit gagnant (c'est à dire qu'il ai un score strictement positif).

III. Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules.

Soit B_i l'événement : " On obtient i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage " ($i = 0, 1$ ou 2)

1°) Donner $p(B_0|A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$.

Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$.

En déduire que $p(B_0) = \frac{41}{75}$.

2°) Montrer de même que $p(B_2) = \frac{2}{75}$. En déduire $p(B_1)$.

EXERCICE N°6

On dispose de deux dés cubiques d'apparences identiques : l'un est parfait et l'autre est truqué.

Pour le dé truqué, la probabilité d'obtenir un six est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1°) a) On lance le dé parfait 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux six.

b) On lance le dé truqué 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux six.

2°) On choisit l'un des deux dés précédents au hasard (les deux dés ont donc la même probabilité d'être choisis) et on lance ce dé 3 fois de suite. On suppose les 3 lancers indépendants.

On désigne par T , l'événement : « choisir le dé truqué »

par $\bar{T}$, l'événement contraire de T ,

par A , l'événement : « choisir le dé parfait et obtenir exactement deux six »,

par B , l'événement : « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux six »,

par C l'événement : « obtenir exactement deux six ».

On pourra admettre que la réponse au 1.a. est $\frac{2}{9}$ et que la réponse au 1.b. est $\frac{2}{9}$.

a) Calculer la probabilité de l'événement A puis celle de l'événement B .

b) En déduire la probabilité de l'événement C .

c) Déterminer la probabilité d'avoir choisi le dé truqué, sachant qu'on a obtenu exactement deux six.

EXERCICE N°7

1°) Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2.

Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne. (Les choix sont supposés équiprobables).

a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?

b) On a tiré un jeton portant le numéro 1.

Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?

2°) On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.

a) Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.

b) Soit S la variable aléatoire, qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.

Déterminer la loi de probabilité de S .



- c) Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros est impaire, Claude donne 10 dt à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ dt de Dominique.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.

Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ , puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est à dire pour que $E(X)$ soit égale à 0).

EXERCICE N°8

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires, indiscernables au toucher.

1°) On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.

On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ;

on note A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ;

on note A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ».

Montrer que $p(A_0) = \frac{6}{15}$ et $p(A_1) = \frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

2°) Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne.

On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ;

on note B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».

a) Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.

b) Calculer $p(B_0)$.

d) On n'a obtenu aucune boule noire lors de ce second tirage.

Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?

3°) On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Montrer que $p(R) = \frac{1}{3}$.

EXERCICE N°9

250 candidats se sont présents à un examen comportant deux épreuves l'un écrite et l'autre orale.

1°) Sachant qu'un candidat ne peut passer l'épreuve orale que lorsqu'il est admis à l'épreuve écrite et que 120 candidats sont admis à l'épreuve écrite, quelle est la probabilité pour qu'un candidat passe l'épreuve orale ?

2°) 60 candidats seulement sont déclarés admis.

Quelle est la probabilité pour qu'un candidat admis à l'écrit ait passé avec succès l'épreuve orale ?

EXERCICE N°10

On fait tourner une roue comportant 12 secteurs de même taille numérotés de 1 à 12. Les secteurs portant un numéro pair sont de couleur jaune, les secteurs portant un numéro multiple de trois et impair sont de couleur verte et les autres secteurs sont rouges.

Si la roue s'arrête sur un secteur de couleur verte on tire un billet de loterie dans une urne A. Dans les autres cas, on tire un billet de loterie dans une urne B.

Dans l'urne A un billet sur quatre est gagnant alors que dans B seulement un billet sur vingt est gagnant.

Calculer la probabilité d'obtenir un billet gagnant.

EXERCICE N°11

Un fumeur essaye de réduire sa consommation. On admet qu'il fonctionne toujours suivant les conditions :

C_1 : S'il reste un jour sans fumer, alors il fume le lendemain avec probabilité de 0,4.

C_2 : Par contre, s'il cède et fume un jour, alors la probabilité qu'il fume le lendemain est de 0,2.

On note U_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ème}}$ jour.

1°) Montrer que pour tout n de N^* : $U_{n+1} = -0,2U_n + 0,4$

2°) Soit pour tout n de N^* : $V_n = U_n - \frac{1}{3}$. Montrer que (V) est suite géométrique.

