ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
Ministry of Education Youth and Sport

កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ

គណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២

ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ និងសង្គម

សម្រាប់ក្លិបសិក្សាគណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

រៀបរៀង និងចងក្រងដោយៈ

ក្រុមនិស្សិតស្ម័គ្រចិត្តក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ឆ្នាំសិក្សា ២០១៩- ២០២០

អារម្ភកថា

សួស្តី លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ជាទីមេត្រី!

សៀវភៅ **កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២** ដែលលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស និងប្រិយមិត្តកំពុងអាននេះ យើងខ្ញុំបានចងក្រងឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារ សម្រាប់សិស្សានុសិស្សកម្រិតវិទ្យាល័យ ស្វែងសិក្សា យល់ពីគំរូវិញ្ញាសាចាស់ៗ និងដំណោះស្រាយ ដើម្បីជាមូលដ្ឋានក្នុងការសិក្សាអំពី កម្រិតស្តង់ដាឬកម្រិតវិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាដែលធ្លាប់ចេញក្នុងការប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការកំណត់ផ្នែកសំខាន់ៗ ក្នុងមេរៀនដែលត្រូវរៀនដោយយកចិត្តទុកដាក់ និងស៊ីជម្រៅ ។ ម្យ៉ាងទៀត ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាព ក៏ដូចជាត្រៀមខ្លួនក្នុងការប្រឡង សញ្ញាបត្រមធ្យមសិកស្សាទុតិយភូមិនៅថ្ងៃខាងមុខនេះផងដែរ។ យើងខ្ញុំសូមអធ្យាស្រ័យ ចំពោះកំហុសអចេតនាដែលមាននៅក្នុងសៀវភៅកម្រងវិញ្ញាសានេះ យើងខ្ញុំនឹងរង់ចាំទទួលមតិស្ថាបនាកែលំអបន្ថែម ពីសំណាក់លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ សិស្ស និស្សិត និងអ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានទាំងអស់ដោយក្តីរីករាយ។

សូមជូនពរដល់អ្នកសិក្សាគ្រប់រូប មានសុខភាពល្អ និងទទួលបានជោគជ័យក្នុងដំណើរជីវិត ហើយខិតខំប្រឹងប្រែងរៀនសូត្រដើម្បីប្រទេសជាតិនៃមាតុភូមិរបស់យើង។

សូមអរគុណ!

និស្សិតស្ម័គ្រចិត្ត ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ការបង្កើត និងសម្របសម្រួលក្លិបសិក្សាគណិតវិទ្យា និងវិទ្យាសាស្ត្រ នៅតាមវិទ្យាល័យនានា ក្នុងព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

រៀបរៀង និងចងក្រងដោយនិស្សិតសម្របសម្រួលក្លិបសិក្សាគណិតវិទ្យា:

១ . អ៊ុង ពៅ

២. ញ៉ើន សុញ៉ើត

៣.ម៉ុល សិរីវិជ្ជា

៤. ឡេន ឡូត

៥ . គីម សេងហុង

៦. ឃី សុវឌ្ឍនះ

៧. សឿកែវ ពុទ្ធា

៩.នួន បុណាង

៨. រ៉េន គង់

១១.សយ វិសាល

១០.ប៊ុន កក្កដា

១២.ឈឿន ឧត្តម្ភ

មាតិកា

ទំព័រ

កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែសម្រាប់ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ

I. **កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ** (២០១៤ ដល់ ២០១៩)

1.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៩ 01

២.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៨ 06

៣.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៧ 11

៤.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៦ 16

៥.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៥ 20

៦.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៤ លើកទី០១ 24

៧.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៤ លើកទី០២ 29

II. **កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រត្រៀមបន្ថែម** ....

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០១ 34

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០២ 39

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៣ 44

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៤ 50

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៥ 56

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៦ 61

កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែសម្រាប់ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម

I. **កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម**(២០១៤ ដល់ ២០១៩) ....

1.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៩ 66

២.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៨ 70

៣.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៧ 73

៤.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៦ 77

៥.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៥ 80

៦.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៤ លើកទី០១ 83

៧.វិញ្ញាសាប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ឆ្នាំ ២០១៤ លើកទី០២.......................................86

II. **កម្រងវិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គមត្រៀមបន្ថែម** ....

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០១..89

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០២ 92

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៣..95

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៤ 98

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៥ 100

វិញ្ញាសាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិទី ០៦ 103

វិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ

គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ — **សម័យប្រឡង៖ ១៩ សីហា ២០១៩**

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (**ថ្នាក់វិទ្យាសាស្រ្ត**) — **មណ្ឌលប្រឡង៖**..

រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី — **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**...................

ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ — **ឈ្មោះបេក្ខជន**..

ប្រធានវិញ្ញាសា — **ហត្ថលេខាបេក្ខជន**..................................

I .(១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)\right]$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x\sin x}{1-\cos^2 x}$ គ. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{\sin^4 x-1}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល១៦ ដែលគេសរសេរពីលេខ១ដល់១៦។ គេចាប់យកប៊ូល៣ចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ : A:គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង៤។

B:គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែមិនអាចចែកដាច់នឹង៥។ C:គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង៤។

III.(១៥ពិន្ទុ) a.ដោះស្រាយនៅក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ: $z^2-8z+64=0$ ។

b.គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=4+4i\sqrt{3}$ និង $z_2=4-4i\sqrt{3}$ ។ សរសេរ $(2z_1+\overline{z}_2)$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ និងគណនា $(2z_1+\overline{z}_2)^3$ ។ (យើងតាងដោយ $\overline{z}_2$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃចំនួនកុំផ្លិច z_2 ។

IV.(១៥ពិន្ទុ)គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\left(x^2+1\right)^2dx$; $J=\int_0^{\ln 6}\left(e^x-1\right)dx$; $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4 x\cos x\right]dx$

V.(២៥ពិន្ទុ).ក.ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។ គេមានចំណុច $A(1;-1;4)$, $B(7;-1;-2)$ និង $C(1;5;-2)$

1. a. គណនាកូអរដោនេរបស់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ ។ b.ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ។

c. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(1;1;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។ d.ទាញបង្ហាញសមីការរបស់ប្លង់ (ABC) ។

2. បង្ហាញថាត្រីកោណ (ABC) ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ខ. គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការទូទៅ: $y^2+4y-8x-12=0$ ។ ចូរបម្លែងសមីការនេះ ជាទម្រង់សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល។ ចូររកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

VI. (១០ពិន្ទុ)គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+3y'+3y=2y'+5y\ (E)$ ។ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះ។

បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y=-e^{-2x}+2e^x$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E) ។

VII.(៣៥ពិន្ទុ)អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x}-\ln x$; គេតាង (C) ក្រាបរបស់អនុគមន៍ f នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. a. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $(0,+\infty)$ គេអាចសរសេរ $f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$ និង $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(x^2-x\ln x-2\right)$ ។

   b. ប្រើលទ្ធផលនេះដើម្បីគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។

2. a. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$ និងបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ $(0,+\infty)$, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\left(x^2-x+2\right)$ ។

   b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f រួចសង់តារាងអថេរភាពរបស់វា។

3. a. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A នៅលើ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ1។

   b. រកកូអរដោនេចំណុច B នៃ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះទៅ (C) ត្រង់ B ស្របនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ។

4. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A និងត្រង់ B ។ (គេឲ្យតម្លៃ $\ln 2=0.7$)

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង១៩ សីហា ២០១៩

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)\right]$ រាង $+\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)\right]}{\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+3-\left(x^2+2x+1\right)}{\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)}=\frac{2}{+\infty}=0$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)\right]=0$

ខ. $\lim_{x\to0}\frac{-2x\sin x}{1-\cos^2 x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2x\sin x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\left(-2\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=-2\cdot1=-2$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0}\frac{-2x\sin x}{1-\cos^2 x}=-2$

គ. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{\sin^4 x-1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{\left(\sin^2 x-1\right)\left(\sin^2 x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{(\sin x-1)(\sin x+1)\left(\sin^2 x+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\sin x-1)\left(\sin^2 x+1\right)}=\frac{1}{(-1-1)(1+1)}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{\sin^4 x-1}=\frac{1}{4}$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(16,3)=\frac{16!}{13!3!}=560$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A: គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង៤

លេខដែលចែកដាច់នឹង 4 មាន $\{4,8,12,16\}$

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(4,3)=4$ ករណី

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{560}=\frac{1}{140}$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{1}{140}$ ។

B: គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមានលេខសុទ្ធតែមិនអាចចែកដាច់នឹង៥

លេខដែលមិនអាចចែកដាច់នឹង 5 មាន

$\{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,16\}$

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(13,3)=\frac{13!}{10!3!}=286$ ករណី

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{286}{560}=\frac{143}{280}$

ដូចនេះ: $P(B)=\frac{143}{280}$

C: គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង៤

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(4,1)\times C(12,2)=264$ ករណី

គេបាន $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{264}{560}=\frac{33}{70}$

ដូចនេះ: $P(C)=\frac{33}{70}$

III.a. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$ សមីការ

$$z^2-8z+64=0$$

$$\Delta'=(-4)^2-1\cdot64=16-64=-48$$

$$\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\sqrt{-48}=4i\sqrt{3}$$

$$z_1=-(-4)+4i\sqrt{3}=4+4i\sqrt{3}$$

$$z_2=-(-4)-4i\sqrt{3}=4-4i\sqrt{3}$$

b. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=4+4i\sqrt{3}$ និង $z_2=4-4i\sqrt{3}$

- សរសេរ $(2z_1+\bar{z}_2)$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $\bar{z}_2=4+4i\sqrt{3}$

$$(2z+\bar{z})=2\left(4+4i\sqrt{3}\right)+\left(4+4i\sqrt{3}\right)$$

$$=8+8i\sqrt{3}+4+4i\sqrt{3}=12+12i\sqrt{3}=24\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=24\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

- គណនា $(2z_1+\bar{z}_2)^3$

$$(2z_1+\bar{z}_2)^3=\left[24\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^3$$

$$=24^3(\cos\pi+i\sin\pi)=24^3(-1+i\cdot0)=-24^3$$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int_0^1\left(x^2+1\right)^2dx=\int_0^1\left(x^4+2x^2+1\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)-0=\frac{28}{15}$$

$J=\int_0^{\ln 6}\left(e^x-1\right)dx=\left[e^x-x\right]_0^{\ln 6}=\left(e^{\ln 6}-\ln 6\right)-\left(e^0-0\right)$

$=6-\ln 6-1=5-\ln 6$

$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4 x\cos x\right]dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{3}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)'\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+(\sin x)'\left(\sin^4 x\right)\right]dx$

$=\left[-\frac{1}{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{5}\sin^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\left(-\frac{1}{3}\cos\pi+\frac{1}{5}\sin^5\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{1}{5}\sin^5 0\right)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{40+23\sqrt{2}}{120}$

$V.$ គេមានចំណុច $A(1;-1;4)$, $B(7;-1;-2)$ និង $C(1;5;-2)$

1. a. គណនាកូអរដោនេរបស់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$

- $\overrightarrow{AB}=(7-1,-1+1)=(6,0,-6)$
- $\overrightarrow{AC}=(1-1,5+1,-2+4)=(0,6,-6)$
- $\overrightarrow{BC}=(1-7,5+1,-2+2)=(-6,6,0)$

b.ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ

ចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ លុះត្រាតែ

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\6&0&-6\\0&6&-6\end{vmatrix}$

$=(0+36)\vec{i}-(-36+0)\vec{j}+(36-0)\vec{k}$

$=36\vec{i}+36\vec{j}+36\vec{k}\neq\vec{0}$

ដូចនេះ ចំណុច A,B និង C កំណត់បានប្លង់មួយ។

c. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(1;1;1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(36,36,36)=36(1,1,1)=36\cdot\vec{n}$

នោះ វ៉ិចទ័រ $\vec{n}$ និង $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(1,1,1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC)។

d.ទាញបង្ហាញសមីការរបស់ប្លង់ (ABC)

ដោយ $\vec{n}=(1,1,1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (ABC)

គេបានសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1,-1,4)$ គឺ

$(ABC):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$1(x-1)+1(y-1)+1(z-4)=0$

$x-1+y-1+z-4=0$

$x+y+z-4=0$

ដូចនេះ ប្លង់ $(ABC):x+y+z-4=0$

2. បង្ហាញថាត្រីកោណ (ABC) ជាត្រីកោណសម័ង្ស

- $\overrightarrow{AB}=(6,0,-6)\Rightarrow AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6^2+0^2+(-6)^2}=6\sqrt{2}$
- $\overrightarrow{AC}=(0,6,-6)\Rightarrow AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{0^2+6^2+(-6)^2}=6\sqrt{2}$
- $\overrightarrow{BC}=(-6,6,0)\Rightarrow AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-6)^2+6^2+0^2}=6\sqrt{2}$

ដោយ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=6\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ ត្រីកោណ (ABC) ជាត្រីកោណសម័ង្ស

ខ.គេមានប៉ារ៉ាបូល $y^2+4y-8x-12=0$

➢ បម្លែងសមីការនេះ ជាទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

យើងមាន $y^2+4y-8x-12=0$

$\Leftrightarrow y^2+4y=8x+12$

$\Leftrightarrow y^2+2\cdot y\cdot 2+2^2=8x+12+2^2$

$\Leftrightarrow (y+2)^2=8(x+2)$

មានរាង $(y-k)^2=4p(x-h)$ ជាសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដា $(y+2)^2=8(x+2)$

➢ រកកូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

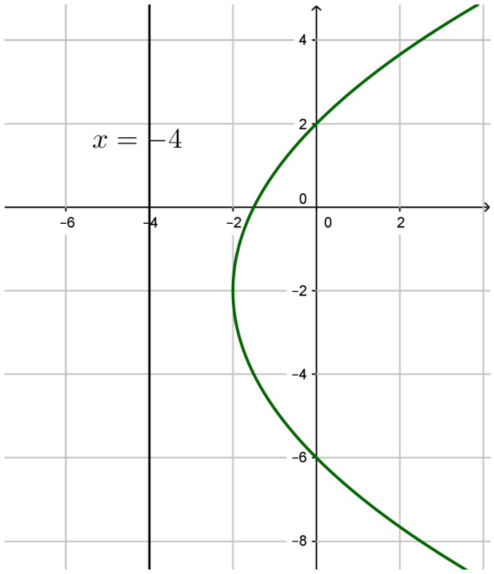
យើងមាន $h=-2$, $k=-2$, $4p=8\Rightarrow p=2$

- កូអរដោនេកំពូល $V(h,k)=V(-2,-2)$
- កូអរដោនេកំណុំ $F(h+p,k)=F(-2+2,-2)=(0,-2)$
- បន្ទាត់ប្រាប់ទិស: $x=h-p=-2-2=-4$

➢ សង់ប៉ារ៉ាបូល

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $(y+2)^2=16\Leftrightarrow(y+2)^2=\pm 4$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y+2=-4\\y+2=4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=-6\\y=2\end{array}\right.$



VI. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

យើងមាន $(E): y''+3y'+3y=2y'+5y$

ឬ $y''+y'-2y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2+\lambda-2=0$

មានឫស $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$

សមីការមានចម្លើយ $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $y=Ae^{x}+Be^{2x}$, $(A,B)\in\mathbb{R}$

- បង្ហាញថា អនុគមន៍ $y=-e^{-2x}+2e^{x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

យើងមាន $y=-e^{-2x}+2e^{x}$

$\Rightarrow y'=2e^{-2x}+2e^{x}$ និង $y''=-4e^{-2x}+2e^{x}$

បើ $y=-e^{-2x}+2e^{x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

$$\left(-4e^{-2x}+2e^{x}\right)+\left(2e^{-2x}+2e^{x}\right)-2\left(-e^{-2x}+2e^{x}\right)=0$$

$$-4e^{-2x}+2e^{x}+2e^{-2x}+2e^{x}+2e^{-2x}-4e^{x}=0$$

$0=0$ ពិត

ដូចនេះ $y=-e^{-2x}+2e^{x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

VII.(៣៥ពិន្ទុ)អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ

$$C: f(x)=\frac{x^2-2}{x}-\ln x$$

1. a. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $(0,+\infty)$ គេអាចសរសេរ

$f(x)=x\left(1-\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$ និង $f(x)=\frac{1}{x}\left(x^2-x\ln x-2\right)$

គ្រប់ $x>0, f(x)=\frac{x^2-2}{x}-\ln x=x-\frac{2}{x}-\ln x$

$$=x\left(1-\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$$

ដូចនេះគ្រប់ x នៅលើ $(0,+\infty)$, $f(x)=x\left(1-\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$

គ្រប់ $x>0, f(x)=\frac{x^2-2}{x}-\ln x=\frac{x^2-2-x\ln x}{x}$

$$=\frac{1}{x}\left(x^2-x\ln x-2\right)$$

ដូចនេះគ្រប់ x នៅលើ $(0,+\infty)$, $f(x)=\frac{1}{x}\left(x^2-x\ln x-2\right)$

b. ប្រើលទ្ធផលនេះដើម្បីគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(x^2-x\ln x-2\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x^2}\right)$

$=(+\infty)(1-0-0)=+\infty$

2. a. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ $f(x)$

យើងមាន $f(x)=\frac{x^2-2}{x}-\ln x$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot x-1\left(x^2-2\right)}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x^2+2-x}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-x+2}{x^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\frac{x^2-x+2}{x^2}$ ។

- បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x លើ $(0,+\infty)$, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\left(x^2-x+2\right)$

យើងមាន $f'(x)=\frac{x^2-x+2}{x^2}$

គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$, $x^2>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\left(x^2-x+2\right)$ ។

b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$, $x^2>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $\left(x^2-x+2\right)$

ឲ្យ $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-x+2=0$

$\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$ សមីការគ្មានឫស

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $(0,+\infty)$ ។

- សង់តារាងអថេរភាពរបស់វា

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3. a. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A នៅលើ (C) ដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ1

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_A : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

ដោយ $x_0 = 1$, $y_0 = f(1) = \frac{1-2}{1} - \ln 1 = -1$

$f'(x) = f'(1) = \frac{1^2 - 1 + 2}{1^2} = 2$

គេបាន $d_A : y = 2(x-1) - 1 = 2x - 2 - 1 = 2x - 3$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A , $d_A : y = 2x - 3$ ។

b. រកកូអរដោនេចំណុច B នៃ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះទៅ (C) ត្រង់ B ស្របនឹងបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y = x$

តាង $B(x_0, y_0)$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុច B

បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ B ស្របនឹងបន្ទាត់ $y = x$

គេបាន $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{x^2} = 1$

$\Leftrightarrow x_0^2 - x_0 + 2 = x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = 2$

$y_0 = f(2) = \frac{2^2 - 2}{2} - \ln 2 = 1 - \ln 2$

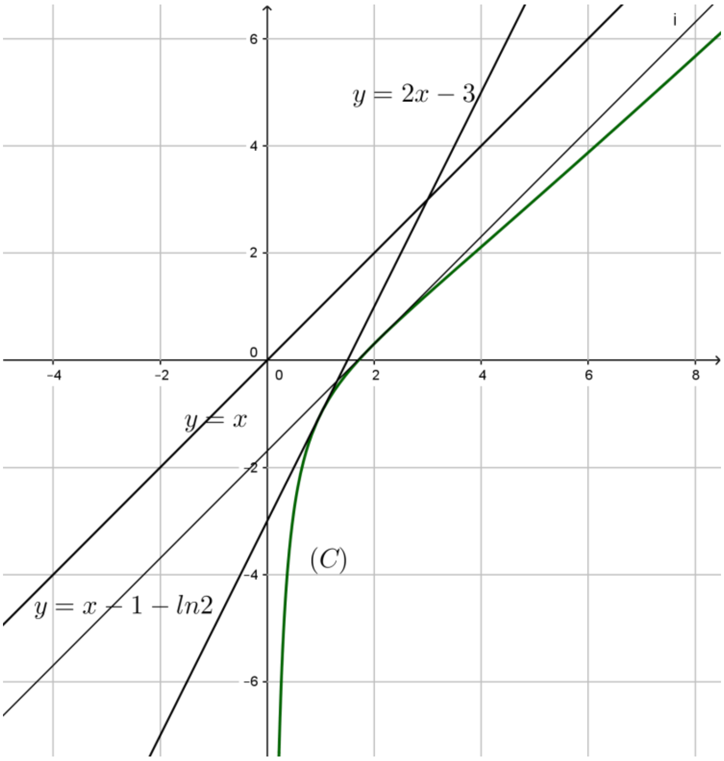
ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុច $B(2, 1 - \ln 2)$ ។

4. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A និងត្រង់ B

សមីការបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ $B(2, 1 - \ln 2)$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$= 1(x - 2) + 1 - \ln 2 = x - 1 - \ln 2$



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖ ២០ សីហា ២០១៨**

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ) **មណ្ឌលប្រឡង៖**..

រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**...................

ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**..

<u>ប្រធានវិញ្ញាសា</u> **ហត្ថលេខាបេក្ខជន**..................................

I. (១០ពិន្ទុ)ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌សចំនួន២ ឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន៤ និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន៤។ គេចាប់យកឃ្លី៣ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A:ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ក្រហម។ B:យ៉ាងតិចមានឃ្លី២មានពណ៌ខៀវ។ C:ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ខុសៗគ្នា។

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត: ក. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2(x-2)+x^2+x-1}{1-x}$ ខ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{-2x}{\sin 3x}$ គ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{2(\pi-3x)}$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ)គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=3+3i\sqrt{3}$ និង $z_2=\sqrt{3}+i$ ។

ក. គណនា z_1z_2 និង $\dfrac{z_1}{z_2}$ ។ ខ. សរសេរ z_1z_2 និង $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ គ. សរសេរ $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពិជគណិត។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល: $I=\int_1^2\left(2-x+x^2\right)dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2x-\dfrac{1}{2}\cos 4x\right)dx$; $K=\int_2^3\left(3x-2+\dfrac{1}{x-1}\right)dx$

V. (២៥ពិន្ទុ)១.ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,2,3)$, $B(3,0,1)$, $C(-1,0,1)$ និង $D(2,1,2)$

a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ ។ b. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

c. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(0,1,-1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។

២. គេមានសមីការ $(2x+3y)^2=12(xy+3)$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ និងសង់អេលីបនេះ។

VI. (១០ពិន្ទុ)ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'=5y$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) បើគេដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច $(0,3)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -3 ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ)គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(1,+\infty)$ ដោយ $f(x)=-x+4+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ ។ គេតាងដោយ (C) ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

១. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1 និង $+\infty$ ។

២. ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ $(1,+\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\dfrac{-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(1,+\infty)$ ។

៣. a.បង្ហាញថា បន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=-x+4$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $+\infty$ ។

b.បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ x លើ $(1,+\infty)$, $\dfrac{x+1}{x-1}>1$ និងទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង d_1 ។

៤. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនៅលើ (C) ដែលបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\dfrac{5}{3}$ និងសរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ d_2 នេះ។

៥. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d_1 និងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។ ប្រើតម្លៃប្រហែល $\ln 3=1.1$ និងក្រាប (C) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(4,5,0)$ ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

សម័យប្រឡង ២០ សីហា ២០១៨

$I.$ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10,3)=\dfrac{10!}{3!(10-3)!}=120$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A:ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ក្រហម

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(4,3)=\dfrac{4!}{3!(4-3)!}=4$

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{1}{30}$

B:យ៉ាងតិចមានឃ្លី២មានពណ៌ខៀវ

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(4,2)\times C(6,1)+C(4,3)=40$

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{40}{120}=\dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{1}{3}$

C:ឃ្លីទាំង៣មានពណ៌ខុសៗគ្នា

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(2,1)\times C(4,1)\times C(4,1)=32$

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{32}{120}=\dfrac{4}{15}$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{4}{15}$

$II.$ គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2(x-2)+x^2+x-1}{1-x}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2+x^2+x-1}{-(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{-(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{-(x-1)}=\lim_{x\to1}\left[-(x^2+1)\right]=-2$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2(x-2)+x^2+x-1}{1-x}=-2$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2x}{\sin3x}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=-2\lim_{x\to0}\left(\frac{3x}{\sin3x}\cdot\frac{1}{3}\right)=-2\cdot1\cdot\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2x}{\sin3x}=-\dfrac{2}{3}$

គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt3\cos x}{2(\pi-3x)}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt3}{2}\cos x\right)}{2(\pi-3x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x}{-3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{-3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

តាង $t=x-\dfrac{\pi}{3}$ បើ $x\to\dfrac{\pi}{3}$ នោះ $t\to0$

គេបាន $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{-3t}=-\dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt3\cos x}{2(\pi-3x)}=-\dfrac{1}{3}$

$III.$ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=3+3i\sqrt3$ និង $z_2=\sqrt3+i$

ក. គណនា z_1z_2 និង $\dfrac{z_1}{z_2}$

- $z_1z_2=(3+3i\sqrt3)(\sqrt3+i)=3\sqrt3+3i+9i-3\sqrt3$

$=12i$

- $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{3+3i\sqrt3}{\sqrt3+i}=\dfrac{(3+3i\sqrt3)(\sqrt3-i)}{(\sqrt3+i)(\sqrt3-i)}$

$=\dfrac{3\sqrt3-3i+9i+3\sqrt3}{\sqrt3^2+1^2}=\dfrac{6\sqrt3+6i}{4}=\dfrac{3\sqrt3}{2}+i\dfrac{3}{2}$

ខ. សរសេរ z_1z_2 និង $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

- $z_1z_2=12i=12(0+i)=12\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{3\sqrt3}{2}+i\dfrac{3}{2}=3\left(\dfrac{\sqrt3}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)$

$=3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

- $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2=\left[3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^2$

$=3^2\left(\cos\dfrac{2\pi}{6}+i\sin\dfrac{2\pi}{6}\right)=9\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

គ. សរសេរ $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពិជគណិត

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3=\left[3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^3$$

$$=3^3\left(\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}\right)=27\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=0+27i$$

IV. (១៥ពិន្ទុ)គណនាអាំងតេក្រាល:

$$I=\int_1^2\left(2-x+x^2\right)dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$=\left(4-\frac{4}{4}+\frac{8}{3}\right)-\left(2-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{6}$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}(2x)'\cos 2x-\frac{1}{8}(4x)'\cos 4x\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}\sin\pi\right)-0$$

$$=\frac{1}{2}$$

$$K=\int_2^3\left(3x-2+\frac{1}{x-1}\right)dx=\int_2^3\left[3x-2+\frac{(x-1)'}{x-1}\right]dx$$

$$=\left[\frac{3}{2}x^2-2x+\ln|x-1|\right]_2^3$$

$$=\left(\frac{3}{2}\cdot 3^2-2\cdot 3+\ln 2\right)-\left(\frac{3}{2}\cdot 2^2-2\cdot 2+\ln 1\right)$$

$$=\frac{11}{2}+\ln 2$$

V. ១. គេមាន $A(1,2,3),B(3,0,1),C(-1,0,1)$, $D(2,1,2)$

a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$

- $\overrightarrow{AB}=(3-1,0-2,1-3)=(2,-2,-2)$
- $\overrightarrow{AC}=(-1-1,0-2,1-3)=(-2,-2,-2)$
- $\overrightarrow{AD}=(2-1,1-2,2-3)=(1,-1,-1)$
- $\overrightarrow{BC}=(-1-3,0-0,1-1)=(-4,0,0)$

b. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ លុះត្រាតែ

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{vmatrix}$$

$$=(4-4)\vec{i}-(-4-4)\vec{j}+(-4-4)\vec{k}$$

$$=0\vec{i}+8\vec{j}-8\vec{k}\neq\vec{0}$$

ដូចនេះ ចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

c. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(0,1,-1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,8,-8)$

$$=8(0,1,-1)=8\cdot\vec{n}$$

នោះ វ៉ិចទ័រ $\vec{n}$ និង $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ កូលីនេអ៊ែរគ្នា

ដូចនេះ វ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(0,1,-1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC)។

២. បង្ហាញសមីការ $(2x+3y)^2=12(xy+3)$ ជាសមីការអេលីប

$$(2x+3y)^2=12(xy+3)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+12xy+9y^2=12xy+36$$

$\Leftrightarrow 4x^2+9y^2=36\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ សមីការមានរាង

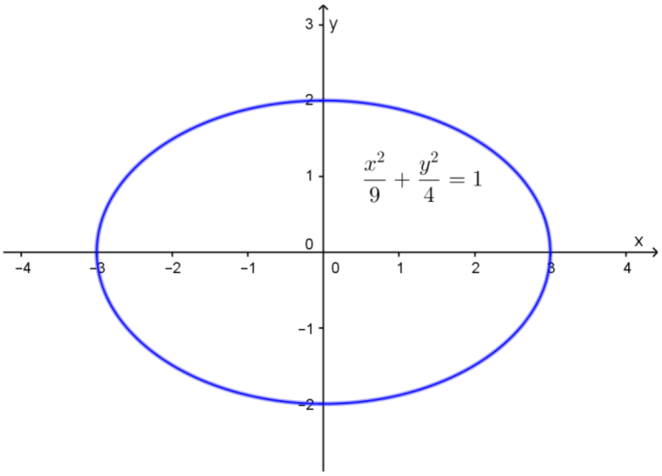
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានផ្ចិត $(0,0)$

➢ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

យើងមាន $a=3$,$b=2$

- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=2\times 2=4$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=2\times 3=6$ ឯកតាប្រវែង
- កូអរដោនេកំពូល $V(\pm a,0)\Rightarrow V(\pm 3,0)$

សង់អេលីបនេះ:



VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y''+4y'=5y$

សមីការសម្គាល់ $r^2+4r-5=0$

មានឫស $r_1=1$,$r_2=-5$

សមីការមានចម្លើយ $y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅ

$y=Ae^{x}+Be^{-5x}\ ,(A,B\in\mathbb{R})$

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

យើងមាន $y=Ae^{x}+Be^{-5x}$ នាំឲ្យ $y'=Ae^{x}-5e^{-5x}$

គេដឹងថាក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ចម្លើយនេះកាត់តាមចំណុច $(0,3)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -3

គេបាន $\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=3 & (1) \\ A-5B=-3 & (2) \end{cases}$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន $6B=6\Rightarrow B=1$

តាម (1) យើងបាន $A+1=3\Rightarrow A=2$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយពិសេស

$y=2e^{x}+e^{-5x}$ ។

VII. គេមាន $C: f(x)=-x+4+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ កំណត់លើ $(1,+\infty)$

១. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 1 និង $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to1^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to1^{+}}\left[-x+4+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]=3+\ln(+\infty)$

$=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+4+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]=-\infty$ ព្រោះ

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\ln1=0$

២. ស្រាយបំភ្លឺថានៅលើ $(1,+\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ

$f'(x)=\dfrac{-(x^{2}+1)}{(x+1)(x-1)}$

យើងមាន $f(x)=\left[-x+4+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]$

$=-x+4+\ln(x+1)-\ln(x-1)$

នាំឲ្យ $f'(x)=-1+\dfrac{(x+1)'}{x+1}-\dfrac{(x-1)'}{x-1}$

$=-1+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$

$=\dfrac{-(x+1)(x-1)+(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{-x^{2}+1+x-1-x-1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{-(x^{2}+1)}{(x+1)(x-1)}$

ដូចនេះ នៅលើ $(1,+\infty)$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ

$f'(x)=\dfrac{-(x^{2}+1)}{(x+1)(x-1)}$

➢ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{-(x^{2}+1)}{(x+1)(x-1)}$

ចំពោះ $\forall x\in(1,+\infty)$, $\dfrac{x^{2}+1}{(x+1)(x-1)}>0$

នាំឲ្យ $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in(1,+\infty)$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើ $(1,+\infty)$

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(1,+\infty)$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

៣. a.បង្ហាញថា បន្ទាត់ $d_1:\ y=-x+4$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ $+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+4)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\ln1=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_1: y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។

b.បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ x លើ $(1,+\infty)$, $\dfrac{x+1}{x-1}>1$

យើងមាន $\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{x+1-x+1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}>0$

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ x លើ $(1,+\infty)$, $\dfrac{x+1}{x-1}>1$

➢ ទាញយកការប្រៀបធៀបទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង d_1

ចំពោះគ្រប់ x លើ $(1,+\infty)$, $\dfrac{x+1}{x-1}>1$

$\Leftrightarrow\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)>\ln1\ \Leftrightarrow f(x)-y_{d_1}>0$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ d_1 ជានិច្ចលើ $(1,+\infty)$

៤. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះនៅលើ (C)

យក (x_0,y_0) ជាចំណុចប៉ះ

បន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចនេះមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $-\dfrac{5}{3}$

គេបាន $f'(x_0)=-\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{-(x_0{}^2+1)}{(x_0+1)(x_0-1)}=-\dfrac{5}{3}$

$\Leftrightarrow 3x_0{}^2+3=5x_0{}^2-5$

$\Leftrightarrow 2x_0{}^2=8 \Rightarrow x_0=\pm 2$

ចំពោះ $x_0=-2$ (មិនយក) ព្រោះ $x\in(1,+\infty)$

ចំពោះ $x_0=2$ នោះ $y_0=f(2)=-2+4+\ln\left(\dfrac{2+1}{2-1}\right)$

$=2+\ln 3$

➢ សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះ d_2

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_2: y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

ដោយ $x_0=2, y_0=2+\ln 3$ ហើយ $f'(x_0)=-\dfrac{5}{3}$

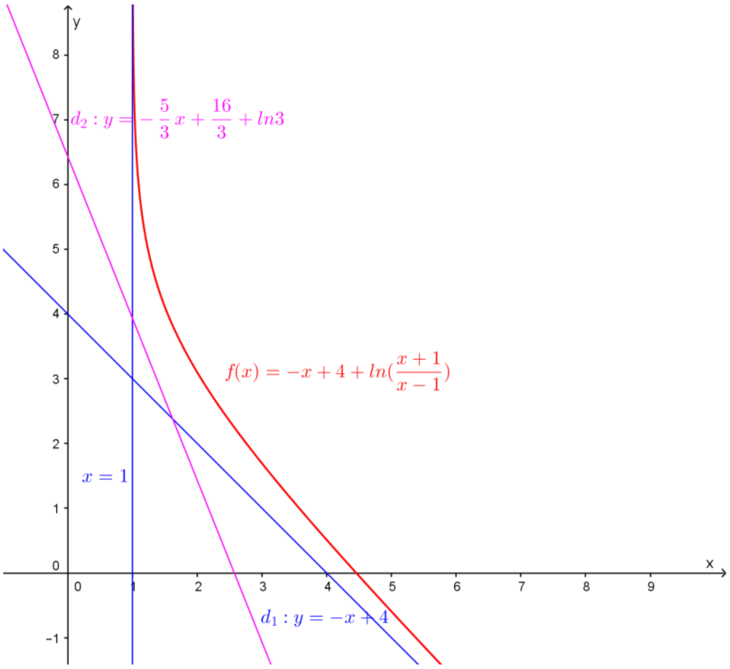
គេបាន $d_2:\ y=-\dfrac{5}{3}(x-2)+2+\ln 3$

$=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{10}{3}+2+\ln 3 \ =-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{16}{3}+\ln 3$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_2: y=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{16}{3}+\ln 3$

៥. សង់ក្រាប (C) អាស៊ីមតូត d_1 និងបន្ទាត់ប៉ះ d_2

ដោយ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ២១ សីហា ២០១៧
មណ្ឌលប្រឡង៖..
លេខបន្ទប់..................**លេខតុ**...................
ឈ្មោះបេក្ខជន..
ហត្ថលេខាបេក្ខជន..................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ)គណនាលីមីត: ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{-x}$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x}$ ។

II. (១០ពិន្ទុ)ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សពូកែចំនួន១០នាក់ ដែលក្នុងនោះមាន៤នាក់ជាសិស្សស្រីនិង៦នាក់ជាសិស្សប្រុស។ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុម ក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស៤នាក់ដោយចៃដន្យ យកទៅប្រកួតជាមួយក្រុមសិស្សនៃថ្នាក់ដទៃ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A:ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី ។ B:ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស ។

C:ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបាន៥០%ជាសិស្សប្រុស ។

III. (១៥ពិន្ទុ)គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i\sqrt{3}$ និង $z_2=6\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

a. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ b. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z_1^3 ។ c. សរសេរផលគុណ z_1z_2 ជាទម្រង់ពិជគណិត។

IV. (២៥ពិន្ទុ)១.នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(-2,1,0),B(0,1,1),C(1,2,2)$ និង $D(0,3,-4)$ ។

a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CD}$ ។

b. គណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD និង CD ។ ទាញបង្ហាញថាត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A ។

២. គេមានសមីការ $9y^2-16x^2=144$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល។ រកសមីការអាស៊ីមតូតរបស់អ៊ីពែបូលនេះ និងសង់អ៊ីពែបូលនេះ។

V. (១៥ពិន្ទុ)គណនាអាំងតេក្រាល: $I=\int_1^3\left(x-2+3x^2\right)dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin 2x-\cos x\right)dx$

$K=\int_0^1\dfrac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1}dx$ ។ ដើម្បីគណនា K យើងត្រូវបង្ហាញថា $\dfrac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1}=x+1+\dfrac{x}{x^2+1}$ ។

VI. (១០ពិន្ទុ)ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=1$ និង $y'(1)=2e^2$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ)គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+\dfrac{1-3e^x}{1+e^x}$ ។ គេតាងដោយ C ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

១. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{4e^x}{1+e^x}$ និងគណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=x+1$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ ។សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។

២. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។ ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y=x-3$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_2 ។

៣. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ។

សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1 និង d_2 របស់វា។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(-x-1)}{x^2(x-1)+(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(-x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x-1}{x^2+1}=\dfrac{-1-1}{1^2+1}=-1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1}=-1$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{-x}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(-\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right)=-1\cdot3=-3$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{-x}=-3$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{\sin x\cdot\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2+x)-(2-x)}{\sin x\cdot\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\right)=1\cdot\dfrac{2}{\sqrt2+\sqrt2}$

$=\dfrac{1}{\sqrt2}=\dfrac{\sqrt2}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x}=\dfrac{\sqrt2}{2}$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10,4)=\dfrac{10!}{4!(10-4)!}$

$=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6!}{4\times3\times2\times1\times6!}=210$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(4,4)=\dfrac{4!}{4!(4-4)!}=1$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{210}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{1}{210}$

B. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើបានសុទ្ធតែប្រុស

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(6.4)=\dfrac{6!}{4!(6-4)!}$

$=\dfrac{6\times5\times4!}{4!\times2}=15$ ករណី

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{15}{210}=\dfrac{1}{14}$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{1}{14}$

C. ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបាន៥០%ជាសិស្សប្រុស

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(6,2)\times C(4,2)$

$=\dfrac{6!}{2!(6-2)!}\cdot\dfrac{4!}{2!(4-2)!}=90$ ករណី

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{90}{210}=\dfrac{3}{7}$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{3}{7}$