3°) En déduire U_n en fonction de n et U_1 .

4°) Calculer alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE N°12

Soit P une probabilité définie sur un univers des possible Ω et soient A et B deux événements indépendants.

1°) Démontrer que A et $\bar{B}$ sont indépendants et qu'il en est de même de $\bar{A}$ et B et de $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

2°) On suppose que $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,6$.

Calculer $P(A \cup B)$, $P(A \cup \bar{B})$, $P(\bar{A} \cup B)$ et $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

EXERCICE N°13

Un grossiste en appareils ménagers est approvisionné par trois marques, notées respectivement M_1 , M_2 et M_3 . La moitié des appareils de son stock provient de M_1 , un huitième de M_2 et trois huitièmes de M_3 . Ce grossiste sait que dans son stock, 13% des appareils de la marque M_1 sont rouges, que 5% des appareils de la marque M_2 sont rouges et 10% des appareils de la marque M_3 sont aussi.

On choisit au hasard un appareil emballé dans le stock de ce grossiste :

1°) Quelle est la probabilité qu'il vienne de M_3 ?

2°) Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vienne de M_1 ?

3°) Quelle est la probabilité que l'appareil choisi ne soit pas de couleur rouge.

4°) Après examen, on s'aperçoit que l'appareil choisi est rouge.

Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque M_1 ?

EXERCICE N°14

On considère n sacs $S_1, S_2, \dots, S_n$ tels que S_1 contient trois boules blanches et une boule noire; chacun des autres sacs contient quatre boules noires et une boule blanche. n est un entier naturel supérieure ou égale à 2.

Partie A

Dans cette question on tire une boule de chacun des trois premiers sacs S_1, S_2 et S_3 .

Soit X l'aléas numérique qui désigne le nombre de boules blanches obtenues.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer $E(X)$.

2°) Construire la représentation graphique de la fonction de répartition F de X .

Partie B

Dans cette question on effectue k tirages successifs d'une boule de la façon suivante : « On tire une boule de S_1 qu'on la place dans S_2 puis on tire de S_2 une boule qu'on la place dans S_3 et ainsi de suite jusqu'à l'ordre k avec $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ».

On note a_k la probabilité de l'événement A_k : « Obtenir une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage ».

1°) Calculer $p(A_k / A_{k-1})$ et $p(A_k / \bar{A}_{k-1})$ pour $k \geq 2$, en déduire que $a_k = \frac{1}{6} a_{k-1} + \frac{1}{6}$.

2°) On pose $b_k = a_k - \frac{1}{5}$. Montrer que (b_k) est une suite géométrique. En déduire a_k en fonction de k .

EXERCICE N°15

Jeu « chuck à luck ». On parie sur un nombre de 1 à 6. On lance 3 dés. Si le nombre sur lequel on a parié sort :

Sort 3 fois	Sort 2 fois	Sort 1 fois	Sort 0 fois
Gagné 3 dinars	Gagné 2 dinars	Gagné 1 dinars	Perdue 1 dinars

Soit X le gain lors d'une partie.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer $E(X)$ et sa variance.

2°) Construire la représentation graphique de la fonction de répartition F de X .

EXERCICE N°16

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.



On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n - 1$ premiers tirages et une boule blanche lors du $n^{\text{ième}}$ tirage.

1°) Calculer les probabilités p_2 , p_3 et p_4 .

2°) On considère les événements suivants :

B_n : « On tire une boule blanche lors du n -ième tirage »

U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n - 1$ premiers tirages »

a) Calculer la probabilité de l'événement B_n .

b) Exprimer la probabilité de l'événement U_n en fonction de n .

c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité : $p_n = \frac{n-1}{4}$.

3°) On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \dots + p_n$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b) Déterminer la limite de la suite (S_n) .

EXERCICE N°17

Robin joue avec un jeu électronique.

Une partie consiste en un duel entre Robin et trois monstres, M_1 , M_2 ou M_3 , choisi par la machine. Le jeu est programmé de telle sorte que, pour chaque partie, le monstre M_1 a une chance sur deux d'apparaître, les deux autres monstres ayant la même probabilité d'apparition.

On admet que lors d'un combat, la probabilité pour Robin de gagner est respectivement de :

0,3 contre M_1 , 0,4 contre M_2 et 1 contre M_3 .

1°) Robin joue une partie.

Calculer la probabilité pour qu'il gagne cette partie.

2°) Sachant que Robin a perdu la partie, quelles sont les probabilités pour :

a) qu'il ait joué contre le monstre M_1 ?

b) qu'il ait joué contre le monstre M_3 ?

3°) Robin joue quatre parties consécutivement. On admet que les parties sont jouées indépendamment.

Calculer les probabilités pour que : Robin gagne au moins une partie

EXERCICE N°18

Pour analyser le fonctionnement d'une machine d'atelier, on note, mois après mois, ses pannes et on remarque que :

- sur un mois la machine tombe au plus une fois en panne ;
- si pendant le mois « n » la machine n'a pas de panne, la probabilité qu'elle en ait une le mois suivant « $n + 1$ » est 0,24 ;
- si la machine tombe en panne le mois « n » (ce qui entraîne sa révision), la probabilité qu'elle tombe en panne le mois suivant « $n + 1$ » est 0,04 ;
- la probabilité que la machine tombe en panne le premier mois après sa mise en service est 0,1.

On désigne par E_n l'événement « La machine tombe en panne le $n^{\text{ième}}$ mois suivant sa mise en service » on note p_n la probabilité E_n . (et on a ainsi $p_1 = 0,1$). Si A est un événement, $\bar{A}$ représentera l'événement contraire.

1°) a) Donner les valeurs numériques des probabilités de « E_{n+1} sachant que E_n » et de « E_{n+1} sachant que $\bar{E}_n$ ».

Exprimer les probabilités de « E_n et E_{n+1} » et de « E_{n+1} et $\bar{E}_n$ » en fonction de p_n .

b) Utiliser a) pour montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $p_{n+1} = 0,24 - 0,2 p_n$.

2°) a) Résoudre l'équation $p = 0,24 - 0,2 p$.

b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose $u_n = p_n - p$.

Calculer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire les expressions en fonction de n , de u_n et de p_n .

c) Montrer que la suite (p_n) est convergente; expliciter sa limite.

EXERCICE N°19

Un magasin stocke un certain produit dans des boîtes.



Ces boîtes sont de 2 couleurs: rouges dans la proportion 25%, bleue dans la proportion 75%. Elles sont protégées par des cartons identiques entre eux. Chaque carton ne contient qu'une seule boîte. Certains cartons portent, en dessous et à l'extérieur, la marque M, les autres ne portent aucune marque.

On précise d'autre part que

- parmi les cartons contenant une boîte rouge, 45% portent la fameuse marque M
- parmi les cartons contenant une boîte bleue, 60% portent la marque M.

On prend au hasard un carton dans le magasin.

1° On ouvre le carton tiré. On remarque qu'il contient une boîte rouge. Quelle est la probabilité p_1 que le carton porte la marque M?

Si la boîte contenue dans le carton était bleue, quelle serait la probabilité p_2 que le carton porte la marque M?

2° Quel est le pourcentage de cartons qui portent la marque M?

En déduire la probabilité p_3 qu'un carton tiré porte la marque M.

3° On n'ouvre pas le carton tiré. On remarque toutefois qu'il porte la marque M. Quelle est la probabilité p_4 que ce carton marqué M contienne une boîte rouge?

EXERCICE N°20

Quatre filles et trois garçons doivent subir l'épreuve orale d'un examen. L'examineur décide d'établir au hasard la liste fixant l'ordre de passage des candidats. Pour cela, il met les noms (supposés tous différents) des sept candidats dans une enveloppe.

1°) Dans cette question, on suppose que l'examineur procède à un tirage des sept noms l'un après l'autre.

On désigne par F_1 l'événement : " le premier candidat interrogé est une fille ",
et par F_2 l'événement : " le deuxième candidat interrogé est une fille ".

- a) Quelle est la probabilité que les deux premiers candidats interrogés soient des filles ?
- b) Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille sachant que le premier candidat interrogé est une fille ?
- c) Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille ?