III. គេមាន $z_1=1+i\sqrt3$ និង $z_2=6\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

a. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$z_1=1+i\sqrt3=2\left(\dfrac12+i\dfrac{\sqrt3}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

b. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z_1^3

យើងមាន $z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

នាំឲ្យ $z_1^3=2^3\left(\cos\dfrac{3\pi}{3}+i\sin\dfrac{3\pi}{3}\right)=8(\cos\pi+i\sin\pi)$

ដូចនេះ ម៉ូឌុលនៃ z_1^3 គឺ $r=8$ និង

អាគុយម៉ង់នៃ z_1^3 គឺ $\varphi=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

c. សរសេរផលគុណ z_1z_2 ជាទម្រង់ពិជគណិត

យើងមាន $z_2=6\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=6\left(\dfrac{\sqrt2}{2}-i\dfrac{\sqrt2}{2}\right)$

$=3\sqrt2-i3\sqrt2$

$z_1z_2=\left(1+i\sqrt3\right)\left(3\sqrt2-i3\sqrt2\right)$

$=3\sqrt2-3i\sqrt2+3i\sqrt6+3\sqrt6$

$=\left(3\sqrt6+3\sqrt2\right)+\left(3\sqrt6-3\sqrt2\right)i$

IV. ១. គេមានចំណុច $A(-2,1,0), B(0,1,1), C(1,2,2)$ និង $D(0,3,-4)$

a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CD}$

- $\overrightarrow{AB}=(0+2,1-1,1-0)=(2,0,1)$
- $\overrightarrow{AC}=(1+2,2-1,2-0)=(3,1,2)$

- $\overrightarrow{AD}=(0+2,3-1,-4-0)=(2,2,-4)$
- $\overrightarrow{BC}=(1-0,2-1,2-1)=(1,1,1)$
- $\overrightarrow{BD}=(0-0,3-1,-4-1)=(0,2,-5)$
- $\overrightarrow{CD}=(0-1,3-2,-4-2)=(-1,1,-6)$

b. គណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD និង CD

- $\overrightarrow{AB}=(2,0,1)\Rightarrow AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}$
- $\overrightarrow{AC}=(3,1,2)$

  $\Rightarrow AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{12}=\sqrt{14}$
- $\overrightarrow{AD}=(2,2,-4)$

  $\Rightarrow AD=\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$
- $\overrightarrow{BD}=(0,2,-5)$

  $\Rightarrow BD=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{0^2+2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$
- $\overrightarrow{CD}=(-1,1,-6)$

  $\Rightarrow CD=\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-6)^2}=\sqrt{38}$

➢ ទាញបង្ហាញថាត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(2)(2)+(0)(2)+(1)(-4)=0$

នោះ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

ដូចនេះ ABD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

ដោយ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(3)(2)+(1)(2)+(2)(-4)=0$

នោះ $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AD}$

ដូចនេះ ACD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

២ បង្ហាញថាសមីការ $9y^2-16x^2=144$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល

យើងមាន $9y^2-16x^2=144 \Leftrightarrow \dfrac{9y^2}{144}-\dfrac{16x^2}{144}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{y^2}{4^2}-\dfrac{x^2}{3^2}=1$ មានរាង $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$

ជាសមីការអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិត $(0,0)$ ហើយអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សឈរ។

➢ រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល

យើងមាន $a=4, b=3$ $c^2=a^2+b^2=4^2+3^2=25$

$\Rightarrow c=\sqrt{25}=5$

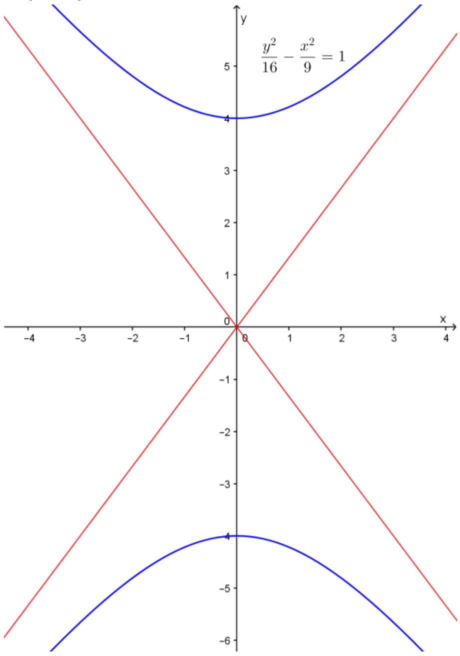
- កូអរដោនេកំពូល $V_1(0,-a)\Rightarrow V_1(0,-4)$ និង

  $V_2(0,a)\Rightarrow V_2(0,4)$
- កូអរដោនេកំណុំ $F_1(0,-c)\Rightarrow F_1(0,-5)$ និង

  $F_2(0,c)\Rightarrow F_2(0,5)$

➢ សមីការអាស៊ីមតូតរបស់អ៊ីពែបូល $y=\pm\dfrac{a}{b}x=\pm\dfrac{4}{3}x$

សង់អ៊ីពែបូល



V. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int_1^3\left(x-2+3x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x+x^3\right]_1^3$$

$$=\left(\frac{3^2}{2}-2\cdot3+3^3\right)-\left(\frac{1^2}{2}-2\cdot1+1^3\right)=26$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2x-\cos x)dx=\int_2^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{2}(2x)'\sin 2x-\cos x\right]dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_2^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\cos 0-\sin 0\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$K=\int_0^1\frac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1}dx$$

បង្ហាញថា $\dfrac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1}=x+1+\dfrac{x}{x^2+1}$

ដោយ $x+1+\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{x\left(x^2+1\right)+1\left(x^2+1\right)+x}{x^2+1}$

$$=\frac{x^3+x+x^2+1+x}{x^2+1}=\frac{x^3+\left(x^2+2x+1\right)}{x^2+1}=\frac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1}$$

គេបាន $K=\int_0^1\left(x+1+\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

$$=\int_0^1\left[x+1+\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\right]dx=\left[\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1^2}{2}+1+\frac{1}{2}\ln\left|1^2+1\right|\right)-\frac{1}{2}\ln 1=\frac{3+\ln 2}{2}$$

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y''-3y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2-3r+2=0$ រាង $a+b+c=0$

មានឫស $r_1=1,\ r_2=2$

ចម្លើយទូទៅនៃ (E) គឺ $y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}\ ,(A,B\in\mathbb{R})$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយទៅ $y=Ae^{x}+Be^{2x}$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=1$ និង $y'(1)=2e^2$

គេមាន $y=Ae^{x}+Be^{2x}$

នោះ $y'=Ae^{x}+2Be^{2x}$

តែ $\begin{cases}y(0)=1\\ y'(1)=2e^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=1\\ Ae+2Be^2=2e^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=1 & (1)\\ A+2Be=2e & (2)\end{cases}$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន $(1-2e)B=1-2e\ \Rightarrow B=1$

តាម (1) យើងបាន $A+1=1\ \Rightarrow A=0$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) គឺ $y=e^{2x}$ ។

VII. អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $C: f(x)=x+\frac{1-3e^x}{1+e^x}$

១. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\frac{4e^x}{1+e^x}$

យើងមាន $f(x)=x+\frac{1-3e^x}{1+e^x}$

នាំឲ្យ $f(x)=x+1+\frac{1-3e^x}{1+e^x}-1$

$$=x+1+\frac{1-3e^x-1-e^x}{1+e^x}=x+1-\frac{4e^x}{1+e^x}$$

- គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{4e^x}{1+e^x}\right)=-\infty$$

ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

- ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=x+1$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$

ដោយ $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4e^x}{1+e^x}\right)=0$

នោះ បន្ទាត់ $d_1: y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$

- សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1

យក $C-d_1:\ f(x)-y=-\frac{4e^x}{1+e^x}<0$ គ្រប់តម្លៃ x

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d_1 ជានិច្ច

២. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{4e^x}{1+e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{4}{\frac{1}{e^x}+1}\right)=+\infty$$ ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

- ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y=x-3$ អាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

ដោយ $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_{d_2}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+\frac{1-3e^x}{1+e^x}\right)-(x-3)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-3e^x+3+3e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{1+e^x}=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_2: y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

- សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_2

យក $C-d_2:\ f(x)-y=\frac{4}{1+e^x}>0$ គ្រប់តម្លៃ x

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d_2 ជានិច្ច

៣. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=x+1-\frac{4e^x}{1+e^x}$

នាំឲ្យ $f'(x)=1-\frac{4e^x(1+e^x)-e^x(4e^x)}{(1+e^x)^2}$

$$=1-\frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=1-\frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$

- បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , $f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

យើងមាន $f'(x)=1-\dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{1+2e^x+e^{2x}-4e^x}{(1+e^x)^2}$

$=\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

ដូចនេះ គ្រប់ចំនួនពិត x, $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

- សិក្សាអថេរភាពនៃ f

ឲ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$

គេបាន $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2\geq 0$ គ្រប់តម្លៃ x

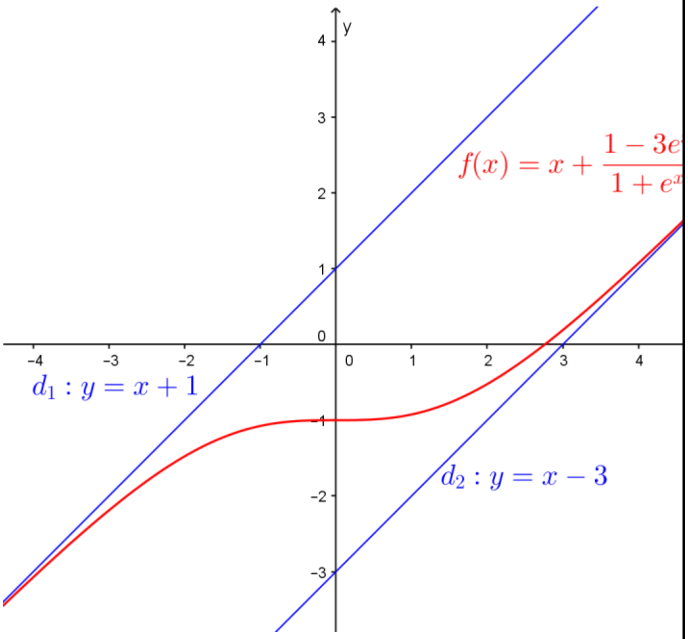
ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច។

- សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

ចំពោះ $x=0$ នោះ $f(0)=0+\dfrac{1-3e^0}{1+e^0}=-1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1 ↗	$+\infty$

- សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1 និង d_2



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ២២ សីហា ២០១៦
មណ្ឌលប្រឡង៖...
លេខបន្ទប់..................**លេខតុ**...................
ឈ្មោះបេក្ខជន..
ហត្ថលេខាបេក្ខជន.....................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ)គណនាលីមីត: ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{x^2+2-3x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\sin5x}{x}$

II. (១៥ពិន្ទុ)គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i$ និង $z_3=-\dfrac{1}{2}$ ។ គណនា z_1+z_2 , $\left(z_1+z_2\right)z_3$ ។

សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $Z=\left(z_1+z_2\right)z_3$ ។ ទាញរកតម្លៃនៃ Z^3 ។

III. (១៥ពិន្ទុ)គណនាអាំងតេក្រាល: $I=\int_0^2\left(6x^2-3x-1\right)dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2x\right)dx$ ។ គេមាន f កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ

$f(x)=-2\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}$ ។ គណនា $K=\int_1^e f(x)dx$ ។ $(\ln e=1)$ ។

IV. (១០ពិន្ទុ)ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល១៥ ដែលចែកជា ប៊ូលពណ៌បៃតងចំនួន៧និងគេសរសេរលើប៊ូលទាំង៧នេះតាមលេខរៀងពី១ដល់៧ រួចប៊ូលពណ៌ខៀវចំនួន៥និងគេសរសេរលើប៊ូលទាំង៥នេះតាមលេខរៀងពី១ដល់៥ ចុងក្រោយប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន៣ និងគេសរសេរលើប៊ូលទាំង៣នេះតាមលេខរៀងពី១ដល់៣។ គេចាប់យកប៊ូលមួយចេញពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A:ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង។ B:ប៊ូលដែលចាប់បានមានលេខសេស។

C:ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតងនិងលេខសេស។

V. (២៥ពិន្ទុ)១. គេមានសមីការ $18x^2+10y^2=90$ ។ ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។ ខ. សង់អេលីបនេះ។

២. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $M(2,3,4)$, $N(3,5,6)$, $P(4,6,7)$, $Q(3,4,5)$។ ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{QP}$ ។ ខ. ទាញបង្ហាញថាចតុកោណ $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

VI. (១០ពិន្ទុ)ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+2y'-3y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) ដែល $y(0)=1, y'(1)=e$ ។ (e ជាចំនួនពិតដែល $\ln e=1$)។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$ ។ គេតាង C ក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

១. a. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ។

២. a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ។

b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣. a. តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln3$ ។

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។

៤. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ $y=\dfrac{1}{4}x+1$ ។

b. ដោយសន្មតថាចំណុច I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C និងក្នុងតម្លៃប្រហែលនៃ $\ln3$ ចូរសង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1,d_2,d_3 ។

(នៅក្នុងតម្រុយនេះមួយឯកតាស្មើ $2cm$)

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២២ សីហា ២០១៦

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^2+2-3x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{-x-1}{x-2}=\frac{-1-1}{1-2}=2$

ដូចនេះ៖ $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{x^2+2x-3}=2$

ខ. $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(x^3-3^3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x+6)-3^2}{(x-3)\left(x^2+x\cdot3+3^2\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{1}{\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$

$=\frac{1}{(9+9+9)(3+3)}=\frac{1}{162}$

ដូចនេះ៖ $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}=\frac{1}{162}$

គ. $\lim_{x\to0}\frac{5\sin5x}{x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=5\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin5x}{5x}\cdot5\right)=5\cdot1\cdot5=25$

ដូចនេះ៖ $\lim_{x\to0}\frac{5\sin5x}{x}=25$

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i$

និង $z_3=-\frac{1}{2}$

➢ គណនា z_1+z_2 , $(z_1+z_2)z_3$

- $z_1+z_2=\left(\sqrt{3}-i\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i$

$=\sqrt{3}-i+1-\sqrt{3}+i-i\sqrt{3}=1-i\sqrt{3}$

- $(z_1+z_2)z_3=\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

➢ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

$Z=(z_1+z_2)z_3$

$Z=(z_1+z_2)z_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

➢ ទាញរកតម្លៃនៃ Z^3

$Z^3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3=\cos2\pi+i\sin2\pi$

$=1+0i$

III. គណនាអាំងតេក្រាល

- $I=\int_0^2\left(6x^2-3x-1\right)dx=\left[2x^3-\frac{3}{2}x^2-x\right]_0^2$

$=\left(2\cdot2^3-\frac{3}{2}\cdot2^2-2\right)-0=8$

- $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2xdx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(2x)'\cos2xdx=\left[\frac{1}{2}\sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin0\right)=\frac{1}{2}$

- $f(x)=-2\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$

បង្ហាញថា $f(x)=-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=-2\left(\frac{x+1}{x^2}\right)=\frac{-2x-2}{x^2}=-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$

គណនា $K=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$

$=\left[-2\ln|x|+\frac{2}{x}\right]_1^e=\left(-2\ln e+\frac{2}{e}\right)-(-2\ln1+2)$

$=-4+\frac{2}{e}$

IV. ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(15,1)=15$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A:ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង

$n(A)=C(7,1)=7$ ករណី

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{7}{15}$

ដូចនេះ៖ $P(A)=\frac{7}{15}$

B:ប៊ូលដែលចាប់បានមានលេខសេស

$n(B)=C(9,1)=9$ ករណី

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{3}{5}$

C :ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតងនិងលេខសេស

$n(C)=C(4,1)=4$ ករណី

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{4}{15}$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{4}{15}$

V. ១.ក.បង្ហាញថាសមីការ $18x^2+10y^2=90$ ជាសមីការអេលីប

យើងមាន $18x^2+10y^2=90 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$

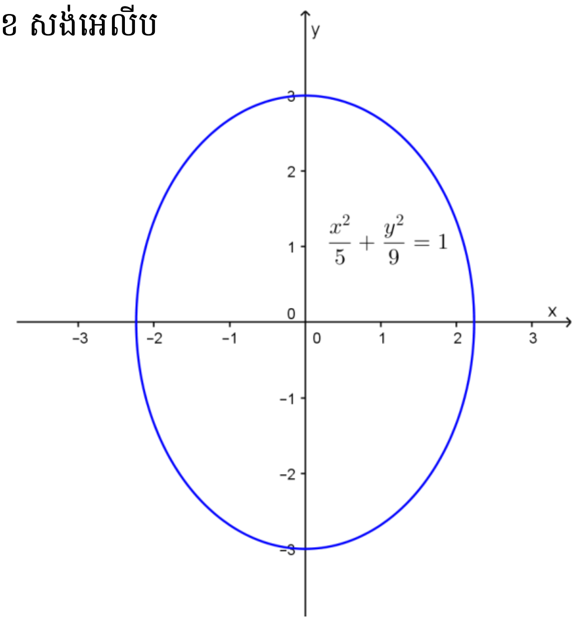
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{5}^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ សមីការមានរាង $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ ជាសមីការនៃអេលីបដែលមានអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ និងមានផ្ចិត $(0,0)$

➢ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

យើងមាន $a=3$, $b=\sqrt{5}$

- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=2\times3=6$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ ឯកតាប្រវែង
- កូអរដោនេកំពូល $V(0,\pm a) \Rightarrow V(0,\pm3)$

ខ សង់អេលីប



២. គេមានចំណុច $M(2,3,4)$, $N(3,5,6)$, $(4,6,7)$, $(3,4,5)$

ក រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{QP}$

- $\overrightarrow{MN}=(3-2,5-3,6-4)=(1,2,2)$
- $\overrightarrow{QP}=(4-3,6-4,7-5)=(1,2,2)$

ខ ទាញបង្ហាញថាចតុកោណ $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម

យើងមាន $\overrightarrow{MN}=(1,2,2)$ និង $\overrightarrow{QP}=(1,2,2)$

ដោយ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ នោះ $\overrightarrow{MN}\parallel\overrightarrow{QP}$ និង $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{QP}\right|$

ដូចនេះ ចតុកោណ $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y''+2y'-3y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2+2r-3=0$

មានឫស $r_1=1$, $r_2=-3$

សមីការមានចម្លើយ $y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅ

$y=Ae^{x}+Be^{-3x}$,$(A,B\in\mathbb{R})$

ខ. រកចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E)

យើងមាន $y=Ae^{x}+Be^{-3x}$ នាំឲ្យ $y'=Ae^{x}-3e^{-3x}$

តែ $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(1)=e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ Ae-3Be^{-3}=e \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 & (1) \\ A-3Be^{-4}=1 & (2) \end{cases}$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន $(1+3e^{-4})B=0 \Rightarrow B=0$

តាម (1) យើងបាន $A+0=1\Rightarrow A=1$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយពិសេស $y=e^{x}$ ។

VII.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$C: f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$

១. a. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right)$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2-\dfrac{4}{1+\dfrac{3}{e^x}}\right)=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x}=0$

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=x+2$

យក $C-d_1:\ f(x)-y=\left(x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right)-(x+2)$

$=-\dfrac{4e^x}{e^x+3}<0$ គ្រប់តម្លៃ x

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d_1 ជានិច្ច។

២. a. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត

$x,\ f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

យើងមាន $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$

នាំឲ្យ $f'(x)=1-\dfrac{4e^x\left(e^x+3\right)-e^x\left(4e^x\right)}{\left(e^x+3\right)^2}$

$=\dfrac{e^{2x}+6e^x+9-4e^{2x}-12e^x+4e^{2x}}{\left(e^x+3\right)^2}=\dfrac{e^{2x}-6e^x+9}{\left(e^x+3\right)^2}$

$=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x, $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$

ឲ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-3=0 \Leftrightarrow e^x=3 \Rightarrow x=\ln 3$

គេបាន $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2\geq 0$ គ្រប់តម្លៃ x

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

ចំពោះ $x=\ln 3$

នោះ $f(\ln 3)=\ln 3+2-\dfrac{4e^{\ln 3}}{e^{\ln 3}+3}=\ln 3+2-2=\ln 3$

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\ln 3$	↗ $+\infty$

៣. a. ធ្វើការសន្និដ្ឋាន ចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 3$

ដោយ $x=\ln 3$ នាំឲ្យ $f'(\ln 3)=0$ នោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច I ត្រូវស្របនឹងអ័ក្ស $(x'ox)$ ហើយមានសមីការ $d_2:y=\ln 3$

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2

តាមតារាងអថេរភាពនៃ f យើងបាន

- បើ $x\in(-\infty,\ln 3)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d_2
- បើ $x\in(\ln 3,+\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d_2
- បើ $x=\ln 3$ នោះក្រាប C កាត់បន្ទាត់ d_2 ត្រង់ចំណុច $I(\ln 3,\ln 3)$

៤. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច មានអាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ $y=\dfrac{1}{4}x+1$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_3:y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

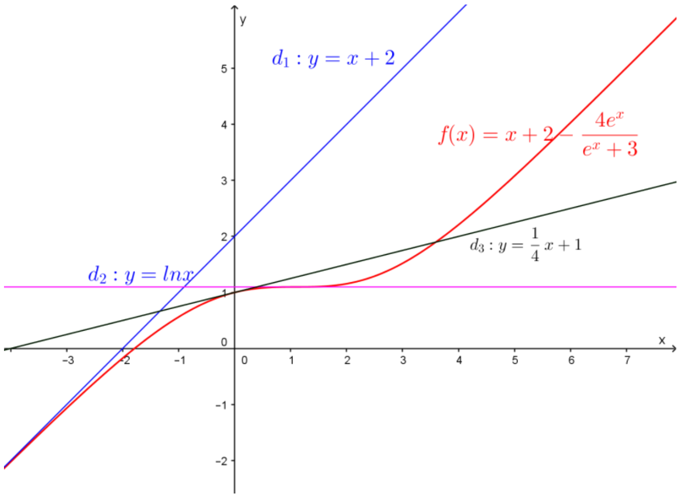
ដោយ $x_0=0$, $y_0=f(0)=0+2-\dfrac{4}{4}=1$ ហើយ

$f'(x_0)=\left(\dfrac{e^0-3}{e^0+3}\right)=\dfrac{1}{4}$

គេបាន $d_3:y=\dfrac{1}{4}(x-0)+1=\dfrac{1}{4}x+1$

ដូចនេះ $d_3:y=\dfrac{1}{4}x+1$

b. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1,d_2,d_3



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ២៤ សីហា ២០១៥
មណ្ឌលប្រឡង៖..
លេខបន្ទប់..................**លេខតុ**...................
ឈ្មោះបេក្ខជន..
ហត្ថលេខាបេក្ខជន.......................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ)គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=1-i\sqrt{3}$ ។

១. គណនា z_1+z_2, z_1-z_2, z_1z_2 ។

២. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1-z_2, z_1z_2 ។

II. (១៥ពិន្ទុ)គណនាលីមីត: ក. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}$ ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}$ គ. $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{x}$

III. (១០ពិន្ទុ)ក្នុងស្បោងមួយមានប៊ូលស៣ ប៊ូលខៀវ៣ និងប៊ូលក្រហម២។ គេចាប់យកប៊ូលម្តង៣ក្នុងពេលតែមួយ ចេញពីស្បោងដោយចៃដន្យ។ គេសន្និដ្ឋានថាប្រូបាបដែលចាប់បានប៊ូលនីមួយៗជាសមប្រូបាប។

គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម :

A: យ៉ាងតិចមានប៊ូលពីរពណ៌ខៀវ ។ B:ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ខុសគ្នា។

IV.(១៥ពិន្ទុ)គណនាអាំងតេក្រាល: ក. $I=\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+3\right)dx$ ។

ខ. គេមាន f កំណត់ដោយ $f(x)=-\frac{2-x}{(x-1)^2}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$ ។ គណនា $K=\int_{-1}^{0}f(x)dx$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ) A. គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}, \vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}, \vec{w}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ ។

រកវ៉ិចទ័រ: ក. $\vec{u}+\vec{v}$ ខ. $\vec{w}\times\vec{u}$ គ. $\vec{w}\times\vec{v}$ ។

B. រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយជាចំណុចមានកូអរដោនេ $(-1,0)$ និងចំណុចកំពូលពីរ $(-3,0)$ និង $(3,0)$ ។ សង់អេលីបនេះ។

VI. (១០ពិន្ទុ)គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'+2y=2\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$ ។

១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)$ ជាចម្លើយមួយនៃ (E) ។

២. បង្ហាញថាអនុគមន៍ φ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(\varphi-f)$ ជាចម្លើយនៃ $(E'): y'+2y=0$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) A. គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^2+\ln x$ ។

១. a. បង្ហាញថា g អនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$។ b. គណនា $g(1)$ ។

២. a. ទាញយកពីលទ្ធផលនៃសំណួរទី១ បញ្ជាក់លទ្ធផលខាងក្រោម

បើ $x\geq 1$ នោះ $x^2+\ln x\geq 1$ និងបើ $0<x\leq 1$ នោះ $x^2+\ln x\leq 1$។

b. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2+\ln x-1$ កាលណា x នៅលើ $(0,+\infty)$ ។

B.គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ដោយ $f(x)=x+1-\frac{\ln x}{x}$ និងតាង C ក្រាបរបស់វានៅក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$។

១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។ (ដោយដឹងថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

២. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$ ។

៣. ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$លើ $(0,+\infty)$និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0,+\infty)$។

៤. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។

b. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ I រវាង C និង Δ។ សង់ Δ និង C។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២០ សីហា ២០១៨

$I.$ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=1-i\sqrt{3}$

1. គណនា z_1+z_2 , z_1-z_2 , z_1z_2

- $z_1+z_2=\left(-1+i\sqrt{3}\right)+\left(1-i\sqrt{3}\right)=0$
- $z_1-z_2=\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\left(1-i\sqrt{3}\right)$

$=-1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}=-2+2i\sqrt{3}$

- $z_1z_2=\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=-1+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3$

$=2+2i\sqrt{3}$

2. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

z_1-z_1 , z_1z_2

- $z_1-z_2=-2+2i\sqrt{3}=4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

- $z_1z_2=2+2i\sqrt{3}=4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$II.$ គណនាលីមីត

ក $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-2^2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x+2)-2^2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\left(x^2+2x+4\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\right]$$

$$=\left(2^2+2\cdot 2+4\right)\left(\sqrt{2+2}+2\right)=48$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}=48$

ខ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\cos x+1}=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}$

គ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$=3\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right)=3\cdot 1\cdot 3=9$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{x}=9$

$III.$ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(8,3)=\frac{8!}{3!(8-3)!}=56$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A: យ៉ាងតិចមានប៊ូលពីរពណ៌ខៀវ

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(3,1)\times C(5,1)+C(3,3)=16$

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{16}{56}=\frac{2}{7}$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{2}{7}$

B: ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ខុសគ្នា

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(3,1)\times C(3,1)\times C(2,1)=18$

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{18}{56}=\frac{9}{28}$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{9}{28}$

$IV.$ គណនាអាំងតេក្រាល

ក $I=\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+3\right)dx=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+3x\right]_1^2$

$$=\left[\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{4}+3x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{2^3}{9}-\frac{2^2}{4}+3\cdot 2\right)-\left(\frac{1^3}{9}-\frac{1^2}{4}+3\cdot 1\right)$$

$$=\left(\frac{8}{9}-1+6\right)-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+3\right)=\frac{109}{36}$$

ខ បង្ហាញថា $f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)}$

យើងមាន $f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}=\frac{-1+(x-1)}{(x-1)^2}$

$$=\frac{-2+x}{(x-1)^2}=-\frac{2-x}{(x-1)^2}$$

គណនា $K=\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}\left[-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}\right]dx$

$$=\int_{-1}^{0}\left[-\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}+\frac{(x-1)'}{x-1}\right]dx=\left[\frac{1}{x-1}+\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}$$

$$=(-1+\ln 1)-\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right)=-\frac{1}{2}-\ln 2$$

$V.$ $A.$ គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$

, $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

រកវ៉ិចទ័រ

ក $\vec{u}+\vec{v}=\left(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)+\left(-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right)=0\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$

ខ $\vec{w}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}$

$=(2-2)\vec{i}-(2+2)\vec{j}+(-1-1)\vec{k}=0\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$

គ $\vec{w}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}$

$=(2+4)\vec{i}-(2-2)\vec{j}+(2+1)\vec{k}=6\vec{i}-0\vec{j}-3\vec{k}$

$B.$ រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប

ដោយកំពូលទាំងពីរមានអរដោនេ 0 ដូចគ្នា នោះអេលីបមានផ្ចិត $I(0,0)$

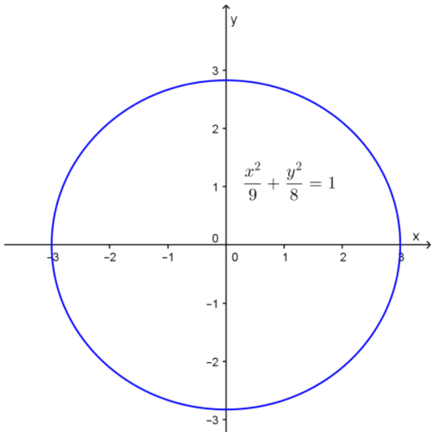
ហើយអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

សមីការមានរាង $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

- កំពូល $V(\pm a,0)=(\pm 3,0)$ នោះ $a=3$
- កំណុំ $F(-c,0)=(-1,0)$ នោះ $c=1$
- $c^2=a^2-b^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=3^2-1^2=8$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃអេលីបគឺ $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$

សង់អេលីប



$VI.$ គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'+2y=2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

១. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)$ ជាចម្លើយមួយនៃ (E)

យើងមាន $f(x)=e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)$

នាំឲ្យ $f'(x)=-2e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)+\dfrac{2e^{x}\cdot e^{-2x}}{1+2e^{x}}$

$=-2e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)+2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

បើ $f'(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ

$f'(x)+2f(x)=2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$ គេបាន

$\left[-2e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)+2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}\right]+2e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)=2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

$2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}=2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$ ពិត

ដូចនេះ អនុគមន៍ f ដែល $f(x)=e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)$ ជាចម្លើយមួយនៃ (E) ។

២. បង្ហាញថាអនុគមន៍ φ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(\varphi-f)$ ជាចម្លើយនៃ $(E'): y'+2y=0$

- បើ φ ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $\varphi'+2\varphi=2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$ (1)

ហើយ f ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $f'+2f=2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

(2)

យក $(1)-(2)$ យើងបាន $(\varphi'-f')+2(\varphi-f)=0$ ឬ $(\varphi-f)'+2(\varphi-f)=0$

ជាចម្លើយនៃ $(E'): y'+2y=0$

- បើ $(\varphi-f)$ ជាចម្លើយនៃ (E') នោះ

$(\varphi-f)'+2(\varphi-f)=0$ ឬ $\varphi'-f'+2\varphi+2f=0$

$\Leftrightarrow(\varphi'-2\varphi)+(f'+2f)=0$

$\Leftrightarrow\varphi'+2\varphi=f'+2f$

តែ f ជាចម្លើយនៃ (E) : $f'+2f=2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

គេបាន $\varphi'+2\varphi=2\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$ នោះ φ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

ដូចនេះ អនុគមន៍ φ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $(\varphi-f)$ ជាចម្លើយនៃ $(E'): y'+2y=0$

$VII.$ $A.$ គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^2+\ln x$

១. a. បង្ហាញថា g អនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$

យើងមាន $g(x)=x^2+\ln x$ នាំឲ្យ $g'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$

គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$

b. គណនា $g(1)$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $g(1)=1^2+\ln 1=1$

២. a. ទាញយកពីលទ្ធផលនៃសំណួរទី១ បញ្ជាក់ថា

បើ $x\geq 1$ នោះ $x^2+\ln x\geq 1$ និងបើ $0<x\leq 1$ នោះ $x^2+\ln x\leq 1$

ដោយ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ហើយ $g(1)=1$

- បើ $x\geq 1$ គេបាន $g(x)\geq g(1)$ នោះ $x^2+\ln x\geq 1$
- បើ $0<x\leq 1$ គេបាន $g(x)\leq g(1)$ នោះ $x^2+\ln x\leq 1$

b. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2+\ln x-1$ កាលណា x នៅលើ $(0,+\infty)$

- បើ $x\geq 1$ នោះ $x^2+\ln x\geq 1 \Leftrightarrow x^2+\ln x-1\geq 0$
- បើ $0<x\leq 1$ នោះ $x^2+\ln x\leq 1 \Leftrightarrow x^2+\ln x-1\leq 0$

B. គេឲ្យ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $C: f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$

១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

២. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$

នាំឲ្យ $f'(x)=1-\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2-(1-\ln x)}{x^2}=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$

ដូចនេះ ដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$

៣. ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $(0,+\infty)$

ដោយ $x^2>0$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x^2+\ln x-1$

តាមសំណួរ A យើងបាន

- បើ $x=1$ នោះ $x^2+\ln x-1=0$ គេបាន $f'(x)=0$
- បើ $x>1$ នោះ $x^2+\ln x-1>0$ គេបាន $f'(x)>0$
- បើ $0<x<1$ នោះ $x^2+\ln x-1<0$ គេបាន $f'(x)<0$

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $(0,+\infty)$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $f(1)=1+1-\dfrac{\ln 1}{1}=2$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

៤.a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta: y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x+1-\dfrac{\ln x}{x}\right)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $\Delta: y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

b. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ

យក $C-\Delta$: $f(x)-y=-\dfrac{\ln x}{x}$

គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ នោះ $f(x)-y$ យកសញ្ញាតាម $-\ln x$

- បើ $-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1$
- បើ $-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Rightarrow x<1$
- បើ $-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Rightarrow x>1$

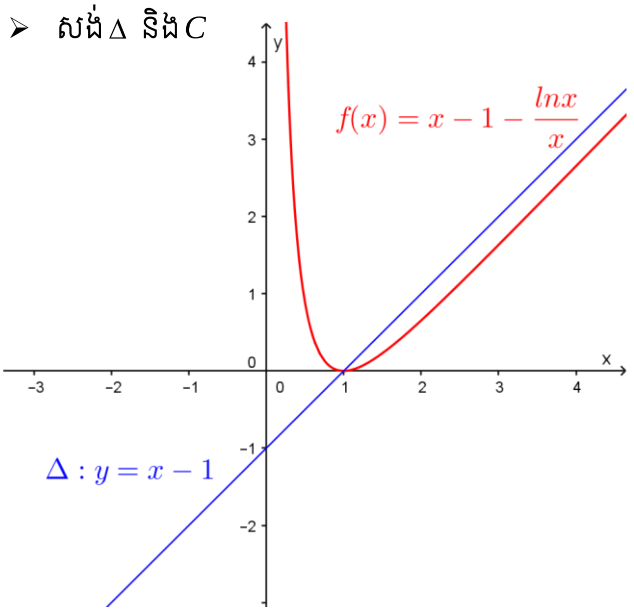
x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	

តាមតារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $f(x)-y$ យើងបាន

- ចំពោះ $x\in(0,1)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ Δ
- ចំពោះ $x\in(1,+\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ Δ
- ចំពោះ $x=1$ នោះក្រាប C កាត់បន្ទាត់ Δ ត្រង់ $(1,2)$

ដែល $I(1,2)$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង C និង Δ

➢ សង់ Δ និង C



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖ ១៣ តុលា ២០១៤**
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ) **មណ្ឌលប្រឡង៖...**
រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី **លេខបន្ទប់..................លេខតុ...................**
ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន..**
ហត្ថលេខាបេក្ខជន...................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (២០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត: ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x-1}{1+\sin x}$ គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{-x}+e^{x}\right)\sin^2 x}{2x^2}$ ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}\right)$

II. (២០ពិន្ទុ) ១. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{2}$, $z_2=-i\sqrt{2}$, $z_3=i\sqrt{2}$ ។

ក. គណនា z_1+z_2 , z_1+z_3 , $(z_1+z_2)(z_1+z_3)$ ។

ខ. កំណត់ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់ z_1+z_2 , z_1+z_3 , $\left(\dfrac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2$ ។

២. គណនា i^n ចំពោះតម្លៃនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n\geq1$ ។ ទាញរកតម្លៃ $i^{2015}-i^{2014}$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សអាស៊ី៤នាក់ សិស្សអាហ្វ្រិច២នាក់និងសិស្សអឺរ៉ុប៣នាក់។ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុមស្វ័យសិក្សាក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស៣នាក់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក. « យ៉ាងតិចមានសិស្ស២នាក់ជាសិស្សអាស៊ី » ។

ខ. « យ៉ាងតិចមានសិស្ស២នាក់ជាសិស្សអឺរ៉ុប »។

គ. « មានសិស្សម្នាក់ក្នុងមួយទ្វីប »។

IV. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $I=]0,+\infty[$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ ។

A. h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I ដោយ $h(x)=-x+1-2\ln x$ ។ គណនា $h(1)$ និងសិក្សាអថេរភាពនៃ h ដោយមិនតម្រូវឲ្យគណនាលីមីតនៃ h ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$ ឡើយ។

B. ១ .គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$ ។

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f ។

៣. បង្ហាញថានៅលើ I , $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$ ។

៤. ទាញយកអថេរភាពនៃ f លើ I និងសង់ក្រាប C នៃ f នៅលើប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$

V. (១៥ពិន្ទុ) គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y=x^2+2x-1$ ។

ក. រកអនុគមន៍ f_1 ដែល $f_1(x)=ax^2+bx+c$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) ។

ខ បង្ហាញថាបើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) នោះ $g(x)=f(x)-f_1(x)$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ $y''+4y=0$

VI. (២០ពិន្ទុ) ក. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2,2,1),B(4,-2,0),C(3,1,1)$, $D(1,5,2)$ ។ បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម រួចរកផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមនេះ។

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2,2,1)$ និង $B(4,-2,0)$ ។

គ. រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2,2,1),B(4,-2,0)$, $D(1,5,2)$ ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

សម័យប្រឡង ១៣ តុលា ២០១៤ (លើកទី២)

$I.$ គណនាលីមីត

ក $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)+(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^2+1)=1+1=2$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=2$

ខ $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2x-1}{1+\sin x}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+1)(\sin x-1)}{\sin x+1}=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)$$

$$=-1-1=-2$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2x-1}{1+\sin x}=-2$

គ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ រាង $+\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\dfrac{1}{2}$

ឃ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{-x}+e^x)\sin^2x}{2x^2}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{e^{-x}+e^x}{2}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]=\frac{1+1}{2}\cdot1^2=1$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}+e^x\sin^2x}{2x^2}=1$

ង $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}\right)$ រាង $+\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+2}{x}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}\right)=\ln1-0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

$II.$ ១ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{2}$, $z_2=-i\sqrt{2}$, $z_3=i\sqrt{2}$

ក z_1+z_2 , z_1+z_3 , $(z_1+z_2)(z_1+z_3)$

- $z_1+z_2=\sqrt{2}+\left(-i\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$
- $z_1+z_3=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
- $(z_1+z_2)(z_1+z_3)=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$

$$=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2=4$$

ខ.កំណត់ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z_1+z_2 , z_1+z_3 , $\left(\dfrac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2$

- $z_1+z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុល $|z_1+z_2|=2$ និងអាគុយម៉ង់

$Arg(z_1+z_2)=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ។

- $z_1+z_3=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុល $|z_1+z_3|=2$ និងអាគុយម៉ង់

$Arg(z_1+z_3)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ ។

- $\left(\dfrac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2=\left[\dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}\right]^2$

$$=\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^2=\cos\pi+i\sin\pi$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុល $\left|\left(\dfrac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2\right|=1$ និងអាគុយម៉ង់

$$Arg\left[\left(\frac{z_1+z_3}{z_1+z_2}\right)^2\right]=\pi+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

២ គណនា i^n ចំពោះតម្លៃនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n\geq1$

- ចំពោះ $n=1$ នោះ: $i^1=i$
- ចំពោះ $n=2$ នោះ: $i^2=-1$
- ចំពោះ $n=3$ នោះ: $i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i$

- ចំពោះ $n=4$ នោះ
  $i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=-(-1)=1$
- ចំពោះ $n=5$ នោះ $i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$

ស្វ៊ីតស្វ័យគុណនៃ i មានខួបស្មើ 4 យើងបាន ចំពោះតម្លៃនៃចំនួនគត់វ៉ិឡាទីប $n\geq 1$

បើ $n=4k$ នោះ $i^n=1$, បើ $n=4k+1$ នោះ $i^n=i$

បើ $n=4k+2$ នោះ $i^n=-1$, បើ $n=4k+3$ នោះ

$i^n=-i$

➢ ទាញយកតម្លៃ $i^{2015}-i^{2014}$

$i^{2015}-i^{2014}=i^{2014}(i-1)$ ដោយ $2014=4\times 503+1$

$i^{2015}-i^{2014}=i^{4\times 503+2}(i-1)=(-1)(i-1)=1-i$

ដូចនេះ $i^{2015}-i^{2014}=1-i$

$III.$ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(9,3)=\dfrac{9!}{3!(9-3)!}=84$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

ក. « យ៉ាងតិចមានសិស្ស២នាក់ជាសិស្សអាស៊ី »

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍"យ៉ាងតិចមានសិស្ស២នាក់ជាសិស្សអាស៊ី"

នោះ $n(A)=C(4,2)\times C(5,1)+C(4,3)$

$=\dfrac{4!}{(4-2)!\times 2!}\times 5+\dfrac{4!}{(4-3)!\times 3!}$

$=\dfrac{4\times 3}{2\times 1}\times 5+4=2\times 3\times 5+4=34$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(s)}=\dfrac{34}{84}=\dfrac{17}{42}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{17}{42}$

ខ. « យ៉ាងតិចមានសិស្ស២នាក់ជាសិស្សអឺរ៉ុប »

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍"យ៉ាងតិចមានសិស្ស២នាក់ជាសិស្សអឺរ៉ុប"

នោះ $n(B)=C(3,2)\times C(6,1)+C(3,3)$

$=\dfrac{3!}{(3-2)!\times 2!}\times 6+1=3\times 6+1=19$ ករណី

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(s)}=\dfrac{19}{84}$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{19}{84}$

គ. « មានសិស្សម្នាក់ក្នុងមួយទ្វីប »

តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍"មានសិស្សម្នាក់ក្នុងមួយទ្វីប"

$n(C)=C(4,1)\times C(2,1)\times C(3,1)=4\times 2\times 3=24$

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(s)}=\dfrac{4\times 2\times 3}{3\times 4\times 7}=\dfrac{2}{7}$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{2}{7}$

$IV.$ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $I=]0,+\infty[$ ដោយ

$f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$

$A.$ h ជាអនុគមន៍កំណត់លើ I ដោយ

$h(x)=-x+1-2\ln x$

➢ គណនា $h(1)$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $h(1)=-1+1-2\ln 1=0$

➢ សិក្សាអថេរភាពនៃ $h(x)$

យើងមាន $h(x)=-x+1-2\ln x$

នាំឲ្យ $h'(x)=-1-\dfrac{2}{x}=-\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

លើ $I=]0,+\infty[$,$1+\dfrac{2}{x}>0$

គេបាន $h'(x)=-\left(1+\dfrac{2}{x}\right)<0$

នោះ h ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើ I

គេបានតារាងអថេរភាព

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	↘	0	↘

$B.$ ១. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\ln x}{x^2}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$
  $=0$

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$

នាំឲ្យ $f'(x) = \dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x+\ln x)}{x^4}$

$= \dfrac{x^2+x-2x^2-2x\ln x}{x^4}$

$= \dfrac{-x^2+x-2x\ln x}{x^4} = \dfrac{-x+1-2\ln x}{x^3}$

ដូចនេះ៖ $f'(x)=\dfrac{-x+1-2\ln x}{x^3}$

៣. បង្ហាញថានៅលើ I, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$

យើងមាន $f'(x)=\dfrac{-x^2+x-2\ln x}{x^3} = \dfrac{h(x)}{x^3}$

លើ I, $x^3>0$ នោះ៖ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$

៤. ទាញយកអថេរភាពនៃ $f(x)$ លើ I

ដោយគ្រប់ $x\in I$, $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $h(x)$

តាមតារាងអថេរភាពនៃ $h(x)$ ទាញបាន

- បើ $x=1$ នោះ៖ $h(x)=0$ គេបាន $f'(x)=0$
- បើ $x\in(0,1)$ នោះ៖ $h(x)>0$ គេបាន $f'(x)>0$
- បើ $x\in(1,+\infty)$ នោះ៖ $h(x)<0$ គេបាន $f'(x)<0$

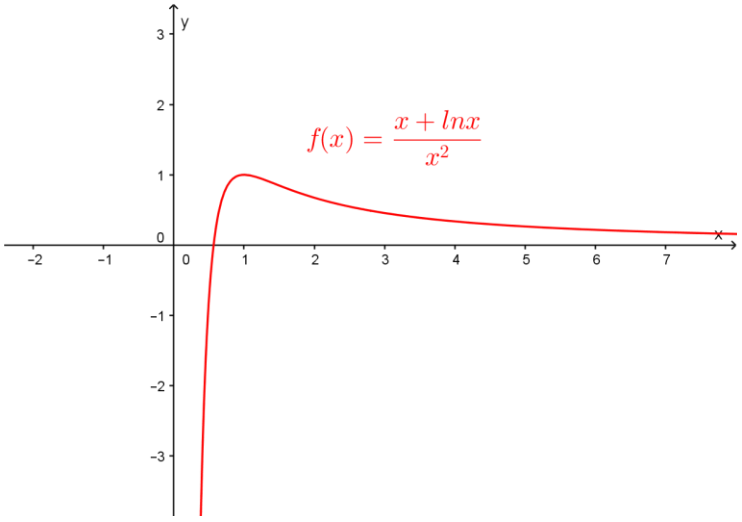
គេបានតារាងអថេរភាពនៃ f

ចំពោះ៖ $x=1$ នោះ៖ $f(1)=\dfrac{1+\ln 1}{1^2}=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=1$

➢ សង់ក្រាប C



V. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y=x^2+2x-1$

ក. រកអនុគមន៍ f_1 ដែល $f_1(x)=ax^2+bx+c$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E)

យើងមាន $f_1(x)=ax^2+bx+c$

នាំឲ្យ $f_1'(x)=2ax+b$ និង $f_1''(x)=2a$

បើ f_1 ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ៖

$f_1''(x)+4f_1(x)=x^2+2x-1$

$\Leftrightarrow 2a+4\left(ax^2+bx+c\right)=x^2+2x-1$

$\Leftrightarrow 4ax^2+4bx+(2a+4c)=x^2+2x-1$

ទាញបាន $\begin{cases}4a=1\\4b=2\\2a+4c=-1\end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{1}{4},\ b=\dfrac{1}{2}\ ,c=-\dfrac{3}{8}$

ដូចនេះ៖ $f_1(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{8}$

ខ បង្ហាញថាបើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) នោះ៖

$g(x)=f(x)-f_1(x)$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ $y''+4y=0$

- បើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ៖

$f''(x)+4f(x)=x^2+2x-1\ (1)$

- ហើយ $f_1(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ៖

$f_1''(x)+4f_1(x)=x^2+2x-1\ (2)$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន

$f''(x)-f_1''(x)+4\left[f(x)-f_1(x)\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[f(x)-f_1(x)\right]''+4\left[f(x)-f_1(x)\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[g(x)\right]''+4g(x)=0$ ជាចម្លើយនៃសមីការ

$y''+4y=0$

ដូចនេះ បើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) នោះ៖

$g(x)=f(x)-f_1(x)$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ $y''+4y=0$

VI. ក គេមាន $A(2,2,1)$, $B(4,-2,0)$, $C(3,1,1)$, $D(1,5,2)$

➢ បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(4-2,-2-2,0-1)=(2,-4,-1)$

, $\overrightarrow{DC}=(3-1,1-5,1-2)=(2,-4,-1)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ នោះ៖ $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$ និង $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{DC}\right|$

ដូចនេះ៖ ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

➢ រកផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម

តាមរូបមន្ត $S_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(2,-4,-1)$ និង

$\overrightarrow{AD}=(1-2,5-2,2-1)=(-1,3,1)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(-4+3)\vec{i}-(2-1)\vec{j}+(6-4)\vec{k}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$$

គេបាន $S_{ABCD}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ៖ $S_{ABCD}=\sqrt{6}$ ឯកតាផ្ទៃ

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច

$A(2,2,1)$ និង $B(4,-2,0)$

បន្ទាត់ (AB) ជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2,2,1)$ និង $B(4,-2,0)$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AB) ដែល $\overrightarrow{AB}=(2,-4,-1)$

គេបាន $(AB):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+2t\\ y=2-4t\\ z=1-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ៖ $\boxed{(AB):x=2+2t,y=2-4t,z=1-t,t\in\mathbb{R}}$

គ. រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច

$A(2,2,1),B(4,-2,0),D(1,5,2)$

យក $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=(-1,-1,2)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច A,B,D

គេបានសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2,2,1)$ គឺ

$$(ABD):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$-1(x-2)-1(y-2)+2(z-1)=0$$

$$-x+2-y+2+2z-2=0$$

$$-x-y+2z+2=0$$

$$x+y-2z-2=0$$

ដូចនេះ៖ $\boxed{\text{ប្លង់ }(ABD):x+y-2z-2=0}$

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖ ០៤ សីហា ២០១៤**
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ) **មណ្ឌលប្រឡង៖...**
រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី **លេខបន្ទប់..................លេខតុ..................**
ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន..**
ហត្ថលេខាបេក្ខជន..................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$ ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin5x}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}}$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{-2x^2}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x}{|x|}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=-1-i\sqrt{3}$ ។

ក. គណនា z_1+z_2 , z_1-z_2 , z_1z_2 ។

ខ. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ $z^3-8=0$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ)នៅក្នុងថុងមួយគេមានប៊ូល១២ដែលគេសរសេរលេខពី១ដល់១២។ គេចាប់យកប៊ូល៣ចេញពីថុងព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។

ក. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមាន លេខសុទ្ធតែចែកដាច់នឹង៣ » ។

ខ. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានមានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង៣»។

គ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានមានលេខតាមលំដាប់កើនជាស្វីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=3$ »។

IV.(៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $]0.+\infty[$ ដោយ $f(x)=x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x}$ និង C ជាក្រាបរបស់វា។

១. ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ខ. រក $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

គ. ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ Δ ដែលមានសមីការ $y=x-5$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C នៅជិត $+\infty$ ។

ឃ. កំណត់អាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វវាង Δ និងក្រាប C ។

២. ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $]0,+\infty[$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ដោយដឹងថាសមីការ $g(x)=0$ មានចម្លើយ $x'=1$ និង $x''=\alpha,(1<\alpha)$ ។

V. (៤៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=4-x-2e^{-x}$ ។ គេតាងដោយ C ជាក្រាបរបស់វា។

១. ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ខ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ D ដែលមានសមីការ $y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C ។

គ. តើខ្សែកោង C នៅលើឬនៅក្រោមបន្ទាត់ D ចូរបញ្ជាក់។

ឃ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា គ្រប់ចំនួនពិត x , $f(x)=\dfrac{4e^x-xe^x-2}{e^x}$ ។

ង. រក $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; (ប្រើលទ្ធផល $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$)។

២. ក. គណនា $f'(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ f ។

ខ. A ជាចំណុចនៅលើក្រាប C ដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប C ត្រង់ A ។

គ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលគេតាងដោយ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$ ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ០៤ សីហា ២០១៤ (លើកទី១)

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

តាង $t=x-\dfrac{\pi}{4}$ បើ $x\to\dfrac{\pi}{4}$ នោះ $t\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2\sin t}{-t}=-2\cdot1=-2$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=-2$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin5x}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin5x\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{-2\sin5x}{5-(x+5)}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[2\cdot\frac{\sin5x}{5x}\cdot5\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)\right]$$

$$=2\cdot1\cdot5\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)=20\sqrt{5}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin5x}{\sqrt{5}-\sqrt{5+x}}=20\sqrt{5}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{-2x^2}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{-2x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\cdot3^2\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot9=-\frac{9}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{-2x^2}=-\dfrac{9}{2}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x}{|x|}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

• បើ $x\to0^-$ នោះ $|x|=-x$ គេបាន

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-x}{-x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x(x-1)}{-x}=\lim_{x\to0^-}\left[-(x-1)\right]=1$$

• បើ $x\to0^+$ នោះ $|x|=x$ គេបាន

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)}{x}=\lim_{x\to0^+}(x-1)=-1$$

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $\mathbf{z}_2=-1-i\sqrt{3}$

ក គណនា z_1+z_2 , z_1-z_2 , z_1z_2

• $z_1+z_2=\left(-1+i\sqrt{3}\right)+\left(-1-1i\sqrt{3}\right)=-2$

• $z_1-z_2=\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\left(-1-i\sqrt{3}\right)$

$=-1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}\ =2i\sqrt{3}$

• $z_1z_2=\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)=(-1)^2+\sqrt{3}^2=4$

ខ សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

• $z_1=-1+i\sqrt{3}=2\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

• $z_2=-1-i\sqrt{3}=2\left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

គ បង្ហាញថា z_1 និង z_2 ជាឬសនៃសមីការ $z^3-8=0$

• $z_1=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

គេបាន $z_1{}^3-8=2^3\left(\cos2\pi+i\sin2\pi\right)-8$

$=8(1+0i)-8=0$ ពិត

• $z_2=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

គេបាន $z_2{}^3-8=2^3\left(\cos4\pi+i\sin4\pi\right)-8$

$=8(1+0i)-8=0$ ពិត

ដូចនេះ z_1 និង z_2 ជាឬសនៃសមីការ $z^3-8=0$

III. $n(S)=C(12,3)=\dfrac{12!}{3!(12-3)!}=220$ ករណី

ក. តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែល គេចាប់បានប៊ូលទាំងបីមាន លេខ សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង៣

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(4,3)=\dfrac{4!}{3!(4-3)!}=4$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{4}{220}=\dfrac{1}{55}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{1}{55}$

ខ. តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែល គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់ មានលេខចែកដាច់នឹង៣

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(4,1)\times C(8,2)$

$=4\times\dfrac{8!}{2!(8-2)!}=4\times 28=112$ ករណី

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{112}{220}=\dfrac{28}{55}$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{28}{55}$

គ. តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ គេចាប់បានមានលេខតាមលំដាប់ កើនជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=3$

$C=\{(1,4,7),(2,5,8),(3,6,9),(4,7,10),(5,8,11),(6,9,12)\}$

នាំឲ្យ $n(C)=6$ ករណី

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{6}{220}=\dfrac{3}{110}$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{3}{110}$

$IV.$ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $]0.+\infty[$ ដោយ

$C:\ f(x)=x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x}$

១. ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-5+\frac{8\ln x}{x}+\frac{9}{x}\right)=+\infty$$

ខ. រក $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x-5+\frac{8\ln x}{x}+\frac{9}{x}\right)=-\infty$$

គ. ស្រាយបំភ្លឺថា បន្ទាត់ Δ ដែលមានសមីការ $y=x-5$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C នៅជិត $+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-5)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x}\right)=0$

ដូចនេះបន្ទាត់ $\Delta: y=x-5$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ឃ. កំណត់អាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង Δ និងក្រាប C

យើងមានបន្ទាត់ $\Delta: y=x-5$ និងក្រាប

$C: f(x)=x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x}$

គេបាន សមីការអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង Δ និងក្រាប C

$$x-5+\frac{8\ln x}{x}+\frac{9}{x}=x-5 \Leftrightarrow \frac{8\ln x+9}{x}=0$$

$$\Leftrightarrow 8\ln x+9=0 \Rightarrow \ln x=-\frac{9}{8} \Rightarrow x=e^{-\frac{9}{8}}=\frac{1}{e\sqrt[8]{e}}$$

ដូចនេះ $x=\dfrac{1}{e\sqrt[8]{e}}$

២. ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ x នៅលើ $]0,+\infty[$ គេបាន

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

យើងមាន $f(x)=x-5+\dfrac{8\ln x}{x}+\dfrac{9}{x}$

នាំឲ្យ $f'(x)=1+8\left(\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}\right)-\dfrac{9}{x^2}$

$=1+\dfrac{8-8\ln x-9}{x^2}$

$=\dfrac{x^2-8\ln x-1}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ដែល

$g(x)=x^2-8\ln x-1$

ដូចនេះ គ្រប់ x លើ $]0,+\infty[$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ដែល $g(x)=x^2-8\ln x-1$

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

ដោយ $x^2>0$ គ្រប់ $x\in\,]0,+\infty[$ នោះ $f'(x)$ មាន

សញ្ញាដូច $g(x)=x^2-8\ln x-1$

$g'(x)=2x-\dfrac{8}{x}=\dfrac{2x^2-8}{x}$

ឲ្យ $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-8=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2\ (x>0)$

ចំពោះ $x=2$ នោះ $g(2)=2^2-8\ln 2-1=3-8\ln 2$

$=-2.5<0$

សមីការ $g(x)=0$ មានចម្លើយ $x'=1$ និង $x''=\alpha,(1<\alpha)$

សង្កេត $g(e)=e^2-9<0$ ហើយ

$g(4)=4^2-8\ln 4-1=15-16\ln 2>0$

ដោយ $g(e)\cdot g(4)<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលគេ

បាន α នៅចន្លោះ $[e,4]$

គេបានតារាងអថេរភាពនៃ g

x	0		1		2		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	‖	↘	0	↘	-2.5	↗	0	↗	

តាមតារាងអថេរភាពនៃ g គេបាន

- បើ $x\in(1,\alpha)$ នោះ $g(x)<0$ គេបាន $f'(x)<0$
- បើ $x\in(0,1)\cup(\alpha,+\infty)$ នោះ $g(x)>0$ គេបាន $f'(x)>0$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $f(1)=1-5+\dfrac{8\ln 1}{1}+\dfrac{9}{1}=5$

គេបានតារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	5	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

- អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $(1,5)$
- អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $(\alpha,f(\alpha))$ ។

V. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$C: f(x)=4-x-2e^{-x}$

១. ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-x-2e^{-x}\right)=-\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

ខ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $D: y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(4-x-2e^{-x}\right)-(-x+4)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2e^{-x}\right)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $D: y=-x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

គ. បញ្ជាក់ទីតាំងនៃក្រាប C និងបន្ទាត់ D

យក $C-D$: $f(x)-y=-2e^{-x}<0$ គ្រប់ចំនួនពិត x

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ D គ្រប់ចំនួនពិត x

ឃ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា គ្រប់ចំនួនពិត x, $f'(x)=\dfrac{4e^x-xe^x-2}{e^x}$

យើងមាន $f(x)=4-x-2e^{-x}=4-x-\dfrac{2}{e^x}$

$=\dfrac{4e^x-xe^x-2}{e^x}$

ដូចនេះ គ្រប់ចំនួនពិត x, $f(x)=\dfrac{4e^x-xe^x-2}{e^x}$

ង. រក $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; (ប្រើលទ្ធផល $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x-xe^x-2}{e^x}=-\infty$

២. ក. គណនា $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=4-x-2e^{-x}$

នាំឲ្យ $f'(x)=-1+2e^{-x}$

ដូចនេះ $f'(x)=-1+2e^{-x}$

➢ សិក្សាអថេរភាពនៃ f

- បើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -1+2e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{-x}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -x=\ln\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\ln 2$

- បើ $f'(x)>0 \Leftrightarrow -1+2e^{-x}>0 \Leftrightarrow e^{-x}>\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -x>\ln\dfrac{1}{2} \Rightarrow x<\ln 2$

- បើ $f'(x)<0 \Leftrightarrow -1+2e^{-x}<0 \Leftrightarrow e^{-x}<\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -x<\ln\dfrac{1}{2} \Rightarrow x>\ln 2$

ចំពោះ $x=\ln 2$ នោះ $f(\ln 2)=4-\ln 2-2e^{-\ln 2}$

$=4-\ln 2-2\cdot 2^{-1}=3-\ln 2$

គេបានតារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3-\ln 2$	$\searrow$	0

- ➢ កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ f

តម្លៃអតិបរមានៃ f គឺ $f(\ln 2)=3-\ln 2$

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាប C ត្រង់ A

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

ត្រង់ A មាន $x_0=0$ នោះ

$y_0=f(0)=4-0-2e^0=2$

ហើយ $f'(x_0)=f'(0)=-1+2e^0=1$

គេបាន $y=1(x-0)+2 \;=x+2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=x+2$

គ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានចម្លើយតែមួយគត់

β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$

យើងមាន $f(x)=4-x-2e^{-x}$

នោះ $f(-1)=4+1-2e^1 \;=5-2e \;<0$

$f(0)=4-0-2e^0=2>0$

គេបាន $f(-1)\times f(0)=\; 2(5-2e)<0$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល មានឫស β មួយយ៉ាងតិច

នៅចន្លោះ $[-1,0]$ ដែល $f(\beta)=0$

តែអនុគមន៍ f កើនលើចន្លោះ $[-1,0]$

ដូចនេះ សមីការ $f(x)=0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1,0]$ ។

វិញ្ញាសាទី១ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖** ....

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ) **មណ្ឌលប្រឡង៖**...

រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**...................

ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**..

ប្រធានវិញ្ញាសា **ហត្ថលេខាបេក្ខជន**....................................

$I.$ (**១៥ពិន្ទុ**) គណនាលីមីត: ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{\sin 2x}$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2x-\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

$II.$ (**១៥ពិន្ទុ**)គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=-\sqrt{3}+i$ និង $z_2=2\sin\dfrac{\pi}{3}+2i\cos\dfrac{\pi}{3}$ ។

$a.$គណនា z_1+z_2 , z_1-z_2 និង z_1z_2 ។ b.សរសេរ z_1, z_2 និង z_1z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

$III.$(**១០ពិន្ទុ**)ក្នុងថង់មួយមានឃ្លី 12 គ្រាប់ដែលឃ្លីពណ៌សមាន 5 គ្រាប់ចុះលេខពី 1 ដល់ 5 និងឃ្លីពណ៌ក្រហម 7 ចុះពីលេខ 6 ដល់ 12 ។ គេចាប់យកឃ្លីមួយគ្រាប់ចេញពីក្នុងថង់នោះដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A:ចាប់បានឃ្លីពណ៌ស B:ចាប់បានឃ្លីមានលេខជាពហុគុណនៃ 3 ។

C:ចាប់បានឃ្លីមានលេខជាពហុគុណនៃ 3 ហើយមានពណ៌ក្រហម។

$IV.$(**១៥ពិន្ទុ**) គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\ln 2}\left(1-e^x\right)^2dx$; $J=\int_1^4\left(2x+\dfrac{3}{(x-2)^2}\right)dx$ និង $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)^2dx$

$V.$(**២៥ពិន្ទុ**) ១. គេមានសមីការ $9x^2+25y^2-225=0$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបនេះ។ សង់អេលីបនេះ។

២.ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(1,2,1), B(4,2,4), C(5,3,0)$ ។

a. គណនាកូអរដោនេ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។ បង្ហាញថា (ABC) ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

b. បង្ហាញថាបីចំណុច A,B,C បង្កើតបានប្លង់មួយ។ ទាញរកសមីការប្លង់ (ABC) ។

c. ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ (ABC) ។

$VI.$(**១០ពិន្ទុ**) ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-2y'+y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយ f មួយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(0)=4$ និង $f(1)=3e$, $(\ln e=1)$

$VII.$(**៣៥ពិន្ទុ**)គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ដោយ $f(x)=x^2+2x-1-4\ln x$ ។ តាង (C) ជាក្រាបតំណាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និងទាញរកអាតូតឈរនៃក្រាប។

2. a.បង្ហាញថាគ្រប់ x នៅលើ $(0,+\infty)$ គេអាចសរសេរ $f(x)=x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4\ln x}{x^2}\right)$ ។

b. ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើគណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។

3. a.ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ x លើ $(0,+\infty)$; $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2+x-2\right)}{x}$ ។

b. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $(0,+\infty)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4. a.កំណត់សមីការបន្ទាត់ d ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 2 ។

b. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។ យក $\ln 2=0.7$, $\ln 3=1.1$

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាទី១ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x+2}=-\dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}=-\dfrac{1}{4}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{\sin 2x}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=3\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\times\dfrac{2x}{\sin 2x}\times\dfrac{3}{2}\right)$

$=3\times 1\times 1\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{\sin 2x}=\dfrac{9}{2}$

គ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2x-\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

តាង $t=\dfrac{\pi}{4}-x\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}-t$

បើ $x\to\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t\to 0$

គេបាន $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2x-\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\lim_{t\to 0}\dfrac{2\left(\frac{\pi}{4}-t\right)-\frac{\pi}{2}}{\sin t}$

$=\lim_{t\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{2}-2t-\frac{\pi}{2}}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{-2t}{\sin t}=-2\times 1=-2$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2x-\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=-2$

II. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-\sqrt{3}+i$ និង

$z_2=2\sin\dfrac{\pi}{3}+2i\cos\dfrac{\pi}{3}=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}i=\sqrt{3}+i$

a. គណនា z_1+z_2 , z_1-z_2 និង $z_1\cdot z_2$

. $z_1+z_2=-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}+i=2i$

. $z_1-z_2=-\sqrt{3}+i-\left(\sqrt{3}+i\right)$

$=-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}-i=-2\sqrt{3}$

. $z_1\cdot z_2=\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)$

$=-\left(\sqrt{3}\right)^2-i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i^2=-3-1=-4+0i$

ដូចនេះ $z_1+z_2=2i$

$z_1-z_2=-2\sqrt{3}+0i$

$z_1\cdot z_2=-4+0i$

b. សរសេរ z_1, z_2 និង $z_1\cdot z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

. $z_1=-\sqrt{3}+i$

$=2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

. $z_2=2\sin\dfrac{\pi}{3}+2i\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=2\left(\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

. $z_1\cdot z_2=-4+0i$

$=4\left(-1+0i\right)$

$=4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$

ដូចនេះ $z_1=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$

$z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z_1\cdot z_2=4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$

III. គេមាន ឃ្លី ស 5 គ្រាប់ចុះលេខពី 1 ដល់ 5

ឃ្លីក្រហម 7 គ្រាប់ចុះលេខពី 6 ដល់ 12

ឃ្លីសរុប 12 គ្រាប់ចាប់យក 1 គ្រាប់ដោយចៃដន្យ

គេបានចំនួនករណីអាច $n(S)=C(12,1)=12$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A: ចាប់បានឃ្លីពណ៌ស

$n(A)=C(5,1)=\dfrac{5!}{4!\times 1!}=5$

តាមរូបមន្ត $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{5}{12}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{5}{12}$

B: ចាប់បានឃ្លីមានចុះលេខជាពហុគុណនៃ 3

$n(B)=C(4,1)=\dfrac{4!}{3!\times 1!}=4$

តាមរូបមន្ត $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ: $P(B)=\dfrac{1}{3}$

C : ចាប់បានលេខជាពហុគុណនៃ 3 ហើយមានពណ៌ក្រហម

$n(C)=C(3,1)=3$

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ: $P(C)=\dfrac{1}{4}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int_0^{\ln 2}\left(1-e^x\right)^2 dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\left(1-2e^x+e^{2x}\right)dx$$
$$=\left[x-2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2}$$
$$=\left(\ln 2-2e^{\ln 2}+\frac{1}{2}e^{2\ln 2}\right)-\left(0-2e^0+\frac{1}{2}e^0\right)$$
$$=\left(\ln 2-4+2\right)\left(-2+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\ln 2-2+2+\frac{1}{2}=\ln 2-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $I=\ln 2-\dfrac{1}{2}$

$$J=\int_1^4\left(2x+\frac{3}{(x-2)^2}\right)dx=\int_1^4\left[2x+3\frac{(x-2)'}{(x-2)^2}\right]dx$$
$$=\left[x^2-\frac{3}{x-2}\right]_1^4=\left(16-\frac{3}{2}\right)-(1+3)$$
$$=\frac{32-3-8}{2}=\frac{21}{2}$$

ដូចនេះ: $J=\dfrac{21}{2}$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x-\sin x\right)^2 dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2x)dx=\left[x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{1}{2}\cos 0\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}-1$$

ដូចនេះ: $J=\dfrac{\pi}{2}-1$

V. 1. បង្ហាញថាសមីការ $9x^2+25y^2-225=0$ ជាអេលីប

$9x^2+25y^2-225=0\Leftrightarrow 9x^2+25y^2=225$

$\Leftrightarrow \dfrac{9x^2}{225}+\dfrac{25y^2}{225}=\dfrac{225}{225}\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

សមីការមានរាង $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

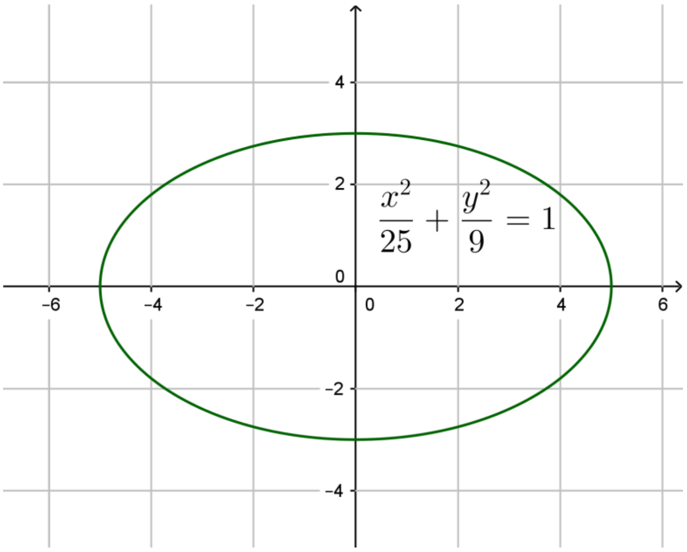
ជាសមីការនៃអេលីប ដែលមានអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ និងមានផ្ចិត $(0,0)$ ។

➢ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

យើងមាន $a=5$, $b=3$

- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=2\times5=10$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=2\times3=6$ ឯកតាប្រវែង
- កូអរដោនេកំពូល $V(\pm a,0)\Rightarrow V(\pm5,0)$

ខ សង់អេលីប



2. គេឱ្យ $A(1,2,1)$, $B(4,2,4)$ និង $C(5,3,2)$

a. គណនា $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{BC}$

. $\overrightarrow{AB}=(4-1,2-2,4-1)=(3,0,3)$

. $\overrightarrow{AC}=(5-1,3-2,0-1)=(4,1,-1)$

. $\overrightarrow{BC}=(5-4,3-2,0-4)=(1,1,-4)$

ដូចនេះ: $\overrightarrow{AB}=(3,0,3)$, $\overrightarrow{AC}=(4,1,-1)$

និង $\overrightarrow{BC}=(1,1,-4)$

+ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

គេមាន ៖

. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \sqrt{3^2+0^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

. $\left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \sqrt{4^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

. $\left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = \sqrt{1^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

ដោយ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = 3\sqrt{2}$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

b. បង្ហាញថាបីចំណុច A,B,C បង្កើតបានជាប្លង់មួយ

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0-3)\vec{i} - (-3-12)\vec{j} + (3-0)\vec{k}$$

$$= -3\vec{i} + 15\vec{j} + 3\vec{k}$$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ នោះបីចំណុច A,B,C បង្កើតបានជាប្លង់មួយពិត

ដូចនេះ បីចំណុច A,B,C បង្កើតបានជាប្លង់មួយ

\+ ទាញរកសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ $(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

យក $A(1,2,1)$ ជាចំណុចកាត់តាមនោះ: $x_0=1$, $y_0=2$ និង $z_0=1$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-3,15,3)$

នោះ $a=-3$, $b=15$, $c=3$

គេបាន $(ABC): -3(x-1)+15(y-2)+3(z-1)=0$

$(ABC): -3x+3+15y-30+3z-3=0$

$(ABC): -3x+15y+3z-30=0$

ដូចនេះ $(ABC): x-5y-z+10=0$

c. ទាញរកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2+15^2+3^2}$

$= \sqrt{3^2(1+5^2+1)} = \sqrt{3^2\times3^3} = 9\sqrt{3}$

ដូចនេះ $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ

VI. ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y''-2y'+y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-2\lambda+1=0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

ដោយសមីការសម្គាល់មានឫសឌុបគេបានចម្លើយនៃ (E) គឺ $y_c = (Ax+B)e^x$, A,B ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ: $y_c = (Ax+B)e^x$, A,B ជាចំនួនថេរជាចម្លើយនៃ (E)

ខ. កំណត់ចម្លើយ f មួយនៃ (E)

បើ $f(0)=4$ និង $f(1)=3e$

ដោយ $y=(Ax+B)e^x$

. $y(0) = (A\times0+B)e^0 = 4$

$\Rightarrow B=4$

. $y(1) = (A\times1+B)e = 3e$

$\Rightarrow A+B=3 \Rightarrow A=3-B$

$A=3-4=-1$

ដូចនេះ: ចម្លើយ f នៃ (E) គឺ $f(x)=(-x+4)e^x$ ។

VII. អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=x^2+2x-1-4\ln x$

1. សិក្សាលីមីតនិងទាញរកអាស៊ីមតូតនៃ f ត្រង់ 0^+

. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2+2x-1-4\ln x\right) = +\infty$

ព្រោះ: $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x = -\infty$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ខាង $+\infty$

2. a.បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ គេបាន

$$f(x) = x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{4\ln x}{x^2}\right)$$

គេមាន $f(x)=x^2+2x-1-4\ln x$

$$= x^2\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{4\ln x}{x^2}\right)$$

$$= x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{4\ln x}{x^2}\right) \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ: $f(x)=x^2+2x-1-4\ln x$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(0,+\infty)$

b. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$

. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{4\ln x}{x^2}\right)\right] = +\infty$

ព្រោះ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = 0$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. a. ស្រាយថា $f'(x) = \frac{2(x^2+x-2)}{x}$, $\forall x\in(0,+\infty)$

គេមាន $f(x)=x^2+2x-1-4\ln x$

$\Rightarrow f'(x) = 2x+2-\frac{4}{x}$

$= \frac{2x^2+2x-4}{x}$

$=\dfrac{2\left(x^2+x-2\right)}{x}$ ពិត

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2+x-2\right)}{x}\ ,\ \forall x\in(0,+\infty)$

b. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ លើ $(0,+\infty)$

គេមាន $f'(x)=\dfrac{2\left(x^2+x-2\right)}{x}$

ដោយ $x>0\ \ \forall x\in(0,+\infty)$

នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម x^2+x-2

បើ $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Delta=1^2-4(1)(-2)=9\Rightarrow\sqrt{\Delta}=3$

$x_1=\dfrac{-1+3}{2\cdot1}=1\ ,\ x_2=\dfrac{-1-3}{2\cdot1}=-2<0$ មិនយក

+ តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	0^+		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

. ចំពោះ $x\in(0,1)\Rightarrow f'(x)<0$

. ចំពោះ $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'(x)>0$

. ចំពោះ $x=1\Rightarrow f'(x)=0$

គេបាន f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=1$ និង $y=f(1)=2$

+ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0^+		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4. a. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d

តាមរូបមន្ត $d:y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

ដោយ បន្ទាត់ d ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ $x_0=2$ នាំឱ្យ

$y_0=f(x_0)=f(2)=4+4-1-4\ln2=7-4\ln2$

$f'(x_0)=f'(2)=4+2-\dfrac{4}{2}=4$

គេបាន $d:y=4(x-2)+7-4\ln2$

$=4x-8+7-4\ln2$

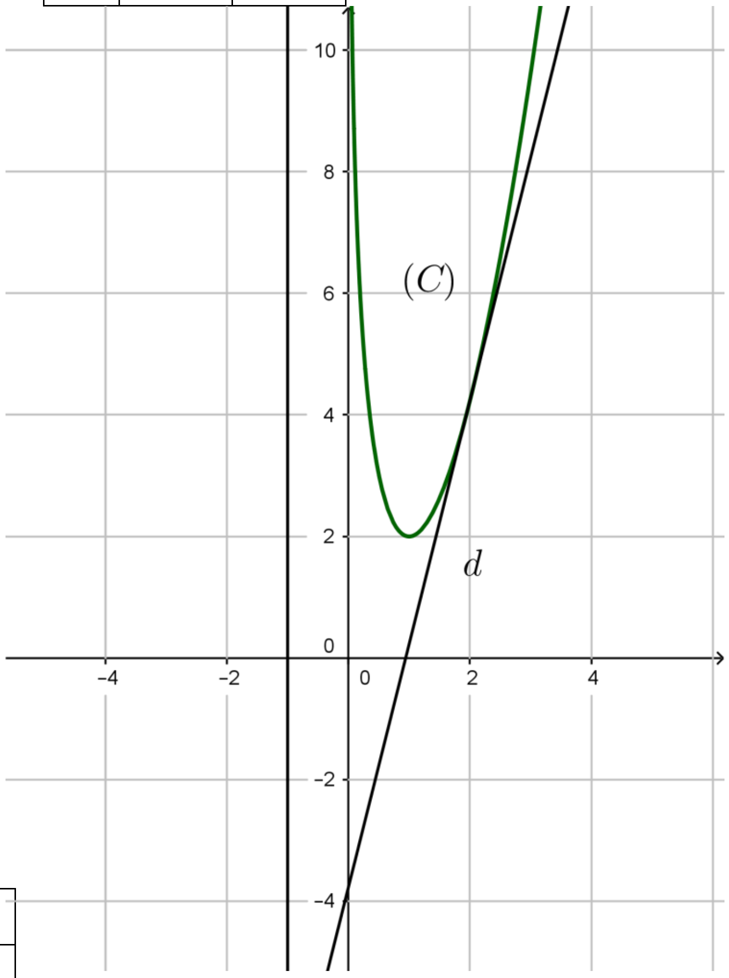
$=4x-1-4\ln2$

ដូចនេះ $d:y=4x-1-4\ln2$

b. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d

បន្ទាត់ $d:y=4x-1-4\ln2$

x	0	1
y	-3.8	0.2



វិញ្ញាសាទី២ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖** ....

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (**ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ**) **មណ្ឌលប្រឡង៖**...

រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី **លេខបន្ទប់**.................**លេខតុ**..........................

ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**..

<u>ប្រធានវិញ្ញាសា</u> **ហត្ថលេខាបេក្ខជន**..

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត: ក. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^2-4x-4}$ ខ. $\lim_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6+x}}{x+3}$ គ. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{-5x^2}$

II. (១០ពិន្ទុ) នៅក្នុងថង់មួយមានឃ្លីស១ ក្រហម៣ និងឃ្លីខៀវ៥។ គេចាប់យកឃ្លីចំនួន៣ ដោយចៃដន្យក្នុងពេលតែមួយ។ រកប្រូបាបីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. "ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងបី"។ B. "ចាប់បានឃ្លីសមួយ និងខៀវពីរ"។ C. "ចាប់បានឃ្លីបីមានពណ៌ខុសគ្នា"។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ និង $z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ ។

a. សរសេរ z_1, z_2 និងផលគុណ z_1z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ b. សរសេរផលគុណ z_1z_2 ជាទម្រង់ពិជគណិត ។

c. ទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ $z_1^{\,4}$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល: $I=\int_0^1\left(5x^4-4x+e^x\right)dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$, $K=\int_{-1}^{0}\dfrac{x^3-3x}{x^2-2}dx$ ។

ដើម្បីគណនា K ត្រូវបង្ហាញថា $\dfrac{x^3-3x}{x^2-2}=x-\dfrac{x}{x^2-2}$ ។

V. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): -y''-5y'+6y=6x+1$ ។

ក.ដោះស្រាយសមីការ $(E): -y''-5y'+6y=0$ ។ កំណត់ចម្លើយ f នៃ (E) ដែល $f(0)=-1$ និង $f'(1)=6e^{-6}$ ។

ខ.បង្ហាញថាបើ g ជាចម្លើយមួយនៃ (F) នោះ $g-f$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (F) ។

VI. (២៥ពិន្ទុ) 1. គេមានសមីការ $25x^2+9y^2=225$ ។ ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូល និងកំណុំទាំងពីរ។ ខ. សង់អេលីបនេះ។

2. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ នៃលំហ គេមានបីចំណុច $A(2,-1,4)$, $B(1,2,3)$ និង $C(3,1,-2)$ ។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(3,2,1)$ ។

ខ. បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B ។ គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ កំណត់សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច A,B,C ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=-x-\dfrac{4\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានឯកតា $2cm$ ។

1.a. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។

2. a.គណនា $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ដោយដឹងថា $x^2+4-4\ln x>0$ ចំពោះ $x>0$ ។

b.សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3. a. បន្ទាត់ d_2 ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ d_1 ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច A ។

b. រកសមីការបន្ទាត់ d_2 ។

4. សង់បន្ទាត់ d_1,d_2 និងក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។ (យក $e=2.7$, $\dfrac{4}{e}=1.5$)

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាទី២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

$I.$ គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^2-4x-4}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2(x-2)-4(x-2)}{(x-2)(3x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2-4)}{(x-2)(3x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3x-2}=\dfrac{2^2-4}{3.2+2}=0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^2-4x-4}=0$

ខ. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6-x}}{x+3}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{6-x})(\sqrt{3}+\sqrt{6-x})}{(x+3)(\sqrt{3}+\sqrt{6-x})}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3-(6+x)}{(x+3)(\sqrt{3}+\sqrt{6-x})}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-(x+3)}{(x+3)(\sqrt{3}+\sqrt{6-x})}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-1}{(\sqrt{3}+\sqrt{6-x})}=\dfrac{-1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{6-x}}{x+3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{-5x^2}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=-\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^2}$

$=-\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$

$=-\dfrac{2}{5}.1=-\dfrac{2}{5}$

ដូនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{-5x^2}=-\dfrac{2}{5}$ ។

$II.$ រកប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ចំនួនករណីអាចករណី $n(s)=C(9,3)$

$=\dfrac{9!}{(9-3)!3!}=84$ ករណី

A: ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងបី

ចំនួនករណីស្របករណី $n(A)=C(5,3)$

$=\dfrac{5!}{(5-3)!3!}=10$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{10}{84}=\dfrac{5}{42}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{5}{42}$

B: ចាប់បានឃ្លីសមួយ និងខៀវពីរ

ចំនួនករណីស្របករណី $n(B)=C(1,1)\times C(5,2)$

$=1\times\dfrac{5!}{3!2!}=10$ ករណី

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{10}{84}=\dfrac{5}{42}$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{5}{42}$

C: ចាប់បានឃ្លីទាំងបីមានពណ៌ខុសគ្នា

ចំនួនករណីស្របករណី

$n(C)=C(1,1)\times C(3,1)\times C(5,1)$

$=1\times 3\times 5=15$ ករណី

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{15}{84}=\dfrac{5}{28}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{-5x^2}=-\dfrac{2}{5}$ ។

$III.$ គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

និង $Z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

a. សរសេរ Z_1, Z_2 និងផលគុណ Z_1Z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$Z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$Z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

$Z_1Z_2=2\times 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

$=4\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

b. សរសេរផលគុណ Z_1Z_2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $Z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i$

គេបាន $Z_1Z_2=(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)$

$=\sqrt{6}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}-i^2\sqrt{2}$

$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

c. ទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់ Z_1^4

$$Z_1^4=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$$
$$=2^4\left(\cos 4\frac{\pi}{4}+i\sin 4\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=16(\cos\pi+i\sin\pi)$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុលនៃ z_1^4 គឺ $z_1^4=16$ និងអាគុយម៉ង់នៃ z_1^4 គឺ $\theta=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ។

$IV.$ គណនាអាំងតេក្រាលៈ

$$I=\int_0^1(5x^2-4x+e^x)dx$$
$$=\left[5\frac{x^5}{5}-4\frac{x^2}{2}+e^x\right]_0^1=\left[x^5-2x^2+e^x\right]_0^1$$
$$=(1^5-2.1^2+e)-(0^5-2.0^2+e)=e-2$$

ដូចនេះៈ $I=e-2$ ។

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2x-\sin^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(2x)'\cos 2xdx=\frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះៈ $J=\frac{1}{2}$ ។

$$K=\int_{-1}^0\frac{x^3-3x}{x^2-2}dx$$

បង្ហាញថា $\frac{x^3-3x}{x^2-2}=x-\frac{x}{x^2-2}$

យើងមាន $\frac{x^3-3x}{x^2-2}=\frac{x^3-2x-x}{x^2-2}$
$$=\frac{x(x^2-2)-x}{x^2-2}$$
$$=x-\frac{x}{x^2-2}$$

ដូចនេះៈ $\frac{x^3-3x}{x^2-2}=x-\frac{x}{x^2-2}$

គេបាន $K=\int_{-1}^0\left(x-\frac{x}{x^2-2}\right)dx$
$$=\int_{-1}^0\left[x-\frac{1}{2}\frac{(x^2-2)'}{x^2-2}\right]dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2\right|\right]_{-1}^0$$
$$=\left(0-\frac{1}{2}\ln|-2|\right)-\left[\frac{(-1)^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|(-1)^2-2\right|\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 1=-\frac{1}{2}(1+\ln 2)$$

ដូចនេះៈ $k=-\frac{1}{2}(1+\ln 2)$

$V.$ គេមាន $(F):-y''-5y'+6y=6x+1$

ក. ដោះស្រាយសមីការ

សមីការសម្គាល់ $-\lambda^2-5\lambda+6=0$

មានឬស $\lambda_1=1\ ;\ \lambda_2=-6$

សមីការមានចម្លើយ $y=Ae^{\lambda_1}+Be^{\lambda_2}\ ,\ A,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^x+Be^{-6x}$, $A,B\in\mathbb{R}$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ f នៃ (E) ដែល $f(0)=-1, f'(1)=6e^{-6}$

យើងមាន $y=f(x)=Ae^x+Be^{-6x}$

នាំឲ្យ $f'(x)=Ae^x-6Be^{-6x}$

តែ $\begin{cases}f(0)=-1\\ f'(1)=6e^{-6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=-1\\ Ae-6Be^{-6}=6e^{-6}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=-1\\ A-6Be^{-x}=6e^{-7}\end{cases}$

យក $(1)-(2):(1+6e^{-x})B=-(1+6e^{-7})\Rightarrow B=-1$

តាម $(1)\ \ A=-1-B=-1-(-1)=0$

ដូចនេះ ចម្លើយ f នៃ (E) គឺ $f(x)=-e^{-6x}$ ។

គ. បង្ហាញថាបើ g ជាចម្លើយមួយនៃ (F) នោះ $g-f$ ជាចម្លើយមួយនៃ (F)

- បើ g ជាចម្លើយមួយនៃ (F)
  នោះ $-g''-5g'+6g=6x+1$, (1)
- បើ f ជាចម្លើយមួយនៃ (E)
  នោះ $-f''-5f'+6f=0$, (2)

យក $(1)-(2)$ យើងបាន

$-(g''-f'')-5(g'-f')+6(g-f)=6x+1$

$\Leftrightarrow-(g''-f'')-5(g'-f')+6(g-f)=6x+1$

នោះ $g-f$ ជាចម្លើយមួយនៃ (F)

ដូចនេះ បើ g ជាចម្លើយមួយនៃ (F) នោះ $g-f$ ជាចម្លើយមួយនៃ (F) ។

$VI.1.$ក. បង្ហាញថាសមីការ $25x^2+9y^2=225$ ជាសមីការអេលីប

យើងមាន $25x^2+9y^2=225\Leftrightarrow\frac{225x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=1$

ឬ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

សមីការរាង $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ជាសមីការអេលីបដែលមានអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេនិងមានផ្ចិត $(0,0)$

- រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូល និង កំណុំទាំងពីរ

យើងមាន $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$, $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

នោះ $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

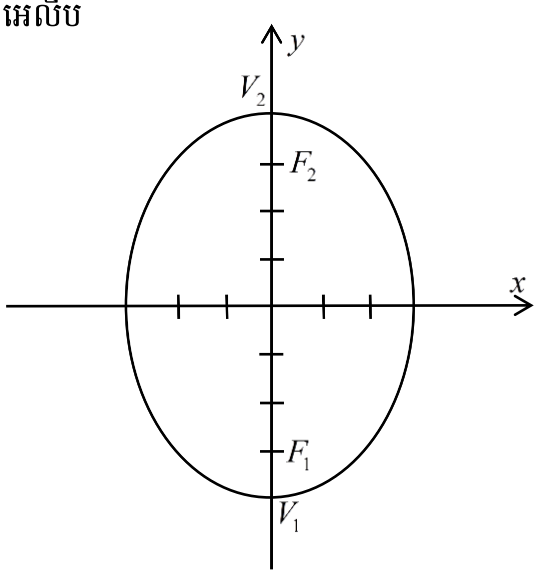
ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a = 2\times 5 = 10$ ឯកតាប្រវែង

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b = 2\times 3 = 6$ ឯកតាប្រវែង

កូអរដោនេនៃកំពូល $\begin{cases} V_1(0,-a) = V_1(0,-5) \\ V_2(0,a) = V_2(0,5) \end{cases}$

កូអរដោនេកំណុំ $\begin{cases} F_1(0,-c) = F_1(0,-4) \\ F_2(0,c) = F_2(0,4) \end{cases}$

ខ. សង់អេលីប



2. គេមាន $A(2,-1,4)$, $B(1,2,3)$ និង $C(3,1,-2)$

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L)

បន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច $A(2,-1,4)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (3,2,1)$

គេបាន $(L): \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -1+2t \\ z = 4+t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ (L): $x = 2+3t$, $y = -1+2t$, $z = 4+t$, $t\in\mathbb{R}$ ។

ខ. បង្ហាញថាជាត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ B

យើងមាន $\overrightarrow{BA} = (2-1,-1-2,4-3) = (1,-3,1)$

$\overrightarrow{BC} = (3-1,1-2,-2-3) = (2,-1,-5)$

គេបាន $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (1)(2)+(-3)(-1)+(1)(-5)$

$= 2+3-5 = 0$

ដោយ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ នោះ $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B ។

- គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$

យើងបាន $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= 16\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC} = 16\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$ ។

គ. គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{16^2+7^2+5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{256+49+25}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{330}$ ឯកតាផ្ទៃ

ដូចនេះ $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{330}$ ឯកតាផ្ទៃ។

- កំណត់សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច A, B, C

យក $\vec{n} = \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC} = 16\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច A, B, C គេបានសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $B(1,2,3)$ គឺ

$(ABC): a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o) = 0$

$16(x-1)+7(y-2)+5(z-3) = 0$

$16x-16+7y-14+5z-15 = 0$

$16x+7y+5z-45 = 0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ (ABC) គឺ $16x+7y+5z-45=0$ ។

VII. $C: f(x) = -x - \frac{4\ln x}{x}$ កំណត់លើ $x>0$

1\. a. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-x - \frac{4\ln x}{x}\right) = +\infty$

  ព្រោះ $\lim_{x\to 0^+}\frac{4\ln x}{x} = -\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(-x - \frac{4\ln x}{x}\right) = -\infty$

  ព្រោះ $\lim_{x\to +\infty}\frac{4\ln x}{x} = 0$

- បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1: y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim_{x\to +\infty}\left[f(x) - y\right] = \lim_{x\to +\infty}\left[\left(-x - \frac{4\ln x}{x}\right) - (-x)\right]$

$= \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{4\ln x}{x}\right) = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_1: y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1

យក $C-d_1: f(x)-y=-\dfrac{4\ln x}{x}$

ដោយ $x>0$ នោះ $f(x)-y$ យកសញ្ញាតាម $-4\ln x$

- បើ $-4\ln x=0\Rightarrow x=1$
- បើ $-4\ln x>0\Rightarrow x>1$
- បើ $-4\ln x<0\Rightarrow x<1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	

- ចំពោះ $x\in(0,1)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ d_1
- ចំពោះ $x\in(1,+\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ d_1
- ចំពោះ $x=1$ នោះក្រាប C កាត់បន្ទាត់ d_1 ត្រង់ $(1,-1)$

2. *a.* គណនា $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=-x-\dfrac{4\ln x}{x}$

នាំឲ្យ $f'(x)=-1-4\dfrac{(\ln x)'x-(x)'\ln x}{x^2}$

$=-1-4\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}$

$-\dfrac{x^2+4-4\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=-\dfrac{x^2+4-4\ln x}{x^2}$ ។

- សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

ចំពោះ $x>0, x^2>0, x^2+4-4\ln x>0$

យើងបាន $f'(x)=-\dfrac{x^2+4-4\ln x}{x^2}<0\ ,\ \forall x>0$

ដូចនេះ $f'(x)<0\ ,\ \forall x>0$ ។

b. សង់តារាងអថេរភាព

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘ $-\infty$

3. *a.* រកកូអរដោនេចំណុច A

តាង $A(x_o,y_o)$ ជាកូអរដោនេនៃចំណុច A

បន្ទាត់ d_2 ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំនុច A ហើយស្របនឹង

បន្ទាត់ $d_1: y=-x$ នោះ៖

$f'(x_o)=-1\Leftrightarrow -\dfrac{x^2+4-4\ln x_o}{x_o}=-1$

$\Leftrightarrow x_o{}^2+4-4\ln x_o=x_o{}^2\Leftrightarrow 4\ln x_o=4\Rightarrow x_o=e$

នាំឲ្យ $y_o=f(e)=-e-\dfrac{4\ln e}{e}=-e-\dfrac{1}{e}$

ដូចនេះ៖ $A\left(e,-e-\dfrac{1}{e}\right)$ ។

b. កំណត់សមីការបន្ទាត់ d_2

សមីការបន្ទាត់ $d_2: y=f(x_o)(x-x_o)+f(x_o)$

$=-1-(x-e)-e-\dfrac{4}{e}$

$=-x-\dfrac{4}{e}$

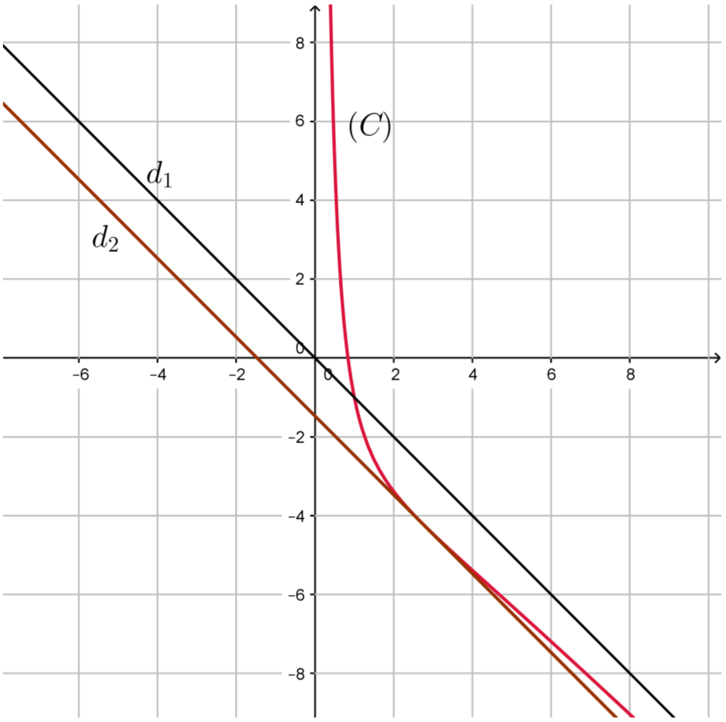
ដូចនេះ៖ $d_2: y=-x-\dfrac{4}{e}$ ។

4. សង់បន្ទាត់ d_1, d_2 និងក្រាប C នៅក្នុងប្លង់តែមួយ

តារាងតម្លៃលេខ

x	0	1
$d_1: y=-x$	0	-1

x	0	$-\dfrac{4}{e}$
$d_2: y=-x-\dfrac{4}{e}$	$-\dfrac{4}{e}$	0



វិញ្ញាសាទី៣ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡងៈ** ....

វិញ្ញាសាៈ គណិតវិទ្យា (**ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ**) **មណ្ឌលប្រឡងៈ**..... ....

រយៈពេលៈ ១៥០ នាទី **លេខបន្ទប់**.................**លេខតុ**.........................

ពិន្ទុសរុបៈ ១២៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**..

ហត្ថលេខាបេក្ខជន...

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតៈ ក. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{2x^2+3x+1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{3}-\sqrt{1+x}}$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

II. (១០ពិន្ទុ) នៅក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ិចចំនួន១០ដើម ដែលក្នុងនោះមានប៊ិចក្រហមចំនួន៤ដើម និងប៊ិចខៀវចំនួន៦ដើម។ គេចាប់យកប៊ិច៣ដើមក្នុងពេលតែមួយចេញពីប្រអប់នោះដោយចៃដន្យ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ៈ

A. "ចាប់បានប៊ិចខៀវទាំងបីដើម"។ *B.* "ចាប់បានប៊ិចក្រហមមួយដើម និងប៊ិចខៀវពីរដើម"។

C. "ចាប់បានប៊ិចខៀវតែមួយដើមគត់"។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1-i$ និង $z_2=\sqrt{3}+i$ ។

a. គណនា $z_1+z_2,\ z_1-z_2$ និង $\dfrac{z_1}{z_2}$ ទម្រង់ពិជគណិត ។ b. សរសេរ z_1, z_2 និង $\dfrac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលៈ $I=\int_{-1}^{1}\left(3-4x-3x^2\right)dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos^2 x-1\right)dx$ ។ ។ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1+2x}{x^2-5x+4}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{1}{x-1}$ ។ គណនា $K=\int_2^3 f(x)\,dx$ ។

V. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(F): y''-3y'+2y=2x$ ។

ក.ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''-3y'+2y=0$ ។ កំណត់ចម្លើយនៃ (E) ដែល $y(0)=0$ និង $y'(0)=-e$ ។

ខ.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F) ។

VI. (២៥ពិន្ទុ) ១. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ នៃលំហ គេមានបួនចំណុច $A(0,2,2)$, $B(1,1,2)$ $C(3,0,0)$ និង $D(2,1,0)$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច D ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

២. គេមានសមីការ $9x^2-16y^2=144$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីររបស់អ៊ីពែបូល និងសង់អ៊ីពែបូលនេះ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=e^x-x-1$ មានក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។

1. a. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

   b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=-x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $-\infty$ ។

   c. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។

2. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

3. a. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ P រវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ d_3 ដោយបន្ទាត់ d_3 ស្របនឹងបន្ទាត់ $d_2: y=x$ ។

   b. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ។

4. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1, d_2, d_3 នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។ (យក $e=2.7,\ \ln 2=0.7$)

អត្រាគំរូវិញ្ញាសាទី៣ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត:

ក. $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{2x^2+3x+1}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+2)}{(x+1)(2x+1)}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+2}{2x+1}$

$=\frac{1+1+2}{-2+1}$

$=-4$

ដូចនេះ $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{2x^2+3x+1}=-4$ ។

ខ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{3}-\sqrt{1+x}}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{3}+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{3}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{3}+\sqrt{1+x})}{3-(1+x)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{3}+\sqrt{1+x})}{-(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\left[-(x^2+2x+4)(\sqrt{3}+\sqrt{1+x})\right]$

$=-12\times 2\sqrt{3}=-24\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{3}-\sqrt{1+x}}=-24\sqrt{3}$ ។

គ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}$

II. រកចំនួនករណីអាច

តាង S ជាព្រឹត្តការណ៍អាច

ដោយ ក្នុងប្រអប់មានប៊ិចចំនួន ១០ ដើម ហើយគេចាប់យកប៊ិច ៣ដើមចេញពីប្រអប់ក្នុងពេលតែមួយ

យើងបាន $n(S)=C(10,3)=\frac{10!}{(10-3)!3!}=\frac{10!}{7!3!}$

$=\frac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!\times 3\times 2\times 1}=10\times 3\times 4=120$ ករណី

គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តការណ៍

A. "ចាប់បានប៊ិចខៀវទាំងបីដើម"

ដោយ ប៊ិចខៀវទាំងអស់មានចំនួន ៦ ដើម

យើងបាន $n(A)=C(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!3!}=\frac{6!}{3!3!}$

$=\frac{6\times 5\times 4\times 3!}{3!\times 3\times 2\times 1}=2\times 5\times 2=20$ ករណី

នាំឲ្យ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

ដូចនេះ: $P(A)=\frac{1}{6}$ ។

B. "ចាប់បានប៊ិចក្រហមមួយដើម និងប៊ិចខៀវពីរដើម"

ដោយ ប៊ិចខៀវទាំងអស់មានចំនួន ៦ ដើមនិង ប៊ិចក្រហមមាន ចំនួន៤ដើម

យើងបាន $n(B)=C(4,1)\times C(6,2)$

$=\frac{4!}{(4-1)!1!}\times\frac{6!}{(6-2)!2!}=\frac{4\times 3!}{3!}\times\frac{6\times 5\times 4!}{4!\times 2\times 1}$

$=4\times 3\times 5=60$ ករណី

នាំឲ្យ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ: $P(A)=\frac{1}{2}$ ។

C. "ចាប់បានប៊ិចខៀវតែមួយដើមគត់"

យើងបាន $n(C)=C(6,1)\times C(4,2)$

$=\frac{6!}{(6-1)!1!}\times\frac{4!}{(4-2)!2!}=\frac{6\times 5!}{5!}\times\frac{4\times 3\times 2!}{2!\times 2\times 1}$

$=6\times 2\times 3=36$ ករណី

នាំឲ្យ $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

ដូចនេះ: $P(C)=\frac{3}{10}$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1-i$ និង $z_2=\sqrt{3}+i$

a. គណនា z_1+z_2, z_1-z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត

- គណនា z_1+z_2

យើងបាន $z_1+z_2=1-i+(\sqrt{3}+i)=1+\sqrt{3}$

- គណនា z_1-z_2

យើងបាន $z_1 - z_2 = 1 - i - (\sqrt{3} + i) = (1 - \sqrt{3}) - 2i$

- គណនា $\frac{z_1}{z_2}$

យើងបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1-i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$

$= \frac{\sqrt{3} - i - i\sqrt{3} + 1}{3+1} = \frac{(\sqrt{3}+1) - i(\sqrt{3}+1)}{4}$

$= \frac{(\sqrt{3}+1)}{4} - \frac{(\sqrt{3}+1)}{4} i$

ដូចនេះ: $z_1 + z_2 = 1 + \sqrt{3},\ z_1 - z_2 = (1-\sqrt{3}) - 2i$ និង

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{4} - \frac{(\sqrt{3}+1)}{4} i$ ។

b. សរសេរ z_1, z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

- $z_1 = 1 - i$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

- $z_2 = \sqrt{3} + i$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

ដូចនេះ: $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល

$I = \int_{-1}^{1}(3 - 4x - 3x^2)dx$

$= \left[3x - 4\times\frac{x^2}{2} - 3\times\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left[3x - 2x^2 - x^3\right]_{-1}^{1}$

$= (3-2-1) - (-3-2+1) = 4$

ដូចនេះ: $I = \int_{-1}^{1}(3 - 4x - 3x^2)dx = 4$ ។

$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2 x - 1)dx \quad = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x)dx$

$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \quad = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) \quad = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{1+2x}{x^2 - 5x + 4}$

បង្ហាញថា $f(x) = \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x-1}$

យើងមាន $f(x) = \frac{1+2x}{x^2-5x+4} = \frac{3(x-1)-(x-4)}{(x-4)(x-1)}$

$= \frac{3(x-1)}{(x-4)(x-1)} - \frac{x-4}{(x-4)(x-1)} = \frac{3}{(x-4)} - \frac{1}{x-1}$ ពិត

ម្យ៉ាងទៀត $f(x) = \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x-1} = \frac{3(x-1)-(x-4)}{(x-4)(x-1)}$

$= \frac{3x-3-x+4}{x^2-x-4x+4} = \frac{1+2x}{x^2-5x+4}$ ពិត

ដូចនេះ: $f(x) = \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x-1}$ ត្រូវបានបង្ហាញ។

គណនា $K = \int_2^3 f(x)dx$

ដោយ $f(x) = \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x-1}$

យើងបាន $K = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3\left(\frac{3}{x-4} - \frac{1}{x-1}\right)dx$

$= \int_2^3\left(\frac{3(x-4)'}{x-4} - \frac{(x-1)'}{x-1}\right)dx$

$= \left[3\ln|x-4| - \ln|x-1|\right]_2^3$

$= (3\ln 1 - \ln 2) - (3\ln 2 - \ln 1) = -4\ln 2$

ដូចនេះ: $K = \int_2^3 f(x)dx = -4\ln 2$ ។

V. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(F): y'' - 3y' + 2y = 2x$

ក.ដោះស្រាយសមីការ $(E): y'' - 3y' + 2y = 0$

សរសេរសមីការសម្គាល់ $\lambda'' - 3\lambda' + 2 = 0$

មានឫស $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$

ដូចនេះ: ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = Ae^{x} + Be^{2x}$,

$A,B\in\mathbb{R}$ ។

• កំណត់ចម្លើយនៃ (E) ដែល $y(0)=0$ និង $y'(0)=-e$

ដោយ $y=Ae^{x}+Be^{2x}$ នាំឲ្យ $y'=Ae^{x}+2Be^{2x}$

យើងបាន $A+B=0\ ,\ (1)$

$A+2B=-e\ ,\ (2)$

តាម (1) និង (2) យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}A+B=0\ ,\ (1)\\ A+2B=-e\ ,\ (2)\end{cases}$$

យក (2) ដក (1)

នោះ $B=-e$ នាំឲ្យ $A=e$

ដោយ $y=Ae^{x}+Be^{2x}$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃ (E) គឺ $y=e^{x+1}-e^{2x+1}$ ។

ខ.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F)

បើ $f(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (F) លុះត្រាតែ

$f''(x)-3f'(x)+2f(x)=2x$

យើងមាន $f(x)=ax+b$

នោះ $f'(x)=a$

$f''(x)=0$

យើងបាន $0-3a+2(ax+b)=2x$

$2ax+(2b-3a)=2x$

សមភាពពីរស្មើគ្នាកាលណា $\begin{cases}2a=2\\2b-3a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

ដូចនេះ $a=1\ ,\ b=\dfrac{3}{2}$

VI. (២៥ពិន្ទុ)១. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ នៃលំហ គេមានបួនចំណុច $A(0,2,2)$, $B(1,1,2)$ $C(3,0,0)$ និង $D(2,1,0)$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

ដោយ $A(0,2,2),B(1,1,2)$ $C(3,0,0)$ និង $D(2,1,0)$

$\overrightarrow{AB}=(1-0,1-2,2-2)=(1,-1,0)$

$\overrightarrow{DC}=(3-2,0-1,0-0)=(1,-1,0)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ នោះ $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}\\ |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|\end{cases}$

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC}=(3-0,0-2,0-2)=(3,-2,-2)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&0\\3&-2&-2\end{vmatrix}$

$=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$

យើងបាន $S_{ABCD}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$=\sqrt{2^2+2^2+1}=3$ ឯកតាផ្ទៃ។

គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាមចំណុច D ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$

តាម $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_o+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$

ដោយបន្ទាត់តាម D នោះ $x_0=2\ ,\ y_o=1\ ,\ z_0=0$ ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ នោះ $a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=0$

ដូចនេះ $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=0\end{cases}\ ,\ t\in\mathbb{R}$ ។

២. គេមានសមីការ $9x^2-16y^2=144$

បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល

យើងមាន $9x^2-16y^2=144$

ឬ $\dfrac{9x^2}{144}-\dfrac{16y^2}{144}=1$

$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

$\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$ ជាសមីការដែលមានអ័ក្សទទឹងដេក និងមានផ្ចិតនៅគល់អ័ក្ស

ដូចនេះ សមីការ $9x^2-16y^2=144$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល។

រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល

យើងមានសមីការស្តង់ដារ $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$

យើងបាន $h=0$, $k=0$, $a=4$, $b=3\Rightarrow c=5$

- កំពូល $\begin{cases}V_1(h-a,k)=V_1(-4,0)\\ V_2(h+a,k)=V_2(4,0)\end{cases}$
- កំណុំ $\begin{cases}F_1(h-c,k)=F_1(-5,0)\\ F_2(h+c,k)=F_2(5,0)\end{cases}$

រកសមីការអាស៊ីមតូតទាំងពីររបស់អ៊ីពែរបូល

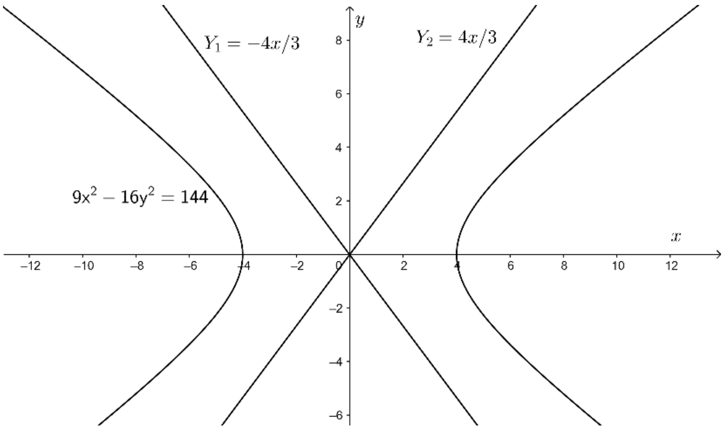
$$Y_1=k-\frac{a}{b}(x-h)=0-\frac{4}{3}(x-0)=-\frac{4}{3}x$$

$$Y_2=k+\frac{a}{b}(x-h)=0+\frac{4}{3}(x-0)=\frac{4}{3}x$$

ដូចនេះ $Y_1=k-\frac{a}{b}(x-h)=0-\frac{4}{3}(x-0)=-\frac{4}{3}x$

$Y_2=k+\frac{a}{b}(x-h)=0+\frac{4}{3}(x-0)=\frac{4}{3}x$ ។

សង់អ៊ីពែបូល



VII. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=e^x-x-1$ មានក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$។

1. a. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x-1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x-1)=+\infty$

b. បង្ហាញថាបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=-x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $-\infty$

យើងមាន $f(x)=e^x-x-1$

នាំឲ្យ $f(x)-(-x-1)=e^x$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

ដូចនេះ $y=-x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $-\infty$

c. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1

យើងមាន $C: f(x)=e^x-x-1$

$d_1: y=-x-1$

យើងបាន $C-d_1=e^x-x-1-(-x-1)=e^x>0$ ជានិច្ច គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

នាំឲ្យ $C>d_1$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅលើអាស៊ីមតូតទ្រេត d_1 ។

2. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x)=e^x-x-1$ នាំឲ្យ $f'(x)=e^x-1$

បើ $f'(x)>0$ នោះ $e^x-1>0$ នាំឲ្យ $x>0$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $e^x-1=0$ នាំឲ្យ $x=0$

បើ $f'(x)<0$ នោះ $e^x-1<0$ នាំឲ្យ $x<0$

- សង់តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ដោយ $f'(x)=0$ មានឫសត្រង់ $x=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពីដកទៅបូក នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $f(0)=0$

បើ $x\in(-\infty,0)$ នោះ $f'(x)<0$ នាំឲ្យ f កើន

បើ $x\in(0,+\infty)$ នោះ $f'(x)>0$ នាំឲ្យ f ចុះ

- សង់តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3 a. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ P រវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ d_3

ដោយបន្ទាត់ d_3 ស្របនឹងបន្ទាត់ $d_2: y=x$

តាង x_o និង y_o ជាកូអរដោនេនៃចំណុច P

$y=e^x-x-1$ នាំឲ្យ $y'=e^x-1$

ដោយ ក្រាប C ប៉ះនឹងបន្ទាត់ d_3 ត្រង់ចំណុច P

នោះ $y'_0=e^{x_o}-1$ តែបន្ទាត់ d_3 ស្របនឹងបន្ទាត់ d_2

នោះ $y'_o=1$ នាំឲ្យ $e^{x_o}-1=1$ នាំឲ្យ $x_o=\ln 2$

យើងបាន $y_o=e^{\ln 2}-\ln 2-1=1-\ln 2$

ដូចនេះ $P(\ln 2, 1-\ln 2)$

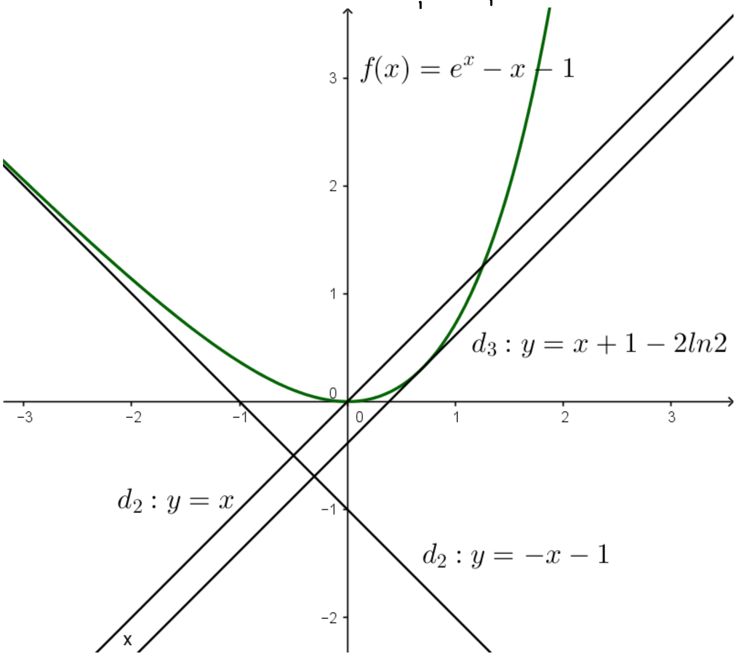
c. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_3

តាមសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_3 : y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

យើងបាន $d_3 : y = x - \ln 2 + 1 - \ln 2 = x + 1 - 2\ln 2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_3 : y = x + 1 - 2\ln 2$ ។

4. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ នៅក្នុងតម្រុយតែមួ



វិញ្ញាសាទី៤ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖**....................................

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ) **មណ្ឌលប្រឡង៖**..

រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី **លេខបន្ទប់**...................**លេខតុ**...................

ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**..

ប្រធានវិញ្ញាសា **ហត្ថលេខាបេក្ខជន**..................................