2°) On suppose maintenant que l'examineur, voulant interroger seulement quatre candidats parmi les sept, procède à un tirage simultané de quatre noms. On note X la variable aléatoire égale au nombre de filles ainsi désignées.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculer l'espérance mathématique de X .

EXERCICE N°21

Un supermarché commercialise des gaufrettes vendues en paquets pour lesquels

- dans 5 % des cas l'emballage n'est pas intact,
- dans 70 % des paquets d'emballage non intact, il y a au moins une gaufrette cassée,
- 90 % des paquets d'emballage intact ne contiennent aucune gaufrette cassée.

1°) Un client achète au hasard un paquet de ces gaufrettes.

On note I l'événement : « l'emballage est intact » et C l'événement : « au moins une gaufrette est cassée ».

a) Calculer la probabilité de I .

b) On considère les événements suivants

E : « l'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée ».

F : « l'emballage est intact et aucune gaufrette n'est cassée ».

Exprimer E et F en fonction de I , $\bar{I}$ (événement contraire de I) et $\bar{C}$ (événement contraire de C)

c) Calculer alors les probabilités de E et de F .

En déduire la probabilité de $\bar{C}$ (événement contraire de C) puis celle de C .

2°) Lors d'une vente promotionnelle dans ce supermarché, ces gaufrettes sont vendues par lots de cinq paquets. Un client achète au hasard un tel lot. On suppose que les tirages des paquets formant un lot sont indépendants.



Quelle est la probabilité pour que dans ce lot il y ait au moins quatre paquets d'emballage intact? qu'il n'y ait aucune gaufrette cassée ? On donnera les résultats à 10^{-4} près.

EXERCICE N°22

Un jeu consiste à extraire, au hasard et simultanément, 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 5 boules vertes.

Si le joueur obtient 3 boules rouges, événement que l'on note R_3 , il gagne 500 dt.

S'il obtient 2 boules rouges et 1 boule verte, événement que l'on note R_2 , il gagne 300 dt.

Enfin, s'il obtient strictement moins de 2 boules rouges il ne gagne rien, on note cet événement E.

1°) Montrer que les probabilités des événements R_2 et R_3 sont :

$$P(R_2) = \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad P(R_3) = \frac{1}{12}.$$

2°) On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur.

Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

3°) Dans cette question on modifie les règles du jeu de la façon suivante :

♦ Si le joueur réalise les événements R_3 et R_2 il ne gagne plus d'argent immédiatement mais est qualifié pour la suite du jeu que l'on appelle " Banco ".

♦ Si l'événement E est réalisé le joueur ne gagne rien et n'est pas qualifié pour le " Banco ".

Le " Banco " consiste à extraire une boule parmi les sept restées dans l'urne ; si celle-ci est verte le joueur empoche les 1000 dt du " Banco " et si elle est rouge le joueur a perdu mais repart avec une prime de " consolation " de 200 dt.

a) Quelle est la probabilité d'empocher les 1000 dt du " Banco " sachant que R_3 est réalisé ?

b) Quelle est la probabilité d'empocher les 1000 dt du " Banco " sachant que R_2 est réalisé ?

c) En déduire la probabilité d'empocher les 1000 dt du " Banco ".

On note Y la variable aléatoire donnant le gain du joueur dans ce nouveau jeu. Y peut donc prendre les valeurs 0, 200 ou 1000.

d) Etablir la loi de probabilité de Y.

e) Calculer l'espérance mathématique de Y et comparer avec celle de X.

EXERCICE N°23

1°) Soit P une loi de probabilité sur $[0 ; 2\pi]$ de densité f définie sur $[0 ; 2\pi]$ par : $f(x) = \lambda \sin \frac{x}{2}$.

a) Déterminer λ .

b) Calculer $P\left(\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

2°) La durée d'attente X en secondes, à la caisse rapide d'un supermarché, est une variable

aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{200}$, c'est-à-dire que pour tout réel $t \geq 0$

$$\text{on a : } P(X < t) = \int_0^t \frac{1}{200} e^{-\frac{x}{200}} dx.$$

a) Calculer la probabilité que l'attente soit inférieure à 1 minute.

b) Calculer la probabilité que l'attente dépasse 3 minutes.