I. (១៥ពិន្ទុ)គណនាលីមីត:ក. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-x-4}{1-x^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin x}{\sqrt{5}-\sqrt{5+x}}$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{-x^2}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos x+1}$

II. (១៥ពិន្ទុ)គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i$ និង $z_2=-1+i$ ។ a. គណនាកន្សោម $A=\dfrac{z_1-1}{z_2}$ ។

b. សរសេរ $z_1,z_2,z_1+z_2,z_1-z_2,z_1z_2$ និង $\dfrac{z_2}{z_1}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ c. ទាញរកតម្លៃនៃ $Z=\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^{2018}$ ។

III. (១៥ពិន្ទុ)គណនាអាំតេក្រាល $I=\int_0^3\left[(2x+1)(x+3)\right]dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\cos^2 x\right)dx$ ។ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ $f(x)=\dfrac{-3x^2-5}{x\left(1+x^2\right)}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{5}{x}$ ។ គណនា $K=\int_1^e f(x)dx$ ។$(\ln e=1)$

IV. (១០ពិន្ទុ)នៅក្នុងថង់មួយមានឃ្លី ខៀវ ៤ ឃ្លីក្រហម៣ និងឃ្លីស ២។ គេចាប់យកឃ្លីចំនួន ៣ ចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍:

$A.$ "ចាប់បានឃ្លី ខៀវពីរ និងឃ្លី ក្រហមមួយ "។ $B.$ " ចាប់បានឃ្លី ខៀវទាំងបី "។ $C.$ " ចាប់បានឃ្លី មួយក្នុងមួយពណ៌ "។

V. (១០ពិន្ទុ)គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(E): $y''-6y'+8y=8x+10$ ។

ក.ដោះស្រាយសមីការ(E_1): $y''-6y'+8y=0$ ។ កំណត់ចម្លើយពិសេសមួយនៃ(E_1)ដែល $y(0)=-1$ និង $y'(0)=4$ ។

ខ.កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃ(E)។

VI. (២៥ពិន្ទុ)១.គេឲ្យសមីការ$\left(\dfrac{2y-3x}{18}\right)\left(\dfrac{2y+3x}{2}\right)=1$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកំណុំទាំងពីរ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអ៊ីពែបូល រួចសង់អ៊ីពែបូល។

២. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$នៃលំហ គេមានចំណុច $A(1,2,1)$, $B(2,0,3)$, $C(-1,2,2)$ ។

ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)ដែលកាត់តាមចំណុច A និង B ។

ខ. គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

គ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថាបីចំណុច A,B,C រត់មិនត្រង់ជួរគ្នា។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ កំណត់សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច A,B,C ។

$VII.$ (៣៥ពិន្ទុ) $A.$ គេមានអនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $g(x)=x^3-1+2\ln x$ ។

1. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ g ។ គណនា $g(1)$ ។ 2. សង់តារាងអថេរភាពនៃ g រួចកំណត់សញ្ញានៃ g ។

$B.$ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានក្រាបតំណាង C ។

1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

2.a. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $d_1: y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $+\infty$ នៃក្រាប C ។

b. សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1 ។

3 .a.គណនា $f'(x)$ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$ ។ b. សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f រួចសង់ក្រាប C

4. a.សរសេរសមីការបន្ទាត់ d_2 ដែលប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស1 ។

b. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1,d_2 នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាត្រៀមទី៤ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

$I.$ គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-x+4}{1-x^2}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(3x-4)}{(1-x)(1+x)}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{3x-4}{1-x}=\frac{3(-1)-4}{1-(-1)}=-\frac{7}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-x-4}{1-x^2}=-\frac{7}{2}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{5\sin x}{\sqrt{5}-\sqrt{5+x}}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin x\left(\sqrt{5}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{5+x}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{5+x}\right)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin x\left(\sqrt{5}+\sqrt{5+x}\right)}{5-5-x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin x\left(\sqrt{5}+\sqrt{5+x}\right)}{-x}$

$=-5\left(\sqrt{5}+\sqrt{5+0}\right)=-10\sqrt{5}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{5\sin x}{\sqrt{5}-\sqrt{5+x}}=-10\sqrt{5}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{-x^2}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{-x^2}$

$=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=-1$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{-x^2}=-1$

ឃ. $\lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos^2 x}{\cos x+1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to \pi}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$=\lim_{x\to \pi}(1-\cos x)=2$

ដូចនេះ $\lim_{x\to \pi}\frac{1-\cos^2 x}{\cos x+1}=2$

$II.$ a. គណនាកន្សោម $A=\frac{z_1-1}{z_2}$

គេមាន $z_1=1+i$ និង $z_2=-1+i$

គេបាន $A=\frac{1+i-1}{-1+i}$

$=\frac{i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$

$=\frac{-i-i^2}{(-1)^2-i^2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

ដូចនេះ $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

b. សរសេរ z_1 , z_2 , z_1+z_2 , z_1-z_2 , z_1z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

- $z_1=1+i$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

- $z_2=-1+i$

$=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

- $z_1+z_2=1+i-1+i$

$=0+2i$

$=2(0+i)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

- $z_1-z_2=1+i-(-1+i)$

$=2+0i$

$=2(1+0i)=2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$

- $z_1z_2=\sqrt{2}\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$=2(\cos\pi+i\sin\pi)$

- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

c. ទាញរកតម្លៃនៃ $z=\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2018}$

$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2018}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2018}$

$=\cos\frac{2018\pi}{2}+i\sin\frac{2018\pi}{2}$

$=\cos 1009\pi+i\sin 1009\pi$

$=-1+0i$

ដូចនេះ $z=-1+0i$

$III.$ គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$I=\int_0^3(2x+1)(x+3)dx$

$=\int_0^3(2x^2+6x+x+3)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+3x\right]_0^3$

$=\frac{2}{3}(3)^3+\frac{7}{2}(3)^2+3(3)-0$

$=18+\frac{63}{2}+9=\frac{36+63+18}{2}=\frac{117}{2}$

ដូចនេះ $I=\frac{117}{2}$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\cos^2x)dx$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$

$=-\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $J=-\frac{1}{2}$

+ បង្ហាញថា $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}-\frac{5}{x}$

គេមាន $f=\frac{-3x^2-5}{x(1+x^2)}$

$\frac{-3x^2-5}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$

$=\frac{A+Ax^2+Bx^2+Cx}{x(1+x^2)}$

$=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}$

ផ្ទឹមមេគុណ

$\begin{cases}A+B=-3\\C=0 \qquad \Rightarrow B=2\\A=-5\end{cases}$

គេបាន $f(x)=-\frac{5}{x}+\frac{2x}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}-\frac{5}{x}$ ពិត

ដូចនេះ $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}-\frac{5}{x}$

គណនា $K=\int_1^e f(x)dx$

គេបាន $K=\int_0^e\left(\frac{2x}{1+x^2}-\frac{5}{x}\right)dx$

$=\int_1^e\left[\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}-5\frac{1}{x}\right]dx$

$=\left[\ln\left|1+x^2\right|-5\ln|x|\right]_1^e$

$=\ln(1+e^2)-5\ln e-(\ln 2-5\ln 1)$

$=\ln(1+e^2)-5-\ln 2$

ដូចនេះ $K=\ln(1+e^2)-5-\ln 2$

$IV.$ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

$A.$ « ចាប់បានឃ្លី ខៀវពីរ និង ឃ្លីក្រហមមួយ »

$n(A)=C(4,2)\times C(3,1)$

$=\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{2!1!}=18$

+ រកចំនួនករណីអាច

$n(S)=C(9,3)=\frac{9!}{6!3!}=\frac{8\times7\times6!}{6!\times3\times2}=3\times4\times7=84$

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{18}{84}=\frac{3}{14}$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{3}{14}$

$B.$ « ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងបី »

$n(B)=C(4,3)=\frac{4!}{3!1!}=4$

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{1}{21}$

$C.$ « ចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌

$n(C)=C(4,2)\times C(3,1)\times C(2,1)$

$=4\times3\times2=24$

$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$

ដូចនេះ $P(C)=\frac{2}{7}$

$V.$ ក. ដោះស្រាយសមីការ

$(E_1): y''-6y'+8y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-6\lambda+8=0$

$\Delta'=(-3)^2-(1)(8)=1$

$\lambda_1=\frac{3+1}{1}=4$, $\lambda_2=\frac{3-1}{1}=2$

គេបានចម្លើយទូទៅនៃ (E_1) គឺ $y=Ae^{2x}+Be^{4x}$, A,B ថេរ

+ កំណត់ចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E_1)

ដោយ $y(0)=-1$ និង $y'(0)=4$

$y = Ae^{2x} + Be^{4x}$

$y' = 2Ae^{2x} + 4Be^{4x}$

$y(0) = -1 \Leftrightarrow A + B = -1 \quad (1)$

$y'(0) = 4 \Leftrightarrow 2A + 4B = 4 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$\begin{cases} A + B = -1 & (1) \\ 2A + 4B = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -1 & (1) \\ A + 2B = 2 & (2) \end{cases} -$$

$$-B = -3 \Rightarrow B = 3$$

ជំនួសក្នុង $(1) \Rightarrow A = -1 - 3 = -4$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $(E_1): y = -4e^{2x} + 3e^{4x}$

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x) = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ (E)

$g(x) = ax + b$

$g'(x) = a$

$g''(x) = 0$

បើ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះគេបាន

$g''(x) - 6g'(x) + 8g(x) = 8x + 10$

$0 - 6a + 8(ax + b) = 8x + 10$

$-6a + 8ax + 8b = 8x + 10$

$8ax - 6b + 8b = 8x + 10$

ផ្ទឹមមេគុណ

$$\begin{cases} 8a = 8 \Rightarrow a = 1 \\ -6a + 8b = 10 \Rightarrow b = \dfrac{10 + 6}{8} = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $a = 1$, $b = 2$, $g(x) = x + 2$

VI. 1. បង្ហាញថានេះជាសមីការអេលីប

$$\left(\frac{2y - 3x}{18}\right)\left(\frac{2y + 3x}{2}\right) = 1$$

$$\frac{(2y)^2 - (3x)^2}{36} = 1$$

$$\frac{4y^2}{36} - \frac{9x^2}{36} = 1$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

នេះជាសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលមានផ្ចិតជាគល់អ័ក្សហើយអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សឈរតាមទម្រង់ $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

គេបាន $\begin{cases} h = 0 , k = 0 \\ a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 , b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \end{cases}$

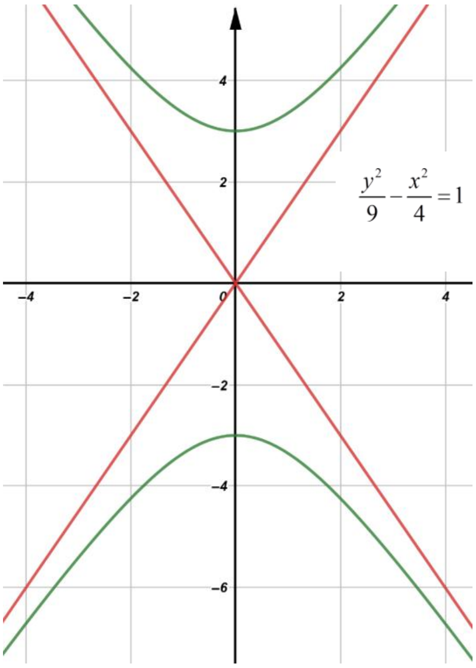
\+ រកកូអរដោនេ ផ្ចិត កំពូល កំណុំ

- ផ្ចិត $I(h,k) \Rightarrow I(0,0)$
- កំពូល $V(0,\pm a) \Rightarrow V(0,\pm 3)$
- កំណុំ $F(0,\pm c) \Rightarrow F\left(0,\pm\sqrt{13}\right)$

\+ សមីការអាស៊ីមតូត

$$y = \pm\frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm\frac{3}{2}x$$

\+ សង់អ៊ីពែបូល



2. ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (L)

បន្ទាត់ $(L): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} , t \in \mathbb{R}$

ដោយបន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីចំណុច A និង B

យក $A(1,2,1)$ ជាចំណុចកាត់នោះ $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$

និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB} = (2-1, 0-2, 3-1) = (1,-2,2)$

នោះ $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$

គេបាន $(L):\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=1+2t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(L):\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=1+2t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$

ខ. គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC

$\Rightarrow AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$\overrightarrow{BC}=(-3,2,1)$

$\Rightarrow BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$

$\overrightarrow{AC}=(-2,0,1)$

$\Rightarrow AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}$

ដូចនេះ $AB=3$ ឯកតាប្រវែង

$BC=\sqrt{14}$ ឯកតាប្រវែង

$AC=\sqrt{5}$ ឯកតាប្រវែង

+ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

គេមាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1)(-2)+(-2)(0)+(2)(1)=0$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

គ. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-2+0)\vec{i}-(1+4)\vec{j}+(0-4)\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}-5\vec{j}-4\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}-5\vec{j}-4\vec{k}$

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2+(-4)^2}=\sqrt{45}$

ដូចនេះ $S_{ABC}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ

+ កំណត់សមីការប្លង់កាត់តាមបី A,B,C

ប្លង់ $(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

យក $A(1,2,1)$ ជាចំណុចកាត់នោះ $x_0=1,\ y_0=2\ ,\ z_0=1$

ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}-5\vec{j}-4\vec{k}$

នោះ $a=-2, b=-5\ , c=-4$

គេបាន $(ABC): -2(x-1)-5(y-2)-4(z-1)=0$

$-2x+2-5y+10-4z+4=0$

$-2x-5z-4z+16=0$

ដូចនេះ ប្លង់ $(ABC): 2x+5y+4z-16=0$

VII. *A.* 1. សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃ g

$g(x)=x^3-1+2\ln x$ កំណត់ចំពោះ $\forall x\in(0,+\infty)$

$g'(x)=3x^2+\dfrac{2}{x}=\dfrac{3x^3+2}{x}>\forall x\in(0,+\infty)$

ដោយ $g'(x)>0, \forall x\in(0,+\infty)$ នោះ g ជាអនុគមន៍កើន

គណនា $g(1)=1^3-1+2\ln 1=0$

2. តារាងអថេរភាពនៃ g

x	0^+		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

+ ទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$

តាមតារាងអថេរភាពនៃ g គេបានសញ្ញានៃ g

• ចំពោះ $x\in(0,1)$ នោះ $g(x)<0$

•ចំពោះ $x\in(1,+\infty)$ នោះ $g(x)>0$

•ចំពោះ $x=1$ នោះ $g(x)=0$

B. 1. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0^+ និង $+\infty$

• $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^2}=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$

+ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

ដូចនេះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ខាង $+\infty$

2. a. ស្រាយថាបន្ទាត់ $d_1: y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ខាង $+\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_1 : y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

b. សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1

$$C : f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$d_1 : y = x$$

$C - d_1 : f(x) - y_{d_1} = -\frac{\ln x}{x^2}$ ដោយ $x^2 > 0, \forall x \in (0, +\infty)$

នោះ $f(x) - y_{d_1}$ យកសញ្ញាតាម $-\ln x$

• បើ $-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$

• បើ $-\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

• បើ $-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

តារាងសញ្ញា $f(x) - y_{d_1}$

x	0^+	1	$+\infty$
$f(x) - y_{d_1}$	$+$	0	$-$

តាមតារាងសញ្ញា $f(x) - y_{d_1}$ គេបាន ៖

• ចំពោះ $x \in (0,1)$ នោះ C នៅលើ d_1

• ចំពោះ $x \in (1, +\infty)$ នោះ C នៅក្រោម d_1

• ចំពោះ $x = 1$ នោះ C កាត់ d_1 ត្រង់ $(1,1)$

3. a. គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{(\ln x)' x^2 - (x^2)' \ln x}{x^4}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{x}(x^2) - 2x \ln x}{x^4}$$

$$= 1 - \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{x^3 - 1 + \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b. សិក្សាសញ្ញានៃ f

ដោយ $x^3 > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$

នោះ $f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $g(x)$

• ចំពោះ $x \in (0,1)$ នោះ $f'(x) < 0$

•ចំពោះ $x \in (1, +\infty)$ នោះ $f'(x) > 0$

•ចំពោះ $x = 1$ នោះ $f'(x) = 0$

គេបាន f មានអប្បបរមាត្រង់ $x = 1, y = f(1) = 1$

+ តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0^+	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+$

4. a. សរសេរសមីការបន្ទាត់ d_2 ប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 1

$$d_2 : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

ដោយ $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(1) = 1$

$f'(x_0) = f'(1) = 0$

គេបាន $d_2 : y = 0(x - 1) + 1$

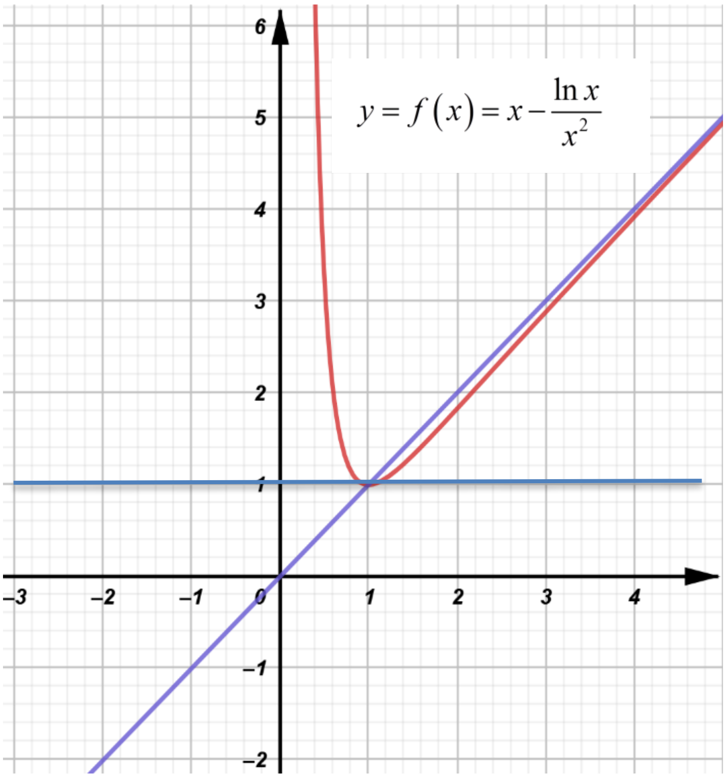
ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_2 : y = 1$

b. សង់ក្រាប C បន្ទាត់ d_1 និង d_2

$d_1 : y = x$

x	1	2
y	1	2

$d_2 : y = 1$



វិញ្ញាសាទី៥ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖** ....

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ) **មណ្ឌលប្រឡង៖**..... ....

រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**.......................

ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**...

<u>ប្រធានវិញ្ញាសា</u> **ហត្ថលេខាបេក្ខជន**...

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{2x^2}$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 5x}$

II. (១៥ពិន្ទុ)គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1-\sqrt{3}i$; $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ និង $z_3=3(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3})$ ។ ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។ ខ. គណនា z_1z_2 ; $\dfrac{z_1}{z_2}$ ។ គ. គណនា z_1z_3 ។ រួចទាញរក អាគុយម៉ង់ និងម៉ូឌុល z_1z_3 ។

III. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីខៀវ៦គ្រាប់ចុះលេខពី ១ដល់៦ ឃ្លីក្រហម៥គ្រាប់ ចុះលេខពី ១ ដល់ ៥ និងឃ្លីស៤គ្រាប់ ចុះលេខពី ១ ដល់៤។ គេចាប់ឃ្លីម្តង៣គ្រាប់ចេញពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម÷

A: ចាប់បានឃ្លីជាលេខគូ ។ B: ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខុសៗគ្នា ។ C:ចាប់បានឃ្លីជាលេខសេសតែមួយគ្រាប់គត់ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ)គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^2(3x-1)^2\,dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\sin^2 x-1\right)dx$ ។ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)}$ ចំពោះគ្រប់ x ,ដែល $x\neq0, x\neq-1$ ។ គណនា $K=\int_1^2 f(x)dx$ ។ ដើម្បីគណនាបានគេត្រូវសរសេរ $\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x+1}$ ដែល a,b,c ជាចំនួនពិតដែលត្រូវកំណត់។

V. (២៥ពិន្ទុ) ១. នៅក្នុងតម្រុយអតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មានទិសដៅវិជ្ជមានគេមានបីចំណុច $M(2,4,1)$, $N(3,0,2)$, $P(3,3,5)$ ។

ក. គណនាប្រវែង MN, MP និង NP ហើយបង្ហាញថា MNP ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ. សរសេរសមីការ ប្លង់ (P) កាត់តាម M ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$ ។

២. គេមានសមីការ $(5x+9y)^2=5(18xy+45)$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ កំណុំទាំងពីរនិងសង់អេលីបនេះ។

VI. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការ (E): $y''-3y'+2y=0$ ។ ដោះស្រាយសមីការ (E) រួចរកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើ1ត្រង់ $x=1$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) A : គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ៖ $g(x)=1-x+e^x$ ។

ចូរគូសតារាងអថេរភាពនៃ g ។ រួចទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$ ។ (មិនបាច់គណនាលីមីត)

B :គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+1+\dfrac{x}{e^x}$ មានក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

1. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ D ដែលមានសមីការ $y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។ សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូត D ។
2. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=e^{-x}.g(x)$ ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}$ ។ ទាញរកតារាងអថេរភាព f លើ $\mathbb{R}$ ។
3. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ α លើចន្លោះ $-1<\alpha<0$ ។
4. រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស 0 ។
5. សង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ D , T ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាទី៥ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ
ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

$I.$ គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{2x^2}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1^2=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{2x^2}=1}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sin5x}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{(\sin5x)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+9)-9}{(\sin5x)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{5x}{\sin5x}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}\right)=1\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sin5x}=\dfrac{1}{30}}$

$II.$ ក. សរសេរ $z_1;\ z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$z_1=1-\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

ខ. គណនា $z_1z_2\ ;\ \dfrac{z_1}{z_2}$

$$z_1z_2=\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)+i\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-i\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{\sqrt{2}\left(1-i-i\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)}{1^2+1^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(1-\sqrt{3}\right)-i\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

គ. គណនា z_1z_3

យើងមាន $z_3=3\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=3\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$z_1z_3=\left(1-i\sqrt{3}\right)\left[3\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$=3\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\right)=3\left(-1-i\sqrt{3}\right)$$

$$=-3-3i\sqrt{3}$$

ទាញរកអាគុយម៉ង់ និងម៉ូឌុលនៃ z_1z_3

$$z_1z_3=-3-3i\sqrt{3}=6\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=6\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ ម៉ូឌុល $|z_1z_3|=6$ និងអាគុយម៉ង់

$$Arg\left(z_1z_3\right)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$III.$ ឃ្លីខៀវចុះលេខពី១ដល់៦ $:\{1,2,3,4,5,6\}$

ឃ្លីក្រហមចុះលេខពី១ដល់៥$:\{1,2,3,4,5\}$

ឃ្លីសចុះលេខពី១ដល់៤$:\{1,2,3,4\}$

ចំនួនករណីស្រប $n(S)=C(15,3)=\dfrac{15!}{12!3!}=5\times7\times3=455$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

$A.$ «ចាប់បានឃ្លីជាលេខគូ »

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(7,3)=\dfrac{7!}{(7-3)!3!}=35$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{35}{455}=\dfrac{1}{13}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{13}}$

$B.$« ចាប់បានឃ្លីពណ៌ខុសៗគ្នាទាំង៣»

ចំនួនករណីស្រប

$$n(B)=C(6,1)\times C(5,1)\times C(4,1)=120$$

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{120}{455}=\dfrac{24}{91}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{24}{91}}$

$C.$ « ចាប់បានឃ្លីលេខសេសតែមួយគត់»

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(8,1)\times C(7,2)=7\times3\times8$

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{7\times3\times8}{5\times7\times13}=\dfrac{24}{65}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\dfrac{24}{65}}$

$IV.$ គណនាអាំងតេក្រាល

- $I=\int_0^2(3x-1)^2\,dx=\int_0^2(9x^2-6x+1)dx$

  $=\left[3x^3-3x^2+x\right]_0^2=3\cdot2^3-3\cdot2^2+2\ =14$

- $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\sin^2-1\right)dx\ =-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2xdx$

  $=\left[-\dfrac{1}{2}\sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)-0\ =-\dfrac{1}{2}$

- $K=\int_1^2 f(x)dx$

ដោយ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x+1}$

$=\dfrac{ax(x+1)+b(x+1)+cx^2}{x^2(x+1)}$

$=\dfrac{(a+c)x^2+(a+b)x+b}{x^2(x+1)}$

ទាញបាន $\begin{cases}a+c=0\\a+b=2\\b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-1\\a=1\\b=1\end{cases}$

គេបាន $K=\int_1^2\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)}dx=\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx$

$=\left[\ln|x|-\dfrac{1}{x}-\ln|x+1|\right]_1^2$

$=\left(\ln2-\dfrac{1}{2}-\ln3\right)-(\ln1-1-\ln2)=\dfrac{1}{2}+2\ln2-\ln3$

$V.$២. ចំណុច $M(2,4,1)$, $N(3,0,2)$, $P(3,3,5)$

ក. គណនាប្រវែង MN, MP, NP

$\overrightarrow{MN}=(3-2,0-4,2-1)=(1,-4,1)$

$\Rightarrow MP=\left|\overrightarrow{MP}\right|=\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{MP}=(3-2,3-4,5-1)=(1,-1,4)$

$\Rightarrow MP=\left|\overrightarrow{MP}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{NP}=(3-3,3-0,5-2)=(0,3,3)$

$\Rightarrow NP=\left|\overrightarrow{NP}\right|=\sqrt{0^2+3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

ដោយ $MN=MP=NP=3\sqrt{2}$

ដូចនេះ MNP ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម M មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-4&1\\1&-1&4\end{vmatrix}$

$=(-16+1)\vec{i}-(4-1)\vec{j}+(-1+4)\vec{k}\ =-15\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$

គេបានសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច M កំណត់ដោយ

$(P):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$\Leftrightarrow-15(x-2)-3(y-4)+3(z-1)=0$

$\Leftrightarrow-15x+30-3y+12+3z-3=0$

$\Leftrightarrow-15x-3y+3z+39=0$

២. គេមានសមីការ $(5x+9y)^2=5(18xy+45)$

បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប

$(5x+9y)^2=5(18xy+45)$

$\Leftrightarrow(5x)^2+2(5x)(9y)+(9y)^2=90xy+225$

$\Leftrightarrow25x^2+81y^2=225\ \Leftrightarrow\dfrac{25x^2}{225}+\dfrac{81y^2}{225}=1$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25/9}=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}=1$

សមីការមានរាង $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែល មានអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសមានផ្ចិត $(0,0)$

➢ រកប្រវែងអ័ក្សតូច អ័ក្សធំ កូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំទាំងពីរ

យើងមាន $a=3, b=\dfrac{5}{3}$

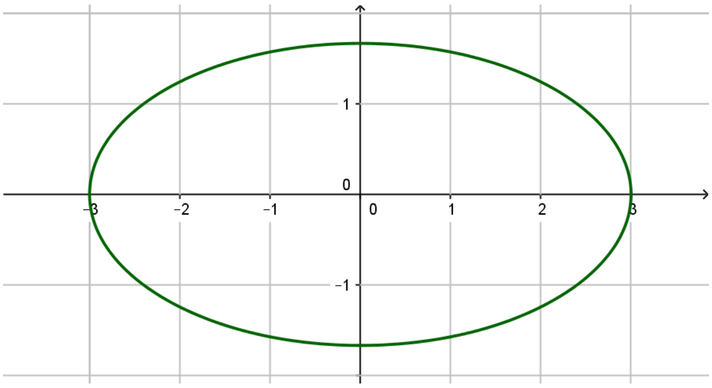
និង $c^2=a^2-b^2=9-\dfrac{25}{9}=\dfrac{56}{9}\ \Rightarrow c=\dfrac{2}{3}\sqrt{14}$

- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=2\times3=6$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=2\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{3}$ ឯកតាប្រវែង

• កូអរដោនេកំពូល $V(\pm a,0)\Rightarrow V(\pm 3,0)$

• កូអរដោនេកំណុំ $F(\pm c,0)\ \Rightarrow F\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{14},0\right)$

សង់អេលីប



VI. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$y''-3y'+2y=0\ \ (E)$

សមីការសម្គាល់ $r^2-3r+2=0$ រាង $a+b+c=0$

មានឫស $r_1=1\ ,r_2=2$

សមីការមានចម្លើយ $y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^x+Be^{2x}$

$(A,B\in\mathbb{R})$ ។

– រកចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E)

គេមាន $y=Ae^x+Be^{2x}$ នាំឲ្យ $y'=Ae^x+2Be^{2x}$

ដោយដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើ1ត្រង់ $x=1$

គេបាន $\begin{cases} y(1)=1 \\ y'(1)=0 \\ y''(1)<0 \end{cases}$

$\begin{cases} y(1)=1 \\ y'(1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} Ae+Be^2=1 & (1) \\ Ae+2Be^2=0\,(2) \end{cases}$

យក $(2)-(1)$ យើងបាន $B=-\frac{1}{e^2}$

តាម (2) យើងបាន $A=-2Be=-2e\left(-\frac{1}{e^2}\right)\ =\frac{2}{e}$

$y''=Ae^x+4\mathbf{e}^{2x}$

$y''(1)=\frac{2}{e}\cdot e+4e^2\left(-\frac{1}{e^2}\right)=2-4=-2<0$ ពិត

ដូចនេះ ចម្លើយ $y=2e^{x-1}-e^{2(x-1)}$ ។

VII. *A.* គេមាន $g(x)=1-x+e^x$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$

– គូសតារាងអថេរភាពនៃ g

គេមាន $g(x)=1-x+e^x$

នាំឲ្យ $g'(x)=-1+e^x$

• បើ $g'(x)=0\Leftrightarrow -1+e^x=0\Leftrightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$

• បើ $g'(x)<0\Leftrightarrow -1+e^x<0\Leftrightarrow e^x<1\Rightarrow x<0$

• បើ $g'(x)>0\Leftrightarrow -1+e^x>0\Leftrightarrow e^x>1\Rightarrow x>0$

ចំពោះ $x=0$ នោះ $g(0)=1-0+e^0=2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	2	↗

– ទាញរកសញ្ញានៃ $g(x)$

ចំពោះ $x\in\mathbb{R}$ អនុគមន៍ g មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ 2 ត្រង់ $x=0$

នោះ $g(x)>0$

ដូចនេះ $g(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត។

B. អនុគមន៍ f ដែល $C: f(x)=x+1+\frac{x}{e^x}$

1. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1+\frac{x}{e^x}\right)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{x}{e^x}\right)=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

–បង្ហាញថាបន្ទាត់ $D: y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

នោះបន្ទាត់ $D: y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

–សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងក្រាប C និងអាស៊ីមតូតទ្រេត D

យក $C-D: f(x)-y_D=\frac{x}{e^x}$ មានសញ្ញាតាម x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y_D$	$-$	0	$+$

តាមតារាងសិក្សាសញ្ញា

• ចំពោះ $x\in(-\infty,0)$ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ D

• ចំពោះ $x=0$ ក្រាប C កាត់បន្ទាត់ D ត្រង់ $(0,1)$

• ចំពោះ $x\in(0,+\infty)$ ក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ D

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f'(x)=e^{-x}\cdot g(x)$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

យើងមាន $f(x)=x+1+\frac{x}{e^x}$

នាំឲ្យ $f'(x)=1+\frac{e^x-xe^x}{\left(e^x\right)^2}=1+\frac{1-x}{e^x}=e^{-x}\left(1-x+e^x\right)$

$=e^{-x}g(x)$

ដូចនេះ $f'(x)=e^{-x}g(x)$ គ្រប់ចំនួនពិត x

– ទាញរកតារាងអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$

យើងមាន $f'(x)=e^{-x}g(x)$

ដោយ $e^{-x}>0, g(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

នាំឲ្យ $f'(x)=e^{-x}g(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2 ↗	$+\infty$

3. បង្ហាញថាសមីការ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ α លើចន្លោះ $-1<\alpha<0$

យើងមាន $f(-1)=-1+1+\frac{-1}{e^{-1}}=-e<0$

និង $f(0)=0+1+\frac{0}{e^0}=1>0$

នោះ $f(-1)\times f(0)=-e<0$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល មានចំនួនពិត α មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះ $(-1,0)$ ដែល $f(\alpha)=0$

តែ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ នាំឲ្យ f កើនលើចន្លោះ $(-1,0)$

ដូចនេះ សមីការ $f(x)=0$ មានឫសតែមួយគត់ α លើចន្លោះ $-1<\alpha<0$

4. រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់អាប់ស៊ីសស្មើ 0

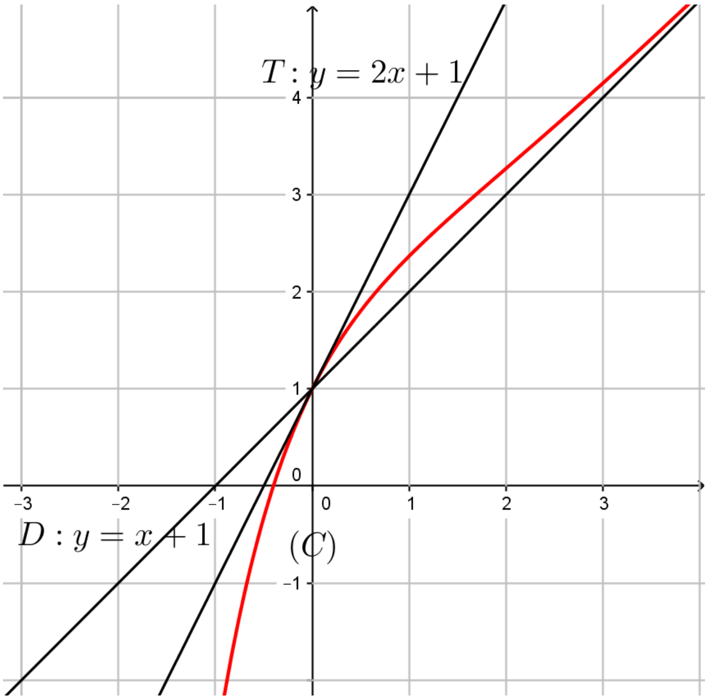
សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $T: y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

ដោយ $x_0=0$ នោះ $y_0=1$ ហើយ $f'(x_0)=f'(0)=2$

គេបាន $(T): y=2(x-0)+1=2x+1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T): y=2x+1$

5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ T, D



វិញ្ញាសាទី៦ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖** ....

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ) **មណ្ឌលប្រឡង៖**..... ....

រយៈពេល៖ ១៥០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**.........................

ពិន្ទុសរុប៖ ១២៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**..

ប្រធានវិញ្ញាសា **ហត្ថលេខាបេក្ខជន**...

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត ៖ ក. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+2x^2+1}{1-x^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1+x}}$ គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos x-\sqrt{3}\sin x}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គេមានសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$: $z^2-4z+16=0$ ។

ក. បង្ហាញថា $z_1=2+2i\sqrt{3}$ ជាឫសរបស់សមីការ រួចទាញរកឫស z_2 នៃសមីការនេះ។

ខ. គណនា z_1z_2 និង $\dfrac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

III. (១៥ពិន្ទុ) ១. គណនាអាំងតេក្រាល ៖ $I=\int_0^1\left(1-4x+3x^2\right)dx$, $J=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan x+\cot x\right)^2dx$

២. គណនា $K=\int_0^2\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}dx$ ដើម្បីគណនា K គេត្រូវបង្ហាញថា $\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}=x+1-\dfrac{x}{x^2-1}$ ។

IV. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងស្បោងមួយមានបាល់ស ៣ គ្រាប់ ក្រហម ៥ គ្រាប់ និង ខៀវ ៤ គ្រាប់។ គេចាប់យកបាល់ម្តង ៣ គ្រាប់ ដោយចៃដន្យ។ ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម ៖

A: ចាប់បានបាល់ទាំង ៣ ជាពណ៌ក្រហម។ B: ចាប់បានបាល់ទាំង ៣ មានពណ៌ខុសៗគ្នា។

C: ចាប់បានបាល់ពណ៌សមួយយ៉ាងតិច។

V. (១០ពិន្ទុ) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): -2y''+3y=y'$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=e$, $y'(0)=1$ ។

VI. (២៥ពិន្ទុ) 1. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មានទិសដៅវិជ្ជមាន គេមានចំណុច $A(4,-2,0)$, $B(1,2,2)$, $C(2,-1,0)$ និង $D(2,-2,-1)$ ។

ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (d) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច B ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (CD) ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P) ។

2. អ៊ីពែបូលមួយមានកំពូល $V_1(3,0)$ និង $V_2(-3,0)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $P(5,2)$។ រកសមីការស្តង់ដា កូអរដោនេកំណុំ និងអាស៊ីមតូត។ សង់អ៊ីពែបូលនោះ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ D_f ដោយ $y=f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ មានក្រាប C ។

១. រកដែនកំណត់ D និងគណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ រកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

២. គណនានិងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ដោយដឹងថា $x(x-1)>0$, $\forall x\in D$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣.បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1: y=-\dfrac{1}{2}x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។ បង្ហាញថា $\forall x\in(-\infty,0)$, $\dfrac{x-1}{x}>1$ និង $\forall x\in(1,+\infty)$, $\dfrac{x-1}{x}<1$ រួចសិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ។

៤. សរសេរសមីការបន្ទាត់ d_2 ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 2 ។

៥. សង់ក្រាប C បន្ទាត់ d_1 , d_2 និងអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។ គេឲ្យ $\ln 2=0.7$

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាទី៦ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+2x^2+1}{1-x^2}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(3x^2-x^2+1)}{(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-x+1}{1-x}$

$=\dfrac{-3+1+1}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+2x^2+1}{1-x^2}=-\dfrac{1}{2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1+x}}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{1+x}\right)}{(2x+1)-(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[-2\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)\right]$

$=-2\cdot 1\cdot 3(2)=-24$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1+x}}=-24$

គ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos x-\sqrt{3}\sin x}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{6\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{2\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\cos x-\cos\dfrac{\pi}{6}\sin x\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{-3\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}$

តាង $t=\dfrac{\pi}{6}-x$ បើ $x\to\dfrac{\pi}{6}$ នោះ $t\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-3t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\left(-3\cdot\dfrac{t}{\sin t}\right)=-3$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos x-\sqrt{3}\sin x}=-3$

II. គេមាន $z^2-4z+16=0$

ក បង្ហាញថា $z_1=2+2i\sqrt{3}$ ជាឫសរបស់សមីការ

យក $z_1=2+2i\sqrt{3}$ ជំនួសចូលក្នុងសមីការគេបាន

$\left(2+2i\sqrt{3}\right)^2-4\left(2+2i\sqrt{3}\right)+16=0$

$\Leftrightarrow 4+8i\sqrt{3}-12-8-8i\sqrt{3}+16=0$

$\Leftrightarrow z_1=2+2i\sqrt{3}$ ជាឫសរបស់សមីការ។

ទាញរកឫស z_2 នៃសមីការ

ដោយសមីការ $z^2-4z+16=0$ មានឫស $z_1=2+2i\sqrt{3}$ ជាចំនួនកុំផ្លិច នោះឫសមួយទៀត z_2 នៃសមីការជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_1 គឺ $z_2=\overline{z_1}=2-2i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $z_2=2-2i\sqrt{3}$

ខ គណនា z_1z_2 និង $\dfrac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

$z_1\cdot z_2=16=16+0i$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2\left(1-i\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}$

$=\dfrac{1+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}+\left(i\sqrt{3}\right)^2}{1^2+\sqrt{3}^2}=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

សរសេរ z_1z_2 និង $\dfrac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$z_1z_2=16(\cos 0+i\sin 0)$

$\dfrac{z_1}{z_2}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល

- $I=\displaystyle\int_0^1\left(1-4x+3x^2\right)dx=\left[x-2x^2+x^3\right]_0^1$

  $=(1-2+1)-0=0$

- $J=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\tan x+\cot x)^2\,dx$

  $=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x\right)dx$

  $=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\left(1+\tan^2 x\right)+\left(1+\cot^2 x\right)\right]dx$

  $=\left[\tan x-\cot x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\left(\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)$

  $=2\sqrt{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

  ដូចនេះ $J=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

  បង្ហាញថា $\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}=x+1+\dfrac{x}{x^2-1}$

  គេមាន $\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}=\dfrac{x^3-x+x^2-1+x}{x^2-1}$

  $=\dfrac{x\left(x^2-1\right)+\left(x^2-1\right)+x}{x^2-1}\;\dfrac{\left(x^2-1\right)(x+1)+x}{x^2-1}$

  $=x+1+\dfrac{x}{x^2-1}$

គេបាន $K=\int_0^2 \frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}dx$

$=\int_0^2\left(x+1+\frac{x}{x^2-1}\right)dx$

$=\int_0^2\left(x+1+\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\right)dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|\right]_0^2=\left(2+2+\frac{1}{2}\ln 3\right)-0$

$=4+\frac{1}{2}\ln 3$

IV. ចំនួនករណីស្របប $n(S)=C(12,3)=\frac{12!}{(12-3)!3!}$

$=220$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. «ចាប់បានបាល់ទាំង ៣ ជាពណ៌ក្រហម»

ចំនួនករណីស្របប $n(A)=C(5,3)=\frac{5!}{3!2!}=10$ ករណី

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{220}=\frac{1}{22}$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{1}{22}$

B.« ចាប់បានបាល់ទាំង ៣ មានពណ៌ខុសៗគ្នា»

ចំនួនករណីស្របប $n(B)=C(3,1)\times C(5,1)\times C(4,1)$

$=3\times5\times4=60=60$ ករណី

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{60}{220}=\frac{3}{11}$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{3}{11}$

C. « ចាប់បានបាល់ពណ៌សមួយយ៉ាងតិច»

តាង D ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែល« ចាប់បានបាល់ពណ៌ក្រហម និងពណ៌ខៀវ»

$n(D)=C(9,3)=\frac{9!}{6!3!}=84$

នាំឲ្យ $P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{84}{220}=\frac{21}{55}$

ដោយ C ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយនឹងព្រឹត្តិការណ៍ D

គេបាន $P(C)=1-P(D)=1-\frac{21}{55}=\frac{34}{55}$

ដូចនេះ $P(C)=\frac{34}{55}$

V. ១. ចំណុច $A(4,0,0)$, $B(0,-2,0)$, $C(0,0,2)$ និង $D(4,2,2)$

ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ d

ដោយបន្ទាត់ (d) កាត់តាមចំណុច $A(4,-2,0)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}=(2-2,-2+1,-1-0)=(0,-1,-1)$

គេបានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់

$$(d):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}\Leftrightarrow(d):\begin{cases}x=4\\ y=2-t\\ z=-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$$

ខ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ដោយប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $B(1,2,2)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{CD}=(0,-1,-1)$ គេបានសមីការប្លង់ (P) គឺ

$(P):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$\Leftrightarrow 0(x-1)-1(y-2)-1(z-2)=0$

$\Leftrightarrow -y+2-z+2=0$

ដូចនេះ ប្លង់ $(P):y+z-4=0$ ។

គ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P)

បន្ទាតត់ $(d):\begin{cases}x=4+0t\\ y=-2+t\\ z=-t\end{cases},t\in\mathbb{R}$

និងប្លង់ $(P):y+z-4=0$

យកបន្ទាត់ (d) ជំនួសក្នុងប្លង់ (P) គេបាន

$-2-t-t-4=0\Leftrightarrow -2t=6\Rightarrow t=-3$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វគឺ $(4,1,3)$

២ រកសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូល

ដោយអ៊ីពែបូលមានកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ 0 ដូចគ្នា នោះអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេបានសមីការមានរាង $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

កូអរដោនេកំពូល $V(\pm a,0)=V(\pm3,0)\Rightarrow a=3$

ដោយអ៊ីពែបូលកាត់តាមចំណុច $P(5,2)$ គេបាន

$\frac{5^2}{3^2}-\frac{2^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{4}{b^2}=\frac{25}{9}-1=\frac{16}{9}\Leftrightarrow b^2=\frac{9}{4}\Rightarrow b=\frac{3}{2}$

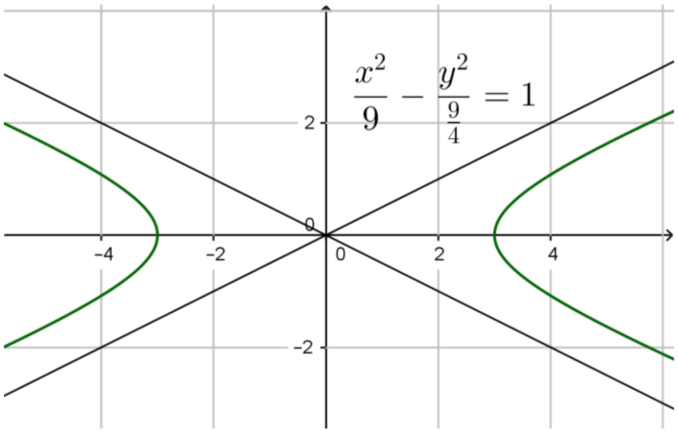
$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{45}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

សមីការស្តង់ដា $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9/4}=1$

កូអរដោនេកំណុំ $F(\pm c,0)=F\left(\pm\frac{3\sqrt{5}}{2},0\right)$

សមីការអាស៊ីមតូត $y=\pm\frac{b}{a}x\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}x$

សង់អ៊ីពែបូល



VI.ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E):-2y''+3y=y'$

សមីការសម្គាល់ $-2r^2-r+3=0$ រាង $a+b+c=0$

មានឫស $r_1=1$, $r_2=-\frac{3}{2}$

សមីការមានចម្លើយ $y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^x+Be^{-\frac{3}{2}x}$

$(A,B\in\mathbb{R})$ ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃ (E)

គេមាន $y=Ae^x+Be^{-\frac{3}{2}x}$ នាំឲ្យ $y'=Ae^x-\frac{3}{2}Be^{-\frac{3}{2}x}$

គេបាន $\begin{cases}y(0)=e\\ y'(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=e\\ A-\frac{3}{2}B=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2A+2B=2e\ (1)\\ 2A-3B=2\ \ (2)\end{cases}$

យកសមីការ $(1)-(2)$ យើងបាន

$5B=2e-2\Rightarrow B=\frac{2e-2}{5}$

តាម (1) យើងបាន $A=e-B=e-\frac{2e-2}{5}=\frac{3e+2}{5}$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានចម្លើយ

$y=\left(\frac{2e-2}{5}\right)e^x+\left(\frac{3e+2}{5}\right)e^{-\frac{3}{2}x}$ ។

$VII.\ C: f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

1. រកដែនកំណត់

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $\frac{x-1}{x}>0$

ឲ្យ $x-1=0\Rightarrow x=1$, $x=0$

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x-1}{x}>0$	$+$	$-$	$+$

ដូចនេះ: $D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

គណនាលីមីតចុងដែន

$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]=\pm\infty$

ព្រោះ $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=0$

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty$

ព្រោះ $\lim_{x\to0^-}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=0$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left[-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]=-\infty$

ព្រោះ $\lim_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=-\infty$

រកអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ដោយ $\lim_{x\to1^+}f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

ខ គណនានិងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=-\frac{x}{2}+\ln(x-1)-\ln x$

$\Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x(x-1)+2x-2(x-1)}{2x(x-1)}$

$= \dfrac{-x^2+x+2x-2x+2}{2x(x-1)} = \dfrac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$

$\forall x \in D,\ 2x(x-1) > 0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម

$-x^2+x-2$

ឲ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0$

មានឫស $x_1=-1\ ,x_2=2$

x	$-\infty$	-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	||		|	$+$	0	$-$	

ចំពោះ $x=-1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមា $f(-1)=1.2$

ចំពោះ $x=2$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមា $f(2)=-1.7$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	||		|	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1.2	↗ $+\infty$	||		| $-\infty$	↗	-1.7	↘	$-\infty$

3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $d_1 : y = -\dfrac{1}{2}x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(-\dfrac{1}{2}x\right)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=0$

នោះបន្ទាត់ $d_1 : y=-\dfrac{1}{2}x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

បង្ហាញថា $\forall x\in(-\infty,0)\,;\dfrac{x-1}{x}>1$ និង

$\forall x\in(1,+\infty)\,;\dfrac{x-1}{x}<1$

យើងមាន $\forall x\in(-\infty,0)\,;\dfrac{x-1}{x}-1=\dfrac{x-1-x}{x}=-\dfrac{1}{x}>0$

$\forall x\in(1,+\infty)\,;\dfrac{x-1}{x}-1=\dfrac{x-1-x}{x}=-\dfrac{1}{x}<0$

ដូចនេះ $\forall x\in(-\infty,0)\,;\dfrac{x-1}{x}>1$ និង $\forall x\in(1,+\infty)\,;\dfrac{x-1}{x}<1$

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1

គេមាន $f(x)-y_{d_1}=\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

$\forall x\in(-\infty,0)\,;\dfrac{x-1}{x}>1 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)>\ln 1$

$\Leftrightarrow f(x)-y_{d_1}>0$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d_1

$\forall x\in(1,+\infty)\,;\dfrac{x-1}{x}<1 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)<\ln 1$

$\Leftrightarrow f(x)-y_{d_1}<0$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d_1

4. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ d_2

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $d_2 : y = f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

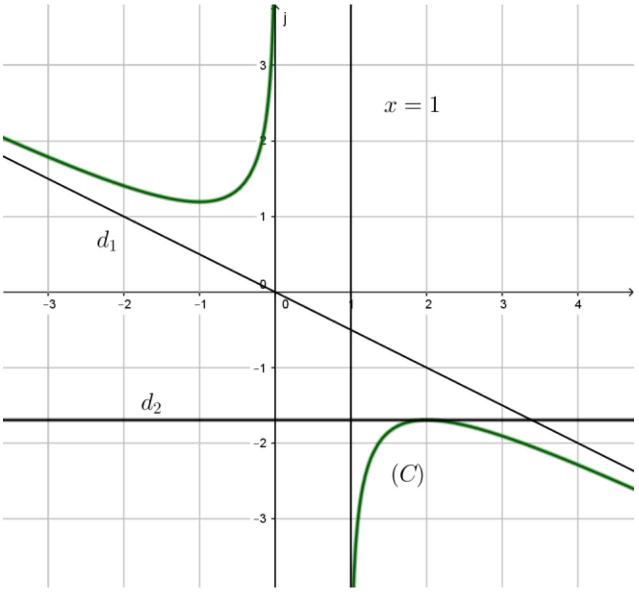
ដោយបន្ទាត់ d_2 ប៉ះក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសស្មើ 2

នោះ $x_0=2\ ;\ y_0=f(2)=-1+\ln\dfrac{1}{2}=-1-\ln 2$

និង $f'(x_0)=f'(2)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$

គេបាន $d_2 : y=-1-\ln 2$

5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d_1, d_2



វិញ្ញាសា និងអត្រាកំណែ

គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម

ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖ ១៩ សីហា ២០១៩**
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម) **មណ្ឌលប្រឡង៖**..
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**...................
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**...
ហត្ថលេខាបេក្ខជន...................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I.(១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{2\left(x^2-1\right)}$ ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2e^x}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{x-1}$

II.(១០ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

$I=\int_0^1\left(2-3x+x^2\right)dx$; $J=\int_0^2\left[2x-\dfrac{1}{x+e}\right]dx$; $K=\int_{-1}^0\left(2-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)dx$

III. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 10 ដែលក្នុងនោះប៊ូល 5 មានពណ៌លឿង ហើយគេសរសេរលេខពី 1 ដល់ 5 ប៊ូល 3 មានពណ៌ក្រហមហើយសរសេរលេខពី 1 ដល់ 3 និងប៊ូល 2 មានពណ៌សគេសរសេរលេខពី 1 ដល់ 2 ។ គេចាប់យកប៊ូលមួយពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A. « ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌លឿង »។

B. « ប៊ូលដែលចាប់បានមានលេខ 2 »។

C. « ប៊ូលដែលចាប់បានមានលេខ 1 និងពណ៌ក្រហម »។

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $25x^2+9y^2-225=0$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបនេះ។

ខ. សង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $D=\mathbb{R}-\{-1\}$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x+1}$ ។ យើងតាង (C) ក្រាបរបស់អនុគមន៍នេះក្នុងប្លង់ប្រដាប់តម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

a. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\dfrac{3}{x+1}$ ។

b. ចូររកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

c. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៩

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{2(x^2-1)}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{2(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2(x+1)}=\dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{2(x^2-1)}=\dfrac{1}{4}$

ខ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$ រាង $\dfrac{\infty}{\infty}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}=\dfrac{1}{2}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2e^x}$

$=\dfrac{e^0-e^0}{2e^0}=\dfrac{1-1}{2}=0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2e^x}=0$

ឃ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{x-1}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(x-1)}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{(1+\sqrt{x})}=-\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{x-1}=-\dfrac{1}{2}$

II. គណនាអាំងតេក្រាល

$I=\int_0^1(2-3x+x^2)dx=\left[2x-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=\left(2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{6}$

ដូចនេះ $I=\int_0^1(2-3x+x^2)dx=\dfrac{5}{6}$

$J=\int_0^2\left[2x-\dfrac{1}{x+e}\right]dx=\int_0^2\left[2x-\dfrac{(x+e)'}{x+e}\right]dx$

$=\left[x^2-\ln|x+e|\right]_0^2$

$=(2^2-\ln|2+e|)-(0-\ln|0+e|)$

$=4-\ln(2+e)+\ln e$

$=4-\ln(2+e)+1$

$=5-\ln(2+e)$

ដូចនេះ $J=\int_0^2\left[2x-\dfrac{1}{x+e}\right]dx=5-\ln(2+e)$

$K=\int_{-1}^0\left(2-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)dx$

$=\int_{-1}^0\left(2-\dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2}\right)dx$

$=\left[2x+\dfrac{1}{x-1}\right]_{-1}^0$

$=\left(0+\dfrac{1}{0-1}\right)-\left(-2-\dfrac{1}{2}\right)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ $K=\int_{-1}^0\left(2-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)dx=\dfrac{3}{2}$

III. ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10,1)=\dfrac{10!}{1!(10-1)!}=10$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. « ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌លឿង »

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=5$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{5}{10}$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{5}{10}$

B. « ប៊ូលដែលចាប់បានមានលេខ 2 »

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=3$ ករណី

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{3}{10}$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{3}{10}$

C. « ប៊ូលដែលចាប់បានមានលេខ1 និងពណ៌ក្រហម »

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=1$ករណី

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{1}{10}$

ដូចនេះ $P(C)=\dfrac{1}{10}$

$IV.$ គេមានសមីការ $25x^2+9y^2-225=0$

ក. បង្ហាញថាសមីការ $25x^2+9y^2-225=0$ ជាសមីការអេលីប

$$25x^2+9y^2-225=0 \Leftrightarrow 25x^2+9y^2=225$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2}{255}+\frac{9y^2}{255}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

សមីការ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់គល់តម្រុយ O មានអ័ក្សធំជាអ័ក្សអរដោនេ

ដូចនេះ សមីការ $25x^2+9y^2-225=0$ ជាសមីការអេលីប

-រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបនេះ:

សមីការស្តង់ដានៃអេលីបមានរាង $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,(a>b>0)$

យើងទាញបាន $a^2=25 \Rightarrow a=5$, $b^2=9 \Rightarrow b=3$

តាមទំនាក់ទំនង $c^2=a^2-b^2=25-9=16 \Rightarrow c=4$

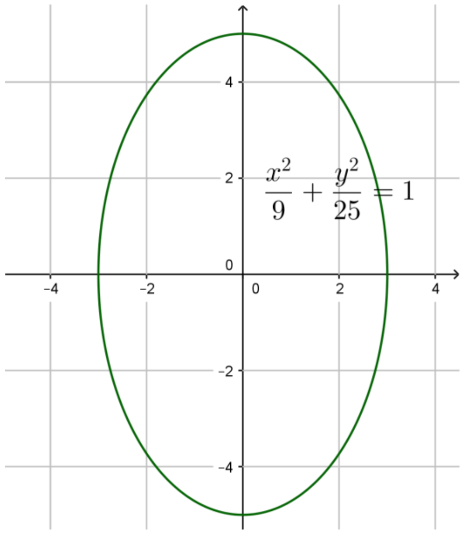
ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=10$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=6$

កំពូល $V_1(0,a) \Rightarrow V_1(0,5)$ និង $V_2(0,-a) \Rightarrow V_2(0,-5)$

កំណុំ $F_1(0,c) \Rightarrow F_1(0,4)$ និង $F_2(0,-c) \Rightarrow F_2(0,-4)$

ខ. សង់អេលីប



$V.$ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $D=\mathbb{R}-\{-1\}$ កំណត់ដោយ

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+1}$$

a. បង្ហាញថា $f(x)=x+1-\frac{3}{x+1}$

យើងមាន $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+1}$

$$=\frac{x^2+x+x+1-3}{x+1}$$

$$=\frac{x(x+1)}{x+1}+\frac{x+1}{x+1}-\frac{3}{x+1}$$

$$=x+1-\frac{3}{x+1}$$

ដូចនេះ $f(x)=x+1-\frac{3}{x+1}$

b. រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

យើងមាន $f(x)=x+1-\frac{3}{x+1}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left(x+1-\frac{3}{x+1}\right)=\pm\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{3}{x+1}\right)=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x+1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

c. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ f ។

យើងមាន $f(x)=x+1-\frac{3}{x+1}$

➤ ដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x)=\left(x+1-\frac{3}{x+1}\right)'$$

$$=1+\frac{3(x+1)'}{(x+1)^2}=1+\frac{3}{(x+1)^2}$$

➤ សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $(x+1)^2>0$ នាំឱ្យ $1+\frac{3}{(x+1)^2}>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$ នោះ $f(x)=1+\frac{3}{(x+1)^2}>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in D$

ដូចនេះអនុគមន៍ f កើនជានិច្ចលើ D

➤ គណនាលីមីត

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{3}{x+1}\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{3}{x+1}\right)=+\infty$

➤ សង់តារាងអថេរនៃ f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

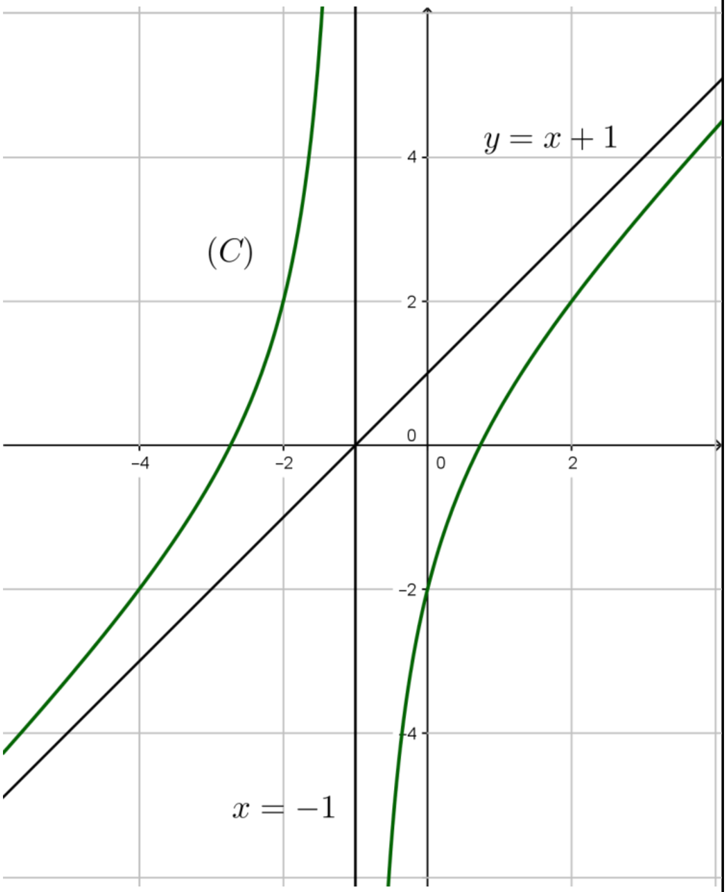
- តារាងតម្លៃលេខនៃ $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x+1}$

x	0	$-2\pm\sqrt{3}$
y	-2	0

- តារាងតម្លៃលេខនៃ $y=x+1$

x	0	-1
y	1	0

- សង់ក្រាប C



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖ ២០ សីហា ២០១៨**
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម) **មណ្ឌលប្រឡង៖**...
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**...................
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**..
ហត្ថលេខាបេក្ខជន..................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I.(១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

a. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4+6x+1}{x^2+1}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2-\ln x\right)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស១៥នាក់ ក្នុងនោះមានសិស្សប្រុស៩នាក់ និងសិស្សស្រី៦នាក់។ គេជ្រើសរើសសិស្ស៣នាក់ ដោយចៃដន្យជាតំណាងយកទៅសម្ភាសន៍។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A. «ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ សុទ្ធតែជាសិស្សស្រី»។

B. «ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ សុទ្ធតែជាសិស្សប្រុស»។

C. «ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ មាន២នាក់ជាសិស្សស្រី»។

III.(១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

$I=\int_1^2\left(3x^2-2x+3\right)dx$; $J=\int_0^1\left(e^{2x}-e+1\right)dx$; $K=\int_1^2\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលជាចំណុច $O(0,0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

a. រកសមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូលនេះ បើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A\left(\dfrac{3}{2},-3\right)$ ។

b. រកកូអរដោនេរបស់កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$ ។ យើងតាង C ក្រាបតំណាងរបស់វាក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។

២. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញយកសមីការអាស៊ីមតូត d ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

៣. a. ស្រាយបំភ្លឺថា គ្រប់ចំនួនពិត $x\in D$; ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{-3\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$ ។

b. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

c. សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ f ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២០ សីហា ២០១៨

$I.$ គណនាលីមីត

$$a=\lim_{x\to 3}\frac{x^4+6x+1}{x^2+1}$$

$$=\frac{3^4+6\times 3+1}{3^2+1}=\frac{100}{10}=10$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^4+6x+1}{x^2+1}=10$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x+1)^2}$ រាង $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x+1)^2}=0^+$ (ព្រោះ $x\to+\infty\Rightarrow\frac{1}{x}\to 0$)

$c=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2-\ln x\right)$ រាង $(+\infty-\infty)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

(ព្រោះ $x\to+\infty\Rightarrow\frac{2}{x^2}\to 0\,;\frac{\ln x}{x^2}\to 0$)

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2-\ln x\right)=+\infty$

$II.$ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(15,3)=\frac{15!}{3!(15-3)}$

$$=\frac{15\times14\times13\times12!}{3\times2\times12!}=5\times7\times13$$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A:ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ សុទ្ធតែស្រី

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(6,3)=\frac{6!}{3!(6-3)!}=4\times5$

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4\times5}{5\times7\times13}=\frac{4}{91}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{4}{91}}$

B:ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ សុទ្ធតែប្រុស

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(9,3)=\frac{9!}{3!(9-3)}=3\times4\times7$

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3\times4\times7}{5\times7\times13}=\frac{12}{65}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{12}{65}}$

C:ក្រុមសិស្សទាំង៣នាក់ មាន២នាក់ជាសិស្សស្រី

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(6,2)\times C(9,1)$

$$=\frac{6!}{2!(6-2)!}\times9=\frac{6\times5}{2}\times9=15\times9$$

គេបាន $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{15\times9}{5\times7\times13}=\frac{27}{91}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{27}{91}}$

$III.$ គណនាអាំងតេក្រាលះ

$$I=\int_1^2\left(3x^2-2x+3\right)dx$$

$$=\left[x^3-x^2+3x\right]_1^2$$

$$=\left(2^3-2^2+3\times2\right)-\left(1^3-1^2+3\times1\right)=7$$

ដូចនេះ $I=7$

$$J=\int_0^1\left(e^{2x}-e^x+1\right)dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}-e^x+x\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e+1\right)-\left(\frac{e^0}{2}-e^0+0\right)=\frac{e^2-2e+3}{2}$$

ដូចនេះ $I=\frac{e^2-2e+3}{2}$

$$K=\int_1^2\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\ln|x+3|-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2$$

$$=\left(\ln5-\frac{1}{2}\right)-(\ln4-1)=\frac{1}{2}+\ln5-\ln4$$

$$=\frac{1}{2}+\ln\frac{5}{4}$$

ដូចនេះ $K=\frac{1}{2}+\ln\frac{5}{4}$

IV. $a.$ ទម្រង់ស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូល

ប៉ារ៉ាបូល (P) មានកំពូល $(0;0)$ កំណុំ F ស្ថិតលើ $(x'x)$

សមីការស្តង់ដាគឺ $y^2=4px$

ដោយ $A\left(\frac{3}{2};-3\right)\in(P)$

$$\Rightarrow(-3)^2=4p\times\frac{3}{2}\Rightarrow p=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $(\mathrm{P}):\mathrm{y}^2=6x$

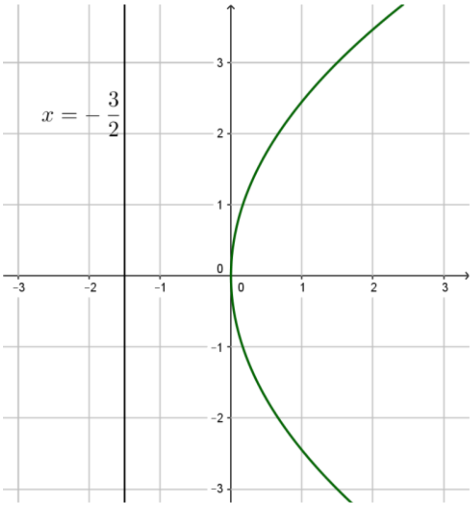
$b.$ រកកូអរដោនេនៃកំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

ដោយកំណុំ $F(P;0)$ គឺ $F\left(\frac{3}{2};0\right)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសគឺ

$x=-P$ គឺ $x=-\frac{3}{2}$

+សង់ប៉ារ៉ាបូល



V. អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$

1.រកដែនកំណត់ D នៃ f

x^2-5x+7 មាន $\Delta=25-4\times7<0$

$\Rightarrow x^2-5x+7>0$ (ព្រោះ $a=1>0$)

ដូចនេះ ដែនកំណត់ $D=\Re=(-\infty,+\infty)$

2. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

ទាញរកអាស៊ីមតូត (d) ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ នោះបន្ទាត់ $d: y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

3.ស្រាយបំភ្លឺថាគ្រប់ចំនួនពិត x ; $f'(x)=\dfrac{-3\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(4x-7)\left(x^2-5x+7\right)-(2x-5)\left(2x^2-7x+5\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$$

$$=\frac{\left(4x^3-27x^2+63x-49\right)-\left(4x^3-24x^2+45x+25\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$$

$$=\frac{-3x^2+18x-24}{\left(x^2-5x+7\right)^2}=\frac{-3\left(x^2-6x+8\right)}{\left(x^2-5x+7\right)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{-3(x^2-6x+8)}{(x^2-5x+7)^2}$ ។

b) សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$f'(x)=\dfrac{-3(x^2-6x+8)}{(x^2-5x+7)^2}=\dfrac{3(-x^2+6x-8)}{(x^2-5x+7)^2}$ គ្រប់ $x\in D_f$

ដោយ $(x^2-5x+7)^2>0$ គ្រប់ $x\in D$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $(-x^2+6x-8)$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $-x^2+6x-8=-(x-2)(x-4)=0$

គេបាន៖ $x_1=2, x_2=4$

x	$-\infty$ 2 4 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

+បើ $x\in(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ

+បើ $x\in(2,4)$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន

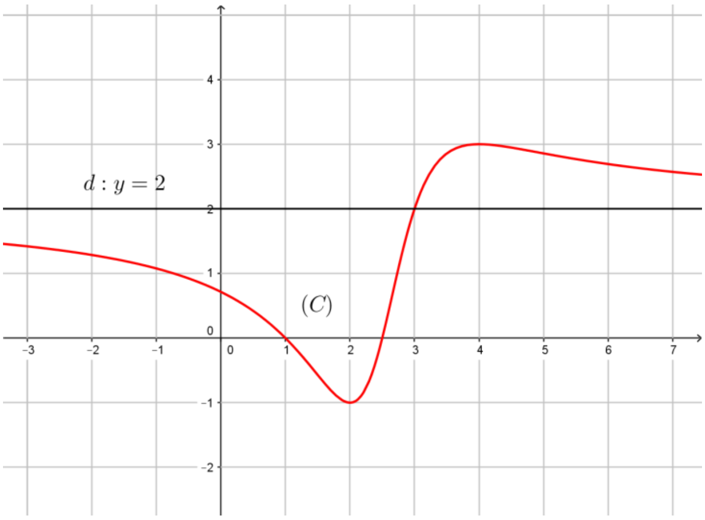
+សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

$$f(2)=\frac{2\times2^2-7\times2+5}{2^2-5\times2+7}=\frac{8-14+5}{4-10+7}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$f(4)=\frac{2\times4^2-7\times4+5}{4^2-5\times4+7}=\frac{32-28+5}{16-20+7}=\frac{9}{3}=3$$

x	$-\infty$ 2 4 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$
$f(x)$	2 ↘ -1 ↗ 3 ↘ 2

c) សង់ក្រាប (C)



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ២១ សីហា ២០១៧
មណ្ឌលប្រឡង៖..
លេខបន្ទប់..................**លេខតុ**...................
ឈ្មោះបេក្ខជន..
ហត្ថលេខាបេក្ខជន...................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ ខ. $\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{\sqrt{x+6}-3}$ គ. $\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលពណ៌សចំនួន៣ និងប៊ូលពណ៌ក្រហមចំនួន៦។ គេចាប់យកប៊ូល៣ក្នុងពេលតែមួយចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A. « ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ស » ។

B. « ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ក្រហម »។

C. « មានប៊ូលមួយពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ស »។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int_1^3(3x^2+2x+1)dx$ ខ. $J=\int_0^1(2e^x-1)dx$ គ. $K=\int_1^2\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx$

IV.(១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $9x^2+25y^2=225$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។

ខ. សង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{2\}$ ដោយ $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x-2}$ ។ យើងតាង C ក្រាបរបស់វាលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$ ។

២. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣ . a. រកចំនួនពិត a,b,c ដែលគ្រប់ $x\neq2: f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$ ។

b. គេតាង d បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x+1$ ។ បង្ហាញថា d អាស៊ីមតូតទៅ C ត្រង់ $+\infty$ និង $-\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។

c.សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៧

$I.$ គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ រាង $\frac{\infty}{\infty}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=+\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=+\infty}$

ខ. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{\sqrt{x+6}-3}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\left(x^3-3^3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{x+6-9}$$

$$=\lim_{x\to3}\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)=(9+9+9)(3+3)$$

$$=162$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{\sqrt{x+6}-3}=162}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^0+e^{-0}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=1}$

$II.$ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(9,3)=\frac{9!}{6!3!}=\frac{9\times8\times7\times6!}{6!\times3\times2\times1}$

$=84$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

$A.$ « ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ស »

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(3,3)=1$ ករណី

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{84}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{1}{84}}$ ។

$B.$ « ប៊ូលទាំងបីមានពណ៌ក្រហម »

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(6,3)=\frac{6!}{(9-3)!3!}=20$

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{20}{84}=\frac{5}{21}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{5}{21}}$ ។

$C.$ « មានប៊ូលមួយពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ស »

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(6,1)\times C(3,2)=6\times3=18$

គេបាន $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{18}{84}=\frac{3}{14}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{3}{14}}$ ។

$III.$ គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I=\int_1^3\left(3x^2+2x+1\right)dx=\left[3\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+x\right]_1^3$

$$=\left[x^3+x^2+x\right]_1^3=\left(3^3+3^2+3\right)-\left(1^3+1^2+1\right)$$

$$=(27+9+3)-(1+1+1)=36$$

ដូចនេះ $I=\int_1^3\left(3x^2+2x+1\right)dx=36$

ខ. $J=\int_0^1\left(2e^x-1\right)dx=\left[2e^x-x\right]_0^1$

$$=(2e-1)-\left(2e^0-0\right)=2e-3$$

ដូចនេះ $\boxed{J=\int_0^1\left(2e^x-1\right)dx=2e-3}$

គ. $K=\int_1^2\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right]_1^2$

$$=\left(2-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

ដូចនេះ $\boxed{K=\int_1^2\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx=2}$

$IV.$ ក.បង្ហាញថាសមីការ $9x^2+25y^2=225$ ជាសមីការអេលីប

យើងមាន $9x^2+25y^2=225\Leftrightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$\Leftrightarrow\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ សមីការមានរាង $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

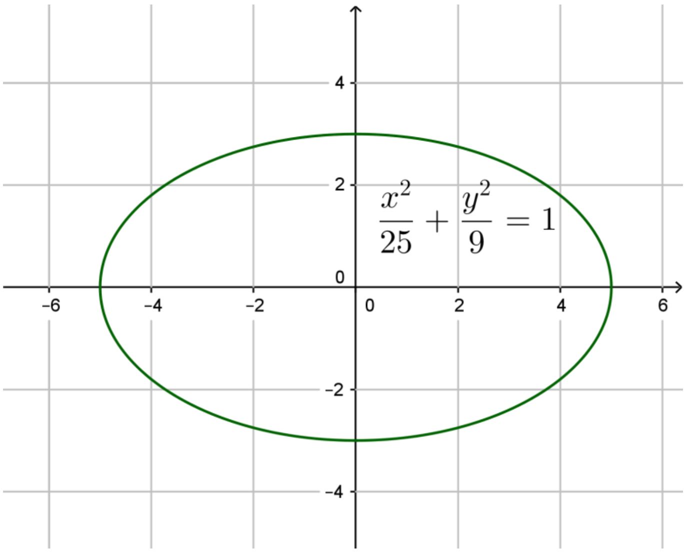
ជាសមីការនៃអេលីប ដែលមានអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងមានផ្ចិត $(0,0)$ ។

- រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ

យើងមាន $a=5$, $b=3$

- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=2\times5=10$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=2\times3=6$ ឯកតាប្រវែង
- កូអរដោនេកំពូល $V(\pm a,0)\Rightarrow V(\pm5,0)$

ខ សង់អេលីប



V. គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{2\}$ ដោយ

$$C:\ f(x)=\frac{x^2-x-1}{x-2}$$

1. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x-1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}$
  $=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x^2-x-1}{x-2}\right)=\frac{1}{0}=\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x-1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}$
  $=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

2. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x-2}$

នាំឲ្យ $f'(x)=\frac{(2x-1)(x-2)-1(x^2-x-1)}{(x-2)^2}$

$$=\frac{2x^2-4x-x+2-x^2+x+1}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

ដោយគ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{2\}$

អនុគមន៍ f មានសញ្ញាតាម x^2-4x+3

មានឫស $x_1=1, x_2=3$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	− ‖ −	0	+

- ត្រង់ $x=1$ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$
  នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាដែល $f(1)=1$
- ត្រង់ $x=3$ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$
  នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាដែល $f(3)=5$

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	− ‖ −	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	5	↗ $+\infty$

3. a.រកចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$

យើងមាន $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$

ហើយ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

$$=\frac{ax(x-2)+b(x-2)+c}{x-2}$$

$$=\frac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}$$

$$=\frac{ax^2+(-2a+b)x+(-2b+c)}{x-2}$$

ទាញបាន $\begin{cases}a=1\\-2a+b=-1\\-2b+c=-2\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\end{cases}$

ដូចនេះ៖ $a=1, b=1, c=1$ ។

b. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x+1$ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\left(x+1+\frac{1}{x-2}\right)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)=0$

ដូចនេះ៖ បន្ទាត់ $d: y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

➢ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

យក $C-d:\ f(x)-y=\frac{1}{x-2}$ មានសញ្ញាដូច $x-2$

ឲ្យ $x-2=0\Rightarrow x=2$

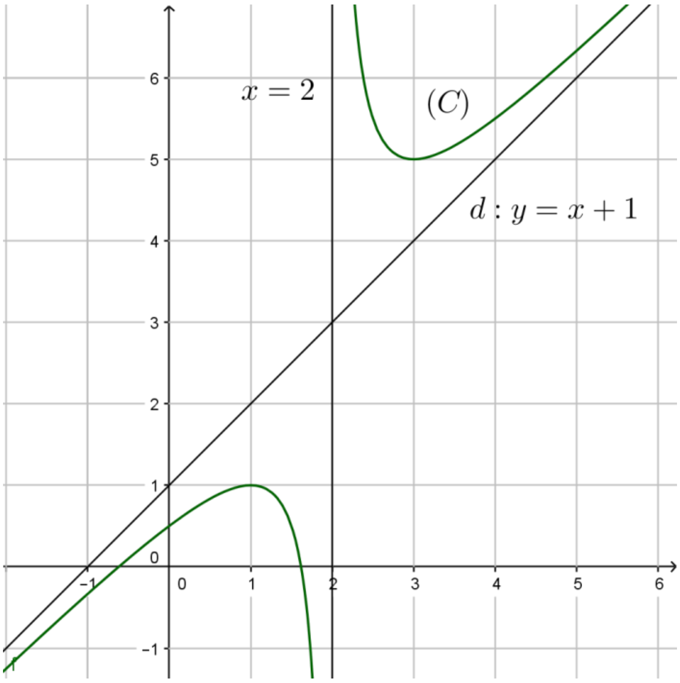
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-y_d$	$-$	‖	$+$

• បើ $x\in(-\infty,2)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d

• បើ $x\in(2,+\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d

5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ២២ សីហា ២០១៦
មណ្ឌលប្រឡង៖..
លេខបន្ទប់..................**លេខតុ**...................
ឈ្មោះបេក្ខជន..
ហត្ថលេខាបេក្ខជន...................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^3-4x\right)$ ខ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}$ គ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x - x^2\right)$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int_1^2\left(1-3x^2\right)dx$ ខ. $J=\int_2^3\dfrac{1}{x^2}dx$ គ. $K=\int_0^1\left(\dfrac{1}{x+e}-1\right)dx \quad ;(\ln e = 1)$

III. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន៣ និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន៥។ គេចាប់យកឃ្លី២ក្នុងពេលតែមួយចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A. « ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ក្រហម » ។

B. « ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ខៀវ »។

C. « ឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌ »។

IV. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំណុំមួយនៅត្រង់ចំណុច $F_1(-2,0)$ និងកំពូលពីរនៅត្រង់ចំណុច $A(-3,0)$ និង $B(3,0)$ ។ សង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$ ។

១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ -2; ត្រង់ $+2$ និងត្រង់ $+\infty$ ។ ចូរបញ្ជាក់អំពីអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈររបស់ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

២. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣. សង់នៅលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ សម័យប្រឡង ២២ សីហា ២០១៦

$I.$ គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^3-4x\right)=3(-1)^3-4(-1)=-3+4=1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^3-4x\right)=1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^3-2^3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+2-4}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)$

$=(4+4+4)(2+2)=48$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}=48}$

គ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x-x^2\right)$ រាង $+\infty-\infty$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(\dfrac{\ln x}{x^2}-1\right)=(+\infty)(0-1)=-\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x-x^2\right)=-\infty}$

$II.$ គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I=\int_1^2\left(1-3x^2\right)dx=\left[x-3\cdot\dfrac{x^3}{3}\right]_1^2=\left[x-x^3\right]_1^2$

$=\left(2-2^3\right)-\left(1-1^3\right)=-6$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_1^2\left(1-3x^2\right)dx=-6}$

ខ. $J=\int_2^3\dfrac{1}{x^2}dx=\left[-\dfrac{1}{x}\right]_2^3=\left(-\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{J=\int_2^3\dfrac{1}{x^2}dx=\dfrac{1}{6}}$