EXERCICE N°24

1°) Soit P une loi de probabilité sur $[1 ; 10]$ de densité f définie par $f(x) = \frac{\lambda}{x^3}$.

a) Déterminer λ .

b) Calculer $P([2 ; 5])$.



2°) La durée de vie (en heures) d'un élément mécanique a été modélisée par une variable aléatoire X telle que pour tout réel $t \geq 0$: $P(X < t) = 0,002 \int_0^t e^{-0,002x} dx$

- Vérifier que la loi de X est une loi exponentielle dont on précisera le paramètre λ .
- Calculer $P(X < 400)$.
- Calculer la probabilité que cet élément ait une durée de vie inférieure à 1000 heures sachant qu'il a déjà tenu 500 heures.

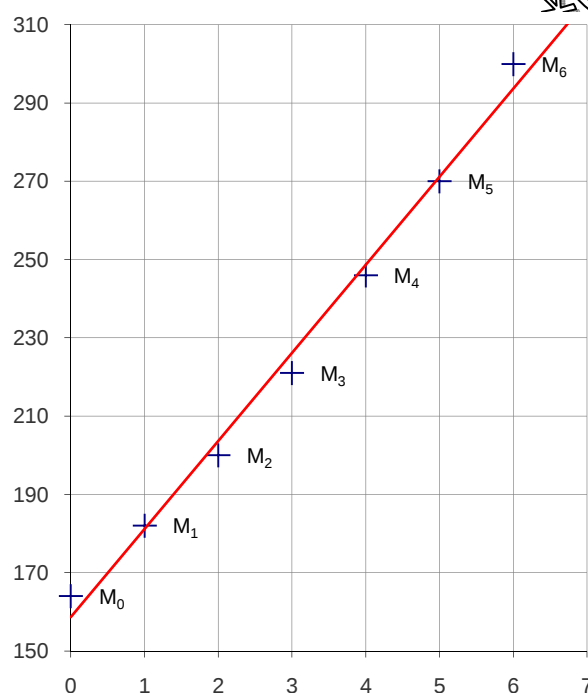
ALI AKIP***GSM:24962430***ALI AKIP***GSM:24962430

Exercice n°1

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (CA), en millions dinars, sur la période 1996-2002 d'une entreprise.

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
CA y_i	164	182	200	221	246	270	300

Le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ est représenté ci-dessous dans un repère orthogonal ainsi que la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés, d'équation $y = 22,5x + 158,64$ (coefficients arrondis à 10^{-2} près).



- A l'aide de cet ajustement, déterminer le chiffre d'affaire que cette entreprise peut prévoir en 2005.
- L'ajustement affine ne semblant pas traduire l'évolution du chiffre d'affaire, on pose $z_i = \ln y_i$.
 - Calculer, en arrondissant à 10^{-2} près, pour i variant de 0 à 6, les valeurs z_i associées aux rangs x_i du tableau.
 - Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3} près).
 - En déduire une relation entre y et x de la forme $y = B \times e^{ax}$. (Arrondir B à l'entier près)
- On admet que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 164e^{0,1x}$ modélise l'évolution du chiffre d'affaires de cette entreprise.
 - Donner une nouvelle estimation, arrondie au million d'euros, du chiffre d'affaires en 2005.
 - A partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 500 millions d'euros ?

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, le détail des calculs n'est pas demandé.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} .



On veut étudier l'évolution des records de l'épreuve d'athlétisme du 100 mètres masculin. Pour cela on cherche un ajustement des records pour en prévoir l'évolution.
On donne dans le tableau suivant certains records, établis depuis 1900.

Année	1900	1912	1921	1930	1964	1983	1991	1999
Rang de l'année, x_i	0	12	21	30	64	83	91	99
Temps en seconde, y_i	10,80	10,60	10,40	10,30	10,06	9,93	9,86	9,79

1) Etude d'un modèle affine

- Construire le nuage de point $M_i(x_i ; y_i)$ avec i compris entre 1 et 8, associée à cette série statistique double. On prendra comme unité graphique 1 cm pour dix ans en abscisse et 1 cm pour un dixième de seconde en ordonnées.
On commencera les graduations au point de coordonnées (0 ; 9).
- Peut-on envisager un ajustement affine à court terme ? Cet ajustement permet-il des prévisions pertinentes à long terme sur les records futurs ?

2) Etude d'un modèle exponentiel

Après étude, on choisit de modéliser la situation par une autre courbe.

On effectue les changements de variables suivants :

$$X = e^{-0,00924x} \text{ et } Y = \ln y.$$

On obtient le tableau :

$X_i = e^{-0,00924x_i}$	1	0,895	0,824	0,758	0,554	0,464	0,431	0,401
$Y_i = \ln y_i$	2,380	2,361	2,342	2,332	2,309	2,296	2,288	2,281

- Donner une équation de la droite de régression de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.
- En déduire que l'on peut modéliser une expression de y en fonction de x sous la forme suivante :
 $y = \exp(ae^{-0,00924x} + b)$ où a et b sont deux réels à déterminer.
- A l'aide de cet ajustement, quel record du 100 mètres peut-on prévoir en 2010 ?
- Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression suivante :
 $f(t) = \exp(0,154e^{-0,00924x} + 2,22)$
- Que peut-on en conclure, en utilisant ce modèle, quand aux records du cent mètres masculin à très long terme.

Exercice 3

Le but du problème est de déterminer le prix d'équilibre d'un produit. (On rappelle que le prix d'équilibre d'un produit est obtenu lorsque l'offre et la demande sont égales).

Une étude faite sur ce produit a donné les résultats suivants (le prix au kilogramme est exprimé en francs et les quantités offertes et demandées sont exprimées en milliers de kilogrammes)

Prix proposé x_i	0,30	0,35	0,45	0,65	0,80	1
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25
Offre z_i	1,25	1,30	1,30	1,50	1,55	1,60

Dans ce problème, on utilisera, pour les calculs statistiques, les fonctions de la calculatrice détail de ces calculs n'est pas demandé).

Tous les résultats numériques seront donnés en valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près.

1) Représentation graphique



Le plan (P) est rapporté au repère orthogonal (O ; i, j)
d'unités graphiques 10 cm pour 1 franc en abscisse et 2 cm pour 1 millier de kilogrammes en ordonnée.

Représenter sur le même graphique les nuages de points associés respectivement aux séries statistiques (x_i, y_i) et (x_i, z_i) .

Pour ces représentations, on recommande de prendre le papier millimétré dans le sens de la largeur et de figurer par des signes différents (croix ou points par exemple) les points de coordonnées (x_i, y_i) et ceux de coordonnées (x_i, z_i) respectivement.

2) Etude de la demande

La forme du nuage de points associé à la série (x_i, y_i) permet d'envisager un ajustement exponentiel de y en x . On pose donc $Y_i = \ln y_i$

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, Y_i) . Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de Y en x est-il satisfaisant ? Pourquoi ?

b) Donner alors une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme $Y = ax + b$.

En déduire en utilisant l'égalité $Y = \ln y$ une estimation de la demande y , en fonction de x prix au kilogramme.

EXERCICE 4

Dans cet exercice, les calculs peuvent être effectués à la calculatrice; leur détail n'est pas exigé.

Le tableau ci-dessous donne la charge maximale y_i en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur x_i en mètre, de la flèche.

Longueur x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
Charge y_i	10	9	8	7	6	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

1. Les réponses numériques à cette question seront données à 10^{-2} près.

a. Représenter le nuage de points $M(x_i, y_i)$ à l'aide d'un repère orthogonal (O; $\vec{i}, \vec{j}$) d'unités 1 cm pour 2 mètres en abscisses et 1 cm pour une tonne en ordonnées.

Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y .

Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

Construire cette droite sur le graphique précédent.

d. Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres. Que peut-on dire ?

2. On pose $z_i = \frac{1}{y_i}$

a. Recopier et compléter le tableau suivant (les z_i seront arrondis à 10^{-3} près)

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
z_i	0,100										

Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z puis une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés (les résultats numériques seront arrondis à 10^{-4} près).

En se fondant sur les résultats obtenus en 2. b., calculer la valeur de z correspondant à $x = 26$; en déduire la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres.

Ce résultat vous paraît-il plus satisfaisant que celui de 1. d. ? Pourquoi ?

3) Etude de l'offre

La forme du nuage de points associé à la série (x_i, z_i) permet d'envisager un ajustement affine de z en x .

- Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, z_i) . Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de z en x est-il satisfaisant ? Pourquoi ?
- Donner alors une équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z = mx + p$.

4) Etude graphique du prix d'équilibre

On considère, dans la suite du problème, que la demande et l'offre sont respectivement formalisées par les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0, 2]$ par $f(x) = e^{-1,41x + 2,08}$ et $g(x) = 0,53x + 1,10$.

- Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 2]$ et dresser son tableau de variation.
- Sur le graphique du 1), tracer les courbes représentatives des fonctions f et g .
- Déterminer graphiquement le prix d'équilibre du produit.

5) Etude numérique du prix d'équilibre

On considère la fonction b définie sur l'intervalle $[0, 2]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

- Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0, 2]$ et dresser son tableau de variation.
- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[0, 2]$ une solution unique x_0 . Donner une valeur approchée décimale à 10^{-1} près de x_0 .
- Quel est le prix d'équilibre du produit considéré ?

Exercice n°5

Aucun détail des calculs effectués à la calculatrice n'est exigé dans cet exercice.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du chiffre d'affaires réalisé à l'exportation par une entreprise.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	100	101	107	122	127	139	136	157	165

x_i désigne le rang de l'année,

y_i désigne l'indice du chiffre d'affaires à l'exportation rapporté à la base 100 en 1990.

1) a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ associé à la série double dans un repère orthogonal. On prendra :

- pour origine le point $(0; 100)$,
- pour unités : 1,5 cm sur l'axe des abscisses,
- 2 cm pour 10 points d'indice sur l'axe des ordonnées.

b) Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique. (On donnera la valeur décimale arrondie au dixième de l'ordonnée de G).

2) Déterminer la valeur décimale arrondie au centième du coefficient de corrélation linéaire de la série double. Ce résultat permet-il d'envisager un ajustement affine ? Pourquoi ?

3) Soit **D** la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

a) Donner la valeur décimale arrondie au dixième du coefficient directeur de la droite **D**.

b) En utilisant les coordonnées du point moyen G, donner une équation de la droite **D**. Tracer cette droite sur le graphique précédent.

4) En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires se poursuive de la même façon au cours des années suivantes, estimer l'indice du chiffre d'affaires de cette entreprise en l'an 2001 (on en donnera la valeur arrondie à l'unité).

EXERCICE 6

La cote d'une voiture d'occasion est donnée dans le tableau suivant

Année de mise en circulation	1991	1992	1993	1994	1995
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Cote y_i	42 900 dt	54 200 dt	64 100 dt	81 600 dt	102 000 dt

1. Le plan est muni d'un repère orthogonal. Les unités graphiques sont en abscisses : 2 cm pour un an ; en ordonnées : 1 cm pour 10 000 F. Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$.

2. Les points n'étant pas parfaitement alignés, on pose : $z = \ln y$.

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	1		3	4	5
$z_i = \ln y_i$					

Les valeurs de z_i seront données sous forme décimale approchée à 10^{-2} près par défaut.

(Dans la suite, le détail des calculs n'est pas demandé).

b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z.

Un ajustement affine est-il justifié ?

c. Donner une équation de la droite de régression D et z en x. (On arrondira les coefficients à 10^{-2} par défaut.)

d. Calculer la valeur de z donnée par l'équation précédente pour l'année 1988. En déduire une estimation de la cote de cette voiture de l'année 1988. (On donnera une valeur arrondie à 100 F près.)

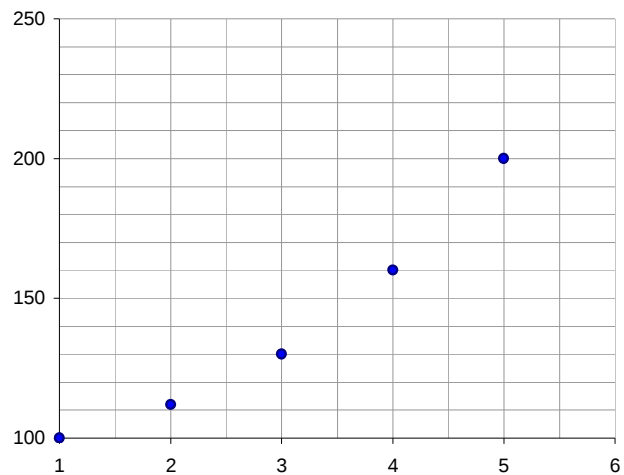
Exercice 7

Un fournisseur d'accès à Internet, souhaite faire une prévision du nombre de ses abonnés pour l'année 2005, il établit un relevé du nombre des abonnés des années 2000 à 2004.

Il affecte l'indice 100 à l'année 2000 pour établir la statistique des abonnés et consigne les données dans le tableau et le graphique ci-dessous :

Année	2000	2001	2002	2003	2004
-------	------	------	------	------	------

Rang x_i	1	2	3	4	5
Indice y_i	100	112	130	160	200



PARTIE A

- 1) Le nombre d'abonnés était de 2040 pour l'année 2000, de combien est-il pour l'année 2004?
- 2) Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre d'abonnés entre 2003 et 2004?
- 3) Quelle est l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés ?
- 4) Quelles prévisions du nombre d'abonnés peut-on faire pour les années 2005 et 2010 ?
On arrondira à l'entier le plus proche.

PARTIE B

Le fournisseur décide d'utiliser un changement de variable pour obtenir un autre ajustement, il crée un nouveau tableau en posant $z = \ln(y)$

- 1) Recopier et compléter le tableau suivant. On donnera les valeurs arrondies à 10^{-2} .

x_i	1	2	3	4	5
$z_i = \ln y_i$					

- 2) Dans le plan muni d'un repère, construire le nuage de points de coordonnées (x_i, Y_i) et la droite de régression de Y en x donnée par l'équation : $Y = 0,17x + 4,39$.
- 3) Exprimer le nombre d'abonnés n_i en fonction du rang x_i de l'année.
- 4) En déduire une nouvelle prévision du nombre d'abonnés pour les années 2005 et 2010.



BAC MATHS

2009/2010

Cours et 283 exercices

Elaboré par : ALI AKIR

*Donne des cours particuliers en mathématiques pour
tous les niveaux*

Plus d'informations : Contacter à

GSM : 24 96 24 30

Email : akir.cm@gmail.com

Site Web : <http://maths-akir.midiblogs.com/>



Maths aux lycées, Site éducatif

Téléchargement gratuit

Fiches de cours/Séries d'exercices/Devoirs à la maison/Devoirs de contrôle et de synthèse
Sujets de révision pour le baccalauréat/Plus : Forum de maths, pour répondre à vos questions.



Sommaire

<i>Fiche de cours</i>	<i>Continuité et limites</i>	<i>01</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Continuité et limites</i>	<i>05</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Suite réelle</i>	<i>09</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Suite réelle</i>	<i>11</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Dérivabilités</i>	<i>18</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Dérivabilités</i>	<i>21</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Fonctions réciproque</i>	<i>23</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Fonctions réciproque</i>	<i>25</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Primitives</i>	<i>31</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Primitives</i>	<i>35</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Intégration</i>	<i>35</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Intégration</i>	<i>38</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Logarithme</i>	<i>44</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Logarithme</i>	<i>46</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Exponentielle</i>	<i>49</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Exponentielle</i>	<i>51</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Différentielle</i>	<i>55</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Différentielle</i>	<i>56</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Nombres complexes</i>	<i>61</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Nombres complexes</i>	<i>64</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Isométries du plan</i>	<i>70</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Isométries du plan</i>	<i>75</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Similitudes du plan</i>	<i>80</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Similitudes du plan</i>	<i>83</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Coniques</i>	<i>88</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Coniques</i>	<i>90</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Arithmétiques</i>	<i>95</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Arithmétiques</i>	<i>97</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Géométrie dans l'espace</i>	<i>106</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Géométrie dans l'espace</i>	<i>111</i>
<i>Fiche de cours</i>	<i>Probabilités</i>	<i>113</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Probabilités</i>	<i>120</i>
<i>Séries d'exercices</i>	<i>Statistiques</i>	<i>128</i>