គ. $K=\int_0^1\left(\dfrac{1}{x+e}-1\right)dx=\left[-x+\ln|x+e|\right]_0^1$

$=\left(-1+\ln|1+e|\right)-\left(-0+\ln e\right)=-2+\ln(1+e)$

ដូចនេះ $\boxed{K=\int_0^1\left(\dfrac{1}{x+e}-1\right)dx=-2+\ln(1+e)}$

$III.$ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(8,2)=\dfrac{8!}{6!2!}=28$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

$A.$ « ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ក្រហម »

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(3,2)=3$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{28}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{3}{28}}$ ។

$B.$ « ឃ្លីទាំងពីរមានពណ៌ខៀវ »

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(5,2)=\dfrac{5!}{2!3!}=10$

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{10}{28}=\dfrac{5}{14}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{5}{14}}$ ។

$C.$ « ឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌ »

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(5,1)\times C(3,1)=5\times 3=15$

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{15}{28}=\dfrac{15}{28}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\dfrac{15}{28}}$ ។

$IV.$ រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប

ដោយកំពូលទាំងពីរមានអរដោនេ 0 ដូចគ្នា នោះអេលីបមានផ្ចិត $I(0,0)$

ហើយអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

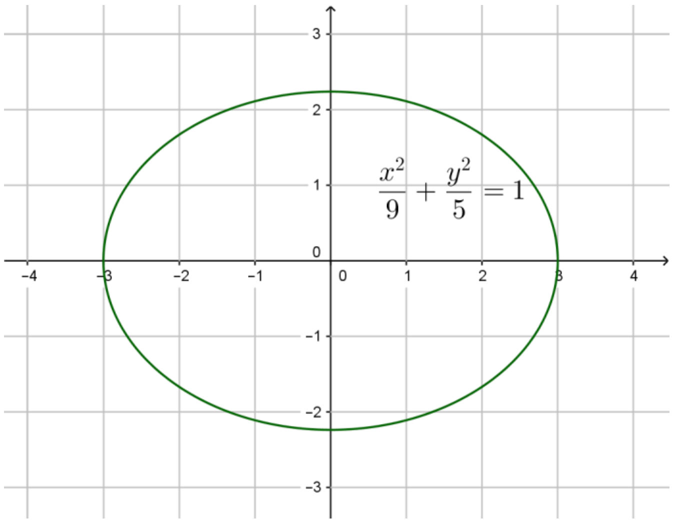
សមីការមានរាង $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

- កំពូល $V(\pm a,0)=(\pm 3,0)$ នោះ $a=3$
- កំណុំ $F(-c,0)=(-2,0)$ នោះ $c=2$
- $c^2=a^2-b^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=3^2-2^2=5$

$\Rightarrow b=\sqrt{5}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការស្តង់ដានៃអេលីបគឺ } \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1}$

សង់អេលីប



$V.$ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$

១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ -2; ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$
- $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{(x-2)(x+2)}=\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2}{(x-2)(x+2)}=\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-4}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

➢ បញ្ជាក់អំពីអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈររបស់ក្រាប

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$ នោះបន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm2} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=\pm2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

២. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x^2)'(x^2-4)-(x^2-4)'(2x^2)}{(x^2-4)}$$

$$=\frac{4x(x^2-4)-2x(2x^2)}{(x^2-4)^2}=\frac{4x^3-16x-4x^3}{(x^2-4)^2}$$

$$=\frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

ដោយ $(x^2-4)^2>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$ នោះ

$f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-16x$

ឲ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -16x=0 \Rightarrow x=0$

x	$-\infty$ -2	-2 0 2	2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$ 0 $-$	$-$

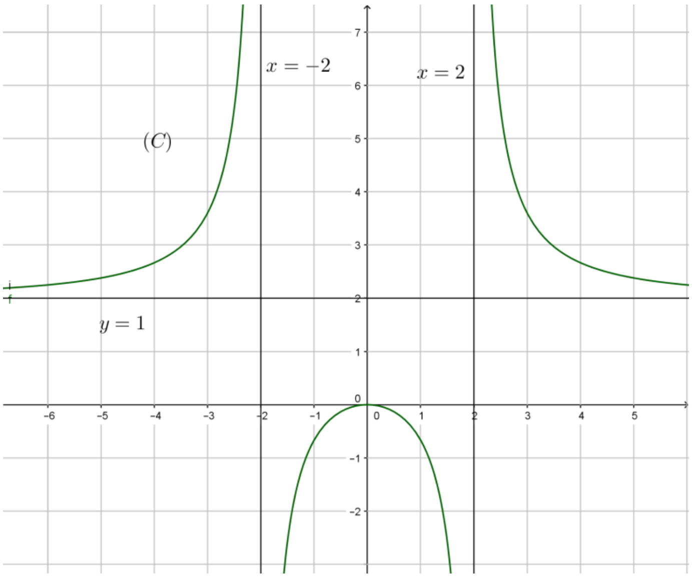
- ចំពោះ $x\in(-\infty,-2)\cup(2,0)$ អនុគមន៍ f កើន
- ចំពោះ $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ អនុគមន៍ f ចុះ

ត្រង់ $x=0$ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាដែល $f(0)=0$

➢ តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$ -2	-2 0 2	2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$ 0 $-$	$-$
$f(x)$	2 ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ 0 ↘ $+\infty$	$+\infty$ ↘ 2

៣. សង់នៅលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ក្រាបតាងអនុគមន៍ f



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖ ២៤ សីហា ២០១៥**
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម) **មណ្ឌលប្រឡង៖**..
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**...................
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**...
ហត្ថលេខាបេក្ខជន...................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌សចំនួន៣ និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន៥។ គេចាប់យកឃ្លី២ក្នុងពេលតែមួយចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក. « គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំងពីរ » ។

ខ. « គេចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌ »។

II. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int_2^3\left(3x^2+3x-1\right)dx$

ខ. $f(x)=\dfrac{1+2x}{\left(x^2-4x\right)+(4-x)}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{4-x}$ ។ គណនា $J=\int_2^3 f(x)dx$ ។

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ។

ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល បើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A(2,6)$ ។

ខ រកតម្លៃនៃ x បើ $B\left(x,\dfrac{3}{2}\right)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនេះ។ ចូរសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+1}$ និងគេតាងដោយ C ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ បង្ហាញថា $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$ ។

គ បង្ហាញថា បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

ឃ សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃ f ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២៤ សីហា ២០១៥

$I.$ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

ក. តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍« គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ខៀវទាំងពីរ »

ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(8,2)=\dfrac{8!}{6!2!}=28$ ករណី

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(5,2)=\dfrac{5!}{3!2!}=10$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{10}{28}=\dfrac{5}{14}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{5}{14}}$ ។

ខ.តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ « គេចាប់បានឃ្លីមួយក្នុងមួយពណ៌ »

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(3,1)\times C(5,1)=3\times 5=15$

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{25}{28}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{15}{28}}$ ។

$II.$គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{1+1}{1-2}=-2$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=-2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=1+1=2$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2}$

$III.$គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int_2^3(3x^2+3x-1)dx=\left[x^3+\dfrac{3}{2}x^2-x\right]_2^3$

$=\left(3^3+\dfrac{3}{2}\cdot 3^2-3\right)-\left(2^3+\dfrac{3}{2}\cdot 2^2-2\right)$

$=\left(27+\dfrac{27}{2}-3\right)-(8+6-2)=\dfrac{51}{2}$

ខ. $f(x)=\dfrac{1+2x}{(x^2-4x)+(4-x)}$

បង្ហាញថា $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{4-x}$

$f(x)=\dfrac{1(4-x)-3(1-x)}{(1-x)(4-x)}=\dfrac{4-x-3+3x}{(4-x)-x(4-x)}$

$=\dfrac{1+2x}{(x^2-4x)+(4-x)}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{4-x}}$

គណនា $J=\int_2^3 f(x)dx$

$J=\int_2^3\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{4-x}\right)dx=\int_2^3\left(-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x-4}\right)dx$

$=\left[-\ln|x-1|+3\ln|x-4|\right]_2^3$

$=(-\ln 2+3\ln 1)-(-\ln 1+3\ln 2)=-4\ln 2$

ដូចនេះ $\boxed{J=-4\ln 2}$

$IV.$ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលនៅត្រង់ $O(0,0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ នោះប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ

សមីការមានរាង $x^2=4py$

ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A(2,6)$ នោះគេបាន

$2^2=4p\cdot 6\Leftrightarrow 1=6p\Rightarrow p=\dfrac{1}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល គឺ } x^2=\dfrac{2}{3}y}$

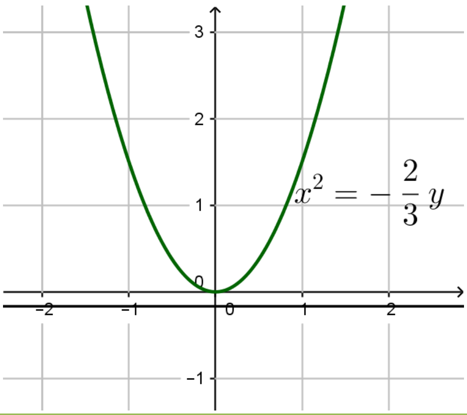
ខ. រកតម្លៃនៃ x_1

ចំណុច $B\left(x_1,\dfrac{3}{2}\right)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល $x^2=\dfrac{2}{3}y$ គេបាន

$x_1^2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x_1^2=1\Rightarrow x_1=\pm 1$

ដូចនេះ: $\boxed{x_1=\pm 1}$

➢ សង់ប៉ារ៉ាបូល



$V.$ គេមានអនុគមន៍ f ដែល $C: f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+1}$

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x+1\neq 0$ ឬ $x\neq -1$

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃ f គឺ $D=\mathbb{R}-\{-1\}$

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$

យើងមាន $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x(x+1)-2(x+1)-1}{x+1}$

$$=\frac{x^2+x-2x-2-1}{x+1}=\frac{x^2-x-3}{x+1}$$

ដូចនេះ $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$

គ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-2$ ជាអាសីុមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x+1}\right)=0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=x-2$ ជាអាសីុមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ឃ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x)=x-2-\dfrac{1}{x+1}$

$\Rightarrow f'(x)=1+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ គ្រប់ $x\in D$

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ D គ្មានបរមា។

លីមីតនៃអនុគមន៍

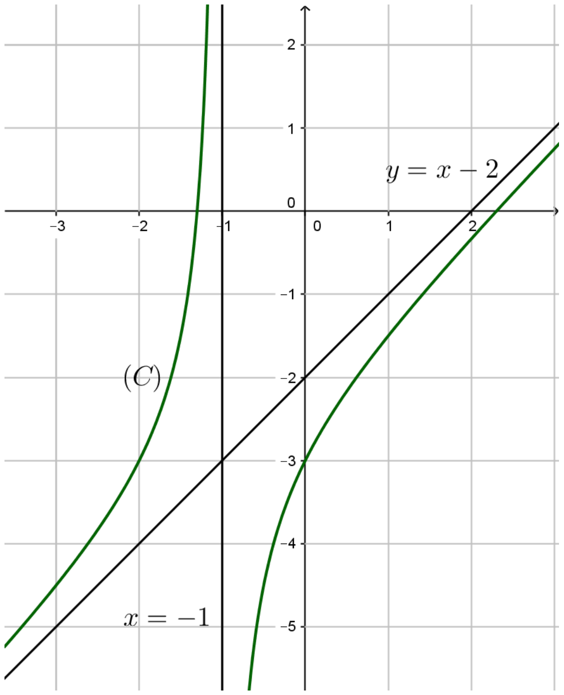
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-2-\dfrac{1}{x-1}\right)=\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-2-\dfrac{1}{x+1}\right)=\pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x=-1$ ជាអាសីុមតូតឈរនៃក្រាប C

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

➢ សង់ក្រាបនៃ f



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡងៈ ១៣ តុលា ២០១៤**
វិញ្ញាសាៈ គណិតវិទ្យា (**ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម**) **មណ្ឌលប្រឡងៈ**..
រយៈពេលៈ ៩០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**...................
ពិន្ទុសរុបៈ ៧៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**...
ហត្ថលេខាបេក្ខជន....................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{-3x}$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$ ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x+2x-2\right)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងអាងចិញ្ចឹមត្រីមួយមានត្រីពណ៌ក្រហមចំនួន៤ និងត្រីពណ៌សចំនួន៣។ គេចាប់ត្រី២យកមកដាក់ក្នុងអាងថ្មីដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក. « ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ » ។

ខ. « ត្រីពណ៌សទាំងពីរ »។

គ. « ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌ »។

III. (២៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=-x-1+\dfrac{3}{x-1}$ ។

ឃ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C នៃ f ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int_1^3\left(2x^2-3x+1\right)dx$

ខ. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-5x+4}$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x-4}$ រួចគណនា $J=\int_2^3 f(x)dx$ ។

គ. គេមាន $f(x)=x\ln x$ ។

គណនាដេរីវេ $f'(x)$ នៃអនុគមន៍ f នៅលើចន្លោះ $[1,e]$ ។ ទាញរកអាំងតេក្រាល $K=\int_1^e \ln x dx$ ។

IV. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំពូលទាំងពីរជាចំណុច $(4,0)$ និង $(-4,0)$ និងមានកំណុំមួយនៅត្រង់ចំណុច $(3,0)$ រួចសង់អេលីបនេះ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ១៣ តុលា ២០១៤

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x+1)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)}{(x+1)}=\frac{0}{-2}=0$

ដូចនេះ $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3}=0$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{-3x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\sin x=-\frac{1}{3}\times 1\times 0=0$

ដូចនេះ: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{-3x}=0$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)-(x-2)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2-x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ឃ. $\lim_{x\to +\infty}\left(2e^x+2x-2\right)=+\infty+2(+\infty)-2=+\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x\to +\infty}\left(2e^x+2x-2\right)=+\infty$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(7,2)=\frac{7!}{2!(7-2)!}=7\times 3=21$

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

ក. « ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ »

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(4,2)=\frac{4!}{2!2!}=6$ ករណី

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{2}{7}$

ខ. « ត្រីពណ៌សទាំងពីរ »

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(3,2)=\frac{3!}{2!(3-2)}=3$ ករណី

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{21}$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{3}{21}$

គ. « ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌ »

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(4,1)\times(3,1)=4\times 3=12$ ករណី

គេបាន $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{12}{21}$

ដូចនេះ $P(C)=\frac{12}{21}$

III. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

$f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$ មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq 1$

ដូចនេះដែនកំណត់ $D\in\mathbb{R}-\{1\}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $f(x)=-x-1+\frac{3}{x-1}$ ។

យើងមាន $f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{(1-x)}$

$=\frac{x^2-4}{1-x}=\frac{x^2-1-3}{1-x}=\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}+\frac{3}{x-1}$

$=-x-1+\frac{3}{x-1}$

ដូចនេះ $f(x)=-x-1+\frac{3}{x-1}$

ឃ.សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C នៃ f

យើងមាន $f(x)=-x-1+\frac{3}{x-1}$

$\Rightarrow f'(x)=-1-\frac{3}{(x-1)^2}<0,\forall x\in D$

➢ លីមីតនិងអាសីុមតូត

- $\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(-x-1+\frac{3}{x-1}\right)=+\infty$
- $\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(-x-1+\frac{3}{x-1}\right)=-\infty$
- $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-x-1+\frac{3}{x-1}\right)=-\infty$
- $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(-x-1+\frac{3}{x-1}\right)=+\infty$

ដោយ $\lim_{x\to 1}f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ

$x=-1$ ជាអាសីុមតូតឈរនៃក្រាប (C)

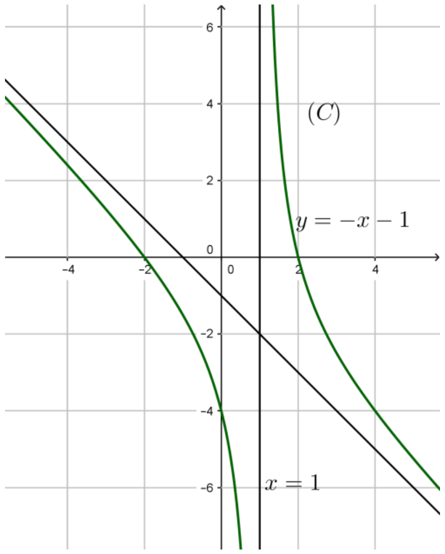
ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x-1}\right)=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(-x-1)\right]=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=-x-1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

➢ សង់ក្រាប C



IV. គណនាអាំងតេក្រាល

ក. $I=\int_1^3\left(2x^2-3x+1\right)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_1^3=\left(\frac{15}{2}-\frac{1}{6}+3\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+1\right)$

$=\frac{15}{2}-\frac{1}{6}=\frac{22}{3}$

ដូចនេះ $I=\int_1^3\left(2x^2-3x+1\right)dx=\frac{22}{3}$

ខ.បង្ហាញថា $f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-4}$

គេមាន $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-5x+4}=\frac{2x+1}{(x-1)(x-4)}$

$=\frac{-(x-4)+3(x-1)}{(x-1)(x-4)}=\frac{-(x-4)}{(x-1)(x-4)}+\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-4)}$

$=\frac{-1}{(x-1)}+\frac{3}{(x-4)}$

ដូចនេះ $f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-4}$ ពិត

គណនា $J=\int_2^3 f(x)dx$

គេបាន $J=\int_2^3\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-4}\right)dx$

$=\left[-\ln|x-1|+3\ln|x-4|\right]_2^3$

$=\left(-\ln 2+3\ln|-1|\right)-\left(-\ln 1+3\ln|-2|\right)$

$=-\ln 2-3\ln 2=-4\ln 2$

ដូចនេះ $J=\int_2^3 f(x)dx=-4\ln 2$

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=x\ln x\Rightarrow f'(x)=\ln x+1$

ទាញអាំងតេក្រាល $K=\int_1^e \ln x dx$

យើងមាន $f'(x)=\ln x+1$

$\Rightarrow\int_1^e f'(x)dx=\int_1^e(\ln x+1)dx$

$\Rightarrow\int_1^e \ln x=\int_1^e f'(x)dx-\int_1^e dx$

$\Rightarrow\int_1^e \ln x=\left[f(x)\right]_1^e-\int_1^e dx$

$=\left[x\ln x-x\right]_1^e$

$=(e\ln e-e)-(\ln 1-1)=1$

ដូចនេះ $K=1$

V.រកសមីការស្តង់ដាអេលីប

ដោយកំពូលទាំងពីរមានអរដោនេ 0 ដូចគ្នា នោះអេលីបមានផ្ចិត $I(0,0)$

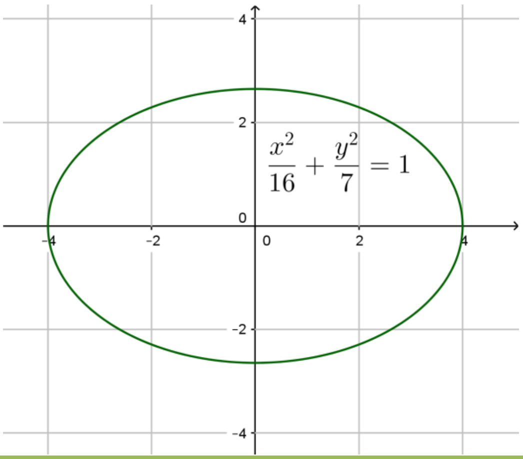
ហើយអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

សមីការមានរាង $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

- កំពូល $V(\pm a,0)=(\pm 4,0)$ នោះ $a=4$
- កំណុំ $F(c,0)=(3,0)$ នោះ $c=3$
- $c^2=a^2-b^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=4^2-3^2=7$

ដូចនេះសមីការស្តង់ដាគឺ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ ។

- សង់អេលីប



ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ០៤ សីហា ២០១៤
មណ្ឌលប្រឡង៖..
លេខបន្ទប់..................**លេខតុ**..................
ឈ្មោះបេក្ខជន..
ហត្ថលេខាបេក្ខជន..................................

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x^2-3)(1-x)}{(5+2x)(2-x^2)}$ ខ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$ គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

II.(១៥ពិន្ទុ) នៅក្នុងថុងមួយគេមានប៊ូលក្រហម៤ ប៊ូលស៣ និងប៊ូលខៀវ១ ។ គេចាប់យកប៊ូល៣ក្នុងពេលតែមួយចេញពីថុងដោយចៃដន្យ។

ក. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម » ។

ខ. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានមានប៊ូលក្រហមទាំងបី »។

គ. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ »។

III. (៣០ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{2}{9}x$ និង C តាងក្រាបរបស់ f ។

១. អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x)=(2e^x-1)(e^x-2)$

ខ. ទាញយកតាមតម្លៃនៃ x សញ្ញានៃ $g(x)$ ។

២. ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ។

ខ. អនុគមន៍ f មានដេរីវេ f'។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) ក.គណនាអាំងតេក្រាល: $I=\int_1^5(x^2+2x-3)dx$

ខ.បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនពិត $x\neq1$ គេបាន $\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}=2x-1+\dfrac{1}{x-1}$

រួចទាញរក $J=\int_2^3\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}dx$ ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
សម័យប្រឡង ២១ សីហា ២០១៤

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x^2-3)(1-x)}{(5+2x)(2-x^2)}$ រាង $\frac{\infty}{\infty}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x\left(\frac{5}{x^2}+2\right)x^2\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\left(\frac{5}{x}+2\right)\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}=\frac{(2-0)(0-1)}{(5+0)(0-1)}$

$=\frac{-2}{-2}=1$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x^2-3)(1-x)}{(5+2x)(2-x^2)}==1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(x-1)(x+1)(2+\sqrt{x+3})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{4-(x+3)}{(x-1)(x+1)(2+\sqrt{x+3})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)(2+\sqrt{x+3})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{(x+1)(2+\sqrt{x+3})}=-\frac{1}{8}$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=-\frac{1}{8}}$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x-1}$ រាង $\frac{\infty}{\infty}$

$=\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}\right)$

$=\ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right]=\ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right)=\ln1=0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x-1}=0}$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(8,3)=\frac{8!}{3!(8-3)!}=56$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

ក. « គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម »

ចំនួនករណីស្រប

$n(A)=C(4,2)\times C(4,1)=\frac{4!}{1!(4-2)}\times4=24$ ករណី

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

ដូចនេះ: $P(A)=\frac{3}{5}$

ខ. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានមានប៊ូលក្រហមទាំងបី »

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(4,3)=\frac{4!}{3!(4-3)!}=4$ ករណី

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4}{56}=\frac{1}{14}$

ដូចនេះ: $P(B)=\frac{1}{14}$

គ. រកប្រូបាបដែល « គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ »

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=n(A)+n(B)=24+4=28$ ករណី

គេបាន $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{28}{56}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ: $P(C)=\frac{1}{2}$

III. គេមានអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$f(x)=\frac{1}{1+e^x}+\frac{2}{9}x$ និង C តាងក្រាបរបស់ f

១.ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x)=(2e^x-1)(e^x-2)$

យើងមាន $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$

$=2e^{2x}-e^x-4e^x+2$

$=e^x(2e^x-1)-2(2e^x-1)$

$g(x)=(2e^x-1)(e^x-2)$

ដូចនេះ: $g(x)=(2e^x-1)(e^x-2)$

ខ. ទាញយកតាមតម្លៃនៃ x សញ្ញានៃ $g(x)$ យើងមាន

យើងមាន $g(x)=(2e^x-1)(e^x-2)$

តាង $t=e^x\Leftrightarrow x=\ln t\quad,(t>0)$

$g(x)=(2e^x-1)(e^x-2)$ មានសញ្ញាដូចសញ្ញានៃ

$(2t-1)(t-2)$

$(2t-1)(t-2)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\quad,t=2$

តារាងសញ្ញា

t	0	$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញាខាងលើ

$g(x)<0$ កាលណា $\frac{1}{2}<e^x<2\Rightarrow -\ln 2<t<\ln x$

ដូចនេះ: $g(x)<0$ កាលណា $x\in(-\ln 2,\ln 2)$

$g(x)>0$ កាលណា $t<\frac{1}{2}\vee t2\Rightarrow e^x<\frac{1}{2}\vee e^x>2$

ដូចនេះ: $g(x)>0$

កាលណា $x\in(-\infty,-\ln 2)\cup(\ln 2,+\infty)$ ហើយ

$g(x)=0$ កាលណា $x=-\ln 2, x=\ln 2$

២. ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{2x}{9}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{2x}{9}\right)=-\infty$

ខ.បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

យើងមាន $f(x)=\frac{1}{1+e^x}+\frac{2}{9}x$

នោះ: $f'(x)=-\frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}+\left(\frac{2}{9}x\right)'$

$=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}+\frac{2}{9}=\frac{-9e^x+2(1+2e^x+e^{2x})}{(1+e^x)^2}$

$=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(1+e^x)^2}=\frac{g(x)}{(1+e^x)^2}$

ដោយ $=(1+e^x)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x

នោះ: $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $g(x)$ ។

ដូច្នេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$

តាមសម្រាយខាងលើ យើងមាន

$g(x)<0$ កាលណា $x\in(-\ln 2,\ln 2)$

$g(x)=0$ កាលណា $x=-\ln 2, x=\ln 2$

$g(x)>0$ កាលណា $x\in(-\infty,-\ln 2)\cup(\ln 2,+\infty)$

យើងទាញបាន $f'(x)<0$ កាលណា $x\in(-\ln 2,\ln 2)$

$f'(x)=0$ កាលណា $x=-\ln 2, x=\ln 2$

$f'(x)>0$ កាលណា $x\in(-\infty,-\ln 2)\cup(\ln 2,+\infty)$

យើងបាន

f មានអប្បបរមា $f(\ln 2)=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 2$

f មានអតិបរមា $f(-\ln 2)=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\ln 2$

- តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-\ln 2)$	↘	$f(\ln 2)$	↗	$+\infty$

VI . ក.គណនាអាំងតេក្រាល:

$I=\int_1^5(x^2+2x-3)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_1^5=\left(\frac{5^3}{3}+5^2-3\times5\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)$

$=\frac{155}{3}+\frac{5}{3}=\frac{160}{3}$

ដូចនេះ: $I=\int_1^5(x^2+2x-3)dx=\frac{160}{3}$

ខ.បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនពិត $x\neq1$ គេបាន

$\frac{2x^2-3x+2}{x-1}=2x-1+\frac{1}{x-1}$

យើងមាន $\frac{2x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(2x^2-2x)-(x-1)+1}{x-1}$

$=\frac{2x(x-1)}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=2x-1+\frac{1}{x-1}$

ចំពោះ: $x-1\neq0\Rightarrow x\neq1$

- រួចទាញរក $J=\int_2^3\frac{2x^2-3x+2}{x-1}dx$

ដោយ $\frac{2x^2-3x+2}{x-1}=2x-1+\frac{1}{x-1}$

ចំពោះ គ្រប់ $x\neq1$ យើងបាន

$J=\int_2^3\left[2x-1+\frac{(x-1)'}{x-1}\right]dx$

$=\left[x^2-x+\ln|x-1|\right]_2^3$

$=(3^2-3+\ln|3-1|)-(3^2-2+\ln|2-1|)$

$=4+\ln 2$

ដូចនេះ: $\boxed{J=4+\ln 2}$

វិញ្ញាសាទី១ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖** ....

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម) **មណ្ឌលប្រឡង៖**..

រយៈពេល៖ ៩០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**.............................

ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**..

ហត្ថលេខាបេក្ខជន..

<u>ប្រធានវិញ្ញាសា</u>

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក . $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-3}-\sqrt{2}}$ គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3\ln x+1\right)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ិចពណ៌ខៀវចំនួន៤ដើម និងប៊ិចពណ៌ក្រហមចំនួន៣ដើម។ គេចាប់យកប៊ិច៣ដើមក្នុងពេលតែមួយចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

$A.$ «គេចាប់បានប៊ិចទាំងបីសុទ្ធតែពណ៌ខៀវ »។

$B.$ « គេចាប់បានប៊ិចទាំងបីសុទ្ធតែពណ៌ក្រហម »។

$C.$ « គេចាប់បានមានប៊ិចមួយពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ខៀវ »។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int_1^2\left(6x^2+4x-1\right)dx$ ខ. $J=\int_0^1\left(1-2e^x\right)dx$ គ. $K=\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំពុំមួយជាចំណុចមានកូអរដោនេ $(2,0)$ និងចំណុចកំពូលពីរនៅត្រង់ចំណុច $(-3,0)$ និង $(3,0)$។ សង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ)អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{1\}$ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}$ មានក្រាបតំណាង C ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ កតា $2cm$ ។

1. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$, $+\infty$ និង 1 ។ រកអាស៊ីមតូតដេក និងឈរនៃក្រាប C ។
2. a. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយបង្ហាញថា វាមានសញ្ញាដូច $-2x^2+2x$ ។

   b.សិក្សាអថេរភាព និងតារាងអថេរភាពនៃ f ។
3. សង់ក្រាប C នៃ f ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាត្រៀមទី១ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x+2}=\dfrac{2+1}{2+2}=\dfrac{3}{4}$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4}=\dfrac{3}{4}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-3}-\sqrt{2}}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\right)}{x-3-2}=\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\right)$

$=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-3}-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}}$

គ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-3\ln x+1\right)$ រាង $+\infty-\infty$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(1-\dfrac{3\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)=(+\infty)(1-0+0)=+\infty$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-3\ln x+1\right)=+\infty}$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(7,3)=\dfrac{7!}{4!3!}=45$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. «គេចាប់បានប៊ិចទាំងបីសុទ្ធតែពណ៌ខៀវ »

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(4,3)=4$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{4}{45}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(A)=\dfrac{4}{45}}$ ។

B. « គេចាប់បានប៊ិចទាំងបីសុទ្ធតែពណ៌ក្រហម »

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(3,3)=1$

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{1}{45}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(B)=\dfrac{1}{45}}$ ។

C.« គេចាប់បានមានប៊ិចមួយពណ៌ក្រហមនិងពីរទៀតពណ៌ខៀវ »

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(3,1)\times C(4,2)=3\times 6=18$

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{18}{45}=\dfrac{2}{5}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(C)=\dfrac{2}{5}}$ ។

III. គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I=\int_1^2\left(6x^2+4x-1\right)dx=\left[6\cdot\dfrac{x^3}{3}+4\cdot\dfrac{x^2}{2}-x\right]_1^2$

$=\left[2x^3+2x^2-x\right]_1^2$

$=\left(2\cdot 2^3+2\cdot 2^2-2\right)-(2+2-1)=22-3=19$

ដូចនេះ: $\boxed{I=\int_1^2\left(3x^2+2x-3\right)dx=19}$

ខ. $J=\int_0^1\left(1-2e^x\right)dx=\left[x-2e^x\right]_0^1$

$=(1-2e)-\left(0-2e^0\right)=3-2e$

ដូចនេះ: $\boxed{J=\int_0^1\left(2e^x+x-1\right)dx=3-2e}$

គ. $K=\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x|+\dfrac{1}{x}\right]_1^2$

$=\left(\ln 2+\dfrac{1}{2}\right)-(\ln 1+1)=-\dfrac{1}{2}+\ln 2$

ដូចនេះ: $\boxed{K=\int_1^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=-\dfrac{1}{2}+\ln 2}$

IV.រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប

ដោយកំពូលទាំងពីរមានអរដោនេ 0 ដូចគ្នា នោះអេលីបមានផ្ចិត $I(0,0)$

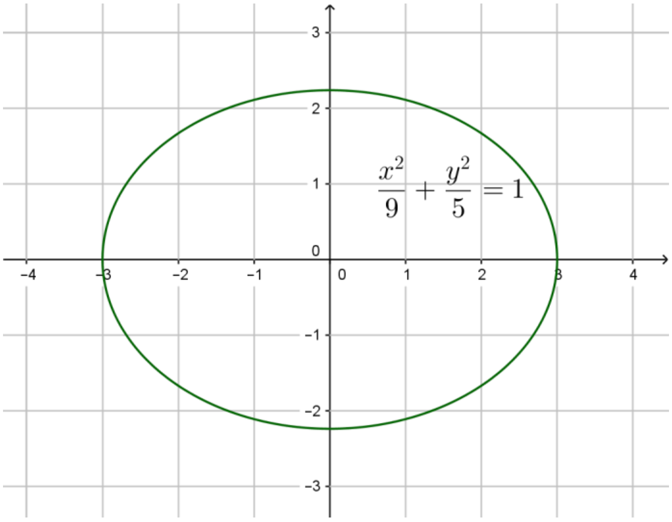
ហើយអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

សមីការមានរាង $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

- កំពូល $V(\pm a,0)=(\pm 3,0)$ នោះ $a=3$
- កំណុំ $F(c,0)=(2,0)$ នោះ $c=2$
- $c^2=a^2-b^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=3^2-2^2=5$

ដូចនេះ: $\boxed{\text{សមីការស្តង់ដានៃអេលីបគឺ } \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1}$

សង់អេលីប



V. f កំណត់លើ $\mathbb{R}-\{1\}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}$ ក្រាប C

1. សិក្សាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$, $+\infty$ និង 1

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$
- $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=+\infty$

រកអាស៊ីមតូតដេក និងឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

2. a. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\left(x^2-2x+1\right)-(2x-2)\left(x^2\right)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$$

$$=\frac{2x^3-4x^2+2x-2x^3+2x^2}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2x}{\left(x^2-2x+1\right)}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{-2x^2+2x}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$

បង្ហាញថា $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-2x^2+2x$

ដោយ $\left(x^2-2x+1\right)^2>0$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

ដូចនេះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-2x^2+2x$

b.សិក្សាអថេរភាពនៃ f

ឲ្យ $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x^2+2x=0 \Leftrightarrow -2x(x-1)=0$

$\Rightarrow x=0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

ចំពោះ $x\in(0,1)$ អនុគមន៍ f កើន

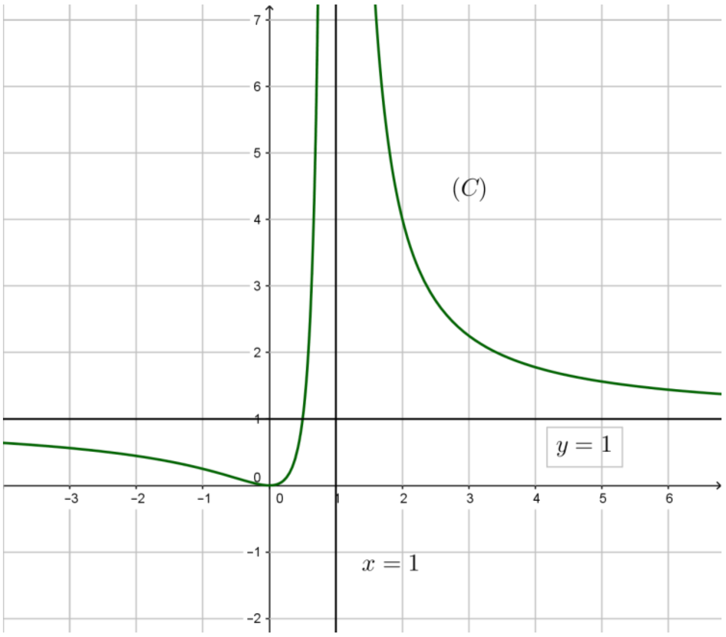
ចំពោះ $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ អនុគមន៍ f ចុះ

ត្រង់ $x=0$ អនុគមន៍ f មានអតិបរមា $f(0)=0$

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

3. សង់ក្រាប C នៃ f



វិញ្ញាសាទី២ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖...
មណ្ឌលប្រឡង៖...
លេខបន្ទប់.................**លេខតុ**......................
ឈ្មោះបេក្ខជន..
ហត្ថលេខាបេក្ខជន...

<u>ប្រធានវិញ្ញាសា</u>

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2-\sqrt{4-x}}}$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}+1}{2}$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងស្បោងមួយមានប៊ូលស៣ និងប៊ូលខៀវ ២។ គេចាប់យកប៊ូលម្តង២ក្នុងពេលតែមួយ ចេញពីស្បោងដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A. "ចាប់បានប៊ូលខៀវទាំងពីរ"។

B. "ចាប់បានប៊ូលសទាំងពីរ"។

C. "ចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌"។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int_1^2\left(3x^2-2x-2\right)dx$ ខ. $J=\int_0^1\left(2x-e^x\right)dx$ គ. $K=\int_0^1\left(\dfrac{1}{x-2}\right)dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) ប៉ារ៉ាបូល (P) មានកំពូលនៅត្រង់គល់ O នៃអ័ក្សអរដោនេ និងមានអ័ក្សអាប់ស៊ីស $\overrightarrow{x'x}$ ជាអ័ក្សឆ្លុះ។

ក. ចូររកសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) និងសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល (P) ដោយដឹងថាក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូលនេះកាត់តាមចំណុច $A\left(2,-2\sqrt{2}\right)$។

ខ. សង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ ។ គេតាង C ក្រាបរបស់វាលើតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ បង្ហាញថា $f(x)=x-3+\dfrac{1}{x-2}$ ។
2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។
3. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
4. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

   b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។
5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាត្រៀមទី២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

$I.$ គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{1-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=-\dfrac{1}{2}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{4-x}}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{4-x}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{4-x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{4-x}\right)}{2-(4-x)}$

$=\lim\limits_{x\to2}(x+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{4-x}\right)=(2+2)\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2}-\sqrt{4-x}}=8\sqrt{2}}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}+1}{2}=\dfrac{e^{-0}+1}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}+1}{2}=1}$

$II.$ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(5,2)=\dfrac{5!}{3!2!}=10$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

$A.$ "ចាប់បានប៊ូលខៀវទាំងពីរ"

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(2,2)=1$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{10}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{10}}$ ។

$B.$ "ចាប់បានប៊ូលសទាំងពីរ"

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(3,2)=3$ ករណី

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{3}{10}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{3}{10}}$ ។

$C.$ "ចាប់បានប៊ូលមួយក្នុងមួយពណ៌"

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(3,1)\times C(2,1)=3\times2=6$

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\dfrac{3}{5}}$ ។

$III.$ គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I=\int_1^2\left(3x^2-2x-2\right)dx=\left[3\cdot\dfrac{x^3}{3}-2\cdot\dfrac{x^2}{2}-2x\right]_1^2$

$=\left[x^3-x^2-2x\right]_1^2=\left(2^3-2^2-4\right)-\left(1^3-1^2-2\right)$

$=(8-4-4)-(1-1-2)=2$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_1^2\left(3x^2-2x-2\right)dx=2}$

ខ. $J=\int_0^1\left(2x-e^x\right)dx=\left[x^2-e^x\right]_0^1$

$=(1-e)-\left(0-e^0\right)=2-e$

ដូចនេះ $\boxed{J=\int_0^1\left(2x-e^x\right)dx=2-e}$

គ. $K=\int_0^1\left(\dfrac{1}{x-2}\right)dx=\left[\ln|x-2|\right]_0^1=\ln1-\ln2=-\ln2$

ដូចនេះ $\boxed{K=\int_0^1\left(\dfrac{1}{x-2}\right)dx=-\ln2}$

$IV.$ ក រកសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ)

ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ និងមានអ័ក្សអាប់ស៊ីស ជាអ័ក្សឆ្លុះ(ដេក) នោះសមីការមានរាង $y^2=4px$

ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A\left(2,-2\sqrt{2}\right)$ នោះគេបាន

$\left(-2\sqrt{2}\right)^2=4p\cdot2\Leftrightarrow8=8p\Rightarrow p=1$

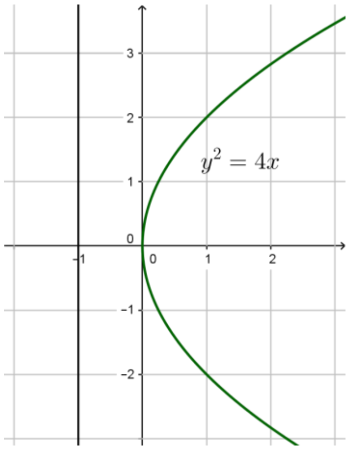
សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(\Delta):x=-p=-1$

រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល គឺ } y^2=4x}$

ខ. សង់ប៉ារ៉ាបូល

បើ $x=1$ នោះ $y^2=4\Rightarrow y=\pm2$



V. f កំណត់ដោយ $C: f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{2\}}$

បង្ហាញថា $f(x)=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

យើងមាន $f(x)=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

$$=\frac{x(x-2)-3(x-2)+1}{x-2}$$

$$=\frac{x^2-2x-3x+6+1}{x-2}=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$$

ដូចនេះ $f(x)=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 2 និង ត្រង់ $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3+\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(x-3+\dfrac{1}{x-2}\right)=\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3+\dfrac{1}{x-2}\right)=+\infty$

➢ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប

3. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x)=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

$$\Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+4-1}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

ដោយ $(x-2)^2>0$ គ្រប់ $x\in D$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម x^2-4x+3

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1, x=3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

- ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$
នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាដែល $f(1)=-3$
- ត្រង់ $x=3$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$
នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាដែល $f(3)=1$

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(x-3+\frac{1}{x-2}\right)-(x-3)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d: y=x-3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

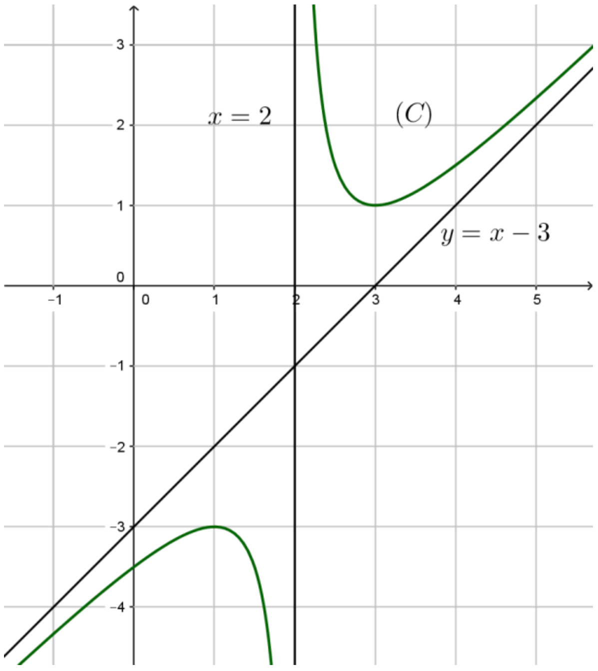
យក $C-d$: $f(x)-y=\dfrac{1}{x-2}$ មានសញ្ញាដូច $x-2$

ឲ្យ $x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-y_d$	$-$	‖	$+$

- បើ $x\in(-\infty,2)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d
- បើ $x\in(2,+\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d

5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d



វិញ្ញាសាទី៣ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖** ....

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្រ្តសង្គម) **មណ្ឌលប្រឡង៖**..

រយៈពេល៖ ៩០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**.........................

ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**..

ហត្ថលេខាបេក្ខជន..

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to1}\frac{-x^2-x+2}{x^2-1}$ ខ. $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}$ គ. $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^x+1\right)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងអាងចិញ្ចឹមត្រីមួយមានត្រីពណ៌ក្រហមចំនួន៤ និងត្រីពណ៌សចំនួន៣។ គេចាប់ត្រី២យកមកដាក់ក្នុងអាងថ្មីដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

ក. « ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ » ។

ខ. « ត្រីពណ៌សទាំងពីរ »។

គ. « ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌ »។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int_0^2\left(-3x^2+x-2\right)dx$ ខ. $J=\int_1^2\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx$ គ. $K=\int_1^2\left(\frac{x}{2}-x-\frac{1}{x^2}\right)dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $4x^2+25y^2=100$ ។ ក. បង្ហាញថាសមីការនេះ ជាសមីការអេលីប។ រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូល និងកំណុំទាំងពីរ។

ខ. សង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2+x+4}{x+1}$ ហើយមានក្រាបតំណាង C ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ បង្ហាញថា $f(x)=x+\frac{4}{x+1}$ ។
2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ -1 និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។
3. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

   b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។
4. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាត្រៀមទី០៣ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

$I.$ គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to1}\frac{-x^2-x+2}{x^2-1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(-x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(-x-2)}{(x+1)}=-\frac{3}{2}$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to1}\frac{-x^2-x+2}{x^2-1}=-\frac{3}{2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)}{(x+3)-(3-x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)}{2}=\sqrt{3}$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}=\sqrt{3}$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^x+1\right)$ រាង $+\infty-\infty$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)$

$=+\infty$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^x+1\right)=+\infty$

$II.$ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(7,2)=\frac{7!}{2!(7-2)!}=21$ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

ក. តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍« ត្រីពណ៌ក្រហមទាំងពីរ »

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(4,2)=\frac{4!}{2!(4-2)!}=6$ ករណី

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{21}$

ដូចនេះ: $P(A)=\frac{6}{21}$

ខ. តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍« ត្រីពណ៌សទាំងពីរ »

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(3,2)=\frac{3!}{2!(3-2)!}=3$ ករណី

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

ដូចនេះ: $P(B)=\frac{1}{7}$

គ. តាង C ជាព្រឹត្តិការណ៍ « ត្រីមួយក្នុងមួយពណ៌ »

ចំនួនករណីស្រប

$n(C)=C(4,1)\times C(3,1)=\frac{4!}{1!(4-1)!}\times\frac{3!}{1!(3-1)!}=4\times3=12$

គេបាន $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

ដូចនេះ: $P(C)=\frac{4}{7}$

$III.$ គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I=\int_0^2\left(-3x^2+x-2\right)dx=\left[-x^3+\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^2$

$=(-8+2-4)-0=-10$

ដូចនេះ: $I=\int_0^2\left(-3x^2+x-2\right)dx=-10$

ខ. $J=\int_1^2\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[2\ln|x|+\ln|x+1|\right]_1^2$

$=\left(2\ln2+\ln|2+1|\right)-\left(2\ln1-\ln|2|\right)$

$=2\ln2+\ln3+\ln2=3\ln2+\ln3=3\ln2+\ln3$

ដូចនេះ: $J=\int_1^2\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx=3\ln2+\ln3$

គ. $K=\int_1^2\left(\frac{x}{2}-x-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}\right]_1^2$

$=\left(1-2+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\right)=-\frac{5}{4}$

ដូចនេះ: $K=\int_1^2\left(\frac{x}{2}-x-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{5}{4}$

$IV.$ បង្ហាញថាសមីការ $4x^2+25y^2=100$ ជាសមីការអេលីប

គេបាន $\frac{4x^2}{100}+\frac{25y^2}{100}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

សមីការ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ ជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមាន ផ្ចិតនៅត្រង់គល់តម្រុយ O មានអ័ក្សធំជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ដូចនេះ: សមីការ $4x^2+25y^2=100$ ជាសមីការអេលីប

- រកប្រវែងអ័ក្សធំ អ័ក្សតូច កូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកូអរដោនេកំណុំទាំងពីរនៃអេលីបនេះ:

សមីការស្តង់ដានៃអេលីបមានរាង $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$

យើងទាញបាន $a^2=25\Rightarrow a=5$; $b^2=4\Rightarrow b=2$

$c^2=a^2-b^2=25-4=21\Rightarrow c=\sqrt{21}$

ដូចនេះអេលីប $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$មាន

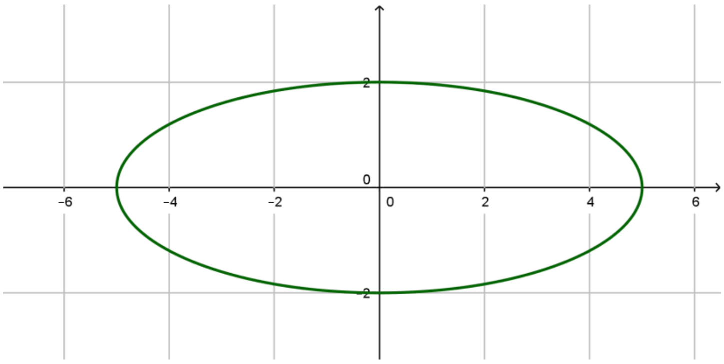
ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=2\times5=10$

ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=2\times 2=4$

កំពូល $V(\pm a,0)=V(\pm 5,0)$

កំណុំ $F(\pm c,0)=F\left(\pm\sqrt{21},0\right)$

- សង់អេលីប



V. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq -1$

ដូចនេះដែនកំណត់ $D\in\mathbb{R}-\{1\}$ ។

• បង្ហាញថា $f(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}=\dfrac{x(x+1)+4}{x+1}=x+\dfrac{1}{x+1}$

ដូចនេះ $f(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

2.សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ -1 និងត្រង់ $+\infty$

➢ លីមីតនិងអាស៊ីមតូត

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{4}{x+1}\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{4}{x+1}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left(x+\dfrac{4}{x+1}\right)=\pm\infty$

➢ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

3. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

យើងបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=0$ នោះ បន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

យក $C-d:\left[f(x)-x\right]=\dfrac{4}{x+1}$ មានសញ្ញាតាម $x+1$

➢ បើ $x+1=0\Rightarrow x=-1$ នោះក្រាប C កាត់បន្ទាត់ d

➢ បើ $x+1>0\Rightarrow x>-1$ នោះក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ d នៅពេលដែល $x>-1$

➢ បើ $x+1<0\Rightarrow x<-1$ នោះក្រាប C នៅក្រោមបន្ទាត់ d នៅពេលដែល $x<-1$

4. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

យើងមាន $f(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

$\Rightarrow f'(x)=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

ដោយ $(x+1)^2>0$ គ្រប់ $x\in D$

នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាតាម x^2+2x-3

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow x=1, x=-3$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

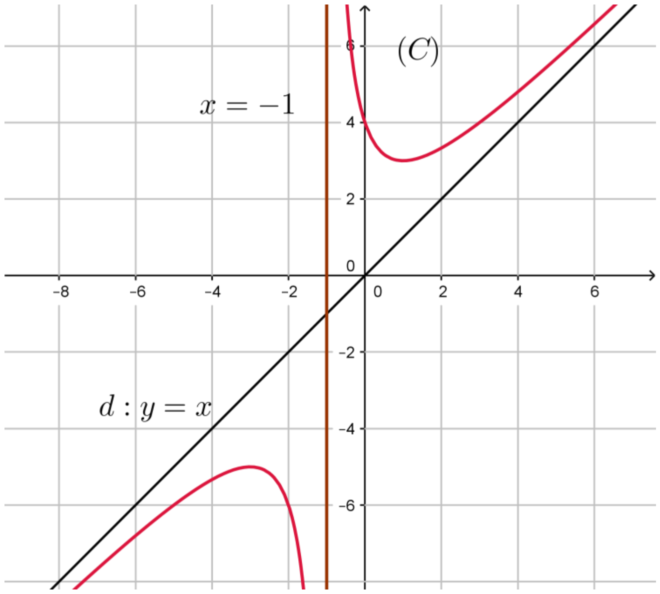
• ត្រង់ $x=-3$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាដែល $f(-3)=-5$

• ត្រង់ $x=1$, $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាដែល $f(1)=3$

សង់តារាងអថេរនៃ f

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

➢ សង់ក្រាប C



វិញ្ញាសាទី៤ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម)
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ

សម័យប្រឡង៖ ....
មណ្ឌលប្រឡង៖.. ....
លេខបន្ទប់...................**លេខតុ**.................. ....
ឈ្មោះបេក្ខជន... ....
ហត្ថលេខាបេក្ខជន.................................... ....

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}$ គ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-2\ln x\right)$

II. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ិចពណ៌ខៀវចំនួន៤ដើម និងប៊ិចពណ៌ក្រហមចំនួន៥ដើម។ គេចាប់យកប៊ិច៤ដើមក្នុងពេលតែមួយចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

$A.$ «គេចាប់បានប៊ិចទាំង៤សុទ្ធតែពណ៌ខៀវ » ។

$B.$ « គេចាប់បានប៊ិចទាំង៤សុទ្ធតែពណ៌ក្រហម »។

$C.$ « គេចាប់បានមានប៊ិចពីរពណ៌ក្រហម និងពីរទៀតពណ៌ខៀវ »។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int_0^3\left(9x^2+6x-5\right)dx$ ខ. $J=\int_0^1\dfrac{1}{x+1}dx$ គ. $K=\int_1^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) រកទម្រង់ស្តង់ដាសមីការអ៊ីពែបូលដែលមានកំណុំពីរ $(-5,0)$ និង $(5,0)$ និងមានកំពូលមួយ $(3,0)$។ រួចសង់អ៊ីពែបូលនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$ មានក្រាប C ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

2. a. រកលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់។

   b. ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និងឈរនៃក្រាប C ។

3. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

4. គណនា $f(-2), f(0), f(2)$ រួចសង់ក្រាប C ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាត្រៀមទី០៤ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

I. គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(2x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x-1}{x-2}=\dfrac{5}{4}$

ដូចនេះ. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4}=\dfrac{5}{4}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)-(3-x)}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}\right)}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ដូចនេះ៖ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

គ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-2\ln x\right)$ រាង $+\infty-\infty$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\left(1-\dfrac{2\ln x}{x^2}\right)=+\infty$

ដូចនេះ៖ $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2-2\ln x\right)=+\infty$

II. ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(9,4)=\dfrac{9!}{4!(9-4)!}=126$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. «គេចាប់បានប៊ិចទាំង៤សុទ្ធតែពណ៌ខៀវ »

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(4,4)=\dfrac{4!}{4!(4-4)!}=1$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{126}$

ដូចនេះ៖ $P(A)=\dfrac{1}{126}$

B. « គេចាប់បានប៊ិចទាំង៤សុទ្ធតែពណ៌ក្រហម »

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(5,4)=\dfrac{5!}{4!(5-4)!}=5$ ករណី

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{5}{126}$

ដូចនេះ៖ $P(B)=\dfrac{5}{126}$

C. « គេចាប់បានមានប៊ិចពីរពណ៌ក្រហមនិងពីរទៀតពណ៌ខៀវ »

ចំនួនករណីស្រប

$n(C)=C(5,2)\times C(4,2)=\dfrac{5!}{2!(5-2)!}\times\dfrac{4!}{2!(4-2)!}=60$ ករណី

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{60}{126}=\dfrac{10}{21}$

ដូចនេះ៖ $P(C)=\dfrac{10}{21}$

III. គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I=\int_0^3\left(9x^2+6x-5\right)dx$

$=\left[3x^3+3x^2-5x\right]_0^3=(3\times 27+27-15)-0=93$

ដូចនេះ៖ $I=\int_0^3\left(9x^2+6x-5\right)dx=93$

ខ. $J=\int_0^1\dfrac{1}{x+1}dx=\left[\ln|x+1|\right]_0^1$

$=\ln|1+1|-\ln|0+1|=\ln 2-\ln 1=\ln 2$

ដូចនេះ៖ $J=\int_0^1\dfrac{1}{x+1}dx=\ln 2$

គ. $K=\int_1^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\left[\dfrac{x^2}{4}-\ln|x|+\dfrac{1}{x}\right]_1^2$

$=\left(1-\ln 2+\dfrac{1}{2}\right)-\left(\dfrac{1}{4}-\ln 1+1\right)=\dfrac{1}{4}-\ln 2$

ដូចនេះ៖ $K=\int_1^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\dfrac{1}{4}-\ln 2$

VI. រកទម្រង់ស្តង់ដាសមីការអ៊ីពែបូល

ដោយអ៊ីពែបូលមានអរដោនេកំណុំ 0 ដូចគ្នា នោះអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស សមីការមានរាង $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

កូអរដោនេកំណុំ $F(\pm c,0)=(\pm c,0)\Rightarrow c=5$

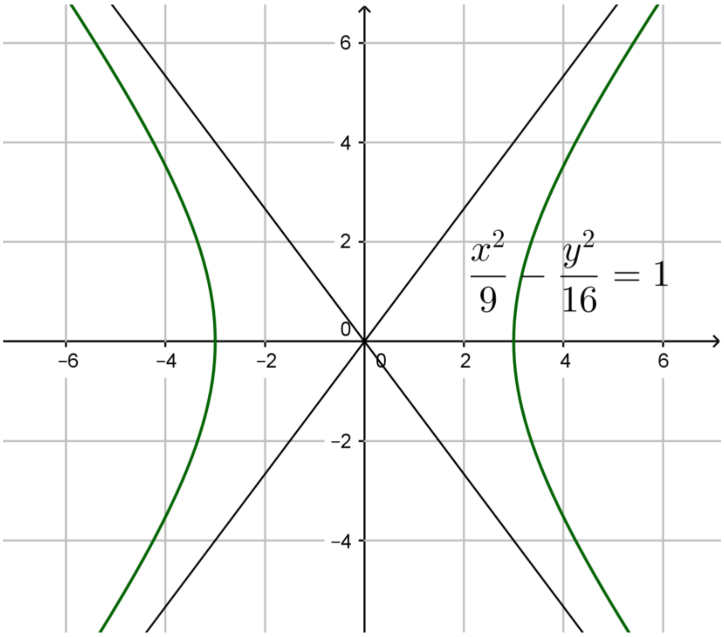
កូអរដោនេកំពូល $V_1(a,0)=(3,0)\Rightarrow a=3$

$c^2=a^2+b^2\Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

ដូចនេះ៖ សមីការស្តង់ដា $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$

សង់អ៊ីពែបូល

សមីការអាស៊ីមតូត $y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm\dfrac{4}{3}x$



V. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

f មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq\pm1$

ដូចនេះដែនកំណត់ $D\in(-\infty,-1)\cap(1,+\infty)$ ។

2. a. រកលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់។

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=1$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0}=\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}=\dfrac{3}{0}=\pm\infty$

b. ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក និងឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

និង $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\pm\infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

3. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(x^2+2x)'(x^2-1)-(x^2-1)'(x^2+2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{(2x+2)(x^2-1)-(2x)(x^2+2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2x^3-2x+2x^2-2-2x^3-4x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{-2x^2-2x-2}{(x^2-1)^2}=\frac{-2(x^2+x+1)}{(x^2-1)^2}<0\ \forall x\in D$$

ព្រោះ $x^2+x+1>0,(x^2-1)>0\quad\forall x\in D$

➢ សង់តារាងអថេរនៃ f

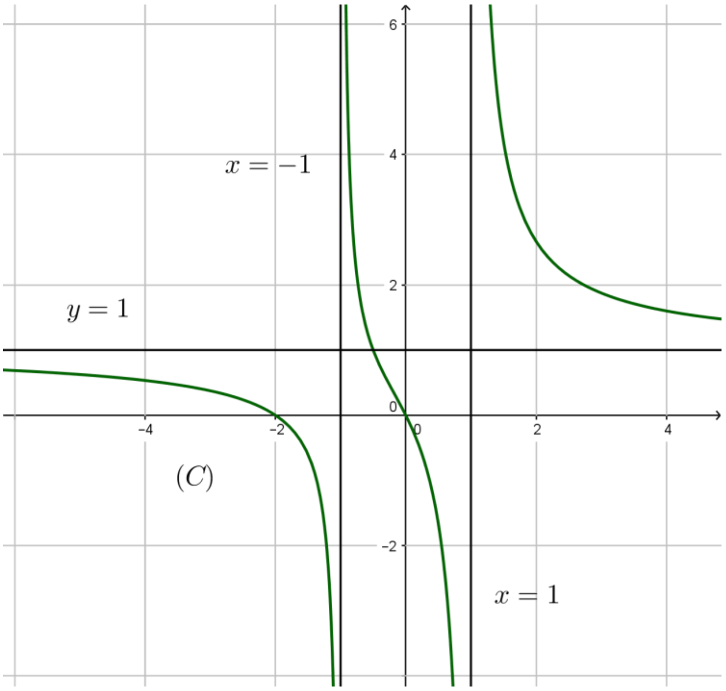
x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

4. គណនា $f(-2), f(0), f(2)$ រួចសង់ក្រាប C ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$

- $f(-2)=\dfrac{(-2)^2-2(-2)}{(-2)^2-1}=\dfrac{4+4}{4-1}=\dfrac{8}{3}$
- $f(0)=\dfrac{(0)^2-2(0)}{(-2)^2-1}=\dfrac{0}{0^2-1}=0$
- $f(2)=\dfrac{(2)^2-2(2)}{(2)^2-1}=\dfrac{4-4}{4-1}=\dfrac{0}{3}=0$

➢ សង់ក្រាប C



វិញ្ញាសាទី៥ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖** ....
វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម) **មណ្ឌលប្រឡង៖**..
រយៈពេល៖ ៩០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**...........................
ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**..
ហត្ថលេខាបេក្ខជន..

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x^2-5x+6}{-x^2+1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$ គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2-e^{2x}\right)$

II.(១០ពិន្ទុ) ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សពូកែចំនួន១០នាក់ ដែលក្នុងនោះមាន៤នាក់ជាសិស្សស្រីនិង៦នាក់ជាសិស្សប្រុស។ គេរៀបចំសិស្សជាក្រុម ក្នុងមួយក្រុមមានសិស្ស៤នាក់ដោយចៃដន្យ យកទៅប្រកួតជាមួយក្រុមសិស្សនៃថ្នាក់ដទៃ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:

A:ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី ។

B:ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស ។

C:ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបាន៥០%ជាសិស្សប្រុស ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int_0^2\left(-2x^2+3x+4\right)dx$ ខ. $J=\int_0^1\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+e}\right)dx$ គ. $K=\int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)dx$

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $4x^2-9y^2=-36$ ។

បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរនិងកំណុំទាំងពីរ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអ៊ីពែបូល រួចសង់អ៊ីពែបូល។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ ហើយមានក្រាប C ។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។ បង្ហាញថា $f(x)=x-1-\dfrac{1}{x-2}$ ។
2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។
3. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

   b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។
4. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាត្រៀមទី០៥ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម
ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

$I.$ គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x^2-5x+6}{-x^2+1}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(-x-6)}{-(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x-6}{-(x+1)}=\dfrac{7}{2}$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x^2-5x+6}{-x^2+1}=\dfrac{7}{2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}{(x+2)-(6-x)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}{2(x-2)}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to2}(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}=8$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2-e^{2x}\right)$ រាង $+\infty-\infty$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}\left(\dfrac{1}{e^{2x}}+\dfrac{x^2}{e^{2x}}-1\right)=-\infty$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2-e^{2x}\right)=-\infty$

$II.$ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10,4)=\dfrac{10!}{34(10-4)!}=210$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែស្រី

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(4,4)=\dfrac{4!}{4!(4-4)!}=1$ ករណី

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{210}$

ដូចនេះ: $P(A)=\dfrac{1}{210}$

B: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបានសុទ្ធតែប្រុស

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(6,4)=\dfrac{6!}{4!(6-4)!}=15$ ករណី

គេបាន $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{15}{210}$

ដូចនេះ: $P(B)=\dfrac{15}{210}$

C: ក្រុមសិស្សដែលជ្រើសរើសបាន៥០%ជាសិស្សប្រុស

ចំនួនករណីស្រប

$n(C)=C(6,2)\times C(4,2)=\dfrac{6!}{2!(6-2)!}\times\dfrac{4!}{2!(4-2)!}=90$ ករណី

គេបាន $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{90}{210}$

ដូចនេះ: $P(C)=\dfrac{90}{210}$

$III.$ គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I=\int_0^2\left(-2x^2+3x+4\right)dx=\left[-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+4x\right]_0^2$

$=\left(-\dfrac{16}{3}+\dfrac{12}{2}+8\right)-0=-\dfrac{16}{3}+6+8=\dfrac{26}{3}$

ដូចនេះ: $I=\int_0^2\left(-2x^2+3x+4\right)dx=\dfrac{26}{3}$

ខ. $J=\int_0^1\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+e}\right)dx=\left[\ln|x+1|-\ln|x+e|\right]_0^1$

$=\left(\ln2-\ln|1+e|\right)-\left(\ln1-\ln|0+e|\right)$

$=\ln2-\ln|1+e|-\ln1+\ln e=\ln2-\ln(1+e)+1$

ដូចនេះ: $J=\int_0^1\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+e}\right)dx=\ln2-\ln(1+e)+1$

គ. $K=\int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)dx=\left[\dfrac{x^2}{2}-\ln|x|+\dfrac{2}{x}\right]_1^2$

$=\left(\dfrac{2^2}{2}-\ln2+1\right)-\left(\dfrac{1^2}{2}-\ln1+\dfrac{2}{1}\right)=3-\ln2-\dfrac{1}{2}-2$

$=\dfrac{1}{2}-\ln2$

ដូចនេះ: $K=\int_1^2\left(x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)dx=\dfrac{1}{2}-\ln2$

$VI.$ គេមានសមីការ $4x^2-9y^2=-36$

- បង្ហាញថាសមីការ $4x^2-9y^2=-36$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល និងរកគកូអរដោនេកំពូលទាំងពីរ និងកុំណុំទាំងពីរ

  គេបាន $\dfrac{4x^2}{-36}+\dfrac{9y^2}{36}=\dfrac{-36}{-36}\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{-9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

  $\Leftrightarrow\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=1$ សមីការមានរាង $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ ជាសមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែល មានផ្ចិត $(0,0)$ និងអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សឈរ។

- រក កូអរដោនេនៃកំពូល កុំណុំទាំងពីរ

  យើងមាន $a=2$, $b=3$

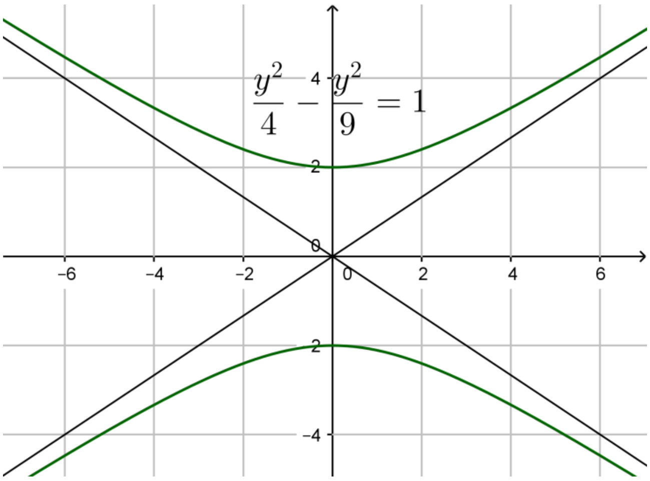
និង $c^2=a^2+b^2=2^2+3^2=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$

- កូអរដោនេកំពូល $V(0,\pm a)\Rightarrow V(0,\pm 2)$
- កូអរដោនេកំណុំ $F(0,\pm c)\Rightarrow F\left(0,\pm\sqrt{13}\right)$

➢ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃអ៊ីពែបូល

$$y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{2}{3}x$$

រួចសង់អ៊ីពែបូល



V. គេមានអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

f មានន័យលុះត្រាតែ $x\neq 2$

ដូចនេះដែនកំណត់ $D\in\mathbb{R}-\{2\}$ ។

- បង្ហាញថា $f(x)=x-1-\dfrac{1}{x-2}$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$

$$=\frac{x^2-2x-x+2-1}{x-2}=\frac{x(x-2)-(x-2)}{x-2}-\frac{1}{x-2}$$

$$=\frac{x(x-2)}{x-2}-\frac{x-2}{x-2}-\frac{1}{x-2}=x-1-\frac{1}{x-2}$$

ដូចនេះ: $f(x)=x-1-\dfrac{1}{x-2}$

2.សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 2 និងត្រង់ $+\infty$

➢ លីមីតនិងអាស៊ីមតូត

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1-\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1-\dfrac{1}{x-2}\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\left(x-1-\dfrac{1}{x-2}\right)=\pm\infty$

➢ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\infty$ នោះបន្ទាត់ ដែលមានសមីការ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C)

3. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

យើងមាន $f(x)=x-1-\dfrac{1}{x-2}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\dfrac{1}{x-2}\right)=0$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=x-2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

យក $C-d:\left[f(x)-(x-1)\right]=-\dfrac{1}{x-2}$

មានសញ្ញាសាតាម $x-2$

➢ បើ $x-2=0\Rightarrow x=2$ នោះក្រាប C កាត់បន្ទាត់ d

➢ បើ $x-2>0\Rightarrow x>2$ នោះក្រាប C នៅលើបន្ទាត់ d

➢ បើ $x-2<0\Rightarrow x<2$ នោះក្រាប C នៅក្រោមបន្ទាត់ d

ឃ.សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប C នៃ f

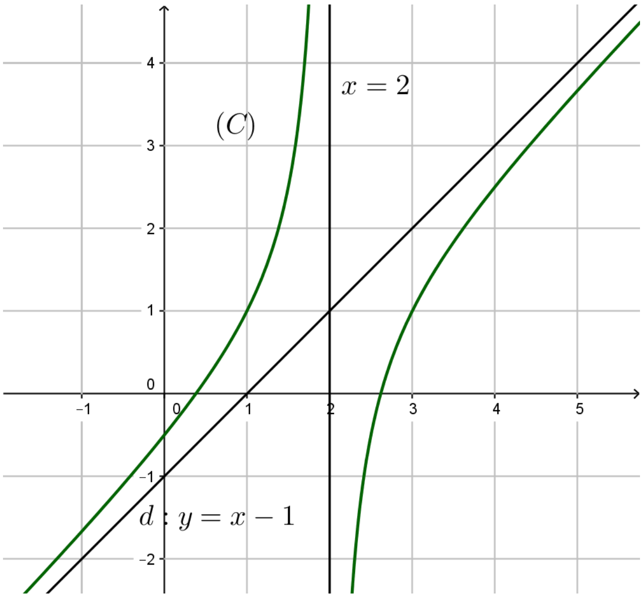
យើងមាន $f(x)=x-1-\dfrac{1}{x-2}$

$$\Rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{(x-2)^2}>0,\forall x\in D$$

សង់តារាងអថេរនៃ f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

➢ សង់ក្រាប C



វិញ្ញាសាទី៦ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ **សម័យប្រឡង៖** ....

វិញ្ញាសា៖ គណិតវិទ្យា (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម) **មណ្ឌលប្រឡង៖**...

រយៈពេល៖ ៩០ នាទី **លេខបន្ទប់**..................**លេខតុ**...........................

ពិន្ទុសរុប៖ ៧៥ ពិន្ទុ **ឈ្មោះបេក្ខជន**..

ហត្ថលេខាបេក្ខជន..

ប្រធានវិញ្ញាសា

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-4x-5}$ ខ. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ គ. $\lim_{x\to0}\left(1-x^2-e^{2x}\right)$

II.(១០ពិន្ទុ) នៅក្នុងថង់មួយមានឃ្លីស១ ក្រហម៣ និងឃ្លីខៀវ៥។ គេចាប់យកឃ្លីចំនួន៣ ដោយចៃដន្យក្នុងពេលតែមួយ។ រកប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A. "ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងបី"។

B. "ចាប់បានឃ្លីសមួយ និងខៀវពីរ"។

C. "ចាប់បានឃ្លីបីមានពណ៌ខុសគ្នា"។

III. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $I=\int_1^2\left(2x^3+3x^2-x\right)dx$ ខ. $J=\int_0^1\left(1+x-e^x\right)dx$ គ. $K=\int_1^2\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

IV. (១០ពិន្ទុ រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំពូលទាំងពីរជាចំណុច $(0,5)$ និង $(0,-5)$ និងមានកំណុំមួយនៅត្រង់ចំណុច $(0,2)$ រួចសង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ ហើយមានក្រាប C។

1. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។
2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; ត្រង់ 0 និងត្រង់ $+\infty$ ។ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។
3. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

   b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d ។
4. សិក្សាអថេរភាព និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។
5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d ។

អត្រាកំណែវិញ្ញាសាត្រៀមទី៦ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

$I.$ គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-4x-5}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x+1)}=\lim_{x\to5}\frac{x+5}{x+1}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-4x-5}=\frac{5}{3}}$

ខ. $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1})}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(3-x)-(x+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1})}$

$=\lim_{x\to1}\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1})}$

$=\frac{-2}{(1+1)(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}}{x^2-1}=-\frac{\sqrt{2}}{4}}$

គ. $\lim_{x\to0}\left(1-x^2-e^{2x}\right)=1-0^2-e^{2\cdot0}=0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\left(1-x^2-e^{2x}\right)=0}$

$II.$ ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(9,3)=\frac{9!}{6!3!}$

$=\frac{9\times8\times7\times6!}{6!\times3\times2\times1}=84$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

$A.$ "ចាប់បានឃ្លីខៀវទាំងបី"

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(5,3)=\frac{5!}{2!3!}=10$ ករណី

គេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{5}{42}}$ ។

$B.$ "ចាប់បានឃ្លីសមួយ និងខៀវពីរ"

ចំនួនករណីស្រប $n(B)=C(1,1)\times C(5,2)=10$ ករណី

គេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{5}{42}}$ ។

$C.$ "ចាប់បានឃ្លីបីមានពណ៌ខុសគ្នា"

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(1,1)\times C(3,1)\times C(5,1)$

$=1\times3\times5=10$ ករណី

គេបាន $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{15}{84}=\frac{5}{27}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{5}{27}}$ ។

$III.$ គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I=\int_1^2\left(2x^3+3x^2-x\right)dx=\left[2\cdot\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$=\left[\frac{x^4}{2}+x^3-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$=\left(\frac{2^4}{2}+2^3-\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{1^3}{2}+1^3-\frac{1^2}{2}\right)$

$=(8+8-2)-1=13$

ខ. $J=\int_0^1\left(1+x-e^x\right)dx=\left[x+\frac{x^2}{2}-e^x\right]_0^1$

$=\left(1+\frac{1}{2}-e^1\right)-\left(0+\frac{0}{2}-e^0\right)=\frac{5}{2}-e$

គ. $K=\int_1^2\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln|x+2|+\frac{1}{x}\right]_1^2$

$=\left(\ln|4|+\frac{1}{2}\right)-\left(\ln|3|+1\right)=-\frac{1}{2}+\ln\frac{4}{3}$

$IV.$ ក. រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប

ដោយកំពូលទាំងពីរមានអាប់ស៊ីស 0 ដូចគ្នា នោះអេលីបមានផ្ចិត $I(0,0)$ ហើយអ័ក្សធំស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ

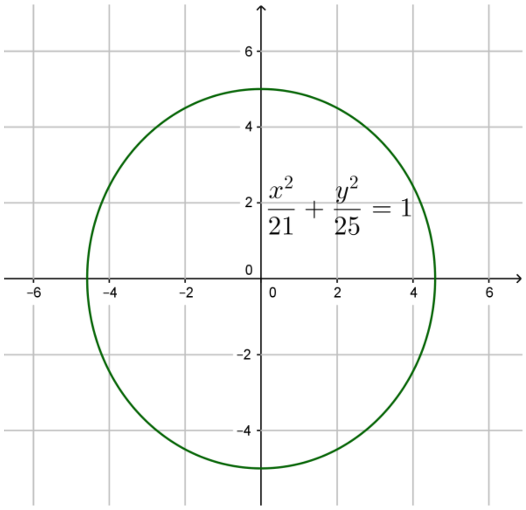
សមីការមានរាង $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

- កំពូល $V(0,\pm a)=(0,\pm5)$ នោះ $a=5$
- កំណុំ $F(0,c)=(0,2)$ នោះ $c=2$
- $c^2=a^2-b^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=5^2-2^2=21$

$$\Rightarrow b=\sqrt{21}$$

ដូចនេះ | សមីការស្តង់ដានៃអេលីបគឺ $\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{25}=1$ |

ខ សង់អេលីប



$V.$ គេមានអនុគមន៍ f ដោយ $C:\ f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

1. រកដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x\neq 0$

ដូចនេះ $\boxed{D=\mathbb{R}-\{0\}}$

2. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $-\infty$; 2 និង $+\infty$

យើងមាន $f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\infty$

➢ ទាញរកអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប

3. a. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d:y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d

យក $C-d:\ f(x)-y=\frac{1}{x}$ មានសញ្ញាដូច x

ឲ្យ $x=0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)-y_d$	$-$ ‖ $+$

- បើ $x\in(-\infty,0)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ d
- បើ $x\in(0,+\infty)$ នោះក្រាប C ស្ថិតនៅខាងលើបន្ទាត់ d

4. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

យើងមាន $f(x)=x+\frac{1}{x}$

នាំឲ្យ $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

ដោយគ្រប់ $x\in D$, $x^2>0$

អនុគមន៍ f មានសញ្ញាតាម x^2-1

ឲ្យ $x^2-1=0$

មានឫស $x_1=1$, $x_2=-1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

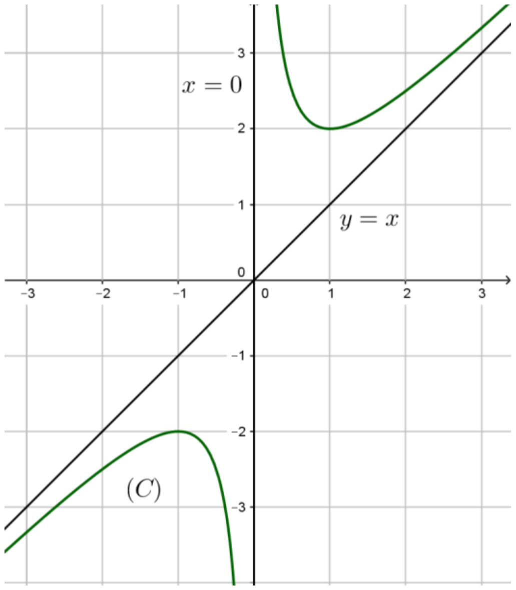
- ត្រង់ $x=1$ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាដែល $f(-1)=-2$

- ត្រង់ $x=3$ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

នោះ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាដែល $f(1)=2$

➢ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

5. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ d